Р Е Ф Е Р А Т

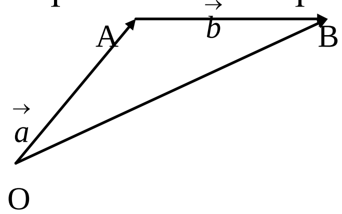
Векторлар алгебрасининг геометрияга татбиқи.

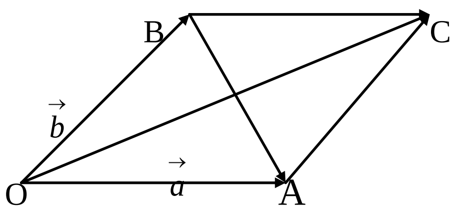
I. Кириш.

Фазода тўғри чизиқ билан текисликнинг, текислик билан текисликнинг ёки икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазиятини ўрганиш [13] да маълум даражада жуда қисқа тарзда вектор ва координаталар методининг татбиқига тўхталган. Лекин [13] ва [14] да тўғри чизиқ ва текисликларнинг параллеллиги ва перпендикулярлигини тенгламалар ёрдамида ўрганилмаган, аналитик-алгебраик услубни қўллаб ўрганишга тавсиялар ҳам берилмаган. [14] да, масалан, 18-§ нинг № 14 масаласини одатдаги усулларни қўллаб ечиб бўлмайди, ечилганда ҳам натижа тақрибий қиймат билан юзага келади. Аммо шу масаланинг ечимига векторлар алгебрасининг элементларини қўлланса, ечим ихчам ва осон усулда топилади.

Бундай масалаларни ечишга вектор координаталаридан қандай фойдаланилса, текисликлар ва тўғри чизиқлар орасидаги вазиятларни, яъни уларнинг параллеллиги ва перпендикулярлигини алгебраик-аналитик усулда ўрганилса, илмий-услубий афзалликларни кўрамиз.

Албатта биз томондан қўйилаётган муаммонинг ҳал этилиши жуда мураккаб бўлмасада, таълимдаги мураккаблик фақат математика чуқур ўқитиладиган академик лицейлардагина барҳам топади. Чунки бу ўқув юртида фазода тўғри чизиқ ва текисликларнинг ўзаро вазиятини аналитик-алгебраик методни қўллаб ўрганишга илмий салоҳияти бор бўлган иқтидорли талабалар таълим оладилар. Ана шу мақсаднинг рўёбга чиқишида ўқувчилар дастлаб фазода (текисликдаги каби) векторлар алгебрасининг асосий элементлари билан таниш бўлишлари керак. Векторлар алгебрасида векторларни қўшиш ва айириш, векторни сонга (скалярга) кўпайтириш (коллинеар векторлар, компланар векторлар) ва векторларни кўпайтириш (скаляр кўпайтма, аралаш кўпайтма) каби амаллар қаралади. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси $\vec{OB}$ вектор бўлади (a-чизма); бу вектор OAB учбурчакнинг ёпувчи томони каби ясалади (a-чизма) ёки умумий учдан чиқувчи $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг ОC диагонали каби ясалади($б$-чизма). Икки векторнинг $\vec{a}-\vec{b}$ айирмаси параллелограммнинг иккинчи $\vec{BA}$ диагонали билан аниқланади ($б$-чизма): $\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b},$ яъни икки векторнинг $\vec{a}-\vec{b}$ айирмаси





a-чизма 1-чизма $б$-чизма

айрилувчи $\vec{b}$ векторнинг охиридан камаювчи $\vec{a}$ векторнинг охирига қараб йўналган вектор каби аниқланади. Векторларни қўшиш ассоциативлик ва коммутативлик хоссаларига эга, яъни $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативлик), учта вектор учун $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (ассоциативлик). Боши $A_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтада ва охири $A_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқтада бўлган векторнинг координаталари деб $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ сонларга айтилади. Мос координаталари тенг бўлган икки вектор тенгдир. $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ва $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ векторлар йиғиндиси деб $\vec{c}(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ векторга айтилади. $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб $\lambda\vec{a}=\overline{(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)}$ векторга айтилади. Текисликдаги каби $\lambda\vec{a}$ векторнинг модули $|\lambda||\vec{a}|$ га тенглиги, йўналиши эса $\lambda>0$ учун $\vec{a}$ векторнинг йўналиши билан бир хил ва $\lambda<0$ учун эса $\vec{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлиши исботланади. $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ва $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ га тенг сонга айтилади.

Мисол. $A(0,1-1)$, $B(1,-1,2)$, $C(3,1,0)$ $D(2,-3,1)$ тўртта нуқта берилган. $\vec{AB}$ ва $\vec{CD}$ векторлар орасидаги бурчакнинг косинусини топинг.

Ечиш. $\vec{AB}$ векторнинг координаталари қуйидагилардан иборат: 1-0=1; -1-1=-2; 2-(-1)=3. У ҳолда $|\vec{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$ $\vec{CD}$ векторнинг координаталари 2-3=-1, -3-1=-4, 1-0=1. У ҳолда $|\vec{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$

Демак, $\cos\varphi=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{CD}|}=\dfrac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\dfrac{5}{\sqrt{63}}.$

Текисликдаги каби фазода ҳам ушбу ёйилма ўринли: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3,$ бунда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ координата ўқлари йўналишларидаги бирлик векторлар. Ҳақиқатан,

$$\overline{(a_1, a_2, a_3)}=\overline{(a_1,0,0)}+\overline{(0,a_2,0)}+\overline{(0,0,a_3)}=a_1\overline{(1,0,0)}+a_2\overline{(0,1,0)}+a_3\overline{(0,0,1)}=$$
$$=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3.$$

Текисликдаги каби фазода ҳам векторнинг сонга кўпайтмаси дистрибутивликнинг икки хоссасига эга: $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар ва λ сон учун $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; λ, μ сонлар ва $\vec{a}$ вектор учун $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун скаляр кўпайтма тарқатиш қонунига бўй сунади: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$

Текисликдаги каби нолдан фарқли иккита вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, уларни коллинеар дейилади. Агар $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$ векторга коллинеар бўлса ёки нол векторга тенг бўлса, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ бўлади, бунда λ қандайдир сон.

Фазода нолдан фарқли учта векторни компланар дейилади, агар умумий учга эга бўлган ва уларга тенг бўлган векторлар бир текисликда ётган бўлса.

Текисликдагидек, ҳар қандай вектор коллинеар бўлмаган икки вектор бўйича ёйилмага эга бўлганидек, фазода ҳар қандай вектор компланар бўлмаган учта вектор бўйича ёйилмага эга ва бу ёйилма ягонадир. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланар бўлмаган векторлар ва $\vec{d}$ ихтиёрий вектор берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$. Бу тасдиқнинг исботини ўқувчиларга қолдирамиз.

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ векторнинг $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ векторга вектор кўпайтмаси деб $\vec{c}(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$ векторга айтилади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $\vec{a}\wedge\vec{b}$ каби белгиланади. Вектор кўпайтма таърифидан $\vec{a}\wedge\vec{b}=-(\vec{b}\wedge\vec{a})$ келиб чиқади.

Коллинеар векторларнинг вектор кўпайтмаси нол векторга тенг. Ва аксинча, векторларнинг вектор кўпайтмаси нол-векторга тенг бўлса, векторлар коллинеар бўлади.

Айтайлик, $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ва $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ коллинеар векторлар бўлсин. У ҳолда $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, демак, $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$; буларни $\vec{a}\wedge\vec{b}$ даги b_1, b_2, b_3 ларга қўйсак, $\vec{a}\wedge\vec{b}$ нинг координаталари нолга тенг бўлади, демак, $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}$ бўлади.

Тескари тасдиқни ҳам кўрсатиш мумкин: $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{0}$ бўлсин. Бу дегани $a_2b_3-a_3b_2=0$, $a_3b_1-a_1b_3=0$, $a_1b_2-a_2b_1=0$; бундан $\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3}$, $\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1}{b_1}$; $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг координаталари пропорционал бўлишидан векторларнинг коллинеарлиги келиб чиқади.

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ векторларнинг берилган тартибдаги аралаш кўпайтмаси деб $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ сонга айтилади. Уни $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$ каби ёзилади

ёки $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=\vec{a}\,(\vec{b}\wedge\vec{c})=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\vec{a}\,(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

Агар векторлар умумий учга эга бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси шу векторларга қурилган параллелепипед ҳажмига тенг: $\left|\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)\right|=\left|\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\vec{c}\right|=$

$=\left|S\left(\vec{e}\,\vec{c}\right)\right|=S\cdot\left|\vec{e}\,\vec{c}\right|=SH.$ Бунда S – параллелепипед асосининг юзи, H – унинг баландлиги, $\vec{e}$ – асосга перпендикуляр бирлик вектор.

Икки текислик орасидаги θ бурчак шу текисликларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторлари орасидаги бурчакдир. $\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|=\left|\vec{n}_1\right|\cdot\left|\vec{n}_2\right|\cdot\cos\theta$ бўлиб, бундан

$$\cos\theta=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

Юқорида қайд қилинган вектор алгебраси элементларидан ушбу қўлланмадаги теоремаларни исботлашда ёки масалаларни ечишда фойдаланамиз. Келтирилган тушунчалар ва уларнинг таърифлари бевосита назарий ва амалий характерга эга бўлиб, улар ушбу қўлланмадаги барча теоремалар исботида ва масалаларнинг ечимларида ўз ўрнига эга.

