

Alisher Navoiy nomidagi
Samarqand Davlat Universiteti
Mexanika-Matematika fakulteti
“Differensial tenglamalar” kafedrası

**Mavzu: Uch o'lchovli fazoda elliptik sistema uchun
qo'yilgan Koshi masalasini yechish**

Magistrlik dissertatsiya

Ilmiy rahbar: katta o'qituvchi. Z.MALIKOV
Magistrant: D. Beknazarova

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I BOB. Garmonik funksiyalarning xossalari.....	
1.1-§Laplas tenglamasining fundamental yechimlari.....	13
1.2-§Grin formulalari.....	16
1.3-§ Garmonik funksiyalar uchun integral formula.....	18
1.4-§O'rta qiymat haqidagi teorema.....	22
II BOB.Birinchi tartibl ielliptik tipli tenglamalar sistema uchun integral formula.....	
2.1-§Matrisalar sinfi.....	26
2.1-§Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun integral formula.....	29
2.3-§Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun misollar.....	32
2.4-§Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun Morere teoremasi.....;	39
III BOB.Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun uch o'lchovli fazoda Koshi masalasi.....	
3.1-§ Chegaralangan soha uchun birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi	41
3.2-§Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi.....	43
3.3-§Chegaralangan sohada birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun integral formula.....	46
3.4-§Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun Koshi masalasini regulyarizasiyasi.....	50
Xulosa.....	56
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	57

Kirish.

Bu magistirlilik dissertasiyada uch o'lchovli fazoda elliptik sistema uchun Koshi masalasining yechimi soha chegarasining bir qismidan foydalanib sohaning ichida topish masalasi keltirilgan.

1.Dissertasiyaning maqsadi va vazifasi.

Ma'lumki birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun uch o'lchovli fazoda Koshi masalasi korrekt bo'lmagan masala hisoblanadi. Bu masalaning shartli korrekt masalaga keltirish ishning asosiy maqsadi hisoblanadi. Bu masalaning yechimini regulyarizasiyasini tuzish dissertasiyaning asosiy vazifasi hisoblanadi.

2.Masalaning dolzarbligi.

Elliptik tipli tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasi integral tenglamaga keltiriladi. Lekin integral tenglamani doim yechib bo'lmaydi. Qaralayotgan sohada Koshi masalasini integral tenglamaga keltirganda uni Karleman matrisasi orqali yechish qaralayotgan masalaning dolzarbligini ifodalaydi.

3.Muammoning ishlab chiqarish darajasi.

Bu ishda uch o'lchovli fazoda birinchi tartibli elliptik sistema uchun Koshi masalasini yechish uchun uni integral formulaga keltirish lozim. Integral formulaning chegarasining bir qismida qiymati ma'lum bo'lsa, ikkinchi qismida integralning qiymati noma'lum bo'lganligi uchun bu qismni nolga intiltiradigan Karleman funksiyasi deb ataluvchi funksiyani tuzish lozim. Bundan foydalanib regulyarizasiyalanuvchi yechimlar oilasi tuziladi.

4.Tadqiqotning ilmiy yangiligi.

Karleman funksiyasi Koshi masalasini yechishda asosiy rol o'ynaydi. Agar qaralayotgan sistema uchun Koshi masalasini Karleman matrisasi tuzilsa , u holda yechim oshkor ravishda ifodalanadi. Lekin Koshi masalasining berilganlari sohaning chegarasida taqribiy berilsa , u holda Karleman matrisasi orqali regularizasiyalangan yechimi topiladi.

5.Tadqiqot predmeti.

Birinchi tartibli koeffitsiyentlari o'zgarmas bo'lgan elliptik tipli tenglamalar uchun uch o'lchovli fazoda Koshi masalasining regularizatsiyasi tadqiqotning asosiy predmetini ifodalaydi.

6.Tadqiqotning obyekti.

Laplas tenglamasi bilan faktorizasiyalanuvchi elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi tadqiqot obyekti asosiy qismi hisoblanadi.

7.Ilmiy-amaliy ahamiyati.

Chegaralangan sohada Koshi masalasi elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun turg'un bo'lmagan masalalar hisoblanadi. Bu masalaning taqribiy yechimini topish amaliy ahamiyatga egadir. Agar qaralayotgan soha yarim doira shaklida bo'lsa bunday hollarda yechimni taqribiy ham hisoblash mumkin.

8.Ishning tuzilishi.

Magistirlilik dissertatsiyasi uchta bob va o'n ikkita paragraf, xulosa, adabiyotlar ro'yxatidan iborat iborat.

Birinchi bobda garmonik funksiyalarning xossalari keltirilgan.

Birinchi paragrafda Laplas tenglamasining fundamental yechimlari keltirilgan.

Elliptik tipdagi tenglamalardan eng soddasi va muhimi Laplas

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (0.1.1)$$

va Puassson

$$\Delta u = f(x) \quad (0.1.2)$$

tenglamalaridir.

E^n fazodagi ikki $x = (x_1, \dots, x_n), (\xi_1, \dots, \xi_n)$ nuqta orasidagi masofani r orqali belgilab olamiz, yani $r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}$. Bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, ushbu

$$E(x, \xi) = \begin{cases} r^{2-n}, & n > 2 \\ \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases} \quad (0.1.3)$$

funksiya $x \neq \xi$ bo'lganda x bo'yicha ham, ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

(0.1.1) formula bilan aniqlangan $E(x, \xi)$ funksiyani Laplas tenglamasining elementar yoki fundamental yechimi deyiladi.

Ikkinchi paragrafda Grin formulalari keltirilgan.

D —bo'laklari silliq S sirt bilan chegaralangan E^n fazodagi soha bo'lib, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $C^2(D) \cap C^1(D)$ sinfga tegishli bo'lsin.

D soha bo'yicha quyidagi

$$v\Delta u = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right],$$

$$v\Delta u - u\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

ayniyatlarni integrallab va Gauss-Ostragradskiy formulasini qo'llab,

$$\int_D v \Delta u dx = - \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (0.2.1)$$

$$\int_D (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds, \quad (0.2.2)$$

formulalarni hosil qilamiz, bunda $n - S$ ga o'tkazilgan tashqi normal (0.2.1) ni Grinnning birinchi, (0.2.2) ni esa ikkinchi formulasi deb yuritiladi.

Uchinchi paragrafda garmonik funksiyalar uchun integral formula keltirilgan.

$$\begin{aligned} \int_{D^\varepsilon} \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} dS &= \int_S \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi S + \\ &+ \int_{S_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} - (n-2)u(x + \theta \varepsilon) \right] dS_1 \end{aligned} \quad (0.3.1)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right) d_\xi S - \\ &\frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_D \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} d\xi \end{aligned} \quad (0.3.2)$$

(0.3.1), (0.3.2) formulalarda $\Delta u = 0$ bo'ladi, natijada garmonik funksiyalarning quyidagi integral ifodasiga ega bo'lamiz:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|s_1|} \int_S \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi S, n > 2, \quad (0.3.4)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] d_\xi S, n = 2 \quad (0.3.5)$$

0.3.1-Teorema. Biror sohada garmonik bo'lgan $u(x)$ funksiya shu sohada barcha tartibli hosilalarga ega bo'ladi.

To'rtinchi paragrafda o'rta qiymat haqidagi teorema keltirilgan.

0.4.1-Teorema. $u(x)$ funksiya biror sharda garmonik bo'lib, sharning chegarasida uzluksiz bo'lsin. U holda, $u(x)$ funksiyaning shar markazidagi qiymati sharni chegaralab turuvchi sferadagi qiymatlarining o'rta arifmetigiga teng.

Chekli D sohada o'zgarmas sonidan farqli bo'lgan $u(x)$ garmonik funksiya D sohaning ichki nuqtalarida maksimum va minimumga erisha olmaydi.

Ikkinchi bobda birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun integral formula keltirilgan.

Birinchi paragrafda matrisalar sinfi keltirilgan.

$$A_{k \times l} p(x), x),$$

Agar $R^n - n$ o'lchovli

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$C^n - n -$ o'lchovli.

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ o'zgaruvchilar kompleks fazosi;}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{array} \right\|, \partial x = \left\| \begin{array}{c} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{array} \right\| \text{ va } E(x) = \left\| \begin{array}{c} x_1 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots x_n \end{array} \right\|$$

Agar $I = (i_1 \dots i_q)$, $0 \leq q \leq n$ - multindeks, u holda

$$dx_I = \bigwedge_{m=1}^q dx_{i_m}$$

$$dx[J] = \bigwedge_{i=1}^n dx_i \quad ; \quad i \notin J$$

$$dx = \bigwedge_{i=1}^n dx_i \quad ;$$

Ikkinchi paragrafda birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun integral formula keltirilgan.

Xususiylar hosilalardagi birinchi tartibli

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x) = 0 \quad (0.2.1)$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz, uning xarakteristik matrisasi

$$D(x) \in A_{k \times l}(p(x), x) \quad (0.2.2)$$

$$f(x) = \left\| \begin{array}{c} f_1(x) \\ \dots \\ f_l(x) \end{array} \right\| \quad (0.2.3)$$

esa kompleks qiymatli umumiy holda vektor funksiya .

0.2.1-teorema. $G \in R^n$ - silliq bo'lakli chegarali chegaralangan soha va
 (2.2.5) $f(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ vektor funksiya (2.2.2) shartda (2.2.1) sistemaning yechimi bo'lsin , u holda

$$M(y-x)f(y) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin \bar{G}. \end{cases} \quad (0.2.10)$$

(2.2.7) formuladan va [3] natijadan xususan, (2.2.1) sistemaning $C^1(G)$ sinfdagi yechimi (2.2.2) shart bajarilganda haqiqatdan, G sohada analitik funksiyalar bo'ladi. Bundan va (2.2.7) misoldan ko'rinadiki, (2.2.1) sistemaga (2.2.2) shartning qo'yilishi bu sistema elliptik bo'lishiga teng kuchli.

Uchinchi paragrafda birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun misollar keltirilgan.

To'rtinchi paragrafda birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Morere teoremasi keltirilgan.

Agar :

- 1) $(l \times l)$ –vektor $f(x)$ funksiya $G \in R^n$ sohada uzluksiz;
- 2) $D(x) \in A_{k \times l}(p(x), x)$ –matrisa;
- 3) ixtiyoriy yopiq bo'lakli silliq σ bilan chegaralangan chekli sohasi bilan kiruvchi S sirt uchun

$$\int_{\sigma} (* D(\partial y)) f(y) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ (2.1) sistemaning har bir $x \in G$ nuqtada yechimi bo'ladi.

Uchinchi bob asosiy bob hisoblanib,

birinchi paragrafda chegaralangan soha uchun birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi keltirilgan.

