

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

MALAKAVIY BITIRUV ISHI

“PARAMETRGA BOG`LIQ XOSMAS
INTEGRALLARNING
YAQINLASHISHI”

BAJARDI:	4-bosqich talabasi
	BOBOMURODOV S.
ILMIY RAXBAR :	TO`RAQULOVD.D.

SAMARQAND -2013

M U N D A R I J A

KIRISH.....	3
I BOB Parametrga bog`liq integrallar.....	4
1-§ Ikki o`zgaruvchili funksianing nuqtali va tekis yaqinlashish tushunchalari.....	4
2-§ Parametrga bog`liq xos integrallar.....	6
II BOB Parametrga bog`liq integrallarning tekis yaqinlashishi	
1-§ Parametrga bog`liq xosmas integral tushunchasi.....	13
2-§ Parametrga bog`liq integrallar yordamida berilgan maxsus funksiyalar.....	20
3-§ Yaqinlashish alomatlarining tatbiqlariga doir misollar.....	25
XULOSA	30
ADABIYOTLAR RO`YXATI.....	31

Kirish

Masalaning qo'yilishi. Parametrga bog'liq xos va xosmas integrallarni hamda ularning xossalarini o'rganish. Integrallarning nuqtali va tekis yaqinlashish tushunchalarini ta'riflash va bu tushunchalarni masalalar yechishga tatbiq qilish.

Masalaning dolzarbligi. Parametrga bog'liq integrallar bilan ifodalangan funksiyalarni o'rganish muhim ahamiyatga egadir. Ammo bundan tashqari bu xossalar, ayniqsa umumlashtirilgan integrallarni hisoblashda juda ko'p tatbiqlarga ega, xususan Eyler integrallari bunga misol bo'la oladi.

Ishning naqsad va vazifalari: Parametrga bog'liq integrallarning xossalarini va ularning tatbiqlarini o'rganish.

Tadqiqot metodlari: ishni bajarishda matematik analiz, funksional analiz va garmonik analiz usullaridan foydalanilgan.

Ishning amaliy ahamiyati: Bitiruv ishida qo'llanilgan usullar va natijalar kelgusida parametrga bog'liq integrallar nazariyasining rivojlanishida qo'llanilishi, shuningdek, matematik analizning tadbiqlarini o'rganishda foydali qo'llanma vazifasini o'tashi mumkin.

Ishning tuzilishi: Mazkur bitiruv ishi parametrga bog'liq xos va xosmas integrallarni hamda ularning xossalarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, kirish qismi, 2 ta bob, 5 ta paragraf, xulosa va adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

Bajarilgan ishlarning qisqacha mazmuni:

1-bob ikkita paragrafdan tashkil topgan bo'lib, birinchi paragrafda asosiy tushunchalarning ta'riflari va ularga doir misollar, ikkinchi paragrafda asosiy tasdiqlar va ularning isbotlari keltirilgan bo'lib.

2-bob Parametrga bog'liq xosmas integrallarni hamda ularning xossalarini o'rganishga bag'ishlangan. Bob oxirida tasdiqlarning tatbiqlariga doir masalalar yechib ko'rsatilgan.

I-BOB Parametrga bog'liq integrallar.

1 §. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning nuqtali va tekis yaqinlashish tushunchalari.

Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya $G = G_x \cap G_y$ M^2 to'plamda aniqlangan bo'lib, $x \in G_x, y \in G_y$ da o'zgarsin. Agar x ni tayinlab, unga G_x to'lamdan olingan tayin bir x_1 qiymatni bersak, u holda aniqlanish sohasi $D(f) = G_y|_{x=x_1}$ to'plamdan iborat bo'lgan $f(x_1,y)$ bir o'zgaruvchili funksiya ega bo'lamiz. Bunda $G_y|_{x=x_1}$ to'plam $f(x_1,y)$ funksiya ma'noga ega bo'lgan barcha $y \in G_y$ lardan tashkil topadi. Xuddi shunga o'xshash bir o'zgaruvchili $f(x,y_1)$ funksiyaning ham qarash mumkin bo'ladi.

1-ta'rif. Agar bir o'zgaruvchili $f(x_1,y)$ funksiya $y \in y_0$ da chekli limitga ega bo'lsa, u holda $f(x,y)$ funksiya $y \in y_0$ da $x = x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi va

$$A_1 = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_1, y)$$

limitga $f(x,y)$ funksiyaning $y \in y_0$ da $x = x_1$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Shunga o'xshash $f(x,y)$ funksiyaning $x = x_1$ nuqtadagi $y \in y_0 - 0, y \in y_0 + 0$ da bir tomonli limitlarini ham qarash mumkin.

1-misol. $f(x,y) = x + y^2$, $(x,y) \in M^2$ funksiyaning $y \in -1$ da $x = 2$ nuqtadagi limiti $\lim_{y \rightarrow -1} (2 + y^2) = 3$ bo'lib, $f(x,y) = x^2 + y^2$ funksiyaning $x \in 2$ da $y = 1$ nuqtadagi limiti esa $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ gat eng bo'ladi.

2-ta'rif. Agar har bir tayinlangan $x \in X$ da $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = A(x)$ limit mavjud bo'lsa, $f(x,y)$, $(x,y) \in G$ funksiyaning $X \in M_x$ to'plamdagi qismi $y \in y_0$ da $A(x)$ bir o'zgaruvchili funksiya yaqinlashadi deyiladi.

Bu holda X ni f funksiyaning $y \in y_0$ da yaqinlashish oralig'i, $A(x)$ funksiyaning esa f ning $y \in y_0$ dagi limitik funksiyasi deb ataymiz. Keltirilgan ta'rifni qisqacha quyidagicha bayon qilish mumkin:

$$y \in y_0 \text{ da } f(x,y) \rightarrow A(x), \text{ " } x \in X.$$

2-Misol. $\lim_{y \rightarrow -1} (x + y^2) = x + 1$ limit " $x \in \mathbb{R}$ " da mavjud bo'lgani uchun

$f(x,y) = x + y^2$, $(x,y) \in M^2$ funksiya $y \in -1$ da $A(x) = x + 1$ funksiya $\mathbb{R}$ to'plamda nuqtali yaqinlashadi.

Bundan tashqari bu ta'rifni bizga ma'lum " $\epsilon - \delta$ " tilda quyidagicha bayon qilish mumkin:

3-ta'rif. Agar " $\epsilon > 0$ va har bir $x \in X$ nuqta uchun ϵ va x larga bog'liq shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, barcha $y \in G_y$ lar uchun $|f(x,y) - A(x)| < \epsilon$

tengsizlik bajarilsa, $f(x,y)$, $(x,y) \in OG$ funksiya $X \in MG_x$ to'plamda " $x \in OX$ uchun $A(x)$ funksiyaga yaqinlashadi deyiladi.

