

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Mexanika-matematika fakulteti
5460100-matematika ta'lim yo'nalishi

Nematova Shahnoza Farhodovna

Panjarada bir zarrachali Shroedinger operatorini
aniqlash

(Bakalavr akademik darajasini olish uchun bajarilgan
bitiruv malakaviy ish)

Himoyaga ruxsat etildi:

Fakultet dekani: **prof.A. Soleev**

Kafedra mudiri: **dots.A.Xolxo'jayev**

Ilmiy raxbar: **prof.S.N.Laqaev**

M.O'

Samarqand-2013

Kirish

Masalaning qo'yilishi.

$l_2(Z^d)$ fazoda bir zarrachali $\widehat{H}_\mu$ Shroedinger operatorni aniqlash.

Mavzuning dolzarbligi.

Qattiq jismlar fizikasi, matematika-fizika, kvant mexanikasining qator masalalarini o'rganishda diskret Shro'dinger operatorini o'rganish muhim ahamiyatga ega. Olingan natijalarni boshqa fanlar uchun ham muhim ahamiyat kasb etib ishlab chiqarishning ba'zi sohalarida foydalanish mumkin.

Ishning maqsadi va vazifalari.

$\widehat{H}_0$ va $\widehat{V}$ operatorlarni xossalari o'rganish va $\widehat{H}_\mu$ operatorni aniqlash

Ilmiy tadqiqot usullari.

Funksiya tushunchasi, chiziqli chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning xossalari, kompakt operatorlardan foydalanildi.

Ishning ilmiy ahamiyati.

Malakaviy bitiruv ishida olingan natijalar ilmiy va ijodiy ahamiyatga ega bo'lib, fanning shu sohadagi ma'lum bir masalalarning yechimini topishda foydalaniladi.

Ishning amaliy ahamiyati.

Malakaviy bitiruv ishi nafaqat ilmiy balki amaliy ahamiyatga ega. Natijadan ishlab chiqarishning ba'zi sohalarida foydalanish mumkin.

Ishning tuzilishi.

Malakaviy bitiruv ishi kirish, ikki bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Har bir bob paragraflarga ajratilgan va ular ma'lum nomerlar bilan belgilangan.

Ishning birinchi bobida asosiy natijalarni olishda kerak bo'ladigan tushunchalar va ta'riflar, ya'ni chiziqli fazo, Evklid fazosi, Hilbert fazosi, chegaralangan va kompakt operatorlar, operatorlar qo'shmasi, teskarisi ta'riflari keltirilgan. Bundan tashqari ba'zi bir muhim teorema va lemmalar ham bayon qilinib ularning isbotlari keltirilgan va misollar orqali izohlangan.

Ikkinchi bobda esa mavzuning asosiy teoremasi isbotlangan .

Olingan natijalarning qisqach mazmuni.

1. $\widehat{H}_0$ operatorning o'z-o'ziga qo'shmaligi va chegaralanganligi hosil qilingan.
2. $\widehat{V}$ operatorning kompaktlik kriteriyasi keltirilgan.
3. $l_2(Z^d)$ fazoda $\widehat{H}_\mu$ Shroedinger operatori aniqlangan.

Bob 1

Boshlang'ich tushunchalar

Bu bobda mazkur malakaviy bitiruv ishini bayon qilishda kerak bo'ladigan asosiy tushunchalar, ta'riflar bayon qilib, bazi teoramalar isbotini keltiramiz.

1.1 Chiziqli fazolar

1.1.1 Vektor fazolar

Chiziqli fazo tushunchasi matematikada asosiy tayanch tushuncha hisoblanadi. Quyida C bilan kompleks sonlar, R bilan haqiqiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

1.1.1-Ta'rif: Agar elementlari $x, y, z, \dots$ bo'lgan L to'plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo'lsa:

I. Ixtiyoriy ikkita $x, y \in L$ elementlarga ularning yig'indisi deb ataluvchi aniq bir $x + y \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x, y, z \in L$ elementlar uchun

$$1) x + y = y + x \quad (\text{kommutativlik})$$

$$2) x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{assotsiativlik})$$

$$3) L \text{ da shunday } \theta \text{ element mavjud bo'lib, } x + \theta = x \text{ (nolning mavjudligi)}$$

4) shunday $-x \in L$ element mavjud bo'lib, $x + (-x) = \theta$ (qarama – qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;

II. ixtiyoriy $x \in L$ element va ixtiyoriy α son ($\alpha \in R$ yoki $\alpha \in C$) uchun x elementning α songa ko'paytmasi deb ataluvchi aniq bir $\alpha x \in L$ element mos qo'yilgan bo'lib, ixtiyoriy $x, y \in L$ va ixtiyoriy α, β sonlar uchun

$$5) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$6) 1 \cdot x = x$$

$$7) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$8) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

Aksiomalar bajarilsa, u holda L to'plam chiziqli fazo deb ataladi.