G sohada quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz. Faraz qilaylik $A_{l \times n}(x)$ shunday $D(x)$ matrisalar oilasidan iborat bo'lsin, matrisaning har bir

elementi chiziqli formadan iborat bo'lib, koeffitsienlari $\mathbb{C}$ – sonlar maydoni l ni R – haqiqiy sonlar maydonidan olingan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$D^*(x)D(x) = E(|x|^2 u^0) \quad (0.1.1)$$

Bu yerda $D^*(x)D(x)$ ga nisbatan ermitli qo'shma bo'lgan matrisadan iboratdir.

$D^*(x)$ matrisa $D(x)$ ga ermitli qo'shma matrisa deyiladi, agar $a_{ij}(x)$ ni $\bar{a}_{ji}(x)$ ga almashtirish mumkin bo'lsa.

$$D(x) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \dots)$$

$$\bar{D} = (\bar{\alpha}_1 x_1 + \bar{\alpha}_2 x_2 + \bar{\alpha}_3 x_3 \dots)$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0 \quad (0.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$$

(3.1.2) sistemaning xarakteristik matrisasi $D(x)$ (3.1.1) shartni qanoatlantirsin, u holda (3.1.2) sistema elliptik tipli sistema bo'ladi va bunday sistemalar Laplas operatori bilan faktorizasiyalanuvchi differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ikkinchi paragrafda birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi keltirilgan.

Faraz qilaylik $K(G)$ shunday $u(y)$ vektorlar sinfidan iborat bo'lsin,

1) $u(y)$ vektor funksiya G soha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lib,

(0.1.2) sistemani qanoatlantirsin.

2) $u(y)$ vektor funksiya G sohada uzluksiz bo'lsin.

Agar $u(y) \in K(G)$ va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$u(x)|_S = f(y) \quad (0.2.1)$$

$f(y)$ – vektor funksiya berilgan uzluksiz vektor funksiya iborat. (0.1.1), (0.1.2) masalaga birinchi tartibli elliptik sistema uchun Koshi masalasi deyiladi.

Uchinchi paragrafda chegaralangan sohada birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun integral formula keltirilgan.

Faraz qilaylik $u(x) \in C'(D)$ bo'lib (3.1.2) sistemani qanoatlantirsin va D sohaning chegarasigacha uzluksiz vektor funksiyalardan iborat bo'lsin, u holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$u(x) = \int_{\partial D} M(x, y) u(y) dy, \quad x \in G,$$

bu yerda

$$M(x, y) = \frac{1}{4\pi} D^*(t_1, t_2, t_3) D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{1}{r}$$

(t_1, t_2, t_3) – haqiqiy birlik normalning koordinatalaridan iboratdir.

To'rtinchi paragrafda Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun Koshi masalasini regularizasiyasi keltirilgan.

0.4.1- Teorema: Agar $u(y) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$ sinfdan olingan vektor funksiya bo'lib, (1) sistemani qanoatlantirsin va $|u(y)| \leq 1, y \in S$ shart bajarilsin, u holda

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq C(x) \sigma \exp(-\sigma x_3^2) \quad (0.4.4)$$

tengsizlik o'rinlidir.

0.4.2- Teorema: Faraz qilaylik $(x) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$, $u(y)$ vektor funksiya chegaralangan bo'lib, quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa,

$$u_{\sigma\delta}(x) = \int_S M(x, y) f_\delta(y) dS, x \in G$$

u holda,

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C(x) \frac{1}{\bar{x}_3^0} \ln \frac{1}{\delta} \delta^{x_3^0}, \quad \bar{x}_3^0 = \max_S x_3 \quad \text{tengsizlik}$$

o'rinli bo'ladi.

Natija: Quyidagi yaqinlashish $\lim u_{\sigma\delta}(x) = u(x), \quad x \in G$ sohaning har bir kompakt qismida tekis bajariladi.

I.BOB.

Garmonik funksiyalarning xossalari.

1.1-§ Laplas tenglamasining fundamental yechimlari.

Elliptik tipdagi tenglamalardan eng soddasi va muhimi Laplas

$$\Delta u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.1.1)$$

va Puassson

$$\Delta u = f(x) \quad (1.1.2)$$

tenglamalaridir.

E^n fazoda biror yopiq S sirt bilan chegaralangan chekli yoki cheksiz D sohani qaraymiz.

Agar $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ funksiya chekli D sohada ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, Laplas tenglamasini qanoatlantirsa, $u(x)$ ni D sohada garmonik funksiya deyiladi.

Agar $u(x)$ funksiya fazo chekli nuqtasining etarli kichik atrofida, ya'ni markazi shu nuqtada bo'lgan etarli kichik radiusli sharda garmonik bo'lsa, u shu nuqtada garmonik deb ataladi. Agar $u(x)$ funksiya cheksiz D sohaning koordinata boshidan chekli masofada yotgan ixtiyoriy x nuqtasida garmonik bo'lib, yetarli kattta $|x|$ lar uchun $(|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$

$$|u(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-2}}, c - const$$

tengsizlik bajarilsa, $u(x)$ funksiya cheksiz D sohada garmonik deyiladi.

E^n fazodagi ikki $x = (x_1, \dots, x_n), (\xi_1, \dots, \xi_n)$ nuqta orasidagi masofani r orqali belgilab olamiz, yani $r = |x - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}$. Bevosita tekshirish bilan ishonch hosil qilish mumkinki, ushbu

$$E(x, \xi) = \begin{cases} r^{2-n}, & n > 2 \\ \ln \frac{1}{r}, & n = 2 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

funksiya $x \neq \xi$ bo'lganda x bo'yicha ham, ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi. Haqiqatan,

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = (2-n)r^{1-n} \frac{\partial r}{\partial x_i} = (2-n)r^{1-n} \frac{x_i - \xi_i}{r} = (2-n)r^{-n}(x_i - \xi_i),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^2} = (2-n)r^{-n} - (2-n)nr^{-n-2}(x_i - \xi_i),$$

Oxirgi ifodani (1.1.1) tenglamaning chap tomoniga olib borib qo'yamiz. U holda,

$$\Delta E = n(2-n)r^{-n} - n(2-n)r^{-n-2} \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 = 0$$

xuddi shunga o'xshash $n = 2$ hol tekshirib ko'riladi.

$E(x, \xi)$ funksiyax va ξ ga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun bu funksiya $x \neq \xi$ da ξ bo'yicha ham Laplas tenglamasini qanoatlantiradi deb aytishimiz mumkin.

(1.1.1) formula bilan aniqlangan $E(x, \xi)$ funksiyani Laplas tenglamasining elementar yoki fundamental yechimi deyiladi. Cheksizlikda,

$$E(x, \xi) = 0 \left(\frac{1}{x^{n-2}} \right) \text{ baho o'rinli bo'ladi. Haqiqatan ham, } E(x, \xi)$$

funksiyaning etarli katta $|x|$ lardagi qiymati qiziqtirayotgani uchun $|x| > 2|\xi|$

deb olishimiz mumkin. U holda $r = |x - \xi| \geq |x| - |\xi|$ tengsizlikka asosan, $|\xi| < \frac{|x|}{2}$ bo'lgani uchun $|r| < \frac{|x|}{2}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bundan darhol $E(x, \xi) < \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}}$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Ma'lum qilamizki, qiymatlari ikki nuqta o'rtasidagi masofa r ga bog'liq bo'lgan Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi $u(r)$ funksiyalar orasida $C_1 E(x, \xi) + C_2$ ko'rinishdagi funksiyalardan boshqa funksiya mavjud emas, bunda C_1, C_2 — o'zgarmas sonlar.

Faraz qilaylik, shunday funksiya mavjud bo'lsin, ya'ni $u(x) = \lambda(r)$. Bu funksiyada x_i o'zgaruvchi bo'yicha hosilalarni hisoblaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - \xi_i}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} \frac{d^2 \lambda}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \left[1 - \frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^2} \right].$$

Bu hosilalarni (1.1.1) tenglamaga qo'ysak, Laplas tenglamasi o'rniga

$\lambda'' + \frac{n-1}{r} \lambda' = 0$ oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimi $C_1 E(x, \xi) + C_2$ dan iboratdir.

1.2-§ Grin formulalari.

D –bo'laklari silliq S sirt bilan chegaralangan E^n fazodagi soha bo'lib, $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $C^2(D) \cap C^1(D)$ sinfga tegishli bo'lsin.

D soha bo'yicha quyidagi

$$v\Delta u = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right],$$

$$v\Delta u - u\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

ayniyatlarni integrallab va Gauss-Ostragradskiy formulasini qo'llab,

$$\int_D v\Delta u dx = - \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds, \quad (1.2.1)$$

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds, \quad (1.2.2)$$

formulalarni hosil qilamiz, bunda $n - S$ ga o'tkazilgan tashqi normal (1.2.1) ni Grinnning birinchi, (1.2.2) ni esa ikkinchi formulasi deb yuritiladi. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar D da garmonik bo'lsa, u holda (1.2.1) va (1.2.2) formulalar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\int_S v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad (1.2.3)$$

$$\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (1.2.4)$$

(1.2.3) va (1.2.4) formulalarga asosan garmonik funksiyalarning qator sodda xossalari kelib chiqadi:

1-xossa:

Agar D sohada garmonik bo'lgan $u(x)$ funksiya $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lib, D sohaning chegarasi S da nolga teng bo'lsa, u holda barcha $x \in D \cup S$ lar uchun $u(x) = 0$ bo'ladi (garmonik funksiyaning yagonalik xossasi).

Agar (1.2.3) tenglikda $u(x)$ va $v(x)$ desak, unda bu xossa darrov kelib chiqadi. Haqiqatan, $y \in S$ da $u(y) = 0$ bo'lgani uchun (1.2.3) dan

$$\sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \int_S u(y) \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (1.2.5)$$

yoki

$$\sum_{i=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = 0$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, n, x \in D$, yani barcha $x \in D$ lar uchun

$u(x) = \text{const}$. Bundan $y \in S, u(y) = 0$ bo'lganligi sababli, yopiq $D \cup S$ sohada $u(x)$ ning uzluksizligidan barcha $x \in D \cup S$ lar uchun $u(x) = 0$.

2- xossa:

Agar D sohada garmonik, $D \cup S$ da birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal hosilasi D ning chegarasi S da nolga teng bo'lsa, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun $u = \text{const}$ bo'ladi.

Bu xossa barcha $y \in S$ lar uchun $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ bo'lgani sababli, (1.2.5) tenglikdan darhol kelib chiqadi.

3-xossa:

D sohada garmonik, $D \cup S$ da o'zining birinchi tartibli hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan $u(x)$ funksiyaning $\frac{\partial u}{\partial n}$ normal hosilasidan S bo'yicha olingan integral nolga teng. Haqiqatan, (1.2.3) formulada $v(x) = 1$, $x \in D$ desak,

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

hosil bo'ladi.