Buni matematik simvollar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\text{def} : f(x,y) \underset{y \in Y_0}{\mathbb{R}} A(x); "x \in OX \text{ BI } "e > 0, "x \in OX, \$d > 0,$$

$$"y \in OG_y, 0 < |y - y_0| < d_{ex} : |f(x,y) - A(x)| < e.$$

4-ta'rif.

$$\text{def} : f(x,y) \underset{y \in \Gamma}{\mathbb{R}} A(x); "x \in OX \text{ BI } "e > 0, "x \in OX, \$d > 0,$$

$$"y \in OG_y, y > d_{ex} : |f(x,y) - A(x)| < e.$$

Funksiya limitining Geyne ta'rifi yordamida ifodalasak, yuqoridagi ta'riflarni simvollar yordamida quyidagicha ifodalash mumkin bo'ladi:

5-ta'rif.

$$\text{def} : f(x,y) \underset{y \in \Gamma}{\mathbb{R}} A(x); "x \in OX \text{ BI } "\{y_n\}_{n=1}^{\Gamma}, y_n \in OG_y, n \in \Gamma,$$

$$y_n \underset{n \in \Gamma}{\mathbb{R}} y_0 : f(x,y_n) \underset{n \in \Gamma}{\mathbb{R}} A(x), "x \in OX.$$

6-ta'rif.

$$\text{def} : f(x,y) \underset{y \in \Gamma}{\mathbb{R}} A(x); "x \in OX \text{ BI } "\{y_n\}_{n=1}^{\Gamma}, y_n \in OG_y, n \in \Gamma,$$

$$y_n \underset{n \in \Gamma}{\mathbb{R}} \Gamma : f(x,y_n) \underset{n \in \Gamma}{\mathbb{R}} A(x), "x \in OX.$$

Shunday qilib, funksiyaning to'plamda yaqinlashishining Geyne ta'rifi yordamida funksional ketma-ketliklarning yaqinlashish tushunchasi ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun umumlashtirilar ekan.

7-ta'rif. Agar " $e > 0$ uchun e ga bog'liq shunday $d > 0$ son mavjud bo'lib, $0 < |y - y_0| < d$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $y \in OG_y$ va " $x \in OX$ lar uchun $|f(x,y) - A(x)| < e$ tengsizlik bajarilsa, $f(x,y)$, $(x,y) \in OG$ funksiya $X \in MG_x$ to'plamda $A(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi va $f(x,y) \underset{\mathbb{R}}{A(x)}$ kabi belgilanadi.

Matematik simvollar yordamida bu ta'rifni qisqacha quyidagicha bayon qilish mumkin:

$$\text{def} : f(x,y) \underset{\mathbb{R}}{A(x)}, "x \in OX \text{ BI } "e > 0, \$d > 0,$$

$$"y \in OG_y, 0 < |y - y_0| < d : |f(x,y) - A(x)| < e, "x \in OX.$$

Keltirilgan ta'rifdan ko'rinib turibdiki, agar $f(x,y)$ funksiya biror $X \in MG_x$ to'plamda tekis yaqinlashsa, u holda u shu to'plamda nuqtali ham yaqinlashadi.

3-Misol. $f(x,y) = x + y^2$ funksiyaning $A(x) = x + 1$ funksiyaga $y \in \mathbb{R} - 1$ da tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz, ya'ni " $e > 0, \$d > 0$ bo'lib, " $y \in \check{Y}$ va $0 < |y + 1| < d$ lar uchun $|f(x,y) - A(x)| = |x + y^2 - x - 1| = |y^2 - 1| < e, "x \in \check{Y}$ tengsizlikning bajarilishini isbotlaylik. Haqiqatan ham,

$$|y^2 - 1| = |y + 1| |y - 1| \leq |y + 1| (|y + 1| + 2) < d(d + 2) = e \quad \text{bo'lgani}$$

uchun $d(d + 2) = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi $d = -1 + \sqrt{1 + e}$ ni topamiz.

Demak, $y \in \mathbb{R} - 1$ da $x + y^2 \underset{\mathbb{R}}{A(x)}$, " $x \in \check{Y}$.

8-ta'rif. Agar $\lim_{y \in Y_0} \sup_{x \in X} |f(x,y) - A(x)| = 0$ munosabat bajarilsa, u holda $f(x,y)$ funksiya $y \in Y_0$ da $X \in M_{G_x}$ to'plamda " $x \in X$ uchun $A(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

7-va 8-ta'riflar teng kuchli bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$"e > 0, \exists d_e > 0, "y \in G_y, 0 < |y - y_0| < d : |f(x,y) - A(x)| < e, "x \in X \text{ IO}$$

$$\text{IO } \lim_{y \in Y_0} \sup_{x \in X} |f(x,y) - A(x)| = 0.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\lim_{y \in Y_0} \sup_{x \in X} |f(x,y) - A(x)| = 0 \text{ IO } "e > 0, \exists d_e > 0, "y \in G_y, 0 < |y - y_0| < d :$$

$$\sup_{x \in X} |f(x,y) - A(x)| < e \text{ IO } |f(x,y) - A(x)| < e.$$

Yuqoridagi qaralgan 3-misoldagi funksiyaning 8-ta'rif bo'yicha tekis yaqinlashishini tekshirib ko'raylik. Haqiqatan ham,

$$\lim_{y \in Y_0} \sup_{x \in X} |x + y^2 - (x + 1)| = \lim_{y \in Y_0} |y^2 - 1| = 0 \text{ IO } f^{\otimes}(x + 1).$$

2§. Parametrga bog'liq xos integrallar.

Faraz qilaylik, $n + 1$ o'zgaruvchili $f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ funksiya $G = \{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}, y_i \in OY_i, i = (1, n)\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib, parametr y_i larning har bir tayinlangan qiymatlarida $[a, b]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi funksiya bo'lsin. U holda

$$I_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx, \quad y_i \in OY_i, \quad i = (1, n) \quad (1)$$

integral n o'zgaruvchili funksiyaning aniqlaydi. Bu holda (1) integralga *parametrga bog'liq aniq integral* deyiladi.

$$\textbf{1-misol.} \int_0^1 2(p^2x + q^2x + 1)dx = [p^2x^2 + q^2x^2 + 2x]_{x=0}^{x=1} = p^2 + q^2 + 2$$

integral p, q parametrlarga bog'liq bo'lib, $I(p, q) = p^2 + q^2 + 2$, " $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ funksiyaning aniqlaydi.

Biz mazkur paragrafda bitta parametrga bog'liq integrallarni va ularning xossalari o'rganamiz.

Faraz qilaylik, $f : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \in M_Y$, $Y \in M_Y$ - ixtiyoriy to'plam, $[a, b] \times Y = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in Y\}$ bo'lib, f funksiya " $y \in Y$ uchun $[a, b]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin.

1-ta'rif. Quyidagi

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (2)$$

funksiyaga Y to'plamda aniqlangan parametrga bog'liq xos integral deyiladi.

Bu integralning quyidagi sodda $Y = [c, d]$ bo'lgan holda xossalarini o'rganamiz.

1-teorema. Agar f funksiya $X = [a, b] \times [c, d]$ to'rtburchakda uzluksiz bo'lsa, u holda $I(y)$ funksiya $[c, d]$ kesmada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $y_0 \in [c, d]$ va $\varepsilon > 0$ larni olib shunday $\delta > 0$ mavjudligini ko'rsatamizki, $|y - y_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $y \in [c, d]$ nuqtalar uchun $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsin. Π — to'rtburchak $\mathbb{R}^2$ tekislikdagi kompakt to'plam bo'lgani uchun Kantor teoremasiga ko'ra f funksiya Π da tekis uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun tanlangan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ ni ko'rsatish mumkinki,

$$|x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta \Rightarrow (x', y') \in [a, b] \times [c, d],$$

munosabatlar bajarilganda

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

tengsizlik bajariladi. $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y_0$ bo'lsin deylik. U holda

$$|I(y) - I(y_0)| = \left| \int_a^b [f(x, y) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx < \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon.$$

Hosil bo'lgan tengsizlik $I(y)$ funksiyaning nafaqat uzluksizligini, balki $[c, d]$ kesmada tekis uzluksizligini ham isbotlaydi, chunki bu yerda δ soni y_0 ga bog'liq emas. ■

2-teorema. Agar f funksiya Π to'rtburchakda uzluksiz bo'lsa, u holda $I(y)$ funksiya $[c, d]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik bajariladi:

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (3)$$

Isbot. $I(y)$ funksiyaning integrallanuvchi ekanligi oldingi 1-teorema va uzluksiz funksiylarning uzluksizligi haqidagi teoremalardan bevosita kelib chiqadi. (3) tenglik esa $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ karrali integral mavjud bo'lgani sababli

karrali integrallarni takroriy integralga keltirish haqidagi teorema ko'ra o'rinli bo'ladi.