Misol 1.1.1 $L = R^n \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ – n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlar to'plami. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi. Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ lar uchun

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (1)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \quad (2)$$

R^n – to'plam (1) va (2) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan haqiqiy chiziqli fazo tashkil qiladi va u n -o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo deb ataladi.

Misol 1.1.2 $l_2 \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots): \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ -kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots), \quad (3)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Yig'indi $x + y \in l_2$ ekanligi $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ tengsizlikdan kelib chiqadi. (3) va (4) tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, l_2 to'plan kompleks chiziqli fazo bo'ladi.

Misol 1.1.3 $L = C_{[a,b]}$ – $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksialar to'plami. Funksialarni qo'shish va funksiani songa ko'paytirish amallari mos ravishda

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Va

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

ko'rinishda aniqlanadi. Yuqoridagi tengliklar bilan aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazoning 1-8 aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $C_{[a,b]}$ to'plam chiziqli fazo tashkil etadi.

1.1.2.Chiziqli funksionallar.

1.1.2Ta'rif: L chiziqli fazoda aniqlangan f sonli funksoinal deb ataladi. Agar barcha $x, y \in L$ lar uchun

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi.

1.1.3Ta'rif: Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ lar uchun

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi. Agar barcha $x \in L$ va barcha $\alpha \in C$ lar uchun

$$f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$$

bo'lsa, u holda kompleks chiziqli fazoda aniqlangan f funksional qo'shma bir jinsli deyiladi, bu yerda $\bar{\alpha}$ soni α ga qo'shma kompleks son deyiladi.

1.1.4Ta'rif: Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksional qo'shma chiziqli (antichiziqli) funksional deyiladi.

Misol 1.1.4 $R^n \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\} - n$

o'lchamli vektor fazo va $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ belgilangan element bo'lsin. u holda

$$f: R^n \rightarrow R, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Moslik R^n da chiziqli funksional bo'ladi.

$$u(z) = \sum_{k=1}^n a_k \overline{z_k}$$

Tenglik bila aniqlanuvchi $u: C^n \rightarrow C$ akslantirish qo'shma chiziqli funksional deyiladi.

Misol 1.1.5 l_2 fazoda chiziqli funksionalga misol keltiramiz. k - belgilangan natural son bo'lsin. l_2 dagi har bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ uchun

$$f_k(x) = x_k$$

Deymiz. Bu chiziqli funksional.

Misol 1.1.6 $y_0 \in C_{[a,b]}$ berilgan element bo'lsin. har bir $x \in C_{[a,b]}$ funksiyaga

$$F(x) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt$$

sonini mos qo'yamiz. Bu funksionalning chiziqliligi integrallash amalining asosiy xossalardan kelib chiqadi.

$$F^*(x) = \int_a^b \overline{x(t)} y_0(t) dt$$

Funksional $C_{[a,b]}$ fazoda qo'shma chiziqli funksional deyiladi.

1.1.3. Chiziqli normalangan fazolar.

1.1.5 Ta'rif: Bizga L chiziqli fazo va unda aniqlangan p funksional berilgan bo'lsin. Agar p quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:

$$1) p(x) \geq 0, \quad \forall x \in L \quad p(x) = 0 \leftrightarrow x = \theta$$

$$2) p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall x \in L$$

$$3) p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in L$$

1.1.6 Ta'rif: Norma kiritilgan L chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x \in L$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.

Misol 1. 1.7 $L = R^n$ — n — o'lchamli haqiqiy chiziqli fazo. Bu fazoda

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \qquad \|x\|_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \quad x \in R^n$$

Funksionallar norma shartini qanoatlantiradi. R^n chiziqli fazoda $\|\cdot\|_p$ norma kiritilgan bo'lsa, uni R_p^n , agar $\|\cdot\|_{\infty}$ norma kiritilgan bo'lsa uni R_{∞}^n deb belgilaymiz.

Misol 1. 1.8 l_2 fazoda x elementning normasi quyidagich kiritiladi:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$$

Misol 1.1.9 $C_{[a,b]} - [a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi. Bu fazoda $f \in [a,b]$ elementning normasi

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

tenglik bilan aniqlanadi. $C_{[a,b]}$ chiziqli fazoda norma

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

Formula yordamida kiritilgan bo'lsa, uni $C_1[a,b]$, agar norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$$

Tenglik bilan kiritilgan bo'lsa uni $C_2[a,b]$ deb kiritiladi.

1.1.4. Evklid fazolari.

Chiziqli fazolarda norma kiritishning sinalgan usullaridan biri, unda skalyar ko'paytma kiritishdir.

1.1.7 Ta'rif: Bizga L haqiqiy chiziqli fazo berilgan bo'lsin. agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko'paytma deyiladi:

$$1) p(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in L, \quad p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2) p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in L$$

$$3) p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in L$$

$$4) p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y) \quad \forall x_1, x_2 \in L$$

1.1.8 Ta'rif: Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi va x, y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formula orqali aniqlanadi.

Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi.

1.1.9 Ta'rif: Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ bo'lsa, u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.

1.1.10 Ta'rif: Agar $\{x_\alpha\}$ sistemani o'zida saqllovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to'la deyiladi.

1.1.11 Ta'rif: Agar $\{x_\alpha\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda bu sistema E fazodagi ortonormal bazis deyiladi.

Misol 1.1.10 $R^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in R\}$ - n o'lchamli Evklid fazosi. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi.

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Bu fazoda $\{e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}_{k=1}^n$ vectorlar sistemasi ortonormal bazisni tashkil etadi.

Misol 1.1.11 Kvadrati bilan jamlanuvchi ketma – ketliklar fazosi, ya'ni l_2 ni qaraymiz. Bu fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi.

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

l_2 fazoda ortonormal bazis sifatida

$$\{e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)\}_{n=1}^{\infty}$$

Tenglik bilan aniqlanuvchi $\{e_k\}_{n=1}^{\infty}$ vektorlar sistemasini olish mumkin.

Misol. 1.1.12 $C_{2[a,b]}$ fazoda skalyar ko'paytma quyidagicha kiritiladi.

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

1.1.5. Hilbert fazolari.

To'la Evklid fazolarini qarashda davom etamiz. Bizni faqat cheksiz o'lchamli Evklid fazolari qiziqtiradi. Chunki chekli o'lchamli Evklid fazolari R^n fazoga izomorfdir.

1.1.12 Ta'rif: Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy tabiatli $f, g, \dots$ elementlarning H to'plami Hilbert fazosi bo'lsa, u holda quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

1) H – Evklid fazosi, ya'ni skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo

2) $\rho(x, y) = \sqrt{x - y, x - y}$ metrika ma'nosida H -to'la fazo

3) H fazo – cheksiz o'lchamli, ya'ni unda cheksiz elementli chiziqli erkli sistema mavjud.

Odatda, separabel Hilbert fazolari qaraladi, ya'ni H hamma yerida zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud.

Misol 1.1.13 $C_2[a, b]$ Evklid fazosi to'la emas shuning uchun Hilbert fazosi bo'lmaydi.

Misol 1.1.14 l_2 cheksiz o'lchamli to'la separabel Evklid fazosidir.

1.2 Chiziqli operatorlar

1.2.1. Chiziqli uzluksiz (chegaralangan) operatorlar.

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi. Shunday qilib, bizga X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

1.2.1 Ta'rif: X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qo'yuvchi

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X ning hamma yerida aniqlangan bo'lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$D(A) = \{x \in X : Ax \text{ mavjud va } Ax \in Y\}$$

Agar chiziqli A operator qaralayotgan bo'lsa, $D(A)$ ning chiziqli ko'pxillik bo'lishi talab etiladi, ya'ni agar $x, y \in D(A)$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun $\alpha x + \beta y \in D(A)$.

1.2.2 Ta'rif: Agar ixtiyoriy $x, y \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sonlar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

Tenglik o'rinli bo'lsa, A operator chiziqli operator deyiladi.

1.2.3 Ta'rif: Bizga $A: X \rightarrow Y$ operator va $x_0 \in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin. agar $y_0 = Ax_0 \in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in U \cap D(A)$ lar uchun $Ax \in V$ bo'lsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

1.2.4 Ta’rif: Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo’lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in D(A)$ lar uchun

$$\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$$

Tengsizlik bajarilsa, A operator $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

1.2.5 Ta’rif: $Ax = \theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar to’plami A operatorning yadrosi deyiladi va $\text{Ker}A$ bilan belgilanadi.

1.2.6 Ta’rif: biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$ bajariladigan $y \in Y$ lar to’plami A operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deb ataladi va u $\text{Im}A$ yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.

$$\text{Ker}A = \{x \in D(A): Ax = \theta\}$$

$$R(A) = \text{Im}A = \{y \in Y: \text{biror } x \in D(A) \text{ uchun } y = Ax\}$$

Misol. 1.2.1 X – ixtiyoriy chiziqli normalangan fazo bo’lsin.

$$Ix = x \quad x \in X$$

Akslantirish birlik operator deyiladi. Uni chiziqlilik va uzluksizlikka tekshiramiz.

Yechish: bu operatorning chiziqliligi va uzluksizligi quyidagi tenglikdan bevosita kelib chiqadi:

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha Ix + \beta Iy,$$

$$\|I(x - x_0)\| = \|x - x_0\|$$

Uning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi uchun quyidagilar o’rinli: $D(I) = X \quad R(I) = X \quad \text{Ker}I = \{\theta\}$

1.2.2. Teskari operatorlar.

Bizga X ni Y ga akslantiruvchi A operator berilgan bo'lsin. $D(A)$ - uning aniqlanish sohasi, ImA esa uning qiymatlari sohasi bo'lsin.