1.3-§ Garmonik funksiyalar uchun integral formula.

C^2 sinf funksiyalarining va garmonik funksiyalarning integral ifodasi. 2-bandda kiritilgan D sohaning o'zgaruvchi nuqtasini ξ orqali belgilab olamiz. $u(\xi)$ funksiya $C^2(D) \cap C^1(D)$ sinfga tegishli bo'lsin. D sohaning ixtiyoriy x nuqtasini olamiz va bu nuqtani markaz qilib ε radiusli Q_ε shar chizamiz, S_ε sharning sirti bo'lsin ε radiusni shunday kichik qilib olamizki, Q_ε shar D sohada to'la yotsin. $D - Q_\varepsilon$ ni D^ε orqali belgilab olamiz. Ravshanki D^ε sohada $(u)_x$ va $E(x, \xi)$ funksiyalar $C^2(D^\varepsilon)(C^1(D^\varepsilon))$ sinfga tegishli. D^ε sohada bu funksiyalarga (1.2.5) Grin formulasini qo'llaymiz:

$$\begin{aligned} & \int_{D^\varepsilon} [E(x, \xi) \Delta u - u \Delta E(x, \xi)] d\xi = \\ & = \int_S [E(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial n}] dS + \end{aligned}$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} [E(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial E(x, \xi)}{\partial n}] d_\xi S_\varepsilon,$$

bu yerda differensial belgisidagi ξ indeks integrallash ξ bo'yicha bajarilayotganini bildiradi.

Ma'lumki, $\Delta E = 0$. Avvalo $n > 2$ bo'lsin. S_ε sferada $r = |x - \xi| = \varepsilon$, n – normal D^ε sohaga tashqi bo'lganligi sababli ε radiusga qarama-qarshi yo'nalgan. Shuning uchun

$$\frac{dE}{dn} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r^{n-2}} \right]_{r=\varepsilon} = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}.$$

birlik sferani S_1 orqali belgilasak ma'lumki, $dS_\varepsilon = \varepsilon^{n-1} dS_1$,

$\xi - x = \theta \varepsilon$ almashtirishni bajarsak, $\xi \in S_\varepsilon$ bo'lganda, $\theta \in S_1$ bo'ladi. Shu sababli avvalgi formulani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \int_{D^\varepsilon} \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} dS &= \int_S \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi S + \\ &+ \int_{S_1} \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} - (n-2)u(x + \theta \varepsilon) \right] dS_1 \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Ravshanki,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D^\varepsilon} \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} dS = \int_D \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} d\xi.$$

(1.3.1) formulaning o'ng tomonidagi birinchi integral ε ga bog'liq emas.

$$u(\xi) \in C^1(\bar{D}) \text{ bo'lgani uchun } \left| \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right| \leq M, M - \text{const},$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \cos(n, \xi_i) \right| \leq nM.$$

Bundan darhol

$$|\varepsilon \int_{S_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS_1| \leq \varepsilon nM |S_1| (\varepsilon \rightarrow 0)^{\rightarrow 0}, \quad |S_1| - \text{birlik}$$

sferaning yuzi.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} [-(n-2) \int_{S_1} u(x + \theta \varepsilon) dS_1] = -(n-2)u(x)|S_1|.$$

Demak, (1.3.1) tenglikdan ushbu

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_S \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right) d_\xi S -$$

$$\frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_D \frac{\Delta u(\xi)}{r^{n-2}} d\xi \quad (1.3.2)$$

formula hosil bo'ladi. Eslatib o'tamiz, birlik S_1 sfera sirtining yuzi $|S_1| =$

$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $n = 2$ bo'lganda (1.3.2) formula o'z ma'nosini yo'qotadi. Bu holda

$E(x, \xi) = \ln \frac{1}{r}$ ekanligini e'tiborga olib, avvalgi hisoblashlarni qaytarsak,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\frac{\partial u(\xi)}{\partial n} \ln \frac{1}{r} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] - d_\xi S - \frac{1}{2\pi} \int_S \ln \frac{1}{r} \Delta u(\xi) d\xi \quad (1.3.3)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Agar x nuqta D sohadan tashqarida yotgan bo'lsa,

$$\int_D \frac{\Delta u(x)(\xi)}{r^{n-2}} = \int_S \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi S, \quad n > 2,$$

$$\int_D \ln \frac{1}{r} \Delta u(\xi) d\xi = \int_S \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] d_\xi S, \quad n = 2$$

formulalar hosil bo'ladi.

Endi $u(\xi)$ funksiya (1.3.2) va (1.3.3) formulalarni chiqarishdagi shartdan tashqari D sohada garmonik ham bo'lsin. Bu holda (1.3.2), (1.3.3) formulalarda $\Delta u = 0$ bo'ladi, natijada garmonik funksiyalarning quyidagi integral ifodasiga ega bo'lamiz:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|s_1|} \int_S \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi S, \quad n > 2, \quad (1.3.4)$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left[\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right] d_\xi S, \quad n = 2 \quad (1.3.5)$$

1.3.1-Teorema. Biror sohada garmonik bo'lgan $u(x)$ funksiya shu sohada barcha tartibli hosilalarga ega bo'ladi.

Isbot. $u(x)$ funksiya D sohada garmonik bo'lsin, D dato'la yotuvchi, ya'ni o'zining chegarasi bilan birga D_1 sohani olamiz. D_1 ni shunday tanlab olamizki, uning chegarasi Γ_1 bo'laklari silliq sirtan iborat bo'lsin. Ravshanki,

$u(x) \in C^2(\overline{D_1})$ va D_1 sohaga (1.3.4) formulani qo'llaymiz:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|s_1|} \int_{\Gamma_1} \left[\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right] d_\xi \Gamma_1, \quad (1.3.6)$$

x nuqtaning atrofida (1.3.6) integral ostidagi funksiya x va ξ o'zgaruvchilar bo'yicha uzluksiz va x nuqtaning barcha $x_1, \dots, x_n$ koordinatalari bo'yicha barcha tartibli hosilalarga ega. Parametrga bog'liq

bo'lgan integrallarni differensiallash haqidagi teorema asosan, $u(x)$ funksiya x nuqtada $x_1, \dots, x_n$ lar bo'yicha barcha tartibli hosilalarga ega va bu hosilalarni (1.3.6) formulada integral ostida differensiallash natijasida hosil qilish mumkin.

1.4-§ O'rta qiymat haqidagi teorema.

$u(x)$ funksiya biror sharda garmonik bo'lib, sharning chegarasida uzluksiz bo'lsin. U holda, $u(x)$ funksiyaning shar markazidagi qiymati sharni chegaralab turuvchi sferadagi qiymatlarining o'rta arifmetigiga teng.

Teorema shartidagi sharning markazi x_0 nuqta va radiusi R ga teng bo'lsin. Bu sharni Q_R bilan va uni chegaralab turgan sferani S_R orqali belgilab olamiz. Q_{R_1} bilan Q_R sharga konsentrik bo'lgan $R_1 < R$ radiusli sharni, S_{R_1} orqali uning chegarasini belgilaymiz. $u(x) \in C^2(\overline{Q_{R_1}})$ bo'lgani sababli (1.3.4) formulaga asosan

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int_{S_{R_1}} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right) d_\xi S_{R_1} \quad x \in Q_{R_1}.$$

Bu formulada $x = x_0$ deb olamiz. U holda $r = R_1$ bo'lib, n – tashqi normal bo'lgani uchun R_1 radius bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Shu sababli

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \Big|_{r=R_1} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} \Big|_{r=R_1} = -\frac{n-2}{R_1^{n-1}}$$

va oldingi formula Q_R sharda garmonik va

$$u(x_0) = \frac{1}{(n-2)|S_1|R_1^{n-2}} \int_{S_{R_1}} \frac{\partial u}{\partial n} d_\xi S_{R_1} + \frac{1}{|S_1|R_1^{n-1}} \int_{S_{R_1}} u(\xi) d_\xi S_{R_1}$$

ko'rinishida yoziladi. $u(x)$ funksiya $C^2(\overline{Q_{R_1}})$ sinfga tegishli bo'lgani uchun

$$\int_{S_{R_1}} \frac{\partial u}{\partial n} d_\xi S_{R_1} = 0.$$

Natijada,

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|R_1^{n-1}} \int_{S_{R_1}} u(\xi) d_\xi S_{R_1} \quad (1.4.1)$$

formulaga ega bo'lamiz. $u(x)$ funksiya $\bar{Q}_R$ sharda uzluksiz bo'lgani uchun $R_1 \rightarrow R$ da integral ostida limitga o'tish mumkin..

Demak,

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|R^{n-1}} \int_{S_R} u d S_R, |S_1|R^{n-1} = |S_R|. \quad (1.4.2)$$

(1.4.1) formulaning o'ng tomoni $u(x)$ funksiyaning sferadagi qiymatlarining o'rta arifmetigidan iboratdir.

$n = 2$ bo'lganda

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} u d S_R.$$

(1.4.1) formulani

$$R_1^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{|S_1|} \int_{S_{R_1}} u(\xi) dS_{R_1}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikni R_1 bo'yicha $0 \leq R_1 \leq R$ oraliqda integrallab,

$$u(x_0) = \frac{n}{|S_1|R^n} \int_{Q_R} u(\xi) d\xi \quad (1.4.3)$$

formulaga ega bo'lamiz, bunda $\frac{|S_1|R^n}{n} - Q_R$ sharning hajmidir. (1.4.1) va (1.4.3) formulalar mos ravishda sfera va shar bo'yicha garmonik funksiyalar uchun o'rta arifmetik formulalar nomi bilan ham yuritiladi.

Chekli D sohada o'zgarmas sondan farqli bo'lgan $u(x)$ garmonik funksiya D sohaning ichki nuqtalarida maksimum va minimumga erisha olmaydi.

Isbot .Faraz qilaylik, $x_0 \in D$ nuqtada $u(x)$ funksiya maksimumga erishsin, ya'ni $u(x_0)=M$. D sohada yotuvchi $|x - x_0| < \varepsilon$ sharni olamiz. Bu sharning har bir nuqtasida $u(x)=M$ bo'ladi. Haqiqatdan ham agar y , $|y - y_0| < \varepsilon$, nuqtada $u(y) < M$ ($u(y) > M$) tengsizlik bo'lishi mumkin emas, tengsizlik o'rinli bo'lsa $u(x)$, funksiya uzluksiz bo'lgani uchun bu tengsizlik y nuqtaning biror $|\xi - y| < \delta$ atrofida ham o'rinli bo'ladi. U holda (1.4.3) formulani $|x - x_0| < \varepsilon$ shartga nisbatan qo'llash natijasida $M < M$ bo'lgan ma'nosiz tengsizlikka ega bo'lamiz.