3-teorema. Agar f funksiya Π to'rtburchakda o'zi va f'_y usuliy hosilasi uzluksiz bo'lsa, u holda $I(y)$ funksiya $[c,d]$ kesmada differensiallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik bajariladi:

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y) dy = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx. \quad (4)$$

Isbot. f'_y xususiy hosila Π da uzluksiz bo'lgani uchun yuqoridagi 2-teoremani qo'llab "y $O[c,d]$ uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$\int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x,h)}{\partial h} dh = \int_c^y dh \int_a^b \frac{\partial f(x,h)}{\partial h} dx. \quad (5)$$

(5) tenglikning chap tomonini Nyuton-Leybnis formulasiga ko'ra soddalashtiramiz.

$$\int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f(x,h)}{\partial h} dh = \int_a^b dx \left[f(x,h) \right]_c^y = \int_a^b f(x,y) dx - \int_a^b f(x,c) dx = I(y) - I(c)$$

$J(h)$ orqali (5) ning o'ng tomonidagi ichki integralni belgilaymiz. U holda (5) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$I(y) - I(c) = \int_c^y J(h) dh. \quad (6)$$

Yuqorida ko'rsatilganidek, $J(h)$ funksiya $[c,d]$ da uzluksiz bo'ladi. Ammo yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integralning hosilasi haqidagi teorema ko'ra (6) ning o'ng tomonidagi funksiya va demak chap tomonidagi integral ham $[c,d]$ da differensiallanuvchi bo'ladi. Yan shu teorema ko'ra (6) dan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_c^y J(h) dh = J(y) = \int_a^b \frac{\partial f(f,y)}{\partial y} dy.$$

Endi umumiyroq bo'lgan, ya'ni nafaqat integral ostidagi balki integrallash chegaralari ham parametrga bog'liq bo'lgan holni qaraymiz. Faraz qilaylik, $f(x,y)$

funksiya $X = [a, b] \times [c, d]$ to'rtburchakda aniqlangan, x bo'yicha $[a, b]$ kesmada har bir $y \in [c, d]$ uchun integrallanuvchi $a(y), b(y)$ funksiyalar $[c, d]$ kesmada berilgan va " $y \in [c, d]$ uchun $a \leq a(y) \leq b(y) \leq b$ tengsizlik bajarilsin. Quyidagi integralni qaraymiz

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx. \quad (7)$$

4-teorema. $f(x, y)$ funksiya $X = [a, b] \times [c, d]$ to'rtburchakda, $a(y), b(y)$ funksiyalar $[c, d]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda (7) tenglik yordamida aniqlangan $I(y)$ funksiya $[c, d]$ kesmada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $y \in [c, d]$ bo'lsin. $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0)$ tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Buning uchun berilgan integralni uning additivlik xossasiga ko'ra quyidagicha uchta integrallarga ajratamiz:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y) dx + \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y) dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx = \\ &= \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y) dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx - \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x, y) dx = I_0(y) + I_b(y) - I_a(y). \end{aligned} \quad (8)$$

Har bir integralni alohida qarab chiqamiz. Ulardan birinchisi integrallash chegarasi o'zgarmas bo'lgan integraldir. Uning uzluksizligi yuqorida isbotlangan teoremani e'riborga olsak, o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. Shuning uchun $\lim_{y \rightarrow y_0} I_0(y) = I_0(y_0)$ tenglik o'rinli.

Ikkinchi integral uchun esa, $f(x, y)$ funksiya Π da uzluksiz bo'lgani uchun, shunday M o'zgarmas son topiladiki,

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (x, y) \in X$$

munosabat bajariladi, ya'ni funksiya chegaralangan bo'ladi. Bu holda

$$\left| \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx \right| \leq M |b(y) - b(y_0)|$$

tengsizlikning bajarilishini ko'rish qiyin emas. $b(y)$ funksiya $[c, d]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun $y \rightarrow y_0$ da $b(y) - b(y_0) \rightarrow 0$ va demak $\lim_{y \rightarrow y_0} I_b(y) = I_0(y_0)$ tenglik bajariladi.

Xuddi shunday $\lim_{y \rightarrow y_0} I_a(y) = I_0(y_0)$ tenglikning bajarilishi ham isbotlanadi.

Shunday qilib,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} I_0(y) + \lim_{y \rightarrow y_0} I_b(y) - \lim_{y \rightarrow y_0} I_a(y) = I_0(y_0)$$

tenglik isbotlandi.

5-teorema. $f(x, y)$ funksiya $X = [a, b] \times [c, d]$ to'rtburchakda, $a(y), b(y)$ funksiyalar $[c, d]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda (7) tenglik yordamida aniqlangan $I(y)$ funksiya $[c, d]$ kesmada differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi quyidagi formula yordamida hisoblanadi.

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f(b(y), y) - f(a(y), y) \quad (9)$$

Isbot. Berilgan funksiya oraliqda differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lishi kerak. Shuning uchun $[c, d]$ kesmaning y_0 nuqtasini olib $I(y)$ ning y_0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko'rsatamiz va $I'(y_0)$ hosila uchun (9) formula o'rinli ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun xuddi 4-teoremaning isbotidagi kabi yo'l tutamiz va (8) tenglikdagi har bir integralning differensiallanuvchanligini ko'rsatib har birining hosilasini hisoblaymiz. (8) dagi birinchi integralning differensiallanuvchanligi oldingi teoremda ko'rsatilgan edi. Shuning uchun

$$I'_0(y_0) = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} dx \quad (10)$$

tenglik bajariladi. Endi (8) ning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchining hosilasini topamiz.

Hosila ta'rifiga ko'ra,

$$I'_b(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{I_b(y) - I_b(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx$$

tenglik o`rinli. Integral ostidagi funksiya  $x$  o`zgaruvchi bo`yicha uzluksiz bo`lgani uchun, aniq integralning xossasiga ko`ra shunday $c(y)$, $b(y_0) \leq c(y) \leq b(y)$ topiladiki, uning uchun

$$\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx = f(c(y), y)(b(y) - b(y_0)).$$

tenglik bajariladi. Ikkinchi tomondan,

$$\begin{aligned} I'_b(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} f(c(y), y)(b(y) - b(y_0)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} f(c(y), y) \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{b(y) - b(y_0)}{y - y_0} = f(b(y_0), y_0) b'(y_0), \end{aligned}$$

tengliklar o`rinli, chunki birinchi limit  $f$  funksiya  $X$  da uzluksiz bo`lgani uchun, ikkinchi limit esa $b(y)$ funksiyaning differensiallanuvchi bo`lgani uchun mavjud. Shunday qilib,

$$I'_b(y_0) = f(b(y_0), y_0) b'(y_0). \quad (11)$$

Xuddi shunday usulda uchinchi qo`shiluvchining ham differensiallanuvchanligi isbotlanadi va

$$I'_a(y_0) = f(a(y_0), y_0) a'(y_0) \quad (12)$$

tenglik bajariladi.

Shunday qilib (8) dagi har uchchala integrallar y_0 nuqtada differensiallanuvchi va demak, $I(y)$ funksiya ham y_0 nuqtada differensiallanuvchi bo`ladi hamda

$$I'(y_0) = I'_0(y_0) + I'_b(y_0) - I'_a(y_0) \quad (13)$$

tenglik bajariladi. Bundan esa isbotlanishi talab qilinayotgan formula hosil bo`ladi.