1.2.7 Ta'rif: Agar ixtiyoriy $y \in ImA$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona techimga ega bo'lsa, u holda A tekarilanuvchan operator deyiladi.

Agar A teskarilanuvchan operator bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in ImA$ ga $Ax = y$ tenglamaning yechimi yagona $x \in D(A)$ element mos keladi. Bu moslikni o'rnatuvchi operator A operatorga teskari operator deyiladi va A^{-1} bilan belgilanadi hamda

$$A^{-1}: Y \rightarrow X, \quad D(A^{-1}) = ImA, \quad ImA^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1}Ax = x \quad x \in D(A) \quad A^{-1}Ay = y, \quad y \in D(A^{-1}).$$

tengliklar kelib chiqadi.

Misol 1.2.2 $A: R^3 \rightarrow R^3$, $Ax = (x_1, x_2 + x_1, x_3)$ operatorga teskari operator mavjudmi. Agar mavjud bo'lsa teskari operatorni toping.

Yechish: Berilgan A operatorga teskari operator mavjud bo'lishi uchun, ixtiyoriy $y \in ImA = R^3$ da $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lishi kerak. Endi $Ax = y$ tenglikdan x ni topamiz:

$$Ax = y \Leftrightarrow (x_1, x_2 + x_1, x_3) = (y_1, y_2, y_3).$$

Bundan

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Ya'ni

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3) = A^{-1}y$$

Shunday qilib, A operatorga teskari operator mavjud va u

$$A^{-1}: R^3 \leftrightarrow R^3, \quad A^{-1}x = (x_1, x_2 - x_1, x_3)$$

ga teng.

1.2.3. Qo'shma operatorlar. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar.

X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli uzluksiz A operator berilgan bo'lsin, ya'ni

$$A: X \rightarrow Y, \quad y = Ax \in Y, \quad D(A) = X$$

1.2.8 Ta'rif: Bizga X, Y-chiziqli normalangan fazolar va $A: X \rightarrow Y$ chiziqli chegaralangan operator berilgan bo'lsin. agar biror $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ operator va ixtiyoriy $x \in X, \quad g \in Y^*$ lar uchun

$$(g, Ax) = (A^*g, x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Qo'shma operator quyidagi xossalarga ega:

1. A^* operator chiziqli

$$2. (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$3. \text{Ixtiyoriy } k \text{ son uchun } (kA)^* = kA^*$$

4. agar A uzluksiz bo'lsa u holda A^* ham uzluksiz bo'ladi.

1.2.9 Ta'rif: H Hilbert fazosi va $A \in L(H)$ operator berilgan bo'lsin. agar biror $A^*: H \rightarrow H$ operator vas ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operator A ga qo'shma operator deyiladi.

Hilbert fazosi holida A va A^* operatorlar aynan bitta fazoda aniqlangani uchun, ba'zan $A = A^*$ tenglik ham o'rinli bo'lishi mumkin.

1.2.10 Ta'rif: Agar $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

Tenglik o'rinli bo'lsa, A operator o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi.

Misol 1.2.3 l_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A: l_2 \rightarrow l_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n \geq 1} |a_n| = a < \infty$$

Operatorni qaraymiz. Unga qo'shma operatorni topamiz.

Yechish. $X = Y = l_2$ Hilbert fazolari bo'lgani uchun A ga Hilbert ma'nosidagi qo'shma operatorni topamiz. A operatorning chiziqli va chegaralangan. A ga qo'shmani toppish uchun (Ax, y) skalyar ko'paytmani qaraymiz, l_2 fazodagi skalyar ko'paytmadan foydalansak,

$$(Ax, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax)_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \overline{y_n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{a_n y_n} = (x, A^* y).$$

Bundan

$$A^*: l_2 \rightarrow l_2, \quad (A^* x)_n = \overline{a_n} x_n$$

ni olamiz. Bu yerdan A ning qo'shmasi o'ziga teng bo'lishi uchun $a_n, n \in \mathbb{N}$ sonlarning haqiqiy bo'lishi zarur va yetarlidir degan xulosa chiqadi.

Misol 1.1.4 $T: C_2[0, \pi] \rightarrow C_2[0, \pi]$ $(Tx)(t) = (t^2 + i \cos t)x(t)$ operatorga qo'shma operatorni toping.

$$(Tx, y) = \int_0^{\pi} (t^2 + i \cos t) x(t) \overline{y(t)} dt =$$

$$= \int_0^{\pi} x(t) \overline{(t^2 + i \cos t) y(t)} dt = (x, Ty)$$

$$(T^* y) = (t^2 - i \cos t) y(t)$$

1.2.4 Chiziqli operatorning spektri va rezolventasi.

Faraz qilaylik, $A: C^n \rightarrow C^n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror λ son uchun

$$Ax = \lambda x$$

Tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo'lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa xos vektor deyiladi.