Demak, barcha $|x - x_0| < \varepsilon$ sharda $u(x)=M$. Endi $x \in D$ sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, l esa x ni x_0 bilan tutashtiruvchi va D da yotadigan uzluksiz egri chiziq bo'lsin. D sohaning chegarasi S bilan l egri chiziq orasidagi masofadan kichik bo'lgan ε sonni olamiz. $|\eta - y| < \varepsilon$ sharning y markazini x_0 nuqtadan x nuqtaga qarab l chiziq bo'yicha siljitib boramiz. Yuqorida isbotlanganga asosan y ixtiyoriy holatda bo'lganda ham bu sharning ichida $u = M$ va $u(x)=M$ bo'ladi. Demak, barcha D da $u(x)=M$. Hosil bo'lgan qarama-qarshilik teoremaning birinchi qismi to'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Xuddi shunga o'xshash ikkinchi qismi ya'ni minimum hol isbotlanadi.

1.-natija. Agar $u(x)$ funksiya chekli D sohada garmonik bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa, uholda $u(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini sohaning chegarasida qabul qiladi, ya'ni $m \leq u(x) \leq M$, bu erda m va M lar $u(x)$ funksiyaning D chegarasidagi eng kichik va eng katta qiymatlari.

Bu natijaning to'g'riligi yuqorida isbotlangan ekstremum prinsipi va matematik analizdan ma'lum bo'lgan Veyershtas teoremasidan kelib chiqadi.

2.-natija. Agar $u(x)$ funksiya chekli D sohada garmonik bo'lib, D ning chegarasi S da nolga teng bo'lsa, barcha D da aynan nolga teng bo'ladi.

Haqiqatan ham, $m = M = 0$ dan ixtiyoriy $x \in D$ uchun $u(x) = 0$ bo'ladi.

3.-natija. Agar u_1 va u_2 funksiyalar D sohada garmonik, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lib, S da bir xil qiymatlarni qabul qilsa, barcha $\bar{D}$ da ular aynan bir-biriga teng bo'ladi.

Haqiqatan ham, $u = u_1 - u_2$ desak, $u|_S = 0$ bo'ladi. 2-natijaga asosan barcha D da $u = 0$ yoki $u_1 = u_2$ bo'ladi.

Izoh. Ekstremum prinsipining isbotida asosan garmonik funksiyaning uzluksizligidan va o'rta qiymat haqidagi teoremdan foydalanildi. Shu sababli ekstremum prinsipini boshqacharoq formada keltirish mumkin.

Agar o'zgarmas sondan farqli bo'lgan $u(x)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'lib, bu sohaning har bir x_0 nuqtasi uchun R ning barcha kichik qiymatlarida

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} u dS_R \text{ yoki } u(x) = \frac{n}{|S_1|R^n} \int_{Q_R} u(\xi) d\xi.$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $u(x)$ funksiya D sohaning ichki nuqtalarida maksimum va minimumga ega bo'lmaydi.

II BOB. Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun integral formula.

2.1-§ Matrisalar sinfi.

$$A_{k \times l} p(x), x),$$

Agar $R^n - n$ o'lchovli

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$C^n - n -$ o'lchovli,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ o'zgaruvchilar kompleks fazosi};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \partial x = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_n \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad E(x) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Agar $I = (i_1 \dots i_q)$, $0 \leq q \leq n$ - multindeks, u holda

$$dx_I = \bigwedge_{m=1}^q dx_{i_m}$$

$$dx[J] = \bigwedge_{i=1}^n dx_i \quad ; \quad i \notin J$$

$$dx = \bigwedge_{i=1}^n dx_i \quad ;$$

$\sigma(I) -$ konstanta, $\sigma(J) dx_J \wedge dx [J] = dx$ tenglik bilan aniqlanadi, ψ operator esa tashqi differensial formada aniqlangan, q —darajali forma.

$$\psi(x) = \sum'_{|J|=q} \psi_J(x) dx_J$$

(shtirix yig'indi multindekslar o'smasligi bo'yicha olmasligini bildiradi.)

$$* \psi(x) = \sum_{|I|=q} \psi_I(x) \sigma(I) dx[I]$$

tenglik bilan aniqlanadi.

*operatorni $\psi^1, \dots, \psi^n$ formalardan tuzilgan $D(\psi^1, \dots, \psi^n)$ matrisalarga

$$* D(\psi^1, \dots, \psi^n) = D(*\psi^1 \dots *\psi^n)$$

deb faraz qilib qo'llaymiz.

$R(x)$ va $\mathbb{C}(x)$ orqali koefitsienlari mos ravishda R yoki C maydondan bo'lgan $x_1 \dots x_n$ larning ko'phadlar chiziqli algebralarni belgilaymiz. $LR(x)$ va $L\mathbb{C}(x)$ — mos ravishda $R(x)$ yoki $\mathbb{C}(x)$ ning qism to'plamlari bo'lib, chiziqli formalardan iborat.

k va l - natural sonlar, $p_i(x) \dots p_l(x) \in R(x)$

$$p(x) = \left\| \begin{matrix} p_i(x) \\ \dots \\ p_l(x) \end{matrix} \right\| p_i(x) = 0 \text{ yoki } x \in R^n, x \neq 0,$$

$i = \overline{1, l}$. (bu shart $p_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ operatorlar elliptik ekanligini bildiradi.)U

holda $A_{k \times l} p(x), x$ elementlarni $L\mathbb{C}(x)$ dan bo'lgan $(k \times l)$ —matrisa $\Gamma D(x)$ mavjudki,

$$\Gamma D(x) \cdot D(x) = E(p(x)) \quad (2.1.1)$$

o'rinli bo'lib, uning elementlari $LC(x)$ dan bo'lgan $(k \times l)$

tartibli $D(x)$ matrisalar sinfini bildiradi. Belgilashlar qulay bo'lishi uchun ya'ni,

$$1_e = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| e \text{ marta}$$

vektorni kiritamiz. $O_{k \times l}(x)$

$$D^*(x) \cdot D(x) = E(|x|^2 1_e)$$

o'rinli bo'ladigan $D(x)$ matrisalardan iborat.

$A_{k \times l}(|x|^2 1_e, x)$ qism sinfni bildiradi, bu yerda

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad D^*(x) = D(x)$$

matrisaga ermit qo'shma.

Agar $p(x) = R(x)$ dagi ko'phad, $p(x) \neq 0$. $x \neq e$, $x \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$A_{k \times l}(p(x) 1_e, x)$$

$$FD(x)D(x) = E(p(x) 1_e) \quad (2.1.2)$$

$$D(x)FD(x) = E(p(x) 1_k) \quad (2.1.3)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi elementi $C(x)$ dan bo'gan $(l \times k)$ matrisa mavjud bo'ladiki, $D(x)$ matrisalar

$$A_{k \times l}(p(x) 1_e, x)$$

qism sinfi bo'ladi. $O_{k \times l}(x) =$

$$\{D^*(x)D(x) - E(|x|^2 1_e)\},$$

$$\{D(x)D^*(x) - E(|x|^2 1_k)\}.$$

shartni qanoatlantiruvchi $D(x)$ matrisalarning $O_{k \times l}(x)$ qism sinfi.

Nihoyat $C^m(Q)$ orqali bu $Q - R^n$ dagi to'plam $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ Q atrofda m marta uzluksiz differensiallanuvchi ko'phadlar sinflari.

Agar $f_i(x) \in C^m(Q)$, $i = \overline{1, l}$ bo'lsa,

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_l(x) \end{pmatrix} \in C^m(Q)$$

ga vektor funksiya deymiz.

2.2-§ Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun integral formula.

Xususiy hosilalardagi birinchi tartibli

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x) = 0 \quad (2.2.1)$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz, uning xarakteristik matrisasi

$$D(x) \in A_{k \times l}(p(x), x) \quad (2.2.2)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_l(x) \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

esa kompleks qiymatli umumiy holda vektor funksiya .

$g_1(x) \dots g_l(x)$ - mos ravishda

$$p_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \dots p_l \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

operatorlarning fundamental yechimlari va

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \dots \\ g_l(x) \end{pmatrix}$$

$$M(x) = \left(E(g(x)) \cdot \Gamma D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \cdot \left(* D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right), \quad (2.2.4)$$

$(l \times l)$ – matrisa differensial operator bu yerda formal ravishda ,

$$N(x) = \left(E(g(x)) \cdot \Gamma D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \cdot \left(* D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right), \quad (2.2.5)$$

$$* D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = D \left(* \frac{\partial}{\partial x} \right) = D \left(\frac{\partial}{\partial x} dx \right) = D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) dx.$$

deb faraz qilamiz.

(2.2.2) va (2.2.1) dan

$$dM(x) = * E(g(x)) \left((\Gamma D D) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) =$$

$$= * E(g(x)) E \left(p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) = * (E(\delta(x) 1_l)) = \delta(x) E dx. \quad (2.2.6)$$

kelib chiqadi, bu erda $E = E(1_l)$ birlik $(l \times l)$ – matrisa , $\delta(x)$ Dirak δ -funksiyasi.

Agar (2.2.3) vektor funksiya C^1 sinfga tegishli bo'lsa, u holda (2.2.4) va (2.2.5) dan

$$M(x) \wedge df(x) = (-1)^{n-1} N(x) f(x) \quad (2.2.7)$$

kelib chiqadi.

(2.2.5) va (2.2.6) dan birdaniga tayinlangan x uchun ayniyat kelib chiqadi:

$$d(M(y-x)f(y)) - N(y-x)f(y) = \delta(y-x)f(y)dy \quad (2.2.8)$$

Endi R^n dag elliptik operatorlarning fundamental yechimlari xossalari sohadagi [3] dagi natijani e'tiborga olib, (2.2.5) ni integrallash bilan silliq bo'lakli ∂G chegarali $G \in R^n$ chegaralangan soha va $C^1(\bar{G})$ sinfnining (2.2.1) vektor funksiya uchun quyidagi integral formula o'rinli.

$$\int_{\partial G_y} M(y-x)f(y) - \int_{G_y} N(y-x)f(y) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin \bar{G}. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

(2.2.6) ni bu sistematik $D(x)$ xarakteristik matrisasiga (2.2.2) shartga esa (2.2.3) sistema yechimlari ucnun qurilgan Grin formulasi sifatida qarash mumkin.

(2.2.3) ni hisobga olib, (2.2.5) dan standart usul bilan quyidagi teorema olinadi.