2-misol. $I(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x - y) dx$ integralni qaraymiz.

Integral ostidagi funksiya $y = x$ to`g`ri chiziqlarning nuqtalarida uzilishga ega. Shunday bo`lsada, integralni bevosita hisoblash natijasida u  $y$  ning uzluksiz funksiyasi bo`lishiga ishonch hosil qilamiz.

$$1. y \in [0, 1] \text{ da } I(y) = \int_0^1 dx = 1;$$

$$2. 0 < y < 1 \text{ da } I(y) = - \int_0^y dx + \int_y^1 dx = -y + (1 - y) = 1 - 2y.$$

$$3. y \geq 1 \text{ da } I(y) = - \int_0^1 dx = -1.$$

$I(y)$ funksiyaning $y = 0$ va $y = 1$ nuqtalardagi chap va o'ng limitlarining bir xil ekanligini ko'rish qiyin emas. Shuning uchun bu funksiya uzluksiz bo'ladi.

3-misol. $I(y) = \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} dx$ integralni qaraymiz.

Integral ostidagi funksiya $(0,0)$ nuqtada uzilishga ega bo'lsada, integralni hisoblab uning $[0,1]$ kesmada integrallanuvchi funksiyani hosil qilishini ko'ramiz.

$$I(y) = \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \int_0^1 d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Demak,

$$\int_0^1 I(y) dy = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctg y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ammo bu integralni paramtr bo'yicha integrallash butunlay boshqa natijaga olib keladi.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy &= \int_0^1 dx \int_0^1 d\left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}\right) \\ &= - \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} dx = - \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = - \frac{\pi}{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

3-misol. $I(y) = \int_y^{y^2} \frac{\sin xy}{x} dx$ integralni qaraymiz.

Berilgan integral ixtiyoriy $[c,d]$ kesmada 5-teorema shartlarini qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas. Uning $I'(y)$ hosilasini (9) formula yordamida topamiz.

$$\begin{aligned}
I'(y) &= \int_y^{y^2} \cos xy dx + \frac{\sin y^3}{y^2} \cdot 2y - \frac{\sin y^2}{y} \cdot 1 = \\
&= \frac{\sin xy}{y} \Big|_y^{y^2} + 2 \frac{\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} = \frac{\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} + 2 \frac{\sin y^3}{y} - \frac{\sin y^2}{y} = \\
&= 3 \frac{\sin y^3}{y} - 2 \frac{\sin y^2}{y}.
\end{aligned}$$

II BOB Parametrga bog'liq integrallarning tekis yaqinlashishi

1§. Parametrga bog'liq xosmas integrallar va ularning asosiy xossalari.

1-misol. Quyidagi 1-tur xosmas integral p ning $p \geq 0$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarida aniqlangan:

$$\int_0^{+\infty} e^{px} dx. \quad (1)$$

1-tur xosmas integral ta'rifiga ko'ra

$$\int_0^{+\infty} e^{px} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{px} dx = p \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{p}} \Big|_{x=0}^{x=x} = \begin{cases} \frac{1}{p}, & p < 0 \\ +\infty, & p > 0 \end{cases}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $p > 0$ qiymatlarda (1) integral uzoqlashuvchi bo'lar ekan. Keltirilgan misoldan shu narsa ayon bo'ladiki, integrallash jarayonida p - parametr sifatida qatnashadi. Bunday hollarda (1) parametrga bog'liq deyiladi.

Umuman, y ning hech bo'lmaganda bitta qiymatida xosmas bo'lgan

$$\int_a^b f(x,y) dx, \quad y \in OY, \quad -\infty < a < b < +\infty \quad (2)$$

ko'rinishdagi integral parametrga bog'liq xosmas integral deb ataladi.

Masalan,

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-y}} \quad (3)$$

integral p parametrning $[0,5]$ kesmaga tegishli ixtiyoriy qiymatlarida xosmas integral bo'ladi.

Kelgusida mulohazalarni bayon qilish maqsadida quyidagilarga kelishib olamiz:

- 1) $a, b \in \mathbb{R}$ va $b = +\infty$ bolsin;
- 2) $y \in OY$ M ning ixtiyoriy tayinlangan qiymatida $f(x,p)$, " $x \in [a,b]$ ", " $p \in OY$ " funksiya " $z, [a,z] \subset M[a,b]$ " oralig'ida xos ma'noda integrallanuvchi bo'lsin.

Bu kelishuvlar parametrga bog'liq xosmas integral tushunchasini

$$\text{def: } J(y) = \int_a^b f(x,p) dx = \lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x,y) dx; \quad "y \in OY \quad (4)$$

Tabiiyki, xosmas integral bir emas, balki bir nechta parametrlarga bog'liq bo'lishi mumkin. Biz odatda, bitta parametrغا bog'liq xosmas integralni qaraymiz.

Parametrning mumkin bo'lgan $y = y_0$ qiymatida (2) integral odatdagi

$$J(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx \quad (5)$$

xosmas integralga aylanadi.

1-ta'rif. Agar (5) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda parametrغا bog'liq (4) xosmas integral $y = y_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi. Agar (5) uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (4) integral $y = y_0$ nuqtada uzoqlashuvchi deyiladi.

2-ta'rif. Agar parametrغا bog'liq (4) xosmas integral $Y \in M^{\check{Y}}$ to'plamning har bir p nuqtasida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (4) integral $Y \in M^{\check{Y}}$ to'plamda yaqinlashuvchi deyiladi.

Masalan, $\int_0^{+\Gamma} e^{\frac{x}{y}} dx$ integral $Y = (-\Gamma, 0)$ to'plamda yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagi kelishuvlarga muvofiq parametrغا bog'liq integralning $Y \in M^{\check{Y}}$ to'plamda yaqinlashishini quyidagi ma'noda tushunish kerak:

$$\text{def : } \lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx, \quad "y \in OY \quad (6)$$

1-teorema. (Parametrغا bog'liq xosmas integralning to'plamda yaqinlashishi uchun zaruriy shart)

Agar (4) parametrغا bog'liq xosmas integral $Y \in M^{\check{Y}}$ to'plamda yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda har bir tayinlangan $y \in OY$ qiymatda

$$\lim_{z \rightarrow b-0} \int_z^b f(x, y) dx = 0, \quad "y \in OY$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. (4) xosmas integral $Y \in M^{\check{Y}}$ to'plamda yaqinlashuvchi bo'lgani uchun integralning additivlik xossasiga ko'ra quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x, y) dx = \int_a^z f(x, y) dx + \int_z^b f(x, y) dx, \quad "y \in OY, "z \in O[a, b).$$

Bundan

$$\int_z^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^z f(x, y) dx$$

ga ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikda $z \rightarrow b-0$ da limitga o'tsak va (6) tenglikni e'tiborga olsak,

$$\lim_{z \rightarrow b-0} \int_z^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y) dx - \lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x, y) dx = 0$$

ni hosil qilamiz.

3-ta'rif. Agar quyidagi integral yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\int_a^b |f(x, y)| dx, \quad "y \in OY \quad (7)$$

u holda (4) parametrغا bog'liq xosmas integral Y to'plamda absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

2-toerema. Agar (4) parametrغا bog'liq xosmas integral P to'plamda absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu integral shu to'plamda yaqinlashuvchi ham bo'ladi.

Funksional qatorlar uchun muhim boʻlgan tekis yaqinlashuvchilik tushunchasi parametrga bogʻliq xosmas integrallar uchun ham muhim ahamiyatga ega.