1-§. Текислик ва тўғри чизиқнинг вектор ва координат шаклидаги тенгламалари.

1.1. Текисликка перпендикуляр бўлган ҳар қандай векторни унинг нормал вектори дейилади. Текисликнинг фазодаги ҳолатини унинг нормал вектори ва бирор нуқтасининг берилиши билан аниқлаш мумкин. Айтайлик $\vec{n}$ вектор α текисликнинг нормали, M_o эса унинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин, яъни $M_0\in\alpha$. Шунингдек, α да яна ихтиёрий М нуқта оламизки, бунда $M_o\neq M\in\alpha$; М, $M_0\in\alpha$ бўлгани учун

$$\overrightarrow{M_0M}\subset\alpha,\ \vec{n}\perp\alpha\wedge\overrightarrow{M_0M}\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}\Rightarrow\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (1)$$

Буни эса текисликнинг вектор тенгламаси дейилади.

Текисликнинг координат шаклидаги тенгламасини топиш мақсадида M_o, М, $\vec{n}$ ларнинг координатларини қуйидагича оламиз: $M_o(x_o,y_o,z_o)$, $M(x,y,z)$, $\vec{n}(A,B,C)$; бу ҳолда $\overrightarrow{M_0M}(x-x_o,y-y_o,z-z_o)$ кўринишда бўлади. Энди $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_oM}$ скаляр кўпайтмани тузамиз.

Маълумки, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_oM}=A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0;\Rightarrow Ax+By+Cz-$

$-(Ax_o+By_o+Cz_o)=0$ дан $-(Ax_o+By_o+Cz_o)=D$ десак,

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

бўлиб, буни текисликнинг умумий тенгламаси дейилади.

1.2. Фазодаги тўғри чизиқни унинг нуқтаси ва бу тўғри чизиққа параллел бўлган вектор тўла аниқлайди. Тўғри чизиққа параллел бўлган векторни унинг йўналтирувчи вектори дейилади. Фараз қилайлик, d тўғри чизиқ M_o нуқтадан ўтиб, $\vec{l}$ йўналтирувчи векторга эга бўлсин. Унинг тенгламасини келтириб чиқариш учун d тўғри чизиқда ихтиёрий M нуқта оламиз. $M_o, M \in d$ бўлгани учун $\overrightarrow{M_oM}$ вектор $\vec{l}$ векторга коллениар бўлади, яъни

$$\overrightarrow{M_oM} = m \cdot \vec{l} \qquad (3)$$

шарт бажарилади. Буни эса тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси дейилади.

Энди тўғри чизиқнинг координат шаклидаги тенгламасини тузамиз. Бунинг учун бирор тўғри бурчакли координаталар системасини оламиз ва унга нисбатан M_o нуқтанинг координаталарини (x_o,y_o,z_o) билан, M нуқтанинг координаталарини (x,y,z) билан ҳамда $\vec{l}$ векторнинг координаталарини (m,n,p) билан белгилаймиз.

У ҳолда $\overrightarrow{M_oM}$ вестор $x\text{-}x_o$, $y\text{-}y_0$, $z\text{-}z_0$ координаталарига эга бўлади:

$$\overrightarrow{M_oM}\,(x-x_o,\ y-y_0,\ z-z_0). \qquad (3)$$

тенгликдан қуйидагиларни ёзишимиз мумкин: $x-x_o=tm$, $y-y_0=tn$, $z-z_0=tp$. Бу тенгликлардан тўғри чизиқнинг координат шаклидаги параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} &x=x_o+tm, \quad (а)\\ &y=y_o+tn, \quad (б) \qquad (4)\\ &z=z_o+tp. \quad (в)\end{aligned}$$

(1)-(2) тенгламалар текисликнинг, (3)-(4) лар эса тўғри чизиқнинг вектор ҳамда координат шаклидаги тенгламалари эканлигидан фойдаланиб, Энди уларнинг фазодаги ўзаро вазиятларини қараб чиқамиз.

2-§. Тўғри чизиқларнинг ўзаро вазияти.

2.1. Икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазияти.

Фазода иккита d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар мос равишда $M_1(a_1,b_1,c_1)$, $M_2(a_2,b_2,c_2)$ нуқталари ва $\vec{l_1}(m_1,n_1,p_1)$, $\vec{l_2}(m_2,n_2,p_2)$ йўналтирувчи векторлари билан берилган бўлсин. У ҳолда бу тўғри чизиқларнинг тенгламалари:

$$d_1 \text{ учун } \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1} \qquad (1)$$

$$d_2 \text{ учун } \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2} \qquad (2)$$

кўринишда бўлади.

Икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазиятини уларда умумий нуқталар бўлиш ёки бўлмаслигига қараб синфларга ажратамиз. $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторларни қарайлик.

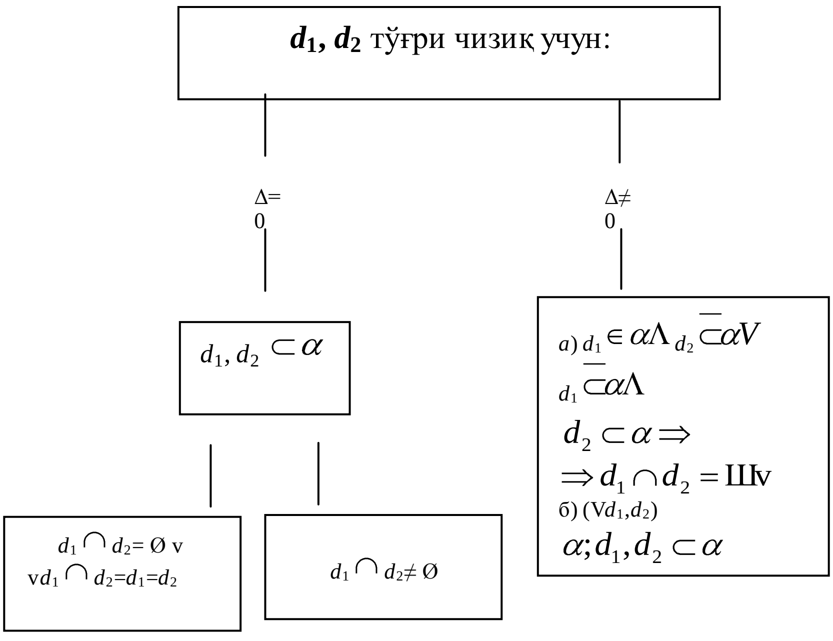
Уларнинг координаталаридан тузилган учинчи тартибли демерминантни текширайлик:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_2\text{-}a_1 & b_2\text{-}b_1 & c_2\text{-}c_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix} \qquad (3)$$

1) Фараз қилайлик, $\Delta=0$ бўлсин; маълумки, детерменантнинг икки сатри пропорционал бўлса ёки бирор сатри қолган икки сатри орқали ифода қилинса, унинг қиймати нолга тенг. Бунда $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар компланар бўлиб, натижада d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар бир текисликда ётади. Айтайлик, (3) детерминантнинг иккинчи ва учинчи сатрлари пропорционал бўлсин: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ шарт бажарилганда $\vec{l}_1$ ва $\vec{l}_2$ векторлар коллениар бўлади; бундан, тўғри чизиқларнинг параллел бўлишлиги келиб чиқади. Энди (3) детерминантнинг иккинчи ва учинчи сатрлари пропорционал бўлмасин, деб фараз қилайлик. Бу вақтда координаталари мос равишда m_1, n_1, p_1 ва m_2, n_2, p_2 лардан иборат бўлган $\vec{l}_1$ ва $\vec{l}_2$ векторлар коллениар бўлмайди. Тўғри чизиқлар бу ҳолда бир нуқтада кесишади.

Шундай қилиб, (3) детерминант нолга тенг бўлган ҳолда икки тўғри чизиқ бир текисликда ётиб, ўзаро параллел бўлади ёки бир нуқтада кесишади.

2) Фараз қилайлик, $\Delta\neq0$ бўлсин. Бу ҳолда (3) детерминантнинг ҳеч қайси икки сатри пропорционал бўлмасдан $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ ва $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар бирор текисликка параллел бўлмайди, яъни нокомпланар бўлади. Бундай шарт бажарилганда d_1 ва d_2 тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайди, улар айқаш тўғри чизиқлар бўлади. Шундай қилиб, икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазиятини қуйидаги схема билан ифодалаш мумкин:



3-§. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро вазиятлари.