2.2.1-teorema. $G \in R^n$ - silliq bo'lakli chegarali chegaralangan soha va (2.2.5) $f(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ vektor funksiya (2.2.2) shartda (2.2.1) sistemaning yechimi bo'lsin, u holda

$$M(y-x)f(y) = \begin{cases} f(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin \bar{G}. \end{cases} \quad (2.2.10)$$

(2.2.7) formuladan va [3] natijadan xususan, (2.2.1) sistemaning $C^1(G)$ sinfdagi yechimi (2.2.2) shart bajarilganda haqiqatdan, G sohada analitik funksiyalar bo'ladi. Bundan va (2.2.7) misoldan ko'rinadiki, (2.2.1) sistemaga (2.2.2) shartning qo'yilishi bu sistema elliptik bo'lishiga teng kuchli.

(2.2.1) elliptik sistemalar yechimlari uchun soha chegarasi bo'yicha integral tasvirlashlarning mavjudligi [4] da isbotlangan.

2.2.1 eslatma. 2.2.1-teoremada $A_{k \times l}(p(x), x)$, determinantda $p_i(x), i = \overline{1, l}$ ko'phadlarni faqat β –gipoelliptikligini talab qilsak, o'zida saqlaydi.

Bunda (2.2.1) sistemaning $C^1(G)$ sinfga tegishli barcha yechimlari G sohagan tegishli bo'ladi. Bundan tashqari yuqoridagi barcha hisoblashlar unchalik katta bo'lmagan o'zgarishlar bilan ixtiyoriy sistemalarda, shu sistemalariga o'tkaziladi, faqat qo'shma $* D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) y(x) = 0$ sistemaning tegishli xossalarga ega fundamental yechimlar matrisasi mavjud bo'lishi lozim.

2.3-§ Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun misollar.

2.3.1-misol.

$$(n \times n) - \text{matrisa} \quad \|a_{ij}\| a_{ij} + a_{ji} = 0, i \neq j, \quad a_{ij} = 1 \quad (2.3.1)$$

shartni qanoatlantiruvchi $a_{ij}, i, j = \overline{1, n}$ kompleks sonlardan iborat bo'lsin.

U holda $(n \times 1) -$ matrisa

$$D(x) = \left\| \begin{array}{c} \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \\ \dots \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{jn} x_j \end{array} \right\| \in A_{n \times 1}(|x|^2, x) \quad (2.3.2)$$

chunki (2.3.1) shartga ko'ra $\Gamma D(x) = \|x_1 \dots x_n\|$ deb olish mumkin.

2.3.2- misol.

[9] da R^3 fazoda C^1 dagi Koshi-Riman sistemasining uning yechimlari ma'nosidagi analitik o'xshash Koshi integralini tuzish mumkin. $(4 \times 4) -$ matrisa

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & 0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \end{array} \right\| \quad (2.3.3)$$

(2.3.1) ko'rinishidagi Montel-Teodoresko sistemasi hisoblanadi.

(2.3.3) matrisa $O_{4 \times 4}(x)$, $x \in R^3$ sinfga tegishli bo'lishi oson tekshiriladi.

2.3.3-misol.

[10] da [9] ning umumlashmasi sifatida

$$D(f) \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (2.3.4)$$

sistemaning yechimlari uchun R^n da Koshi integrali analogi o'rnatilgan, bu yerda $D(x)$ – giperkompleks $n \times n$ matrisa (bunda matrisalar faqat $n = 2^m$, $m = 1, 2, \dots$ [10] da mavjud).

Haqiqatdan giperkompleks $n \times n$ matrisa $O_{n \times n}(x)$, $x \in R^n$ sinfga tegishli (2.3.) esa [10] dan formulaning boshqacha ko'rinishi.

2.3.4-misol.

[11] da [9] natijaning boshqa umumlashmasi $(n - 2)$ darajali forma (komponentlariga) va

$$\begin{cases} \delta\psi = 0, \\ d\psi = * du \left(\left\| \begin{array}{cc} \delta & 0 \\ d & -*d \end{array} \right\| \cdot \left\| \psi \right\|_u \right) = 0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

u differensiallarga nisbatan birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi qaralgan.

δ operator R^n dagi q –chi darajali formalarda

$$\delta\psi = (-1)^{n(q+1)+1} * d * \psi \quad (2.3.6)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu sistemaning xarakteristik matrisasi

$O^c(c_n^1 + c_n^3) \times (c_n^2 + 1)(x)$, sinfga tegishli (2.1.10) formula [11] dagi integral tasvirlashlarning boshqacha ko'rinishini beradi.

2.3.5- misol.

[12] da

$$(D(x))^2 = E(|x|^2 1_{2^n}) \quad (2.3.7)$$

sharti esa $(2^n \times 2^n) - D(x)$ matrisalar qaralgan.

Bunday matrisalar Klifford [13] algebraik tasvirlashlarni tuzishda paydo bo'ladi. Ko'rish qiyin emaski, (2.3.7) matrisalar

$A_{2^n \times 2^n}(|x|^2 1_{2^n}, x)$ sinfga tegishli (bu yerda $F = E(1_{2^n})$, (2.1.10) – [12] dagi integral formulasi boshqacha ko'rinishi).

2.3.6-misol.

$$\begin{cases} \delta\psi = 0, \\ d\psi = 0 \end{cases} \left(\left| \psi \right|_d \psi = 0 \right) \quad (2.3.8)$$

sistemaning xarakteristik matrisasi δ operator (3.6) da $q, 0 \leq q \leq n$ darajali ψ forma (komponentlari) nisbati R^n da aniqlangan.

$$O(c_n^{q-1} + c_n^{q+1}) \times c_n^q(x)$$

sinfga tegishli bo'ladi.

$\psi \in C^1(G)$ - (2.3.8) sistema yechimlari G da garmonik maydonlar deb ataladi.[11]

2.3.7-natija.

Agar $G \subset \mathbb{C}^n$ - bo'lakli silliq chegarali soha va $\psi \in C^1(\bar{G})$ forma G da $q, 0 \leq q \leq n$ darajali garmonik maydon hisoblanadi, u holda quyidagi integral formula o'rinli.

$$\int_{\partial G_y} \psi(y) \wedge u_q(y-x) + * \psi(y) \wedge *_x u_{n-q}(y-x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin \bar{G} \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$u_q(y-x) = \sum_{|J|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^n \sigma(J, k) \frac{\partial g(y-x)}{\partial y_k} dy[J, k] dx_J,$$

$0 \leq q \leq n-1, u_n(y-x), d_{y_k} \wedge dy_J \wedge dy[J, k] = \sigma(J, k) dy g(x) - R^n$ da Laplas tenglamasining fundamental yechimi $*_x$ operator esa ψ o'zgaruvchi bo'yicha olinadi.

(3.9) formula (3.8) sistema yechimlari uchun qurilgan (2.10) formulaning boshqacha ko'rinishi.

2.3.8-misol.

$\mathbb{C}^n$ fazoda ($p \neq q$), $0 \leq p \leq q \leq n$ tipdagi ψ forma (komponentlari) nisbatan

$$\begin{cases} \bar{\partial} \psi = 0 \\ \bar{\partial}^* \psi = 0 \end{cases} \left(\left\| \bar{\partial} \right\| \psi = 0 \right) \quad (2.3.10)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerda $\bar{\partial}$ - Koshi-Riman operatori unga metrik qo'shma

$\bar{\partial}^* = - * \partial *, *$ -operator (p, q) tipdagi

$$\sum_{|J|=p, |I|=q} \psi_{JI}(z) dz_J \wedge d\bar{z}_I$$

formalardagi operator.

$$\begin{aligned}
& * \psi(z) = \\
& = \left[\left(\frac{2}{i} \right)^{p+q-n} i^{q-p} (-1)^{p(n-p)} \right] \sum_{|J|=p, |I|=q} \sigma(J) \sigma(I) \psi_{JI}(z) dz[J] \bigwedge d\bar{z}[I]
\end{aligned}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu sistemaning xarakteristik matrisasi

$$O_{C_n^p(C_n^{q-1} + C_n^{q+1}) \times C_n^p C_n^q}(x)$$

sinfga tegishli bo'ladi, chuning uchun (3.10) yechimlari uchun (2.1.10) formulaning boshqacha ko'rinishini olamiz.

2.3.9-natija.

Agar $G \in \mathbb{C}^n$ - silliq bo'lakli chegaraga ega chegaralangan soha va (p, q) tipdagi $\psi \in C^1(\bar{G})$ forma (2.3.10) sistemani qanoatlantirsa, u holda

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial G_\zeta} \psi(\zeta) \bigwedge U_{p,q}(\zeta - z) + \\
& * \psi(\zeta) \bigwedge *_z V_{n-q,n-p}(\zeta - z) = \begin{cases} \psi(z), z \in G, \\ 0, z \notin \bar{G}, \end{cases} \quad (2.3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U_{p,q}(\zeta - z) = \\
& = \frac{(-1)^{p(n-q-1)}(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}}' \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^n \sigma(J, k) \sigma(I) \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[J, k] \bigwedge d\zeta[I] d\bar{\zeta}_J \bigwedge dz_I;
\end{aligned}$$

$$V_{p,q}(\zeta - z) =$$

$$= \frac{(-1)^{p(n-q-1)}(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin J}}^n \sigma(I, k) \sigma(J) \frac{\zeta_k - z_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\zeta[I, k] \bigwedge d\zeta[J] d\zeta_I \bigwedge d\bar{z}_J;$$

$0 \leq p, q \leq n, U_{p,n} = 0, V_{n,q} = 0$ – mos ravishda Martinelli-Boxnera-Koppel'man yadrosi.

[16] va uning ∂ operatori uchun analogi $*_x$ operator z o'zgaruvchi bo'yicha olinadi. Xususan (2.3.11) $B_{p,n-1}(\bar{G})$ tipidagi formalarning soha chegarasi bo'yicha integral ifodasini beradi.

2.3.10-misol.

Ixtiyoriy $(k \times l) - D(x)$ matrisa uchun

$$adj(D^*(x)D(x))(D^*(x)D(x)) - E(|D^*(x)D(x)|1_l) \quad (2.3.12)$$

bu yerda $adj(D^*D) -$ matrisaga biriktirilgan matrisa $(D^*D) - D^*D$ ning ditermenanti (2.3.12) tenglikdan $|D^*(x)D(x)| \neq 0, x \in R^n, x \neq 0$ shartni qanoatlantiruvchi elementar $LC(x)$ dan bo'lgan har bir $(k \times l) - D(x)$ matrisa $A_{k \times l}(|D^*(x)D(x)|1_l, x)$ sinfga tegishli bo'lishi kelib chiqadi.