Chekli o'lchamli fazolardagi chiziqli operatorlar uchun quyidagi ikki hol sodir bo'ladi:

1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni λ son A operator uchun xos qiymat, u holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas.

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan.

Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan 1 va 2 holatlardan farqli uchinchi holat ham bo'ladi.

3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax = \lambda x$ tenglama faqat nol yechimga ega, lekin $(A - \lambda x)^{-1}$ operator X ning hamma yerida aniqlangan yoki $\overline{Im(A - \lambda x)} \neq X$.

1.2.11 Ta'rif: Agar $\lambda \in C$ son uchun $A - \lambda x$ ga teskari operator mavjud bo'lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, λ son A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi,

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

1.2.12 Ta'rif: A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

Spektr quyidagi qismlarga ajraladi:

1.2.13 Ta'rif: a) Barcha xos qiymatlar to'plami A operatorning *nuqtali spektri* deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.

b) Agar λ son xos qiymat bo'lmasa va $\overline{Im(A - \lambda I)} \neq X$ ya'ni $A - \lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi hamma yerda zich emas. Bunday λ lar to'plami A operatorning *qoldiq spektri* deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

Bob 2

Panjarada bir zarrachali Shroedinger operatorini aniqlash

Faraz qilaylik, Z – bir o'lchamli panjara bo'lsin.

$$Z^d = \underbrace{Z \times Z \times \dots \times Z}_{d \text{ marta}}$$

Ya'ni

$$Z^d = \{z: z = (z_1, z_2, \dots, z_d), \quad z_i \in Z \quad i = \overline{1, d}\}$$

$l_2(Z^d)$ orqali Z^d da aniqlangan modulining kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar Hilbert fazosini belgilaymiz.

$$l_2(Z^d) = \left\{ f: \sum_{s \in Z^d} |f(s)|^2 < \infty \right\}$$

$l_2(Z^d)$ Hilbert fazosida quyidagi funksiyalarni misol keltiramiz.

Misol 2.0.1 $l_2(Z^d)$ da quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 1, & x = \theta \\ 0, & x \neq \theta \end{cases}$$

Funksiyaning normasi

$$\|\hat{f}\|_{l_2(Z^d)}^2 = \sum_{x \in Z^d} |\hat{f}(x)|^2 = 1$$

Misol 2.0.2 $l_2(Z^d)$ da quyidagi funktsiyani qaraymiz:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} 1 & |x| = 1 \\ 0 & \text{aks holda} \end{cases}$$

Funksiyaning normasi quyidagicha

$$\|\hat{f}\|_{l_2(Z^d)}^2 = \sum_{x \in Z^d} |\hat{f}(x)|^2 = \sum_{|x|=1} |\hat{f}(x)|^2 = \sum_{|x|=1} 1 = 2d < \infty$$

Z^d panjarada $z \in Z^d$ elementning moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$|z| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_d| = \sum_{i=1}^d |z_i|$$

$l_2(Z^d)$ fazoda aniqlangan quyidagi operatorni qaraymiz.

$$\widehat{H}_0: l_2(Z^d) \rightarrow l_2(Z^d)$$

Operatorning quyidagicha ifodalaymiz:

$$(\widehat{H}_0 \hat{f})(x) = \sum_{s \in Z^d} \hat{\varepsilon}(x) \hat{f}(x+s)$$

Ko'rsatish mumkinki $\widehat{H}_0$ operator chiziqli operator bo'ladi.

$\widehat{H}_0$ operatorni chiziqlilikka tekshiramiz:

$$\widehat{H}_0(\alpha_1 \hat{f}_1 + \alpha_2 \hat{f}_2) = \sum_{s \in Z^d} \hat{\varepsilon}(x) (\alpha_1 \hat{f}_1 + \alpha_2 \hat{f}_2)(x+s) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \alpha_1 \hat{\varepsilon}(s) \hat{f}_1(x+s) + \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \alpha_2 \hat{\varepsilon}(s) \hat{f}_2(x+s) = \\
&= \alpha_1 \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s) \hat{f}_1(x+s) + \alpha_2 \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s) \hat{f}_2(x+s) = \\
&= \alpha_1 (\widehat{H_0 f_1})(x) + \alpha_2 (\widehat{H_0 f_2})(x)
\end{aligned}$$

Chiziqli operator shartiga ko'ra $\widehat{H_0}$ operator chiziqli.

Endi uni chegaralanganlikka tekshiramiz:

Teorema: 2.0.1 $\widehat{H_0}$ operator butun fazoda anqilangan bo'ladi, agar

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(s)| < \infty$$

bo'lsa.

Isbot: $\|\widehat{H_0 f}\|^2 = \|\sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s) \hat{f}(x+s)\|^2$

Bu tenglikda $x+s=t$ belgilash olamiz.