Фараз қилайлик, d тўғри чизиқ ва α текислик қуйидагича тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$(d)\quad \frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}=t \qquad (4)$$

$$(\alpha)\quad Ax+By+Cz+D=0 \qquad (5)$$

Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро вазиятини аниқлаш учун уларнинг умумий нуқталарини топиш керак бўлади. Бунинг учун (4) ва (5) тенгламалар системасини ечамиз. Аввало (4) тенгламани параметрик шаклга келтирамиз.

$$\begin{aligned} x&=a+mt \\ y&=b+nt \\ z&=c+pt \end{aligned} \qquad (4')$$

кўринишда ёзиб оламиз. x,y,z ларнинг ($4'$) даги қийматларини (5) тенгламага қўямиз:

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0.$$

Айрим алмаштиришларни бажарсак, бу тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$(Am+Bn+Cp)t+Aa+Bb+Cc+D=0. \qquad (6)$$

Бунда $Am+Bn+Cp=P$ ва $Aa+Bb+Cc+D=Q$ десак, (6) нинг кўриниши

$$Pt+Q=0 \qquad (7)$$

каби бўлади. (7) тенгламанинг ечими тўғри чизиқ билан текисликнинг умумий нуқтасига мос параметрик қиймати бўлади. Уни ($4'$) тенгламага қўйиб, $d\cap\alpha$ нинг координаталарини аниқлаш мумкин. Агар (7) да $P=Am+Bn+Cp\neq0$ ва Q ҳар қандай сон бўлса, у ягона ечимга эга бўлади, яъни $d\cap\alpha=M_0(a+m(-\frac{Q}{P}),\quad b+n(-\frac{Q}{P}),\quad c+p(-\frac{Q}{P}))$. Агар (7) да $P=Am+Bn+Cp=0$ ва $Q=Aa+Bb+Cc+D=0$ бўлса, тенглама чексиз кўп ечимга эга, яъни $d\cap\alpha=d\subset\alpha$ бўлади. Бунда d тўғри чизиқнинг йўналтирувчи $\vec{l}$ вектори текисликнинг $\vec{n}$ нормал векторига перпендикуляр бўлади, яъни $\vec{n}\cdot\vec{l}=0$. Агар $P=0$, $Q\neq0$ бўлса, (7) тенглама ечимга эга бўлмайди, яъни $d\cap\alpha=\varnothing\Rightarrow d\,//\,\alpha$ бўлади. Агар $d\perp\alpha$ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори текисликнинг нормал вектори $\vec{n}$ га коллениар бўлади. Коллениар векторларнинг координаталари эса пропорционал бўлади, яъни $d\perp\alpha\Rightarrow\vec{l}\,//\,\vec{n}\Rightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$; бу мулоҳазаларга кўра;

$$P=Am+Bn+Cp\neq0\Rightarrow d\cap\alpha\neq\varnothing$$

ёки

$$P=Am+Bn+Cp=0 \quad \wedge Q=Aa+Bb+Cc+D\neq0\Rightarrow d\cap\alpha=\varnothing$$

ёки

$$P=Am+Bn+Cp=0 \quad \wedge$$
$$Q=Aa+Bb+Cc+D=0\Rightarrow \quad d\cap\alpha=d\subset\alpha$$

бўлади.

4-§. Икки текисликнинг ўзаро вазияти.

α ва β текисликлар фазода ихтиёрий текисликлар бўлсин. Бу текисликлар ушбу тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} (\alpha):&\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ (\beta):&\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Текисликлар вазиятини аниқлаш учун бу тенгламалар системасининг ечимларини текширайлик.

1. Текисликлар тенгламаларининг мос коэффициентлари пропорционал бўлмасин, яъни:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ёки} \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ёки} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Бу ҳолда (8) даги тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлиб, геометрик жиҳатдан улар умумий тўғри чизиқ орқали кесишади: $\alpha \cap \beta = d$. Агар α ва β текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлса, уларнинг нормал векторлари ҳам перпендикуляр бўлади, яъни $\alpha \perp \beta \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$. Бундан эса $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, яъни $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2. Берилган (8) даги тенгламаларнинг мос коэффициентлари (озод ҳадлардан ташқари) пропорционал бўлса, яъни:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ ёки $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$ бўлиб, $\begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлса, система ечимга эга бўлмайди. Бунда α ва β текисликлар ўзаро параллел бўлади, яъни $\alpha \cap \beta = \text{Ш} \Rightarrow \alpha // \beta$.

3. Агар (8) даги тенгламаларнинг коэффициентлари $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ шартни қаноатлантирса, (8) система чексиз кўп ечимга эга бўлади. Бу ҳолда α ва β текисликлар устма-уст тушади.

1-§ ва 2-§ ларда келтирилган билимлар мажмуасига таяниб, қуйида 10-синф геометриясидаги тўғри чизиқ ва текисликларнинг ўзаро муносабатларини ифода этувчи теоремаларни исботлашга киришамиз.

5-§. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг параллеллиги.

1-теорема. Тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқтадан шу тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.

Берилган: *a* тўғри чизиқ ва $A \notin a$.

Исбот қилиш керак: $A \in a_1 // a$ мавжудлигини.

Исбот: Айтайлик, *a* тўғри чизиқ $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ (*a*) тенглама билан берилган бўлсин. *A* нуқтанинг координаталари (x_0, y_0, z_0,) бўлсин. *A* нуқта орқали *a* тўғри чизиққа параллел бўлган a_1 тўғри чизиқ ҳам *a* билан бир хил йўналтирувчи векторга эга, яъни $\vec{a}(l, m, n)$. Шунинг учун a_1 нинг тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (a_1)$$

бўлади. x_0, y_0, \z$_0$; l, m, n сонлар ягона олингани учун охирги тенглама ягона тўғри чизиқни ифодалайди. Демак (a) ва (a_1) тўғри чизиқлар параллел.

2-теорема. Учинчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ параллелдир.

Берилган: $a//c$, $b//c$.
Исбот қилиш керак: $a//b$.

Исбот. Фараз қилайлик a, b ва c тўғри чизиқлар мос равишда қуйидаги (a), (b), (c) тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$(a)\quad \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

$$(b)\quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$$

$$(c)\quad \frac{x-x_3}{c_1}=\frac{y-y_3}{c_2}=\frac{z-z_3}{c_3}$$

$$a\| c \Rightarrow \frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3} \qquad (1)$$

$$b\| c \Rightarrow \frac{b_1}{c_1}=\frac{b_2}{c_2}=\frac{b_3}{c_3} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ ва } (2) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \qquad (3)$$

(3) дан $a//b$ эканлиги келиб чиқади.

3-теорема. Агар текисликда ётмаган тўғри чизиқ текисликдаги бирор тўғри чизиққа паралел бўлса, бу тўғри чизиқ текисликнинг ўзига ҳам паралел бўлади.

Берилган: $a \notin \alpha, a_1 \subset \alpha, a // a_1$
Исбот қилиш керак: $a//\alpha$.

Исбот: Айтайлик (α) текислик: $Ax+By+Cz+D=0$,

(a) тўғри чизиқ: $\frac{x-x_o}{l}=\frac{y-y_o}{m}=\frac{z-z_o}{n}$

(a_1) тўғри чизиқ: $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$

бўлсин. Шарт бўйича $a_1 \subset \alpha$ бўлгани учун

$$Al_1+Bm_1+Cn_1=0 \qquad (1)$$
$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

муносабатлар бажарилади. $a//a_1$ бўлганидан $\frac{l_1}{l}=\frac{m_1}{m}=\frac{n_1}{n}=\lambda$ ни ёза оламиз.
Бундан эса $l_1=\lambda l$, $m_1=\lambda m$, $n_1=\lambda n$ бўлади. Буларни (1) га қўйсак, $A\lambda l+B\lambda m+C\lambda n=0$ бўлиб, $Al+Bm+Cn=0$ келиб чиқади. Бу эса (a) нинг (α) га

параллеллигини кўрсатади. Исбот бўлди. Дарсликдаги (9-масала) ечими юқоридаги теорема исботига асосланади.

4-теорема. Агар бир текисликнинг кесишувчи икки тўғри чизиғи иккинчи текисликдаги икки тўғри чизиққа мос ҳолда параллел бўлса, бу текисликлар параллел бўлади.

Берилган: $a \subset \alpha, \quad b \subset \alpha, \quad a \cap b = B.$
$a^/ \subset \beta, \quad b^/ \subset \beta, \quad a^/ \cap b^/ = B_1. \quad a^/ // a \quad ва \quad b^/ // b.$
Исбот қилиш керак: α//β.

Исбот. a, $a^/$ ва b, $b^/$ тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларини мос равишда: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{a}^/(a_1^/, a_2^/, a_3^/)$, ва $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{b}^/(b_1^/, b_2^/, b_3^/)$ билан, α ва β текисликларнинг нормал векторларини эса $\vec{n}(A, B, C)$ ва $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ билан белгилаймиз.

$a \subset \alpha \quad ва \quad b \subset \alpha \Rightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3=0,$ (1)

$Ab_1+Bb_2+Cb_3=0;$ (2)

$a^/, b^/ \subset \beta \implies A_1a_1^/ + B_1a_2^/ + C_1a_3^/ = 0,$ (3)

$A_1b_1^/ + B_1b_2^/ + C_1b_3^/ = 0$ (4)

ларни ҳосил қиламиз.

$a // a^/ \Rightarrow \vec{a} = \lambda\vec{a}^/ \Rightarrow \frac{a_1}{a_1^/} = \frac{a_2}{a_2^/} = \frac{a_3}{a_3^/} = \lambda;$

$b // b^/ \Rightarrow \vec{b} = \mu\vec{b}^/ \Rightarrow \frac{b_1}{b_1^/} = \frac{b_2}{b_2^/} = \frac{b_3}{b_3^/} = \mu;$ Булардан

$a_1 = \lambda a_1^/ \quad a_2 = \lambda a_2^/ \quad a_3 = \lambda a_3^/$ ва

$b_1 = \mu b_1^/ \quad b_2 = \mu b_2^/ \quad b_3 = \mu b_3^/$ бўлиб, буларни (1) ва (2) ларга қўйсак, $A\lambda a_1^/ + B\lambda a_2^/ + C\lambda a_3^/ = 0$ ва $A\mu b_1^/ + B\mu b_2^/ + C\mu b_3^/ = 0$ ҳосил бўлади. Бу ерда λ ва μ ни қавсдан ташқарига чиқариб, $\lambda(Aa_1' + Ba_2' + Ca_3')=0$ ва $\mu(Ab_1' + Bb_2' + Cb_3')=0$ тенгликларга эга бўламиз. $\lambda \neq 0 \wedge \mu \neq 0 \Rightarrow Aa_1' + Ba_2' + Ca_3' = 0 \quad (1^1)$ ва $Ab_1' + Bb_2' + Cb_3' = 0 \quad (2^1)$ бўлиши керак. (1^1) ва (3), (2^1) ва (4) лардан $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \kappa$ келиб чиқадики, бундан $\vec{n}\,(A, B, C)$ ва $\vec{n}\,(A_1, B_1, C_1)$ векторлар коллениар бўлади. Демак α ва β текисликлар параллел экан. Исбот бўлди.