Bundan tashqari (2.3.1), (2.3.3) va (2.3.2) tengliklardan $(k \times l) - D(x)$ matrisa

$|D^*(x)D(x)| \neq 0, x \in R^n, x \neq 0$ elementlari $LC(x)$ dan bo'lgani uchun

$A_{k \times l}(|D^*(x)D(x)|1_l, x)$ sinfga tegishli bo'lishining etarli sharti.

$$D(x)adj(D^*(x)D(x))D^*(x) = E(|D^*(x)D(x)|1_k) \quad (2.3.13)$$

(2.3.1) sistemaning $D(x)$ matrisasi $A_{k \times l}^c(p(x)1_l, x)$ sinfga tegishli bo'lsin, u holda

$$M(x) = \left(FD \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g(x) \right) (* D(\partial x)) \quad (2.3.14)$$

yadroli (2.3.10) integral tasvirlashni (2.3.1) sistema uchun Koshi integrali deb ataladi.

Agar $S - R^n$ dagi chekli yuzali silliq bo'lakli giper sirt va $(l \times 1) - f(x) \in C(S)$ vektor funksiya bo'lsa, u holda

$$\Phi(x) = \int_{S_y} M(y-x)f(y) \quad (2.3.15)$$

ifoda S ga tegishli bo'lmagan har bir $x \in R^n$ da ma'noga ega va [3] natijaga

$(l \times 1)$ vektorga ko'ra komponentlari $R^n \setminus S$ da haqiqatda analitik funksiyalardan iborat.

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)M(y-x) = -\delta(y-x)E(1_k)(*D(\partial y))$$

kelib chiqadi, (2.3.15) dan $x \notin S$ da

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(x) = 0 \quad (2.3.16)$$

ni olamiz va (2.3.15.) integralni (2.2.1) sistema uchun Koshi tipidagi integral deb atash mumkin.

2.3.11-misol.

Quyidagi tasdiqlarni bayon etishga imkon beradi.

2.3.1- mulohaza.

Agar (2.1) sistemaning $(k \times l) - D(x)$ xarakteristik matrisasi (3.13) sharti va

$$|D^*(x)D(x)| \neq 0, x \in R^n, \quad x \neq 0$$

ni qanoatlantirsa, u holda bu sistema uchun

$$M(x) = \left\{ \left[\left(adj(D^*D)D^* \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right] g(x) \right\} (*D(\partial x))$$

yadroli Koshi tipdagi integralni tuzish mumkin, bu yerda $g(x) - |D^*D|(\frac{\partial}{\partial x})$ operatorning fundamental yechimi.

2.3.2- mulohaza.

Agar (2.3.1)- ma'lum xarakteristik $(l \times l) - D(x)$ matrisani R^n dagi xususiy hosilasi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar elliptik sistemasi bo'lsa, u holda

$$M(x) = [adj(D) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g(x)] (* D(\partial x))$$

yadroli Koshi tipidagi integralni ko'rish mumkin, bu yerda

$$|D| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) g(x) = \delta(x).$$

2.4-§ Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun Morere teoremasi.

$C \in R^n$ - bo'lakli silliq ∂G chegarasi bilan chegaralangan soha bo'lsin. $D(x) - (k \times l)$ matrisa $LC(x)$ elementlaridan iborat.

$f(x) - C^1(\bar{G})$ sinfning $(l \times 1)$ vektor Stoks formulasi bo'yicha bevosita ,

$$\int_G \left(* D \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \right) f(y) = \int_{\partial G} (* D(\partial y) f(y)) \quad (2.4.1)$$

ni olamiz.

Agar $f(x) (* D) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f(x)$ (2.1) sistemaning yechimi bo'lsa, (5.1) formuladan

$$\int_{\partial G} (* D(\partial y)) f(y) = 0$$

kelib chiqadi. Yuqoridagi teoremaning fazoviy analogi bo'lib, quyidagi tasdiq hisoblanadi.

24.1- mulohaza.

Agar :

- 1) $(l \times l)$ –vektor $f(x)$ funksiya $G \in R^n$ sohada uzluksiz;
- 2) $D(x) \in A_{k \times l}(p(x), x)$ – matrisa;
- 3) ixtiyoriy yopiq bo'lakli silliq σ bilan chegaralangan chekli sohasi bilan kiruvchi S sirt uchun

$$\int_{\sigma} (* D(\partial y)) f(y) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ (2.4.1) sistemaning har bir $x \in G$ nuqtada yechimi bo'ladi.

$f \in C^1(G)$ ushbu mulohazani isbotlash (2.4.1) formulaning to'g'ri natijasi, bunda 2)- shart faqat va faqat $D(x)$ matrisa $LC(x)$ elementlaridan tuzilgan bo'lsa.

$f \in C(G)$ uchun (bu mulohazani) [3] natijadan foydalanib dastlab ([17]244-245b) da taklif etilgan soha bo'yicha haqiqiy o'lchov uchun har bir $x \in G$ nuqtasini biror atrofida $f(x)$ (2.1.10) formula bilan tasvirlanadi, bu yerda integrallash bu atrofning chegarasi bo'yicha olinadi. Demak, $f(x) - G$ da haqiqiy analitik funksiya.

III BOB. Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistema uchun uch o'lchovli fazoda Koshi masalasi.

3.1-§ Chegaralangan soha uchun birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi.

Quyidagi belgilashlar kiritamiz.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$x' = (x_1, x_2) \quad , \quad y' = (y_1, y_2)$$

$$\alpha = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^0} + y_3 \quad , \quad i^2 = -1.$$

$E(x)$ —diagonal matrisa,

$$E(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

$u^0 = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ ta}})^T$ vektorni belgilaymiz.

Faraz qilaylik G soha chegaralangan soha bo'lib, uning chegarasi $y_3 = 0$ tekislikning bir qismi T va $y_3 > 0$ yuqori yarim fazoda joylashgan S -silliqlik sirtidan iborat bo'lsin.

G sohada quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz. Faraz qilaylik $A_{l \times n}(x)$ shunday $D(x)$ matrisalar oilasidan iborat bo'lsin, matrisaning har bir elementi chiziqli formadan iborat bo'lib, koeffisienlari $\mathbb{C}$ — sonlar maydoni l ni

R – haqiqiy sonlar maydonidan olingan bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$D^*(x)D(x) = E(|x|^2 u^0) \quad (3.1.1)$$

Bu yerda $D^*(x)D(x)$ ga nisbatan ermitli qo'shma bo'lgan matrisadan iboratdir.

$D^*(x)$ matrisa $D(x)$ ga ermitli qo'shma matrisa deyiladi, agar $a_{ij}(x)$ ni $\bar{a}_{ji}(x)$ ga almashtirish mumkin bo'lsa,

$$D(x) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \dots)$$

$$\bar{D} = (\bar{\alpha}_1 x_1 + \bar{\alpha}_2 x_2 + \bar{\alpha}_3 x_3 \dots)$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T$$

(3.1.2) sistemaning xarakteristik matrisasi $D(x)$ (3.1.1) shartni qanoatlantirsin, u holda (3.1.2) sistema elliptik tipli sistema bo'ladi va bunday sistemalar Laplas operatori bilan faktorizasiyalanuvchi differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ikki o'lchovli fazoda bunday sistemalar misol sifatida Koshi-Riman sistemasini qarash mumkin.

Bu sistema ham (3.1.1) shartni qanoatlantiradi, ya'ni bu sistema elliptik tipli sistemadan iborat.

Bunday sistema uchun integral formula mavjud bo'lib, u quyidagi holda ifodalanadi.

3.2-§ Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi.

Faraz qilaylik $K(G)$ shunday $u(y)$ vektorlar sinfidan iborat bo'lsin,

1) $u(y)$ vektor funksiya G soha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lib,
(3.1.2) sistemani qanoatlantirsin.

2) $u(y)$ vektor funksiya G sohada uzluksiz bo'lsin.

Agar $u(y) \in K(G)$ va quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$u(x)|_S = f(y) \quad (3.2.1)$$

$f(y)$ – vektor funksiya berilgan uzluksiz vektor funksiyadan iborat. (3.1.1), (3.1.2) masalaga birinchi tartibli elliptik sistema uchun Koshi masalasi deyiladi. Bu masala korrekt bo'lmagan masalalar qatoriga kiradi, uning nokorrekt ekanligi masalaning yechimi turg'un emasligidan kelib chiqadi.

Bunga misol tariqasida Koshi-Riman sistemasi uchun Adamar misoli javob beradi.

Endi elliptik sistemaga (Koshi-Riman tenglamalari) ga o'tamiz va o'sha qoidalar bo'yicha yechimlar qanday xarakterga ega bo'lishini qaraymiz. Bu yana aniq yechimlar bo'ladi, chunki Koshi-Riman tenglamalari doimiy koeffisientlariga ega bo'ladi.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Sistamasining yechimlari

$$u = Ue^{i(t+\alpha x)}, v = Ve^{i(t+\alpha x)}$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu ko'rinishni sistemaga qo'yib,

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0, V = \frac{\lambda}{\alpha} U$$

ni olamiz, $\alpha = n, \lambda = -in$ deb tanlaymiz, u holda

$$u_n = U_n e^{nt - inx}, \quad v_n = -iU_n e^{nt - inx}$$

haqiqiy qismini ajratib,

$$u_n = U_n e^{nt} \cos nx,$$

$$v_n = U_n e^{nt} \sin nx.$$

yechimlarni topamiz. U_n o'zgarmasni $U_n = e^{-\sqrt{n}}$ formula bilan beramiz.

$$u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \cos nx,$$

$$v_n = e^{-\sqrt{n}} e^{nt} \sin nx.$$

yechimlar ketma-ketligi misoli o'z vaqtida (1904 yilda) Adamar tomonidan tuzilgan, shu asosida juda muhim xulosalarga kelgan.

Gap shundaki, (u_n, v_n) yechim $t = 0$ da

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \cos nx,$$

$$v_n(x, 0) = \psi_n(x) e^{-\sqrt{n}} \sin nx.$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi, $n \rightarrow \infty$ da boshlang'ich shartlar nolga intiladi. Bundan tashqari ulardan $k = 1, 2, \dots, p$ tartibli $\varphi_n^{(k)}(x), \psi_n^{(k)}(x)$ hosilalar $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. (Bu yerda p — ixtiyoriy tayinlangan natural son).

Haqiqatdan,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \cos nx \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \sin nx \end{aligned} \right\}, \text{ agar } k - \text{juft bo'lsa,}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \sin nx \\ \psi_n^{(k)}(x) &= \pm n^k e^{-\sqrt{n}} \cos nx \end{aligned} \right\}, \text{ agar } k - \text{toq bo'lsa.}$$

ikkinchi tomondan, $u_n(x, t)$, $v_n(x, t)$ ixtiyoriy t da chegaralanmagan. Ko'ramizki, boshlang'ich shartlarni baholash uchun qanday normani tanlamaylik, biz bu normaning kichikligida yechimning kichikligini tasdiqlay olmaymiz (bu yerda yechim uning moduli maksimumi bo'yicha baholanadi.) Boshlang'ich shartlar uchun yo'l qo'yiladigan normalar sifatida, biz bu yerda quyidagi ko'rinishdagi normalarni olishimiz mumkin.

$$\|\varphi(x)\|_p = \frac{\max}{0 \leq k \leq p} \sup_x |\varphi^k(x)|,$$

$$\|\psi(x)\|_p = \frac{\max}{0 \leq k \leq p} \sup_x |\psi^k(x)|.$$

Adamar bunday masalalarni nokorrekt masalalar deb atashni taklif etdi. Masala korrekt deyiladi, agar u biror sinfga tegishli ixtiyoriy boshlang'ich (yoki chegaraviy) shartlarda yechimga ega, yagona yechimga ega bo'lsa va bu yechim boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'liq bo'lsa.