3-taʼrif. Agar (2) parametrga bogʻliq xosmas integralning qoldigʻi nolga tekis intilsa, yaʼni " $\epsilon > 0$, uchun A_0 topilib, " $A > A_0$," y OY ni qanoatlantiruvchi barcha y lar uchun

$$\left| \int_A^{+\Gamma} f(x,y)dx \right| < \epsilon \quad (8)$$

tengsizlik bajarilsa, (2) xosmas integral Y toʻplamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

2-toerema. (2) integral Y toʻplamda tekis yaqinlashuvchi boʻlishi uchun quyidagi Koshi shartining bajarilishi zarur va yetarli: " $\epsilon > 0$ ichun faqat ϵ ga bogʻliq A_0 topilib, " $A', A'' > A_0$ lar uchun

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| < \epsilon \quad (9)$$

tengsizlik bajarilsin

Isbot. Faraz qilaylik, (2) integral Y toʻplamda tekis yaqinlashuvchi boʻlsin. U holda, " $\epsilon > 0$ soni olib $A_0 = A_0(\epsilon)$ ni shunday tanlaymizki, $A > A_0$ va " y OY lar uchun

$$\left| \int_A^{+\Gamma} f(x,y)dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Ixtiyoriy $A', A'' > A_0$ va " y OY larni olamiz. U holda

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| = \left| \int_{A'}^{+\Gamma} f(x,y)dx - \int_{A''}^{+\Gamma} f(x,y)dx \right| \leq \int_{A'}^{+\Gamma} \left| f(x,y) \right| dx + \int_{A''}^{+\Gamma} \left| f(x,y) \right| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

tengsizliklarga ega boʻlamiz va bu bilan zaruriy shart isbotlandi.

Teskarisi, agar (9) shart bajarilsa, u ixtiyoriy tayinlangan $y \in OY$ uchun ham bajariladi. U holda ixtiyoriy tayinlangan $y \in OY$ uchun (2) integral yaqinlashadi, ya'ni har bir $y \in OY$ uchun $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x,y)dx$ integral mavjud bo'ladi. Shuning uchun (9) da $A' = A(> A_0)$ deb olib va A'' ni $+\infty$ ga intiltirsak, " $y \in OY$ uchun o'rinli bo'lgan $\left| \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$ tengsizlini hosil qilamiz. Bu esa (2) integralning Y to'plamda tekis yaqinlashishini anglatadi.

3-toerema. Faraz qilaylik, $f : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ va ixtiyoriy $A > a$ va $y \in OY$ lar uchun f funksiya $[a, A]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin.

Bundan tashqari $g : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya barcha $x \in O[a, +\infty)$ va $y \in OY$ lar uchun $|f(x,y)| \leq g(x)$ tengsizlik bajarilib, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integral yaqinlashsin. U holda (2) integral Y to'plamda tekis (va absolyut) yaqinlashadi.

Isbot. 1-tur xosmas integrallar uchun Koshi kriteriyasiga ko'ra " $\varepsilon > 0$ uchun shunday A_0 son topilib, ixtiyoriy $A', A'' > A_0$ lar uchun $\left| \int_{A'}^{A''} g(x)dx \right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Ammo, bu holda ixtiyoriy $y \in OY$ va ixtiyoriy $A', A'' > A_0$ lar uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| \leq \int_{A'}^{A''} |f(x,y)|dx \leq \int_{A'}^{A''} g(x)dx < \varepsilon.$$

1-teoremani qo'llasak, tsadiqning isbotiga kelamiz

4-teorema. (Dirixle) Faraz qilaylik, $f : [a, +\infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ va ixtiyoriy $A > a$ va $y \in OY$ lar uchun f funksiya $[a, A]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda agar quyidagi shartlar bajarilsa,

1) $\int_a^A f(x,y)dx$ integral $[a, +\Gamma)$ oraliqda chegaralangan, ya'ni SM o'zgarmas

son topilib, ixtiyoriy $A > a$ va $y \in OY$ lar uchun $\left| \int_a^A f(x,y)dx \right| \leq M$ tengsizlik

bajarilsa;

2) $g(x,y)$ funksiya har bir $y \in OY$ uchun x bo'yicha monoton va $y \in OY$ bo'yicha $x \in \mathbb{R} + \Gamma$ da 0 ga tekis intiladi;

U holda

$$\int_a^{+\Gamma} f(x,y)g(x,y)dx$$

integral Y to'plamda tekis yaqinlashadi.

Isbot. Teoremaning 1-shartiga ko'ra SM o'zgarmas son topilib, barcha $A > a$ va $y \in OY$ lar uchun

$$\left| \int_a^A f(x,y)dx \right| \leq M \quad (10)$$

tengsizli bajariladi.

2-shartiga ko'ra esa $\epsilon > 0$ uchun shunday $A_0 > a$ topiladiki, barcha $A > A_0$ va $y \in OY$ lar uchun

$$|g(A,y)| < \frac{\epsilon}{4M} \quad (11)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$A', A'' > A_0 \text{ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sonlarni olib } \int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx$$

integralga o'rta qiymat haqidagi 2-teoremani qo'llaymiz. Unga ko'ra shunday $A = A(y)$, $A \in [A', A'']$ topiladiki, ular uchun

$$\int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx = g(A',y) \int_{A'}^A f(x,y)dx + g(A'',y) \int_A^{A''} f(x,y)dx \quad (12)$$

tengsizlik bajariladi.

Endi (12) ni (10) va (11) lar yordamida baholaymiz.

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)g(x,y)dx \right| \leq \left| \int_{A'}^A g(A',y) \int_{A'}^A f(x,y)dx \right| + \left| \int_A^{A''} g(A'',y) \int_A^{A''} f(x,y)dx \right| <$$

$$< \frac{e}{4M} \varphi M + \frac{e}{4M} \varphi M = e$$

Tengsizliklar y OY lar uchun o`rinli bo`ladi. Koshi kriteriyasiga ko`ra talab qilingan isbotga ega bo`lamiz. ■

5-teorema. (Abel) Faraz qilaylik, $f : [a, +\Gamma) \rightarrow Y \in \mathbb{R} \check{Y}$ va ixtiyoriy $A > a$ va y OY lar uchun f funksiya $[a, A]$ kesmada Riman ma`nosida integrallanuvchi bo`lsin. U holda agar quyidagi shartlar bajarilsa,

1) $\int_a^A f(x,y)dx$ integral Y to`plamda tekis yaqinlashsa;

2) $g(x,y)$ funksiya har bir y OY uchun x bo`yicha monoton va  $y$  OY bo`yicha tekis chegaralangan, ya`ni ;  $M$  o`zgarmas son topilib, barcha $x \in [a, +\Gamma)$ va y OY lar uchun $|g(x,y)| \leq M$ tengsizlik bajarilsa;

U holda

$$\int_a^{+\Gamma} f(x,y)g(x,y)dx$$

integral Y to`plamda tekis yaqinlashadi.