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(t-x) \hat{f}(t) \right\|^2 &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(t-x) \hat{f}(t) \right|^2 \leq \\
&\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(t-x)| |\hat{f}(t)| \right)^2 \leq \\
&\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left[\sum_{t \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(t-x)| \cdot \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(t-x)| |\hat{f}(t)|^2 \right] \leq \\
&\leq C \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \cdot \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(t-x)| |\hat{f}(t)|^2 =
\end{aligned}$$

$$= C \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \left[|\hat{f}(t)|^2 \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varepsilon}(t-x)| \right] \leq C^2 \|f\|^2$$

$$\|\widehat{H_0} \hat{f}\| \leq C \|f\|$$

Tasdiq: Teoremaning shartidan $\widehat{H_0}$ operatorning chegaralanganligini hosil qilamiz. Teorama isbot bo'ldi.

Teorema: 2.0.2 $\widehat{H_0}$ operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi, agar

$$\hat{\varepsilon}(s) = \overline{\hat{\varepsilon}(-s)}$$

bo'lsa.

Isbot: $(\widehat{H_0} \hat{f}, \hat{g}) = (\hat{f}, \widehat{H_0} \hat{g})$ tenglikni tekshiramiz.

$l_2(\mathbb{Z}^d)$ fazodagi skalyar ko'paytmani aniqlanishidan

$$(\widehat{H_0} \hat{f}, \hat{g}) \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \widehat{H_0} \hat{f} \cdot \overline{\hat{g}(x)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \hat{\varepsilon}(s) \hat{f}(x+s) \overline{\hat{g}(x)} =$$

$x+s=t$ belgilash olamiz.

$$= \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(t) \overline{\hat{\varepsilon}(s) \hat{g}(t-s)} = \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(t) \cdot \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{\varepsilon}(s) \hat{g}(t-s)} =$$

$s = -s$ almashtirish olamiz.

$$= \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(t) \cdot \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{\varepsilon}(-s) \hat{g}(t+s)} = \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(t) \cdot \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} \overline{\hat{\varepsilon}(s) \hat{g}(t+s)} =$$

$$= (\hat{f}, \widehat{H_0} \hat{g})$$

Oxirgi tenglikka asosan $\widehat{H_0}$ operator o'z-o'ziga qo'shma operator ekan. Teorema isbot bo'ldi.

$$H_0 = \mathcal{F}^{-1} \widehat{H_0} \mathcal{F}$$

operator $\widehat{H_0}$ operatorning impuls ko'rinishi deyiladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$H_0: L_2(T^d) \rightarrow L_2(T^d)$$

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L_2(T^d)$$

Bunda $\varepsilon(p)$ funksiya quyidagicha:

$$\varepsilon(p) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot \sum_{s \in Z^d} \hat{\varepsilon}(s) e^{i(p,s)}$$

$$\mathcal{F}: L_2(T^d) \rightarrow l_2(Z^d)$$

$$(\mathcal{F}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int f(p) e^{-i(p,x)} dp$$

$$\mathcal{F}^{-1}: l_2(Z^d) \rightarrow L_2(T^d)$$

$$(\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{x \in Z^d} \hat{f}(x) e^{i(p,x)}$$

ga teng.

Quyidagi to'plamni kiritamiz.

$$X_n(\varepsilon) = \{p \in T^d \mid |\varepsilon(p)| > n\}$$

2.0.1 Ta'rif: $\varepsilon(p)$ funksiya muhim chegaralangan deyiladi, agar $\exists n \in \mathbb{N}$ topilib

$$\mu(X_n(\varepsilon)) = 0$$

bo'lsa.

Bunda μ – Lebeg o'lchovi.

Teorema: 2.0.3 H_0 operator chegaralangan bo'lishi uchun $\varepsilon(p)$ funksiya muhim chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: Zaruriyligi. H_0 operator chegaralangan bo'lsin, ya'ni $\forall f \in L_2(T^d)$ uchun $\exists C > 0 \quad \|H_0 f\| \leq C \|f\|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Teskaridan faraz qilamiz.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mu(X_n(\varepsilon)) > 0 \mid \varepsilon(p)| > n$ munosabatlar o'rinli bo'lsin. quyidagi funksiyalar ketma-ketligini aniqlaymiz:

$$f_0(p) = \begin{cases} \mu(X_n(\varepsilon)) & \text{agar } p \in X_n(\varepsilon) \\ 0 & \text{agar } p \in T^d \setminus X_n(\varepsilon) \end{cases}$$

Ko'rsatish mumkinki $f_0 \in L_2(T^d)$.