3.3-§Chegaralangan sohada birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun integral formula.

Faraz qilaylik $u(x) \in C'(D)$ bo'lib (3.1.2) sistemani qanoatlantirsin va D sohaning chegarasigacha uzluksiz vektor funksiyalardan iborat bo'lsin, u holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi.

$$u(x) = \int_{\partial D} M(x, y) u(y) dy, \quad x \in G,$$

bu yerda

$$M(x, y) = \frac{1}{4\pi} D^*(t_1, t_2, t_3) D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{1}{r}$$

(t_1, t_2, t_3) —haqiqiy birlik normalning koordinatalaridan iboratdir.

Masala korrekt deyiladi, agar ixtiyoriy bo'lmagan boshlang'ich shartlarda yechimga ega bo'lsa, yoki yagona bo'lmagan yechimga ega bo'lsa.

Bunday masalalarni analitik funksiyalar uchun Koshi masalasi Karleman tomonidan yechilgan .Analitik funksiyalar uchun burchakning bir qismi yoyiga berilganda bu masalani yechimi Krilov tomonidan yechilgan.

Akademik Tixonov tomonidan kiritilgan regulyarizasiyalangan yechim tushunchasidan foydalanib yechimlar sinfini kompakt to'plamgacha qisqartirsak, u holda yechim shartli korrekt masalalar qatoriga kiradi.

Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasini akademik M.M.Lavrentev tomonidan regulyarizasiyalanuvchi operatorlar oilasini tuzib unga bog'liq parametrni qulay tanlash usulini ko'rsatgan .Professor SH.Yarmuhammedov tomonidan esa Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasini regulyarizasiyalanuvchi yechimlar oilasi oshkor ravishda topilgan.Bu usuldan

foydalanib birinchi tartibli elliptik sistema uchun Koshi masalasini regulyarizasiyasini topish mumkin.

Ba'zi hollarda Koshi masalasini berilganlari aniq emas balki taqribiy yechimlari beriladi ya'ni,

$$\max_S |u(y) - u_\delta(y)| < \delta \quad 0 < \delta < 1$$

$u_\delta(y)$, $u(y)$ vektor funksiyaning S dagi taqribiy qiymatlaridan iboratdir. Bunday masala turg'un emasligini hisobga olsak uning yechimini topish esa δ parametrغا bog'liq bo'ladi.

Elliptik tipli birinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish uchun sohaning bir qismida noma'lum vektor funksiyaning qiymatlaridan foydalanib uning qolgan qismida integralini nolga yaqinlashtirish masalasiga keltiriladi. Buning uchun Karleman funksiyasi yoki Karleman matrisasi tushunchasi kiritiladi. Karleman funksiyasi deb Koshi masalasining berilmagan sohaning chegarasida integral formulani cheksiz kichikka aylantiradigan funksiyaga aytiladi.

Bunday funksiyalar Laplas tenglamasining fundamental yechimlari orqali aniqlanadi ya'ni,

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{4\pi}{2} + g_\sigma(y, x)$$

ko'rinishda bo'lib, bu yerda $g_\sigma(y, x)$ funksiya butun sohada garmonik funksiyadan iboratdir ya'ni,

$$\Delta g_\sigma(y, x) = 0,$$

$$\int_{\partial D \setminus S} \{ |\Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial u} \right| \} ds < \alpha'(\sigma) \alpha(\sigma) \rightarrow 0$$

agar $\sigma \rightarrow \infty$, σ —parametr.

Bunday funksiya professor SH.Yarmuxammedov tomonidan tuzilgan bo'lib, u Laplas tenglamasi uchun Koshi masalasini Karleman funksiyasidan iboratdir. Bu funksiya quyidagicha aniqlanadi.

Faraz qilaylik,

$$K(W), W = iv + u$$

funksiya butun funksiya bo'lib quyidagi shartlarni qanoatlantirsin $K(W)$ butun funksiya bo'lib W ning haqiqiy qiymatlarida haqiqiy qiymat qabul qiladi va

$$K(u) \neq 0$$

$$\sup_{v \geq 1} |v^p K^{(p)}| = M(p, u) < \infty, p = 1, 2, \dots$$

$$4\pi\Phi_\sigma(y, x) = \frac{1}{K(x_3)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{K(W) du}{(W - x_3) \sqrt{u^2 + \alpha^2}}$$

Professor SH. Yarmuhammedov tomonidan tuzilgan funksiya Karleman funksiyasi bo'lishligi ko'rsatilgan.

Faraz qilaylik G chegaralangan soha bo'lib uning chegarasi $y_3 = 0$ tekislikning bir qismi va $y_3 > 0$ yarim fazoda joylashgan S silliq sirtidan iborat bo'lsin.

Bu sohada birinchi tartibli elliptik tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi quyidagicha qo'yiladi:

Faraz qilaylik $u(y)$ vektor funksiya

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.3.1)$$

sistemani G sohada qanoatlantirsin. Buyerda $D(x)$ xarakteristik matrisa $A_{n \times n}(x)$ matrisalar sinfiga qarashli bo'lsin ya'ni, $D^*(x)D(x) = E(|x|^2 u^0)$ shartni qanoatlantiruvchi matrisalar sinfidan iborat bo'lsin.

Bu vektor funksiya $G \cup \partial G$ da uzluksiz bo'lib,

$u|_S = g(y)$ shartni qanoatlantirsin. Bun yerda $S \partial G$ – sohaning chegarasining bir qismidan iboratdir. $g(y)$ -vektor funksiya berilgan uzluksiz vektor funksiya dan iborat. $u(y)$ vektor funksiyaning S dagi qiymati $g(y)$ dan foydalanib sohaning ichida topish masalasiga birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi deyiladi.

Bu masala korrekt bo'lmagan masalalar qatoriga kirib ,uning yechimi turg'unmasdir. Agar yechimlar sinfini kompakt to'plamgacha qisqartirsak ,u holda bu masala shartli korrekt masala bo'ladi.

$K(W)$ ni bu holda quyidagicha tanlab olamiz.

$$K(W) = e^{\sigma W^2}$$

bu yerda

$$W = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad \Phi_\sigma(y, x)$$

quyidagicha aniqlanadi

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{K(x_3)} \int_0^\infty \operatorname{Im} \frac{e^{\sigma W^2} du}{(W - x_3)\sqrt{u^2 + \alpha^2}}$$

$$W - x_3 = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3 - x_3$$

$$\begin{aligned} W^2 &= (i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3)^2 = (-\sqrt{u^2 + \alpha^2})^2 - 2y_3\sqrt{u^2 + \alpha^2}i + y_3^2 = \\ &= u^2 + \alpha^2 + y_3 - 2y_3\sqrt{u^2 + \alpha^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{\sigma W^2} &= e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3 - 2y_3\sqrt{u^2 + \alpha^2}i)} = e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3)} \times \\ &\times (\cos 2y_3\sigma\sqrt{u^2 + \alpha^2} - i\sin(2y_3\sigma\sqrt{u^2 + \alpha^2})). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\sigma(y, x) &= \\
&= \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3^2)} (\cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} - i \sin y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}) du}{[i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + (y_3 - x_3)]\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3^2)} (\cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} - i \sin y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}) (y_3 - x_3) - i\sqrt{u^2 + \alpha^2} du}{(u^2 + r^2)\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3^2)} [(y_3 - x_3) \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} + \sqrt{u^2 + \alpha^2} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}]}{(u^2 + r^2)\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du \\
&= \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3^2)} [(y_3 - x_3) \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}]}{(u^2 + r^2)\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du + \\
&\quad + \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(u^2 + \alpha^2 + y_3^2)} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} du
\end{aligned}$$

3.4-§ Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasining regulyarizasiyasi.

Faraz qilaylik $u(y)$ – vektor funksiya $C'(G) \cap C(\bar{G})$ sinfdan iborat bo'lib,

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(y) = 0 \quad (3.4.1)$$

sistemani qanoatlantirsin. U holda quyidagi integral formula o'rinli bo'ladi.

$$u(x) = \int M_\sigma(x, y) u(y) dS_y, \quad x \in D,$$

bu yerda

$$M_\sigma(x, y) = (E(\Phi_\sigma(y, x) u^0) D^* \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) D(t^T), \quad t = (t_1, t_2, t_3)$$

tashqi birlik vektor.

$$\Phi_{\sigma}(y, x) = \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \frac{e^{\sigma w^2}}{(i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3)\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du.$$

Koshi masalasi bu sistema uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$u(y) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$ vektor funksiya (1) sistemani qanoatlantirsin va quyidagi shart bajarilsin.

$$u(y)|_S = f(y) \quad (3.4.2)$$

(1) va (2) masala korrekt bo'lmagan masala hisoblanadi. Uning korrekt emasligi turg'unmasligidan kelib chiqadi. Lekin yechimlar sinfini kompakt to'plamgacha qisqartirsak, u holda masala shartli korrekt bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$u_{\sigma}(x) = \int_S N_{\sigma}(y, x) u(y) dS, x \in D \quad (3.4.3)$$

va quyidagi teorema o'rinlidir.

3.4.1- Teorema: Agar $u(y) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$ sinfdan olingan vektor funksiya bo'lib, (1) sistemani qanoatlantirsin va $|u(y)| \leq 1, y \in S$ shart bajarilsin, u holda

$$|u(x) - u_{\sigma}(x)| \leq C(x) \sigma \exp(-\sigma x_3^2) \quad (3.4.4)$$

tengsizlik o'rinlidir.

Isbot. Faraz qilaylik $u(y)$ vektor funksiya (3.4.4) sistemani qanoatlantirsin va teoremda keltirilgan shartlar bajarilsin. U holda quyidagi integral formula o'rinli bo'ladi.

$$u(y) = \int_{\partial G} M(y, x) u(y) dS, x \in G$$

$$\begin{aligned}
u(y) - u_\sigma(x) &= \int_{\partial G} M(y, x) u(y) dS - \int_{|S|} M(y, x) u(y) dS \\
&= \int_T M(y, x) u(y) dS.
\end{aligned}$$

Bu yerda $T - y_3 = 0$ tekislikning bir qismidan iboratdir.