6-teorema. Agar quyidagi shartlar bajarilsa,

1) $f(x,y), g(x,y) \in O[a,b), y$ OY funksiyalar $[a, h] \times M[a,b)$ oraliqda bir o`zgaruvchili funksiyalar sifatida Riman ma`nosida integrallanuvchi;

2) Har bir y OY da $x \in [a,b)$ uchun $f(x,y) \neq 0$, $g(x,y) > 0$ munosabatlar o`rinli;

3) Har bir y OY da $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = k_y$, $0 \leq k_p \leq +\Gamma$ limit mavjud bo`lsa, u

holda quyidagi tasdiqlar o`rinli:

a) agar "y OY da $0 < k_p < +\Gamma$ bo'lsa, u holda $\int_a^b g(x,y)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanligidan $\int_a^b f(x,y)dx$ xosmas integralning "y OY to'plamda yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi;

b) agar tayinlangan y OY larda $0 < k_p < +\Gamma$ bo'lsa, u holda $\int_a^b g(x,y)dx$ xosmas integralning y nuqtada uzoqlashuvchi ekanligidan $\int_a^b f(x,y)dx$ xosmas integralning y nuqtada uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Natija. Faraz qilaylik, 6-teoremaning 1),2) shartlari bajarilsin va har bir tayinlangan y OY larda $x \in [a, b]$ da "y OY uchun $f(x,y) : g(x,y)$ munosabat bajarilsin. U holda $\int_a^b f(x,y)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\int_a^b g(x,y)dx$ xosmas integralning Y to'plamda yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli.;

1-lemma. Agar (2) integral Y to'plamda tekis yaqinlashsa, u holda

$$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx, (n \rightarrow \infty) \quad (13)$$

funksional ketma-ketlik ham Y to'plamda $I(y)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

2-§ Parametrga bog'liq integrallar yordamida berilgan maxsus funksiyalar.

To'la elliptik integrallar.

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 < k < 1) \quad (1)$$

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt \quad (0 < k < 1) \quad (2)$$

$$D(k) = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0 < k < 1) \quad (3)$$

ko`rinishdagi integrallar mos ravishda *birinchi, ikkinchi va uchinchi tur to`la elliptik integrallar* deb ataladi. $k, 0 < k < 1$ soni esa bu integrallarning moduli deyiladi.

$$t = \sin y, \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

almashtirish yordamida K, E, D integrallarni *Lejandr* formasiga keltiramiz:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} \quad (0 < k < 1) \quad (4)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y} dy \quad (0 < k < 1) \quad (5)$$

$$D(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} \quad (0 < k < 1) \quad (6)$$

Endi (5) ko`rinishdagi integralni qaraylik. Integral ostidagi

$$f(y, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}, \quad (y, k) \in W = \left\{ (y, k) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 < k < 1 \right\}$$

funksiya va uning

$$\nabla_k f = - \frac{k \sin^2 y}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}}, \quad (y, k) \in W$$

xususiyl hosilasi qaralayotgan W to`plamda uzluksizdir. Shuning uchun (5)-parametrga bog`liq xos integral bo`lib unga parametr bo`yicha differensiallashning Leybnits qoidasini qo`llash mumkin, ya`ni quyidagi tenglik o`rinli bo`ladi:

$$DE(k) = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} dy, \quad k \in (0; 1) \quad (7)$$

Bularni e`tiborga olsak, ikkinchi va uchinchi tur elliptik integrallar orasida quyidagicha bog`lanish borligini ko`ramiz.

1. *Ikkinchi va uchinchi tur to`la elliptik integrallar quyidagicha differensial tenglik bilan bog`langan:*

$$DE(k) = -kD(k), \quad k \in (0; 1) \quad (8)$$

2. *Ikkinchi va uchinchi tur to`la elliptik integrallar quyidagicha integral tenglik bilan bog`langan:*

$$\int_0^1 kD(k)dk = -E(k) + C, \quad k \in (0; 1) \quad (9)$$

Agar

$$- \frac{k \sin^2 y}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 y} - \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}}, \quad (y, k) \in W$$

ekanligini e'tiborga olsak, (7) formulaga ko'ra quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$3. \quad DE(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k}, "k \in O(0;1) \quad (10)$$

Endi (4) Lejandr formasidagi K birinchi tur elliptic integralni qaraymiz. Integral ostidagi

$$f(y, k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}}, " (y, k) \in W$$

funksiya va uning

$$f_k'(y, k) = \frac{k \sin^2 y}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}}, " (y, k) \in W$$

xususiylar hosilasi uzluksiz funksiyalardir. Bu yerda ham xuddi yuqoridagidek usulni qo'llasak,

$$DK(k) = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}} dy, "k \in O(0;1) \quad (11)$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar

$$\begin{aligned} D(kK(k)) &= K(k) + kDK(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 y}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}}, "k \in O(0;1). \end{aligned}$$

tengliklarni e'tiborga olsak, (11) ga ko'ra ayirma uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} DK(k) - kD(kK(k)) &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}} dy - \\ &- k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}}, "k \in O(0;1). \end{aligned}$$

Bo'laklab integrallash yordamida quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} DE(k) &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} d \cos y = k \int_{\cos \frac{\pi}{2}}^{\cos 0} \frac{\sin y \cos y}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} dy = \\ &- k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y d \frac{\sin y}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 y}} = - k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}} dy = \\ &= k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 y}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}} dy - k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 y)^3}}, "k \in O(0;1). \end{aligned}$$

Oxirgi ikkita ifadadan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$DE(k) = DK(k) - kD(kK(k)), "k \in O(0;1) \quad (12)$$

(10) formulani hisobga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$E(k) - K(k) = kDK(k) - k^2K(k) - k^3DK(k), "k \in (0;1).$$

Bulardan yana bir yangi

$$DK(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, "k \in (0;1). \quad (13)$$

formulani hosil qilamiz.

Quyidagi oddiy chiziqli bir jinsli

$$x^2 D^2 y + x Dy + (x^2 - n^2)y = 0$$

differensial tenglamaga *Bessel tenglamasi* deyiladi, bu yerda n - o'zgarmas bo'lib unga tenglamaning *tartibi* deyiladi. n -tartibli Bessel tenglamasining yechimlari bo'lgan funksiyalarni *n-tartibli Bessel funksiyalari* deb ataymiz.

1-teorema. Bessel-Angar funksiyasi deb ataluvchi quyidagi

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt, "x \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{Z})$$

funksiya quyidagi bir jinsli bo'lmagan Bessel tenglamasining yechimi bo'ladi:

$$x^2 D^2 y + x Dy + (x^2 - n^2)y = \frac{1}{\pi}(x - n) \sin np.$$

Isbot. Quyidagi

$$f_n(t, x) = \cos(nt - x \sin t), "t \in [0; \pi], "x \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{Z})$$

funksiya va uning

$$\partial_x f_n(t, x) = -\sin t \sin(nt - x \sin t), "t \in [0; \pi], "x \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{Z})$$

xususiy hosilasi $P = [0; \pi] \times \mathbb{R}$ yo'lakda uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun Bessel-Angar funksiyasi ham uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi quyidagiga teng bo'ladi:

$$DJ_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin(nt - x \sin t) dt, "x \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{Z}).$$

$\partial_{xx} f_n(t, x)$ funksiya va uning

$$\partial_{xx} f_n(t, x) = -\sin^2 t \cos(nt - x \sin t), "t \in [0; \pi], "x \in \mathbb{R}$$

xususiy hosilasi $n \in \mathbb{Z}$ lar uchun P yo'lakda uzluksiz bo'ladi.

U holda

$$D^2 J_n(x) = - \frac{1}{p} T_0^p \sin^2 t \cos(nt - x \sin t) dt, \quad "x \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N})$$

ekanligini e'tiborga olsak, $J_n(x)$ funksiyaning ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi ekanligiga amin bo'lamiz. Bulardan esa quyidagi tengliklar bevosita kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} x^2 D^2 J_n(x) + x D J_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) &= \\ &= \frac{1}{p} T_0^p (-x^2 \sin^2 t \cos(nt - x \sin t) + x \sin t \sin(nt - x \sin t)) + \\ &+ (x^2 - n^2) \cos(nt - x \sin t) dt = \frac{1}{p} T_0^p (x \sin t \sin(nt - x \sin t) + \\ &+ (x^2 \cos^2 t - n^2) \cos(nt - x \sin t)) dt = \\ &= - \frac{1}{p} T_0^p \int_0^p ((x \cos t + n) \sin(nt - x \sin t)) dt = \\ &= - \frac{1}{p} [(x \cos t + n) \sin(nt - x \sin t)]_{t=0}^p = - \frac{1}{p} (x - n) \sin np. \end{aligned}$$

1-natija. J_n -Bessel-Anger funksiyasi butun n -tartibli Bessel funksiysi bo'ladi.

n -tartibli Bessel funksiysini

$$J_n(x) = \frac{1}{p} T_0^p \cos(nt - x \sin t) dt, \quad "x \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

kabi belgilaymiz. Bundan ko'rinib turibdiki, Bessel-Anger funksiyasi butun tartibli Bessel funksiysini integral orqali ifodasi ekan.