Haqiqatdan ham

$$\begin{aligned} \|f_0\|^2 &= \int_{T^d} |f_0(p)|^2 dp = \int_{T^d \setminus X_n(\varepsilon)} |f_0(p)|^2 dp + \int_{X_n(\varepsilon)} |f_0(p)|^2 dp = \\ &= \int_{X_n(\varepsilon)} |f_0(p)|^2 dp = [\mu(X_n(\varepsilon))]^2 \int_{X_n(\varepsilon)} 1 dp = \\ &= [\mu(X_n(\varepsilon))]^2 \cdot \mu(X_n(\varepsilon)) = [\mu(X_n(\varepsilon))]^3 < \infty \end{aligned}$$

f_0 funksiya $L_2(T^d)$ ning elementi.

$$\begin{aligned}
\|H_0 f_0\|^2 &= \int_{T^d} |(H_0 f_0)(p)|^2 dp = \int_{T^d} |\varepsilon(p) f_0(p)|^2 dp = \\
&= \int_{X_n(\varepsilon)} |\varepsilon(p) f_0(p)|^2 dp > n^2 \int_{X_n(\varepsilon)} |f_0(p)|^2 dp = n^2 \mu^2(X_n(\varepsilon)) \cdot \mu(X_n(\varepsilon)) > \\
&> n^2 \mu^3(X_n(\varepsilon))
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ uchun } \|H_0 f_0\| \geq n \mu(X_n(\varepsilon)) \sqrt{\mu(X_n(\varepsilon))}$$

Bu ziddlik, demak $\varepsilon(p)$ muhim chegaralangan ekan.

Yetarliligi. $\varepsilon(p)$ muhim chegaralangan bo'lsin.

$$\|H_0 f\|^2 = \int_{T^d} |\varepsilon(p) f(p)|^2 dp \leq n^2 \int_{T^d} |f(p)|^2 dp = n^2 \|f\|^2$$

$$\|H_0 f\| \leq n \|f\|$$

Bundan kelib chiqadiki H_0 operator chegaralangan ekan. Teorema isbot bo'ldi.

$$\hat{V}: l_2(Z^d) \rightarrow l_2(Z^d)$$

Operatorni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\hat{V} \hat{f} = \hat{v}(x) \hat{f}(x)$$

Ko'rsatish mumkinki $\hat{V}$ operator chiziqli operator.

Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned}
\hat{V}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= \alpha_1 (\hat{V} f_1) + \alpha_2 (\hat{V} f_2) = \\
&= \hat{v}(x)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 (\hat{v} f_1)(x) + \alpha_2 (\hat{v} f_2)(x)
\end{aligned}$$

$\hat{V}$ operator chiziqli operator bo'ladi.

Teorema: 2.0.4 $\hat{V}$ operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi, agar

$$\hat{v}(x) = \overline{\hat{v}(x)}$$

bo'lsa.

Isbot: $(\hat{V}\hat{f}, \hat{g}) = (\hat{f}, \hat{V}\hat{g})$ tenglikni tekshiramiz.

$$(\hat{V}\hat{f}, \hat{g}) = \sum_{x \in Z^d} (\hat{V}\hat{f})(x) \bar{\hat{g}}(x) =$$

$$= \sum_{x \in Z^d} \hat{v}(x) \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} = \sum_{x \in Z^d} \hat{f}(x) \overline{\hat{v}(x) \hat{g}(x)} = (\hat{f}, \hat{V}\hat{g})$$

Oxirgi tenglikdan $\hat{V}$ operator o'z-o'ziga qo'shma operator ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema: 2.0.5 $\hat{V}$ operator kompakt bo'lishi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Z^d, |x| > n} |\hat{v}(x)| = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: Yetarliligi. Faraz qilaylik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Z^d, |x| > n} |\hat{v}(x)| = 0$$

tenglik bajarilsin. Biz birlik shar I ning aksi nisbiy kompakt ekanini ko'rsatsak, yetarli. $\forall \varepsilon > 0$ son olamiz. n sonini

$$\sup_{x \in Z^d, |x| > n} |\hat{v}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladigan qilib tanlaymiz. Har bir $f \in \hat{V}(I)$ ga

$$f^*(x) = \begin{cases} (\hat{V}f)(x), & |x| \leq n \\ 0, & |x| > n \end{cases}$$

elementni mos qo'yamiz. Barcha f^* to'plamni I^* deb belgilaymiz. Ko'rsatish mumkinki, bu to'plam $\hat{V}(I)$ uchun $\frac{\varepsilon}{2}$ to'r tashkil etadi. Haqiqatdan ham shartga binoan

$$\begin{aligned} \|f^* - \hat{V}f\| &= \sqrt{\sum_{x \in Z^d} |(\hat{V}f)(x) - f^*(x)|^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{x \in Z^d} |\hat{v}(x)f(x)|^2} \leq \sup_{x \in Z^d, |x| > n} \{|\hat{v}(x)|\} \|f\| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Aniqlanishiga ko'ra I^* chekli o'lchamli. U holda uning chekli $\frac{\varepsilon}{2}$ to'ri mavjud. Bu to'r $\hat{V}(I)$ uchun ham chekli ε to'rni hosil qiladi. Demak $\hat{V}(I)$ nisbiy kompakt.