$\int_T M(y, x) u(y) dS$ –integralni baholash,

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq$$

$$\leq \left| \int_T M(y, x) u(y) dS \right| \leq \int_T |M(y, x) u(y) dS| \leq \int_T |M(y, x)| dS$$

Bu baholashlar $\Phi_\sigma(y, x)$ va $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ ($i = 1, 2, 3$) larni baholashlardan kelib chiqadi. Bu ifodalarni $y_3 = 0$ ya'ni T tekislikda baholash lozim.

$$\begin{aligned}
\Phi(y, x) &= \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)} e^{\sigma y_3^2} (y_3 - x_3) \cos \sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + r^2}} du \\
&\quad + \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)} e^{\sigma y_3^2} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2)} du
\end{aligned}$$

$y_3 = 0$ da u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\begin{aligned}
\Phi(y, x) &= -\frac{x_3}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + r^2}} du \\
|\Phi(y, x)| &\leq \frac{x_3}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} e^{-\sigma \alpha^2} \int_0^\infty \frac{du}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + r^2}}
\end{aligned}$$

y_3 - o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilasini baholaymiz,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_3} = \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{2y_3 e^{\sigma(y_3^2 - u^2 - \alpha^2)} y_3 - x_3 \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + \alpha^2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(y_3^2 - u^2 - \alpha^2)} \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + \alpha^2}} du - \\
& - \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(y_3^2 - u^2 - \alpha^2)} (y_3 - x_3) 2\sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{(u^2 + \alpha^2) \sqrt{u^2 + \alpha^2}} + \\
& + \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{2y_3 e^{\sigma(y_3^2 - u^2 - \alpha^2)} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} du + \\
& + \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{\sigma(y_3^2 - u^2 - \alpha^2)} 2\sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2} \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} du
\end{aligned}$$

Bu ifodani $y_3 = 0$ baholaymiz.

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \right| \leq \frac{1}{4\pi e^{\sigma x_3}} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)}}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + \alpha^2}} du + \frac{\sigma}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2 + \alpha^2)} \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} du.$$

Quyidagi formuladan foydalanamiz.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial y_i} = 2(y_i - x_i) \frac{\partial \Phi}{\partial S}$$

Bunda

$$\begin{aligned}
S = \alpha^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial S} = \frac{-\sigma}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \\
& \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-\sigma(u^2 + S) + \sigma y_3^2} (y_3 - x_3) \cos 2y_3 \sqrt{u^2 + S} \sigma - e^{-\sigma(u^2 + S)} e^{\sigma y_3^2} (y_3 - x_3) \frac{2y_3}{\sqrt{u^2 + S}} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + S}}{(u^2 + r^2)^2 (u^2 + S)^2} \right. \\
& \left. \frac{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + S} - e^{-\sigma(u^2 + S) + \sigma y_3^2} (y_3 - x_3) \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + S} (\sqrt{u^2 + S} + \frac{(u^2 + r^2)}{\sqrt{u^2 + S}})}{(u^2 + r^2)^2} \right\} du \\
& - \frac{\sigma}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\sigma(u^2 + S)} e^{\sigma y_3^2} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + S}}{(u^2 + r^2)^2} - e^{-\sigma(u^2 + S)} e^{\sigma y_3^2} \frac{y_3 \sigma}{\sqrt{u^2 + S}} \cos 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + S} \right] du
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{(u^2 + r^2) - e^{-\sigma(u^2+S)} e^{\sigma y_3^2} \sin 2y_3 \sigma \sqrt{u^2 + S}}{(u^2 + r^2)^2(u^2 + S)} \right] du$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}$ ($i = 1, 2$) ifodani $y_3 = 0$ da baholaymiz.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \right| &\leq \frac{\sigma x_3}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)} (u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + S}}{(u^2 + r^2)^2(u^2 + S)} du + \right. \\ &+ \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}}{(u^2 + r^2)^2(u^2 + S)} \left(\sqrt{u^2 + S} + \frac{u^2 + r^2}{\sqrt{u^2 + S}} \right) dS \leq \\ &\leq \frac{x_3 \sigma}{4\pi e^{\sigma x_3^2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}}{(u^2 + r^2) \sqrt{u^2 + \alpha^2}} du + \right. \\ &+ \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}}{(u^2 + r^2)^2 \sqrt{u^2 + S}} du + \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma(u^2+\alpha^2)}}{(u^2 + r^2)^2 (u^2 + S)^{\frac{3}{2}}} du. \end{aligned}$$

Bularni birlashtirib quyidagi baholashlarga kelamiz.

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq C(x) e^{-\sigma x_3^2}, \quad x \in G$$

Bundan quyidagi natijaga kelamiz.

Natija : Quyidagi limit

$$\lim u_\sigma(x) = u(x), \quad x \in G$$

G sohaning har bir kompakt to'plamida tekis yaqinlashadi.

Faraz qilaylik $u(x)$ vektor funksiya G sohada uzluksiz hosilaga ega bo'lib $\bar{G}$ yopiq sohada uzluksiz bo'lib (1) sistemani qanoatlantirib, $u(x)|_S = f_\delta(y)$ shart bajarilsa, buyerda

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| < \delta \quad 0 < \delta < 1$$

yuqoridagi teoremdan foydalanib S sirtida $u(x)$ vektor funksiyaning baholasak quyidagi baholashlarga ega bo'lamiz.

$$|u_{\sigma}(x)| \leq C(x)e^{-\sigma x_3^2} \delta \quad (*)$$

Bu tengsizlik orqali (1) birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun qo'yilgan Koshi masalasini turg'un ekanligini ko'rsatadi.

Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

3.4.2- Teorema: Faraz qilaylik $u(x) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$, $u(y)$ vektor funksiya chegaralangan bo'lib

$$u_{\sigma\delta}(x) = \int_S M(x, y) f_{\delta}(y) dS, x \in G$$

bo'lsa, u holda

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C(x) \frac{1}{\bar{x}_3^0} \ln \frac{1}{\delta} \delta^{x_3^0}, \quad \bar{x}_3^0 = \max_S x$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu teoremaning isboti 1- teorema (*) tengsizlikdan kelib chiqadi.

Natija: Quyidagi yaqinlashish

$$\lim u_{\sigma\delta}(x) = u(x), \quad x \in G$$

G sohaning har bir kompakt qismida tekis bajariladi.

Xulosa.

Magistrlik dissertatsiyasi birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechishdan iborat. Bu holda berilgan masalani, garmonik funksiyalarning xossalariidan foydalanib integral formulaga keltirilgan. Integral formulani esa Karleman matrisasini tuzish yo'li orqali yechish oshkor ravishda ifodalangan. Agar Koshining berilganlari sohaning chegarasida taqribiy qiymatlari ma'lum bo'lsa, u holda Karleman matrisasi orqali yechimning regulyarizatsiyasi tuziladi va bu yechimlar oilasi aniq yechimga intilishi isbotlanadi.

Teorema: Agar $u(y) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$ sinfdan olingan vektor funksiya bo'lib, (1) sistemani qanoatlantirsin va $|u(y)| \leq 1, y \in S$ shart bajarilsin, u holda

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leq C(x) \sigma \exp(-\sigma x_3^2)$$

tengsizlik o'rinlidir.

Teorema: Faraz qilaylik $u(x) \in C'(G) \cap C(\bar{G})$, $u(y)$ vektor funksiya chegaralangan bo'lib

$$u_{\sigma\delta}(x) = \int_S M(x, y) f_\delta(y) dS, x \in G$$

bo'lsa, u holda

$$|u(x) - u_{\sigma\delta}(x)| \leq C(x) \frac{1}{\bar{x}_3^0} \ln \frac{1}{\delta} \delta^{x_3^0}, \quad \bar{x}_3^0 = \max_S x$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Adabiyotlar ro'yxati.

1. Айзенберг Л.А. «Формулы Карлемана в комплексном анализе». Новосибирск, «Наука», 1990 г. 192-211 ст.
2. Бицадзе А.В. «Основы теории аналитических функций комплексного переменного». «Наука», М. 1979 г. Стр. 216 – 229.
3. Бицадзе А.В. «Пространственный аналог типа Коши и некоторые его применения». ДАН СССР, 93, № , 1953 г. Стр 389 – 392.
4. Виноградов В.С. «Об одном аналоге чичтемы Коши – Римана в четырехмерном пространстве». ДАН СССР, т. 154. № , 1964 г.
5. Владимиров В.С. «Методы теории функции многих комплексных переменных». «Наука», М. 1964 г. Стр. 237-239.
6. Дезин А.А. «Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи». Труды математического института им. В.А. Стеклова т. 68. Изв. А.Н. СССР М. 1962 г. Стр. 10-54
7. Ш.Ярмухаммедов «Известия АН Узб. ССР. Серия». 1993 г
- 8 Маликов, Ф.Р. Турсунов. Задача Коши для системы эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Узбекистон, Научно техническая конференция.9-10 декабр 1999г, Тошкент,.41-42
- 9 3. Маликов, Ф.Р. Турсунов. Интегральная формула для эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами. VII- «Беларусской математической конференции». Беларусь 2000г. Стр.182
- 10 3.Маликов, Ф.Р. Турсунов. Задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка.11-15 сентября, материалы научная конференция “Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа” Самарканд, 2000г, стр. 56.
- 11 3.Маликов, Ф.Р. Турсунов. О задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными

- коэффициентами. Россия, г. Москва (Труды МГУ) 2000, № 3, стр. 34-41.
- 12 З.Маликов, Ф.Р. Турсунов. Задачи Коши для линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Доклады и тезисы научной конференции “Современные проблемы алгоритмизации и программирования” Ташкент 2001г.стр.33-34
 - 13 Ф.Р. Турсунов. Задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Узбекский математический журнал, №3-4, 2002 г, стр. 71-76.
 - 14 З.Маликов, Ф.Р. Турсунов. Задачи Коши для линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области. Труды международной научной конференции “Современные проблемы математической физики и информационной технологии”, Том II, Ташкент, 2002г, стр.65-69
 - 15 Ф.Р. Турсунов, З. Маликов О задаче Коши для линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области. Узбекский математический журнал, №1, 2005 г, ст. 53-63.
 - 16 Ф.Р. Турсунов, З. Маликов .Задача Коши для эллиптических систем первого порядка.Тезисы докладов международная конференция посвященная 105- летию М. А. Лаврентьева, 27-31 мая 2005г. Новосибирск, Россия. Стр. 60-61
 - 17 Beknazarova.D.A “Uch o'lchovli fazoda elliptik sistema uchun Koshi masalasini regularizatsiyasi”.2013 mart.TATU Samarqand.
 - 18 Beknazarova.D.A “Birinchi tartibli elliptik tipli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi”.2013 may. Samarqand.