2-teorema. Natural tartibli

$$H_n(z) = \frac{2}{p(2n-1)!!} z^n T_0^{\frac{p}{2}} \sin(z \cos t) \sin^{2n} t dt, \quad "z \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N})$$

Struve funksiyasi n natural tartibli Bessel funksiysi bo'ladi.

Isbot. Integral ostidagi

$$f(t, x) = \cos(x \cos t) \sin^{2n} t, \quad "t \in \mathbb{R}; \frac{p}{2} \leq t \leq p, "z \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N})$$

funksiya va uning

$$\partial_x f(t, x) = - \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t, \quad "t \in \mathbb{R}; \frac{p}{2} \leq t \leq p, "z \in \mathbb{R}, (n \in \mathbb{N})$$

xususiy hosilasi $P = \left(0; \frac{p}{2}\right)$ yoʻlakda uzluksiz. Shuning uchun Leybnis

qoidasiga koʻra uning hosilasini topsak, quyidagiga ega boʻlamiz:

$$DH_n(x) = kx^{n-1} T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt - \\ - kx^n T_0^{\frac{p}{2}} \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t dt, \quad "x \in \left(0; \frac{p}{2}\right), (n \in \Gamma)"$$

bu yerda $k = \frac{2}{p(2n-1)!!}$. $f, \forall_x f$ funksiyalar va

$$\forall_{xx} f(t, x) = -\cos(x \cos t) \cos^2 t \sin^{2n} t, \quad "t \in \left(0; \frac{p}{2}\right)" z \in \left(0; \frac{p}{2}\right), (n \in \Gamma)"$$

funksiya $P = \left(0; \frac{p}{2}\right)$ yoʻlakda uzluksiz boʻlgani uchun DH_n funksiyani differensiallash uchun yana Leybnis qoidasini qoʻllash mumkin. Struve funksiyasining ikkinchi tartibli hosilasi quyidagiga teng boʻladi:

$$D^2 H_n(x) = k(n(n-1)x^{n-2} T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt - \\ - nx^{n-1} T_0^{\frac{p}{2}} \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t dt) - 2knx^{n+1} T_0^{\frac{p}{2}} \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t dt - \\ - kx^{n+2} T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \cos^2 t \sin^{2n} t dt + knx^n T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt - \\ - kx^{n+2} T_0^{\frac{p}{2}} \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t dt + kx^{n+2} T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt - \\ - kn^2 x^n T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt = \\ = kx^{n+1} T_0^{\frac{p}{2}} (x \cos(x \cos t) \sin^{2n+2} t - (2n+1) \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t) dt = \\ = k(nx^{n-1} T_0^{\frac{p}{2}} \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t dt + x^n T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \cos^2 t \sin^{2n} t dt) = \\ = kn(n-1)x^{n-2} T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt - 2knx^{n-1} T_0^{\frac{p}{2}} \sin(x \cos t) \cos t \sin^{2n} t dt - \\ - knx^n T_0^{\frac{p}{2}} \cos(x \cos t) \cos^2 t \sin^{2n} t dt, \quad "x \in \left(0; \frac{p}{2}\right), (n \in \Gamma)".$$

Shuni qayd etish kerakki, Struve funksiyasi ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi boʻladi, yaʼni

$$\begin{aligned}
& x^2 D^2 H_n(x) + x D H_n(x) + (x^2 - n^2) H_n(x) = \\
& = kn(n-1)x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos t) \sin^{2n} t dt = kx^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^{2n-1} t \sin(x \cos t)) dt = \\
& = -kx^{n+1} [\sin^{2n-1} t \sin(x \cos t)]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

tengliklar o'rinli.

3-§ Yaqinlashish alomatlarining tatbiqlariga doir misollar.

1-misol. g parametrning

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{(1-x^2)^g} dx \quad (1)$$

integral yaqinlashadigan qiymatlarini toping.

Yechish. $\frac{1}{1-x} = t$ almashtirish yordamida integralni quyidagi ko'rinishga

$$\text{keltiramiz: } \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{(1-x^2)^g} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{g}} (2-\frac{1}{t})^g} dt.$$

U holda berilgan integral Abel alomatiga ko'ra parametrning $g < 0$ va $g > \frac{1}{2}$

shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatan ham,

parametrning $g < 0$ va $g > \frac{1}{2}$ shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida Dirixle

alomatiga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{g}} (2-\frac{1}{t})^g} dt$ integral yaqinlashuvchi,

$f(t) = \frac{1}{(2-\frac{1}{t})^g}$, $t \in [1; +\infty)$ funksiya esa monoton va chegaralangan.

2-misol. Quyidagi integralning yaqinlashish sohasini toping:

$$T_0^{+\Gamma} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx, \quad p > 0.$$

Yechish. Berilgan integralni quyidagicha ikkita qismga ajratamiz:

$$T_0^{+\Gamma} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx = T_0^1 \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx + T_1^{+\Gamma} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx. \quad (2)$$

$x \in \mathbb{R}^+ + 0$ da $f(x) = \frac{\sin x}{x^p + \sin x} : \frac{1}{x^{p-1} + 1}$ munosabat o'rinli bo'lgani uchun (2)

tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral p ning istalgan qiymatida yaqinlashadi ($x = 0$ nuqta f funksiyaning tuzatib bo'ladigan maxsus nuqtasi).

$x \in \mathbb{R}^+ + \Gamma$ da

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$$

asimptotik munosabatlar o'rinli bo'lgani uchun hamda $T_1^{+\Gamma} \frac{\sin x}{x^p} dx$ va

$T_1^{+\Gamma} \frac{\cos 2x}{x^{2p}} dx, \quad p > 0$ integrallarning $p > 0,5$ da yaqinlashuvchi ekanligini e'tiborga olsak, berilgan integralning $p > 0,5$ da yaqinlashuvchi ekanligiga kelamiz.

3-misol. Quyidagi integralni qatorlar bilan taqqoslash yordamida yaqinlashish sohasini toping:

$$T_0^{+\Gamma} \frac{x}{1 + x^l \sin^2 x} dx, \quad l > 0.$$

Yechish.

$$\begin{aligned} T_0^{+\Gamma} \frac{x}{1 + x^l \sin^2 x} dx &= \sum_{k=0}^{+\Gamma} T_{pk}^{p(k+1)} \frac{x}{1 + x^l \sin^2 x} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{+\Gamma} T_0^p \frac{pk + t}{1 + (pk + t)^l \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

tengliklarni e'tiborga olsak, oxirgi qatorni yaqinlashish tekshiramiz. Quyidagi tengsizliklarnig o'rinli ekanligiga e'tibor beraylik.

$$I_1 = \int_0^p \frac{pk+t}{1+p'(k+t)'\sin^2 t} dt < \int_0^p \frac{pk+1}{1+(pk+t)'\sin^2 t} dt < \\ < \int_0^p \frac{pk+1}{1+p'k'\sin^2 t} dt = I_2,$$

bu yerda $I_1 = \frac{p^2 k}{\sqrt{1+p'(k+1)'}}$, $I_2 = \frac{p^2(k+1)}{\sqrt{1+p'k'}}$. Agar $k \in \mathbb{R}^+$ da

$$I_1 = O\left(\frac{1}{k^{\frac{l-1}{2}}}\right), \quad I_2 = O\left(\frac{1}{k^{\frac{l-1}{2}}}\right)$$

ekanligini e'tiborga olsak, qatorlar uchun taqqoslash alomatiga ko'ra yuqoridagi qator va demak berilgan qator parametrning $l > 4$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi.