5-теорема. Текисликдан ташқаридаги нуқта орқали берилган текисликка параллел қилиб битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Берилган. A нуқта ва α текислик; $A \notin \alpha$;
Исбот қилиш керак: $A \in \beta, \beta \| \alpha$.

Исбот. (α) текислик тенгламаси: $Ax+By+Cz+D=0$ бўлсин. A нуқтанинг координаталарини x_o, y_o, z_o орқали белгилайлик. α га параллел бўлган β текисликнинг тенгламаси

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (1)

бўлсин.

$$A \in \beta \Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \qquad (2)$$

бўлади.

(1) дан (2) ни ҳадлаб айирсак,

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

ҳосил бўлади. Бу эса A нуқта орқали α га параллел қилиб ўтказилган β текислик тенгламасидир.

α‖β=> $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}$ бўлади. Бундан β нинг тенгламаси $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ кўринишни олади.

Энди бу текисликнинг ягоналигини исботлаймиз. Бунинг учун β дан фарқли A нуқтадан ўтувчи α га параллел бўлган яна битта γ текислик мавжуд деб фараз қилайлик. Унинг тенгламаси $A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0$ бўлиб, $\frac{A_2}{A} = \frac{B_2}{B} = \frac{C_2}{C}$ бўлади. Бундан ва $\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C}$ дан $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ келиб чиқади. Демак, γ текислик тенгламаси ҳам $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ бўлиб, β билан устма-уст тушиши кўринади. Исбот бўлди.

6-§. Тўғри чизиқлар ва текисликларнинг перпендикулярлиги.

1-теорема. Перпендикуляр тўғри чизиқларга мос равишда параллел бўлган кесишувчи тўғри чизиқларнинг ўзлари ҳам перпендикулярдир.

Берилган. $a \perp b$, $a \| c$, $b \| d$, $c \cap d \neq \varnothing$.
Исбот қилиш керак: $c \perp d$.

Исбот: $(a): \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$;

$(b): \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$;

$(c): \frac{x - x_3}{c_1} = \frac{y - y_3}{c_2} = \frac{z - z_3}{c_3}$;

$(d): \frac{x - x_4}{d_1} = \frac{y - y_4}{d_2} = \frac{z - z_4}{d_3}$;

бўлсин.

Шартга кўра: $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$;

$$a \| c; \Rightarrow \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} = \lambda;\ c_1 = \lambda a_1; c_2 = \lambda a_2; c_3 = \lambda a_3$$

$$b \| d; \Rightarrow \frac{d_1}{b_1} = \frac{d_2}{b_2} = \frac{d_3}{b_3} = \mu;\ d_1 = \mu b_1; d_2 = \mu b_2; d_3 = \mu b_3;$$

$c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3= (\lambda a_1)(\mu b_1) + (\lambda a_2)(\mu b_2) + (\lambda a_3)(\mu b_3) = (\lambda\mu)(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \lambda\mu \cdot 0 = 0.$

Демак, $c \perp d$. [13] китобдаги 1-масала (59-бет). 3.1 теорема исботига таянади.

2-теорема. Агар тўғри чизиқ текисликдаги кесишувчи иккита тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлади.

Берилган. $a\perp b$, $a\perp c$, $b\cap c\neq\varnothing$; $b,c\subset\alpha$; исбот қилиш керак: $a\perp\alpha$.

Исбот. a, b ва c тўғри чизиқлар ва (α) текислик ушбу тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$(a):\quad \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3};$$

$$(b):\quad \frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3};$$

$$(c):\quad \frac{x-x_2}{c_1}=\frac{y-y_2}{c_2}=\frac{z-z_2}{c_3}$$

$$(\alpha):\quad Ax+By+Cz+D=0.$$

Шартга кўра: $a\perp b$, $a\perp c$=>

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \qquad (1)$$

бўлади. Худди шунингдек, $b\subset\alpha\wedge c\subset\alpha\Rightarrow$

$$Ab_1+Bb_2+Cb_3=0$$

$$Ac_1+Bc_2+Cc_3=0 \qquad (2)$$

ўринли.

(1) ва (2) дан a_1, a_2, a_3 сонларнинг A, B, C сонлар билан пропорционал эканлиги келиб чиқади. Бундан эса $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ вектор билан $\vec{n}(A,B,C)$ вектор коллениар бўлиб, a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр бўлади. Исбот бўлди.

6-*масала*. Тўғри чизиққа берилган нуқта орқали унга перпендикуляр битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Бу масалани яна қуйидагича ифодалаш мумкин: берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр текислик ўтказилсин.

Берилган: M нуқта ва a тўғри чизиқ.

Топиш керак. $M\in\alpha\perp a$.

Ечиш: Фараз қилайлик, M (x_0, y_0, z_0) нуқта ва a тўғри чизиқ берилган бўлсин.

a тўғри чизиқ $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ тенглама билан берилган бўлсин. M нуқтадан ўтувчи ва a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган α текисликнинг тенгламасини $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда излаймиз. Бунинг учун тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ нинг текисликнинг нормал вектори $\vec{n}(A,B,C)$ га коллениарлигидан фойдаланиб, $\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}=\lambda$ ни ва бу ердан $A=\lambda a_1$, $B=\lambda a_2$, $C=\lambda a_3$ ларни оламиз. A,B,C коэффициентларнинг қийматларини α текислик тенгламасига қўйсак, $\lambda a_1x+\lambda a_2y+\lambda a_3z+D=0$ (1) кўринишни олади. Бу текислик M нуқта орқали ўтганлиги учун унинг координатари тенгламани қаноатлантириши керак. Демак, бу тенглама $\lambda a_1 x_0 + \lambda a_2 y_0 + \lambda a_3 z_0 + D = 0$ (2) кўринишни олади. Энди (1) дан (2) ни айирсак, ушбу $\lambda a_1(x - x_0) + \lambda a_2(y - y_0) + \lambda a_3(z - z_0) = 0$ ни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини λ га бўлиб, изланган тенгламани ҳосил қиламиз: $a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) = 0$. Исбот бўлди.

7-масала. Берилган нуқтадан (бу нуқта текисликда ётишини ҳам, ётмаслигини ҳам назарда тутинг) берилган текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказинг.

Берилган. $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқта ва (α): $Ax+By+Cz+D=0$ текислик.

Топиш керак $M \in d \perp \alpha$.

Ечиш. Шартга кўра текисликка тўғри чизиқнинг перпендикуляр бўлиши талаб қилинади. Маълумки, тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, унинг йўналтирувчи вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ текисликнинг нормал вектори $\vec{n}(A, B, C)$ га коллениар бўлади, яъни $\vec{a} = \lambda\vec{n}$. Бу ердан $\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$; ёки бундан $a_1 = \lambda A$; $a_2 = \lambda B$; $a_3 = \lambda C$; бўлади. Тўғри чизиқ M нуқтадан ўтганлиги учун бу нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз: $\frac{x - x_0}{\lambda A} = \frac{y - y_0}{\lambda B} = \frac{z - z_0}{\lambda C}$. Бу ерда ҳамма ҳадларни λ га кўпайтирсак, тенглама $\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$ кўринишни олиб, у изланган тўғри чизиқ тенгламасидир.

3-теорема. Агар текислик иккита параллел тўғри чизиқдан бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда иккинчисига ҳам перпендикулярдир.

Берилган. α текислик, $a//b$ параллел тўғри чизиқлар, $\alpha \perp a$.

Исбот қилиш керак: $\alpha \perp b$.

(α): $Ax+By+Cz+D=0$

(a): $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$;

($б$): $\frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$;

$$a // b \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda; \qquad \alpha \perp a : \Rightarrow \frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$$

бўлади. $\frac{A}{\lambda b_1} = \frac{B}{\lambda b_2} = \frac{C}{\lambda b_3} \Rightarrow \frac{A}{b_1} = \frac{B}{b_2} = \frac{C}{b_3}$ бўлиб, бу $\alpha \perp b$ эканлигини кўрсатади.

8-масала. Исталган A нуқта орқали берилган α текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

Берилган: $A(x_0 y_0 z_0) \notin \alpha$. Топиш керак: $a \perp \alpha$.

Исбот: $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Агар (α) га a тўғри чизиқ перпендикуляр бўлса, a нинг йўналтирувчи вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ билан (α) текисликнинг нормал вектори $\vec{n}(A, B, C)$

коллениар бўлади, яъни $\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$ ўринли. Бундай тенгликларни қаноатлантирувчи a_1, a_2, a_3 сонлар фазода битта йўналишни, яъни битта тўғри чизиқни аниқлайди. Демак, A нуқта орқали α га ягона перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Унинг тенгламаси $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$; кўринишда бўлади.

4-теорема. Битта текисликка перпендикуляр икка тўғри чизиқ ўзаро параллелдир.