Zaruriyligi. Aytaylik, $\hat{V}$ kompakt bo'lsin. $l_2(Z^d)$ dagi ONS ni qaraymiz:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1, & n = x \\ 0, & n \neq x \end{cases}$$

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Z^d, |x| > n} |\hat{v}(x)| \neq 0$$

bo'lsin, shunday $\varepsilon_0 > 0$ va $n \in \mathbb{N}$ $|x| > n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $x \in Z^d$ lar uchun

$$|\hat{V}(x)| > \varepsilon_0 \quad x \in Z^d$$

tengsizlik bajariladi. U holda o'sha shartni qanoatlantiruvchi $k_1 \neq k_2$ larda

$$\|\hat{V}\phi_{k_1} - \hat{V}\phi_{k_2}\| = \sqrt{|\hat{V}(k_1)|^2 + |\hat{V}(k_2)|^2} > \varepsilon_0 > 0$$

munosabat o'rinli. Bu yerdan $\{\hat{V}\phi_n\}$ sistema chegaralangan ketma-ketlik bo'lishiga qaramay undan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib bo'lmaydi degan xulosaga kelamiz. Bu $\hat{V}$ ning kompaktligiga zid.

$l_2(Z^d)$ fazoda aniqlangan quyidagi ko'rinishdagi

$$\widehat{H}_\mu: l_2(Z^d) \rightarrow l_2(Z^d)$$

operatorni qaraymiz.

$\widehat{H}_\mu$ operator quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$\widehat{H}_\mu = \widehat{H}_0 - \lambda \hat{V}$$

Ya'ni

$$(\widehat{H}_\mu \hat{f})(x) = (\widehat{H}_0 \hat{f})(x) - \mu (\hat{V} \hat{f})(x) \quad (1)$$

Bunda $\mu > 0$.

Faraz qilaylik, $\hat{\varepsilon}(\cdot)$ va $\hat{v}(\cdot)$ funksiyalar uchun 1, 2, 3, 4, 5 teoremlarning shartlari o'rinli bo'lsin.

U holda (1) formula bilan aniqlangan operator chiziqli, chegaralangan, o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi va bu operator bir zarrachali Schroedinger operatori deyiladi.

$\widehat{H}_0$ - operator erkin Hamiltonian deyiladi.

$\hat{V}$ - operator kvant zarrachaning $\hat{v}$ potensial maydondagi harakatini ifodalaydi.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishi quyidagi ko'rinishdagi bir zarrachali Shroedinger operatorini aniqlashdan iborat:

$$(\widehat{H}_\mu \hat{f})(x) = (\widehat{H}_0 \hat{f})(x) - \mu(\widehat{V} \hat{f})(x)$$

Mazkur ishda $\widehat{H}_0$ va $\widehat{V}$ operatorlar kvadratining moduli bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosi $l_2(Z^d)$ ning elementi. Bu operatorlar chiziqli chegaralangan va o'z-o'ziga qo'shma operator hisoblanadi. Isbot qilingan teoremlar yordamida $\widehat{H}_\mu$ operator $l_2(Z^d)$ panjarada aniqlangan. Bu operator chiziqli, chegaralanganlikka va o'z-o'ziga qo'shmalikka tekshirilgan.

Birinchi bobda asosiy natijalarni bayon qilishda foydalaniladigan kerakli ma'lumotlar, ta'rif, teoremlar va izohlar keltirilgan bo'lib, ikkinchi bobda esa asosiy teoremlar isbot qilingan va olingan natijalar bayon qilingan.

Bitiruv malakaviy ishidan olingan natijalarni kvant mexnikasi, qattiq jismlar fizikasi, statistik fizika, o'z-o'ziga qo'shma chiziqli operatorlar spektral nazariyasini rivojlantirishda qo'llash mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] S.N.Laqaev, Sh. Y. Holmatov: Hilbert fazolaridagi o'z-o'ziga qo'shma operatorslar. Samarqand, 2010.
- [2] S.Albeverio, S.N.Laqaev, Z.N.Muminov: Schro'dinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5(2004) 1-30
- [3] Saidakhmad N.Lakaev: The existence and positivity of eigenvalues of the two-particle Schro'dinger operators on lattices. Samarqand State University
- [4] M.Reed and B.Simon: Methods of modern mathematical physics.
I: Functional analysis. Academic Press, N.Y., London 1972
- [5] A.N.Kolmogorov, S.V.Fomin: Elementi teorii funktsiy I funktsionalnogo analiz. "Nauka" , Moskva, 1976
- [6] V.A.Trenogin: Functional analysis. "Nauka", Moscow 1980.
- [7] M.Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics.
IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978