4-misol. Quyidagi integralni tekis yaqinlashishga tekshiring:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx, \quad 0 < p < 10.$$

Yechish. x i e larda o'rinli bo'lgan

$$\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

tengsizliklarni e'tiborga olsak, berilgan integral Veyershtass alomatiga ko'ra $[0;10]$ kesmada absolyut va tekis yaqinlashadi.

5-misol. Quyidagi integralni quyidagi hollarda: a) $p \in p_0 > 0$; b) $p > 0, q > -1$

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx. \quad (3)$$

tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x = e^{-t}$ ($t > 0$) almashtirish yordamida berilgan integralni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{+\infty} t^q e^{-pt} dt.$$

a) $p \in p_0 > 0$ da $t^q e^{-pt} \leq t^q e^{-p_0 t}$, " $t \in (0; +\infty)$ " bo'lgani uchun $\int_0^{+\infty} t^q e^{-p_0 t} dt$

integral Koshining taqqoslash alomatiga ko'ra yaqinlashadi va demak, yana Veyershtass alomatiga ko'ra p parametr bo'yicha absolyut va tekis yaqinlashadi.

b) $I(B, p) = \int_0^{+\infty} t^q e^{-pt} dt$, $B > 0$ integralda $z = pt$ almashtirish olamiz. U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$I(B, p) = \frac{1}{p^{q+1}} \int_0^{+\infty} z^q e^{-z} dz.$$

Faraz qilaylik, $B > 0$ va $e > 0$ sonlar berilgan bo'lsin. U holda

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p^{q+1}} \int_0^{+\infty} z^q e^{-z} dz = +\infty \quad \text{limitik munosabatga ko'ra } p > 0 \text{ ni shunday tanlash}$$

mumkinki, $I(B, p) > e$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, bu holda berilgan integral tekis yaqinlashmas ekan.

6-misol. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx$ integralni qaraymiz, bu yerda $b > 0$ -o'zgarmas, a

parametr esa $|a|$ i $a_0 > 0$ shartni qanoatlantiradi.

$$f(x, a) = \sin ax, \quad g(x, a) = \frac{x}{b^2 + x^2} \text{ deb olamiz. U holda}$$

$$\left| \int_a^A \sin(ax) dx \right| = \left| -\frac{1}{a} \cos(ax) \Big|_a^A \right| = \left| \frac{1}{a} (1 - \cos(aA)) \right| \leq \frac{2}{|a|} \leq \frac{2}{a_0} = M;$$

$$x \in \mathbb{R} \quad +\infty \quad \text{da} \quad \frac{x}{b^2 + x^2} \rightarrow 0 \quad \text{munosabatlar bajarilgani uchun Dirixle teoremasiga}$$

ko'ra berilgan integral qaralayotgan sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

7-misol. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$ ($a > 0$) integralni qaraymiz.

$$f(x, a) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x, a) = e^{-ax} \text{ deb olamiz. } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ integral Dirixle alomatiga}$$

ko'ra a parametr bo'yicha tekis yaqinlashadi, e^{-ax} funksiya esa x bo'yicha monoton va $x \in [0, y]$ i 0 lar uchun chegaralangan. Shuning uchun berilgan integral Abel alomatiga ko'ra qaralayotgan sohada tekis yaqinlashadi.

8-misol. $I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + 1}$, $p \in (1, +\infty)$ integralning $(1, +\infty)$ oraliqda

tekis yaqinlashmasligini isbotlaymiz.

$0 < \frac{1}{x^p + 1} < \frac{1}{x^p}, \quad "x, p \in O(1, +\Gamma) \quad \text{munosabatlar o'rinli va} \quad I(p) = \int_0^{+\Gamma} \frac{dx}{x^p}$
 xosmas integral $(1, +\Gamma)$ oraliqda yaqinlasuvchi bo'lgani uchun berilgan integral
 ham shu to'plamda yaqinlashuvchi bo'ladi. $\int_0^{+\Gamma} \frac{dx}{x^p + 1}, \quad p \in O(1, +\Gamma)$ - parametr
 bog'liq aniq integral bo'lgani uchun

$$I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{x^p + 1} + \int_1^{+\Gamma} \frac{dx}{x^p + 1}, \quad p \in O(1, +\Gamma)$$

integral $(1, +\Gamma)$ oraliqda absolyut yaqinlashadi. Berilgan integralning $(1, +\Gamma)$
 oraliqda tekis yaqinlashmasligini ko'rsatish uchun dastlab quyidagi bahoning
 o'rinli ekanligini ko'rsataylik.

$$\int_z^{+\Gamma} \frac{dx}{x^p + 1} > \frac{1}{2} \int_z^{+\Gamma} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{2(1-p)} \left[\frac{1}{x^{p-1}} \right]_z^{+\Gamma} = \frac{z^{p-1}}{2(p-1)}, \quad "z, p \in O(1, +\Gamma).$$

$\lim_{p \rightarrow 1+0} \frac{z^{p-1}}{2(1-p)} = +\Gamma, \quad "z \in O(1, +\Gamma)$ bo'lgani uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$"z \in O(1, +\Gamma), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists p \in O(1, +\Gamma) : \frac{z^{p-1}}{2(p-1)} > \varepsilon.$$

Bu esa berilgan integralning tekis yaqinlashmasligini ko'rsatadi.

X U L O S A

Malakaviy bitiruv ishida olingan barcha natijalar ishning ko`zlangan maqsadiga to`laligicha erishilganligini ko`rsatadi. Bitiruv ishi parametrga bog`liq xosmas integrallar va ularning xossalarini o`rganishga bag`ishlangan.

Mazkur malakaviy bitiruv ishida olingan natijalar quyidagilardan iborat:

- Parametrga bog`liq xos integrallar va ularning xossalari o`rganildi.
- Parametrga bog`liq xosmas integrallar va ularning asosiy xossalari tatqiq qilindi.
- Parametrga bog`liq xosmas integrallar yordamida berilgan maxsus funksiyalarning xossalari o`rganildi.

Ishda qaralgan masalalar, qo`llanilgan usullar va natijalar kelgusida parametrga bog`liq integrallar nazariyasining rivojlanishida qo`llanilishi, shuningdek, matematik analizning tadbirlarini o`rganishda foydali qo`llanma vazifasini o`tashi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Тер-Крикоров А.М., Курс математического анализа: Учебное пособие для вузов. -2-е изд, М.:Физмалит: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие для втузов. т.2, 13-е изд. М.: Наука , Главная редакция физико-математической литературы, 1985.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа. Части 1,2, М.: Наука, 1971, 1973.
4. Рудин У., Основы математического анализа, М.: Мир, 1966.
5. Зорич В.А., Математический анализ. Части 1,2, М.: Наука, 1981, 1984.
6. Фихтенгольц Г.М., Основы математического анализа. Тома 1.2, М.: Наука, 1968.
7. В.Н.Горбузов., Математический анализ: Интегралы, зависящие от параметров. Учебное пособиеб Гродно-2006, ГрГУ-496 стр.