Берилган $a\perp\alpha, b\perp\alpha.$

Исбот қилиш керак. $a//b$.

Исбот. Фараз қилайлик a ва b тўғри чизиқлар мос равишда:

(a): $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$;

(b): $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$

тенгламалар билан берилган бўлсин. α текислик тенгламаси эса $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда бўлсин. Шартга кўра:

$$a\perp\alpha\Rightarrow\frac{a_1}{A}=\frac{a_2}{B}=\frac{a_3}{C} \qquad (1)$$

$$b\perp\alpha\Rightarrow\frac{b_1}{A}=\frac{b_2}{B}=\frac{b_3}{C} \qquad (2)$$

ўринли бўлади. (1) ва (2) дан $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ га эга бўламиз. Бу эса a ва b тўғри чизиқларнинг параллел бўлишини кўрсатади.

7-§. Уч перпендикуляр ҳақидаги теорема.

Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикулярдир. Аксинча, текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.

Берилган: α текислик, $MN\subset\alpha\wedge AC\perp\alpha\wedge AB$ α га оғма

Исбот қилиш керак. $(MN\perp AB\Leftrightarrow(MN\perp BC)$

Исбот (1-усул) $MN\,//\,M^{/}N^{/}$

Етарлилиги. Айтайлик, $MN\perp BC$ бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{MN}$ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. Шартга кўра $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{MN}$;

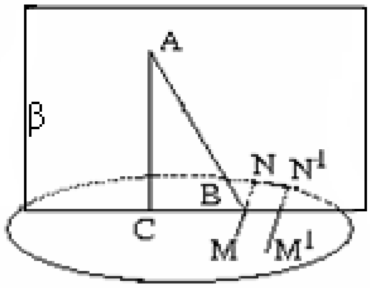
$$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{MN}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MN}=0\wedge\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}=0\,(1-чизма).$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MN}=0$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Rightarrow\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{MN}\Rightarrow AB\perp MN$$

$$(MN\perp BC)\Rightarrow(MN\perp AB).$$



1-чизма

Зарурлиги:

$(MN\subset\alpha\wedge MN\perp AB)\wedge(AC\perp MN)$ *ёки* $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MN}=$
$=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MN}=0\Rightarrow\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{MN}.$

Исбот: (2-аналитик усул). Берилган α-текислик, $(MN)\subset\alpha\wedge AC\perp\alpha\wedge$ AB тўғри чизиқ α га оғма.

Исбот қилиш керак: $(MN\perp AB)\Leftrightarrow(MN\perp BC)$

Етарлилиги: $(MN):\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ (1)

A,B,C нуқталарнинг координаталари мос равишда (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3) бўлсин. У ҳолда (AB), (BC), (CA) лар тенгламалари мос равишда қуйидагича бўлади:

(AB): $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (2)

(BC): $\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y-y_2}{y_3-y_2}=\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2}$ (3)

(AC): $\dfrac{x-x_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_3-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_3-z_1}$ (4)

$(MN)\perp(BC)\wedge(1),(3)\Rightarrow$

$a_1(x_3-x_2)+a_2(y_3-y_2)+a_3(z_3-z_2)=0$ (5)

$(MN)\perp(AC)\wedge(1),(4)\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1(x_3-x_1)+a_2(y_3-y_1)+a_3(z_3-z_1)=0$ (6)

(6) дан (5) ни айирсак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$a_1(x_2-x_1)+a_2(y_2-y_1)+a_3(z_2-z_1)=0$; бундан эса $(AB)\perp(MN)$ эканлиги келиб чиқади.

Зарурийлиги. Шартга кўра $(AB)\perp(MN)$. У ҳолда (1) ва (2) тенгламалардан

$a_1(x_2-x_1)+a_2(y_2-y_1)+a_3(z_2-z_1)=0$ (7)

Шунингдек, $(AC)\perp(MN)$ бўлганлиги учун (4) ва (1) дан

$a_1(x_3-x_1)+a_2(y_3-y_1)+a_3(z_3-z_1)=0.$ (8)

(8) дан (7) ни айирсак, $a_1(x_3-x_2)+a_2(y_3-y_2)+a_3(z_3-z_2)=0$ ҳосил бўлиб, бундан $(BC)\perp(MN)$ эканлиги кўринади. Исбот бўлди.

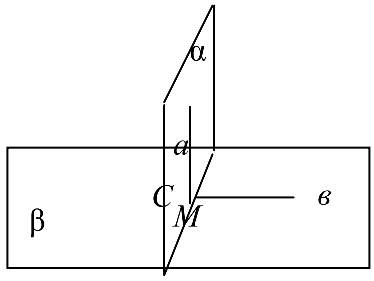
6-теорема. Агар текислик бошқа бир текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтса, бу текисликлар перпендикулярдир.

Берилган. $(a\perp\beta)\wedge(a\subset\alpha)$.

Исбот қилиш керак: $\alpha\perp\beta$.

Исбот (1-синтетик усул). Фараз қилайлик, α текисликнинг нормал вектори $\vec{n}_1$, β текисликнинг нормал вектори эса $\vec{n}_2$, a тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{l}$ бўлсин, ҳамда $a\perp\beta$; Шунингдек, $a\subset\alpha$ бўлсин (2-чизма).

$a\perp\beta\Rightarrow\overrightarrow{n_2}\|\vec{e}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\lambda\vec{e}.$ Шунингдек, $a\subset\alpha\Rightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\vec{e}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{e}=0$; Энди $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}$ скаляр кўпайтмани қарайлик: $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{n_1}\cdot\lambda\vec{e}=\lambda(\vec{n}_1\vec{e})=\lambda\cdot0=0.$ Бундан $n_1\perp n_2$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса $\alpha\perp\beta$ эканини кўрсатади.



2-чизма

.

Исбот (2-аналитик усул).

(α) текислик тенгламаси: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

(β) текислик тенгламаси: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

(a) тўғри чизиқ тенгламаси: $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$ бўлсин.

$$(a) \perp \beta \Rightarrow \frac{A_2}{a_1}=\frac{B_2}{a_2}=\frac{C_2}{a_3}=\lambda . \qquad (1)$$

$$(a) \subset \alpha \Rightarrow A_1 a_1+Б_1a_2+C_1a_3=0 \qquad (2)$$

бўлади. (1) дан $А_2=\lambda a_1;\ B_2=\lambda a_2;\ C_2=\lambda a_3;\ A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$ ифодани тузамиз: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=A_1\lambda a_1+B_1\lambda a_2+C_1\lambda a_3=$
$=\lambda(A_1a_1+B_1a_2+C_1a_3)=\lambda\cdot 0=0$. Демак, $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, бу эса $\alpha\perp\beta$ бўлишини кўрсатади. Исбот бўлди.

8-§. Фазода бурчакларни ўрганиш.

Бу параграфдаги барча билимлар координаталар методига таяниб ёритилган. Шунинг учун бу ерда фақат: 1) тўғри чизиқлар орасидаги бурчак, 2) тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак ҳамда 3) текисликлар орасидаги бурчакларнинг ифодасини аниқлашга тўхтаймиз, чунки дарсликда буларга тўхталмаган.

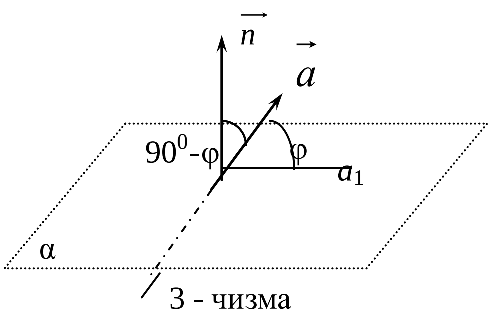
8.1. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак.

Дарсликда ушбу таъриф мавжуд: айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб берилган айқаш тўғри чизиқларга параллел кесишувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади. Бу бурчакни яна қуйидагича таърифлаш мумкин: Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб, уларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади. Унинг катталиги векторлар орасидаги бурчак формуласи ёрдамида топилади.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} .$$

8.2. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак.

Дарсликдаги таъриф: тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак деб тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка айтилади (3-чизма).



3 - чизма

Агар (a) тўғри чизиқ билан (α) текислик орасидаги бурчак φ бўлса, у ҳолда (a тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{a}$ билан текисликнинг нормал вектори $\vec{n}$ орасидаги бурчак 90^o-φ бўлади. Шунинг учун

$$\cos(\vec{a},\vec{n}) = \cos(90^o - \varphi) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}$$

cos (90^o-φ)=sinφ бўлгани учун тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак $\sin\varphi = \frac{A\cdot a_1 + B\cdot a_2 + C\cdot a_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}$ формула билан аниқланади. Бу ерда

(α): $Ax+By+Cz+D=0$ ва

(a): $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ тенгламалар билан берилган.

8.3. Текисликлар орасидаги бурчак.

Текисликлар кесишганда қандай бурчак ташкил этса, уларнинг нормал векторлари ҳам шундай бурчак ташкил этади (4-чизма).

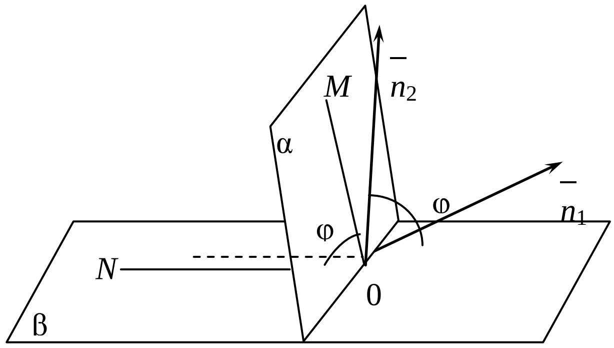
(α) ва (β) текисликлар бирор (a) тўғри чизиқ орқали кесишган бўлсин. $\forall O \in a \subset (\alpha \cap \beta)$ нуқта орқали (α) ва (β) текисликларнинг $\angle MON = \varphi$ чизиқли бурчагини ясайлик. Бу чизиқли бурчак томонларига О нуқтасидан (α) ва (β) текисликларнинг $\vec{n}_1$ ва $\vec{n}_2$ нормал векторларини ўтказамиз. Бунда ҳосил бўлган (n_1, n_2) бурчак $\varphi = MON$ бурчакка тенг.

Шуларга кўра текисликлар орасидаги бурчак φ сифатида уларнинг нормал векторлари орасидаги φ бурчакни қабул қилиш мумкин (4-чизма).

(α): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$.

(β): $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

Демак, (α) ва (β) текисликлар орасидаги бурчак



4-чизма

$\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}$ формула билан аниқланади.

Энди қуйида 8-§ да қараб чиқилган бурчаклар формулаларининг татбиқига доир машқлар кўрайлик.

8.1. га доир 1-масала. Ушбу $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z-16}{-6}$ ва $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-10}{0} = \dfrac{z-5}{1}$ тенгламалари билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш: $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 3 + 5\cdot 0 - 6\cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-6)^2}\cdot\sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2}} = \dfrac{6-6}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{10}} = \dfrac{0}{\sqrt{650}} = 0$

$\cos\varphi = 0; \Rightarrow \varphi = 90^o.$

2-масала. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ v*a* $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг (мустақил).

8.2 га доир 1-масала. Ушбу тенгламалари билан берилган $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$ тўғри чизиқ ва $4x+y-8z+16=0$ текислик орасидаги бурчакни ҳисобланг.

Ечиш:

$\sin\varphi = \dfrac{|4\cdot 6 + 1\cdot(-3) - 8\cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-8)^2}\cdot\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \dfrac{24-3-16}{\sqrt{16+1+64}\cdot\sqrt{36+9+4}} = \dfrac{5}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{49}} = \dfrac{5}{63}$

;

демак $\varphi = \arcsin\dfrac{5}{63}$

2-масала. $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-1}{5}$ тўғри чизиқ билан $2x+3y+5z+4=0$ текислик орасидаги бурчакни топинг (мустақил ечинг).

8.3. га доир 1-масала. Ушбу тенгламалари: $x+y-3=0$ ва $2x-2z+1=0$ билан берилган текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш: $\cos\varphi = \dfrac{1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot(-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2}$;

$\cos\varphi = \dfrac{1}{2};$ демак, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}.$

2-масала. $2x-y+3z=0$ ва $x+4y-6z=0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг (мустақил).

9-§. Фазода тўғри чизиқлар ва текисликларнинг ўзаро вазиятига доир машқлар.

1. Қуйидаги текисликларнинг ўзаро ваозиятини аниқланг.

а) $x - 3y + z + 1 = 0; \quad 2x + y - 4z + 2 = 0$

б) $3x + y - z + 2 = 0; \quad 6x + 2y - 2z + 3 = 0$

в) $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0; \quad 2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + 2 = 0$

г) $x + y + z - 1 = 0; \quad x + y + z = 0$

д) $3x+5y+z-5=0; \quad 8x+7y+4z-1=0$

е) $2x-y-z+1=0; \quad x+3y+4z+5=0$

Ечиш: а) Икки текисликнинг ўзаро вазияти нормал векторларнинг йўналишига боғлиқ. Агар текисликлар // бўлса, $\vec{n}_1\{A_1, B_1, C_1\} // \vec{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ бўлади ва $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ бўлади. Текисликлар кесишганда бу муносабат бажарилмайди.

а) машқни бажарайлик. $\vec{n}_1\{1,-3,1\}$, $\vec{n}_2\{2,1,-4\}$, яъни $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{1}\neq\frac{1}{-4}$. Демак текисликлар кесишади.

б) машқ: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}\neq\frac{2}{3}$; коэффициентлар пропорционал, озод ҳадлар пропорционал эмас. Шунинг учун текисликлар параллел.

в) машқда: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{-\sqrt{2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; коэффициентлар пропорционал, озод ҳадлар ҳам пропорционал. Шунинг учун текисликлар устма – уст тушади.

Қолган машқларни ҳам шунга ўхшаб бажариш мумкин.

2. Координаталар бошидан ўтувчи ва қуйидаги текисликларга параллел бўлган текислик тенгламасини топинг.

а) $2x-4y+5z-3=0;$

б) $2y-7z+6=0;$

в) $3x+5=0;$

г) $x+2y-z=0;$

Ечиш: а) Текисликларнинг параллеллик шартидан фойдаланамиз: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ Бунда а) ҳолда $\vec{n}(2,-4,5)$. Бу векторни унга параллел текислик учун ҳам нормал вектор деб олиш мумкин. Координаталар бошидан ўтган текисликнинг озод ҳади нолга тенг, яъни $D=0$. Шунинг учун изланган текислик тенгламаси: $2x-4y+5z=0;$

3. $M_0(1, -3, 5)$ нуқтадан ўтувчи ва қуйидаги текисликларга параллел бўлган текислик тенгламасини ёзинг:

а) $3x-y+5z-3=0;$

б) $x-3y+7=0;$

в) $3z-4=0;$

г) $2x-y-z+3=0;$

д) $2x-y+z+5=0;$

е) $2x+5y+6z+4=0;$

ж) $3y+2z+6=0;$

Ечиш: а) ҳолини ечайлик. Қолганлари шунга ўхшаш бажарилади. Бу ҳолда $A_1=3$, $B_1=-1$, $C_1=5$, $D_1=-3$. Изланаётган текислик тенгламасини $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда ёзайлик. Текисликлар // бўлгани учун коэффициентлари бир хил бўлиб, озод ҳадлари фарқ қилади, яъни $3x-y+5z+D=0$. D ни топиш учун изланаётган текисликнинг $M_0(1, -3, 5)$

нуқтадан ўтиш шартидан фойдаланамиз: бу нуқтанинг координаталари текислик тенгламасини қаноатлантради, яъни $3\cdot1-1\cdot(-3)+5\cdot5+D=0$. Бу ердан D= - 31 келиб чиқади. Демак изланаётган тенглама $3x-y+5z-31=0$ дан иборат.

4. Қуйидаги текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

а) $16x+8y+2z+1=0;\quad 2x-2y+z+5=0$

б) $2x+5y+4z+15=0;\quad 6x-3z+2=0$

в) $3x-y+7z-4=0;\quad 5x+3y-5z+2=0$

г) $x-7y+6=0;\quad 3x-4y+5z-6=0$

д) $2x-y+z=0;\quad x+y+2z=0$

е) $x-6=0;\quad 2y-z=0$

ж) $2x-y+3z-4=0;\quad 2x-y+3z-5=0$

Ечиш: Икки текислик орасидаги бурчак:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

формула билан аниқланади.

а) ҳол учун

$$\cos\varphi=\frac{16\cdot2+8\cdot(-2)+2\cdot1}{\sqrt{16^2+8^2+2^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{32-16+2}{\sqrt{256+64+4}\cdot\sqrt{4+4+1}}=$$

$$=\frac{18}{\sqrt{324}\cdot\sqrt{9}}=\frac{18}{18\cdot3}=\frac{1}{3}.$$

Жавоб: $\cos\varphi=\dfrac{1}{3}$.

е) ҳол: $\cos\varphi=\dfrac{1\cdot0+0\cdot2+0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0+0}\sqrt{0+2^2+1^2}}=\dfrac{0}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{5}}=0$, демак $\varphi=90^0$

5. Берилган нуқтадан ўтиб берилган текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини тузинг.

а) $M_1(1,\ 0,\ 1)$ ва $M_2(1,\ -2,\ 0)$ нуқталардан ўтиб, $2x-y+3z+1=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини;

б) $M_1(3,\ -1,\ 0)$ ва $M_2(0,\ 1,\ -2)$ нуқталардан ўтиб, $x-2z+1=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини;

в) Координаталар бошидан ва $M_0(1,\ 3,\ -4)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда, $x+4y-6z+1=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

Ечиш: а) Изланаётган текислик тенгламасини $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда ёзамиз. Бу текислик $M_1(1, 0, 1)$ ва $M_2(1, -2, 0)$ нуқталардан ўтгани учун $A+C+D=0$, $A-2B+D=0$. Текисликларнинг перпендикулярлигидан эса $2A-B+3C=0$ га эга бўламиз. Бу учала муносабатдан система тузамиз:

$$\begin{cases}A+C+D=0,\\ A-2B+D=0,\\ 2A-B+3C=0\end{cases}$$

Биринчидан иккинчини айириб C=-2B ни топамиз. Учинчидан эса 2A=7B ни аниқлаймиз. B=2 десак, A=7, C=-4, D=-3 келиб чиқади. Демак изланаётган текислик тенгламаси $7x+2y-4z-3=0$.

6. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг бир нечта нуқтасининг координаталарини топинг:

а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-4}{-1}$;

б) $x=3+2t, \quad y=3t, \quad z=5$;

в) $\begin{cases} x-3=0 \\ x+y+z-5=0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3 \\ z=3t+2 \end{cases}$;

д) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+3}{1}$.

Ечиш: а) x, y, z координаталардан бирортасига, масалан z га қиймат бериб x ва y ларни тенгламадан топамиз. z=3 десак, $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{3-4}{-1}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{-1}{-1}$; $x-1=1$; $x=2$; $\frac{y}{3}=\frac{-1}{-1}$; $\frac{y}{3}=1$; $y=3$; $A(2,3,3)$ нуқта тўғри чизиққа тегишли.

Энди z=1 десак, x-1=3 x=4, y=9 бўлиб, B(4, 9, 1) нуқта тўғри чизиққа тегишли. Қолган машқлар ҳам шунга ўхшаш бажарилади.

7. Тўғри чизиқ тенламасини тузинг.

а) $M_1(2, -3, \frac{1}{2})$ ва $M_2(3, 5, \frac{3}{2})$ нуқталардан ўтувчи;

б) $M_0(2, 1, -3)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{P}(1,-3,1)$ векторга параллел бўлсин;

в) $M_1(-3, 5, 1)$ ва $M_2(1, 0,-2)$ нуқталардан ўтувчи;

г) $M_0(3, -1, 0)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{P}(2,4,2)$ векторга параллел бўлсин.

Ечиш: а) Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$ бунга асосан, $$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+3}{5+3}=\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$$

Бу изланган тенгламадир.

б) M_0 (x_0, y_0, $з_0$) нуқтадан ўтиб, $\vec{P}(p_1, p_2, p_3)$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқнинг каноник тенгламаси $\frac{x-x_o}{p_1}=\frac{y-y_o}{p_2}=\frac{z-z_o}{p_3}$ га асосан $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{1}$ ни ёза оламиз.

8. а) M_o (1,-3,4) нуқтадан ўтиб, $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{7}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

б) M_o (2,-5,3) нуқтадан ўтиб, $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-4}{2}$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. а) Агар тўғри чизиқлар параллел бўлса, уларнинг йўналтирувчи векторлари коллинеар, хусусий ҳолда тенг бўлади, яъни изланган тўғри чизиқ учун ҳам $\vec{a}(-2,3,7)$ бўлади. Демак, изланган тенглама: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{7}$.

9. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ўзаро вазиятини аниқланг:

а) $U_1: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4}; \quad U_2: \quad \frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=z+2;$

б) $V_1: \quad \frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}; \quad V_2: \quad \frac{x-27}{-9}=\frac{y-15}{-5}=\frac{z}{-1};$

в) $S_1: \quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}; \quad S_2: \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{3};$

г) $t_1: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+16}{-6}; \quad t_2: \quad \frac{x-4}{3}=\frac{y+10}{0}=\frac{z-5}{1};$

Ечиш: г) m_1 учун $\vec{t_1}(2,5,-6), M_1(1,-4,-16)$; m_2 учун $\vec{t_2}(3,0,1)$, $M_2(4,-10,5)$. $\frac{2}{3}\neq\frac{5}{0}\neq\frac{-6}{1}$ бўлгани учун $m_1 \not\parallel m_2$.

$$\begin{vmatrix} 4-1 & -10+4 & 5+16 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 21 \\ 2 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=15+108+0-315+12=135-315=-180\neq 0.$$

Демак, тўғри чизиқлар айқаш.

10. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни ҳисобланг:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+16}{-6}$ *ва* $\frac{x-4}{3}=\frac{y+10}{0}=\frac{z-5}{1};$

б) $\frac{x-5}{10}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5{,}5}{11}$ *ва* $\frac{x-4}{3}=\frac{y-10}{12}=\frac{z-4}{4};$

в) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+1}{-1}$ *ва* $\frac{x}{0}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0};$

Ечиш: а) $\cos\varphi = \dfrac{2\cdot 3+5\cdot 0-6\cdot 1}{\sqrt{4-25-36}\sqrt{9+0+1}} = \dfrac{6-6}{\sqrt{65}\sqrt{10}} = \dfrac{0}{\sqrt[5]{26}} = 0$.
Демак, $\varphi = 90^o$.

11. а) P: $3x+2y-5z-1=0$ текислик билан

и: $\begin{cases} x = 4t+2 \\ y = -3t+2 \\ z = 2t+1 \end{cases}$

тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасини топинг;

б) *и:* $\dfrac{x+6}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ тўғри чизиқ билан $2x$-$5y$+$6z$-1=0 текисликнинг кесишган нуқтасини топинг;

в) $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$ тўғри чизиқ билан $4x+y-8z+16=0$ текисликнинг кесишган нуқтасини топинг;

Ечиш: в) Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини тузамиз: $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{2} = t$; $x = 6t+5$; $y = -3t+1$; $z = 2t+1$. Энди x, y, z ларни текислик тенгламасига қўямиз, яъни:

$$\begin{cases} 4x+y-8z+16=0 \\ x = 6t+5 \\ y = -3t+1 \\ z = 2t+1 \end{cases}$$

системани ечамиз.

$4(6t+5)+(-3t+1)-8(2t+1)+16=0$ $\quad$ $24t+20-3t+1-16t-8+16=0$ $\quad$ $5t+29=0$;

$t = -\dfrac{29}{5}$;

Топилган $t = -\dfrac{29}{5}$ ни тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасига қўямиз.

$$x = 6(-\frac{29}{5})+5 = -\frac{174}{5}+5 = \frac{-174+25}{5} = -\frac{149}{5};$$

$$y = -3(-\frac{29}{5})+1 = \frac{87}{5}+1 = \frac{92}{5};$$

$$z = 2(-\frac{29}{5})+1 = \frac{-58+5}{5} = -\frac{53}{5}$$

Демак тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишган нуқтаси $M_0(-\dfrac{149}{5};\dfrac{92}{5};-\dfrac{53}{5})$.

12. а) $M(2, 1, -3)$ нуқтадан ўтиб, x-$4y$+$3z$+2=0 текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

б) $M(5, -1, 2)$ нуқтадан ўтиб, $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$ тўғри чизиққа перпендикуляр текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш: а) Текислик билан тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартларига кўра $\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}$. Демак тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори текисликнинг нормал вектори билан бир хил бўлади. $\vec{a}=\vec{n}=(1,-4,3)$. Демак изланган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{3}$$

в) $M(1,\ -1,\ 2)$ нуқтадан ўтиб, $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{5}$ тўғри чизиққа перпендикуляр текислик тенгламасини топинг.

13. а) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқ ва $4x+2y+2z-5=0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

б) $\frac{x-5}{6}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{2}$ тўғри чизиқ билан $4x+y-8z+16=0$ текислик орасидаги бурчакни ҳисобланг.

в) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-1}{5}$ тўғри чизиқ билан $2x+3y+5z+6=0$ текислик орасидаги бурчакни ҳисобланг.

Ечиш: а) Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни

$\sin\varphi=\frac{Aa_1+Ba_2+Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$ формулага кўра ҳисоблаймиз.

$$\sin\varphi=\frac{4\cdot1+2\cdot(-2)+2\cdot2}{\sqrt{4^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{4-4+4}{\sqrt{24}\sqrt{9}}=\frac{4}{2\sqrt{6}\cdot3}=\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9};$$

Демак $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

10-§ Кўпёқлиларнинг сирт ва ҳажмларини ҳисоблаш.

«Кириш»да қайд этилган А. В. Погореловнинг «Геометрия 7-11» (Т.«Ўқитувчи», 1987 й) дарслигида 18-§ нинг № 14 масаласи ва унинг ечимига векторлар алгебрасининг тадбиқини бу ерда келтирамиз. Бу эса векторлар алгебрасининг геометрик масалаларни ечишда муҳим илмий – услубий восита эканлигини яққол тасдиқлайди. Шунингдек бу масала ечимидан сўнг кўпёқлиларнинг сирт ва ҳажмларига вектор координаталари методини қўллашдаги афзалликларни бир қатор стереометрик масалалар ечимида кўриб ўтамиз. Енг аввало мактаб геометрия курсида метрик масалалар ечишда қўлланиладиган ушбу асосий муносабатларни келтришни жоиз деб ҳисоблаймиз.

1. Исталган учта *A, B, C* нуқта учун: $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\left(|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2\right)$
2. Исталган иккита $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторлар учун: $(\bar{a}\cdot\bar{в})^2\le\bar{a}^2\cdot\bar{в}^2$.
3. Нолдан фарқли $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторлар учун: $(\bar{a}\cdot\bar{в})=0 <=> (\bar{a}\perp\bar{в})$.
4. Нолдан фарқли $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторлар учун: $(|\bar{a}\cdot\bar{в}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{в}|) <=> (\bar{a}//\bar{в})$.
5. Ҳар қандай учта $\bar{a}$, $\bar{в}$ ва $\bar{c}$ векторлар учун $(\bar{a}+\bar{в}+\bar{c})^2=\bar{a}^2+\bar{в}^2+\bar{c}^2+2\bar{a}\cdot\bar{в}+2\bar{в}\cdot\bar{c}+2\bar{c}\cdot\bar{a}$.
6. Ҳар қандай иккита $\bar{a}$ ва $\bar{в}$ векторлар учун: $|\bar{a}+\bar{в}|\le|\bar{a}|+|\bar{в}|$. $|\bar{a}-\bar{в}|\ge\left||\bar{a}|-|\bar{в}|\right|$,
7. Ҳар қандай тўртта *A, B, C, D* нуқталар учун: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}\left(|\overline{AD}|^2+|\overline{BC}|^2\cdot|\overline{AC}|^2-|\overline{BD}|^2\right)$.

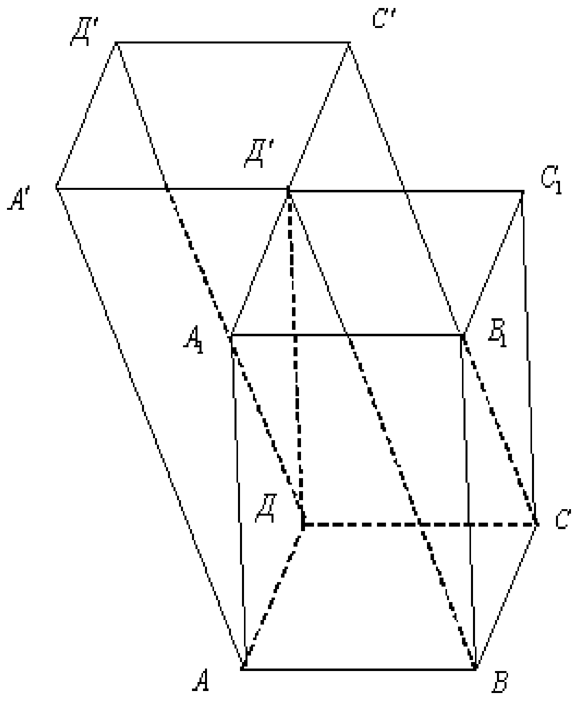
Энди қуйидаги масалаларни ечимлари билан келтирамиз.

1-масала: ([14], 18-§, № 4). Тўртбучакли мунтазам призма асосининг томони 15 га, баландлиги 20 га тенг. Асосининг томонидан уни кесиб ўтмайдиган призма диагоналигача энг қисқа масофани топинг.

Берилган: $AD=AB=15$.

$AA_1=DD_1=20$.

Топиш керак: $d(\overline{AB},\overline{BD_1})=?$.



5-чизма

Масалани элементар геометрия методларидан фойдаланиб босқичма-босқич ҳисоблаш орқали ечиш ноқулайликларга олиб келади. Шунинг учун уни вектор координаталари методидан фойдаланиб ечамиз.

<u>Ечиш.</u> Шу мақсадга кўра координаталар системасини қуйидагича танлаймиз:
D-координаталар боши, *DA-Ox* ўқи, *DC-Oy* ўқи ва DD_1-*Oz* ўқи бўлсин. У ҳолда $D(0;0;0)$, $A(15;0;0)$, $C(0;15;0)$, $B(15;15;0)$, $D_1(0;0;20)$ бўлади.

Изланаётган энг қисқа масофа $\overline{DA}$, $\overline{D_1B}$ ва $\overline{AB}$ векторларга қурилган параллелепипеднинг баландлиги бўлади (5-чизма). Уни топиш учун параллелепипед ҳажмини унинг асос юзига бўлиш кифоя. Бунда ушбу формуладан фойдаланамиз.

$d=\frac{V}{S}=\frac{(\overline{DA},\overline{D_1B},\overline{AB})}{|[\overline{DA},\overline{D_1B}]|}$, бу ерда $(\overline{DA},\overline{D_1B},\overline{AD})$ - векторларнинг аралаш кўпайтмаси.

$[\overline{DA},\overline{D_1B}]$ - икки векторнинг вектор кўпайтмаси.

Энди векторларнинг кўпайтмаларини аниқлаймиз.

$\overline{DA} = (5-0, 0-0, 0-0) = (5,0,0)$,

$\overline{D_1B}, = (5-0, 15-0, 0-20) = (5,15,-20)$,

$\overline{AB}, = (5-15, 15-0, 0-0) = (0,15,0)$;

$$V = (\overline{DA}, \overline{D_1B}, \overline{AB},) = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & -20 \\ 0 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0+4500 = 4500$$

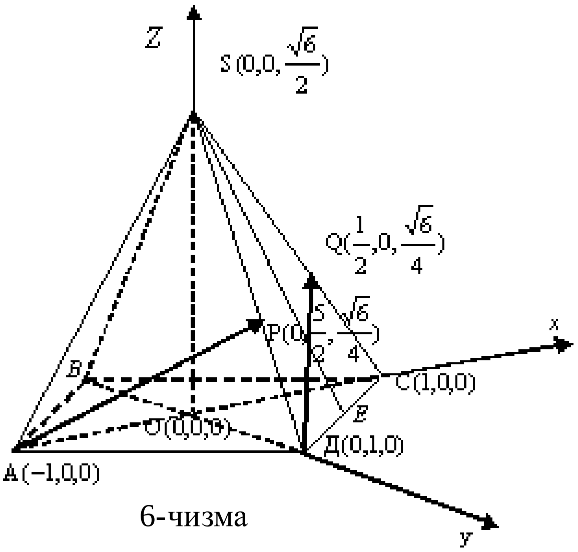
$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ в_2 & в_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ в_3 & в_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ в_1 & в_2 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 15 & -20 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ -20 & 15 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 15 & 15 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{0^2 + 300^2 + 225^2} =$$

$$= \sqrt{90000 + 50625} = \sqrt{140625} = 375; \quad d = \frac{V}{S} = \frac{4500}{375} = 12$$

Жавоби: 12

<u>2-масала.</u> *SABCD* мунтазам пирамиданинг ён сирти асосининг юзидан икки марта катта. *SD* ва *SC* қирраларининг ўрталари мос ҳолда *P* ва *Q* деймиз. *AP* ва *QD* тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. 6-чизмада кўрсатилганидек, яъни маркази O нуқтада бўлган тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз. *OC*=1 десак, *OD*=1 бўлади. *SCD* ёқнинг апофемаси *SE* бўлсин. *CE=ED;* $2S_{асос} = S_{ён\ с.}$ бўлгани учун $2 \cdot CD^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot SE$ бўлиб, бундан



6-чизма

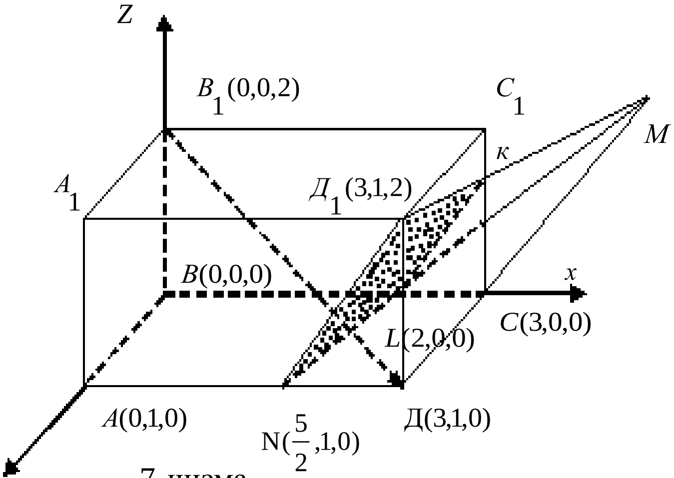
$2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot SE$, яъни $SE = \sqrt{2}$ бўлади. Тўғри бурчакли учбурчак *OCD* дан $CD = \sqrt{2}$ бўлгани учун $OE = \frac{\sqrt{2}}{2}$; тўғри бурчакли учбурчак *SOE* дан $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

Шундай қилиб, *O(0,0,0), C(1,0,0), D(0,1,0),* $C(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2})$, *A(-1,0,0),*

$P(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4})$, $Q(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{4})$, $\overline{AP}(1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4})$, $\overline{BD}(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{6}}{4})$.

cos(AP^DQ)=
cos($\overline{AP}$^$\overline{DQ}$)=
$$\frac{\left|1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{6}{16}}\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{6}{16}}}=\frac{3}{13}.$$

Изланган бурчак $arccos\frac{3}{13}$ га тенг.



7-чизма

<u>3-масала.</u> Тўғри бурчакли $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда $AB:AD:AA_1=1:3:2$. B_1D тўғри чизиққа перпендикуляр ҳолда D уч орқали кесувчи текислик ўтказилган. Кесишишдан ҳосил бўлган кўпёқлилар ҳажмларининг нисбатини топинг.

<u>Ечиш.</u> чизмада кўрсатилганидек, $AB=1$ деб ҳисоблаб, фазода $Bxyz$ тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз ва бу системада зарур нуқталарни ва $\overline{B_1D}$ векторни топамиз; $B(0;0;0)$, $C(3;0;0)$, $A(0;1;0)$, $B_1(0;0;2)$, $D(3;1;0)$, $D_1(3;1;2)$, $\overline{B_1D}(3;1;-2)$ ларни белгилаймиз.

Берилган кесувчи текислик B_1D тўғри чизиққа перпендикуляр бўлгани учун $\overline{B_1D}$ векторни унинг нормал вектори учун қабул қиламиз. У ҳолда текислик тенгламаси: $(x-3)\cdot 3+(y-1)\cdot 1+(z-2)\cdot(-2)=0$ ёки $3x+y-2z-6=0$ (*) бўлади.

(*) – Кесувчи текисликни ясаш учун шу текисликка тегишли яна 2 та нуқтани топамиз. Агар B_x ўқининг (*) текислик билан кесиш нуқтаси L бўлса, $L(l,0,0)$. L нинг коорданиталарини (*) га қўйсак $l=2$ ни топамиз, у ҳолда $L(2,0,0)$ бўлади. Агар By ўқ билан (*) текислик $F(0,f,0)$ нуқтада кесишади, десак, унинг координаталари $F(0,6,0)$ бўлади, лекин бу нуқта 7-чизмада кўринмайди.

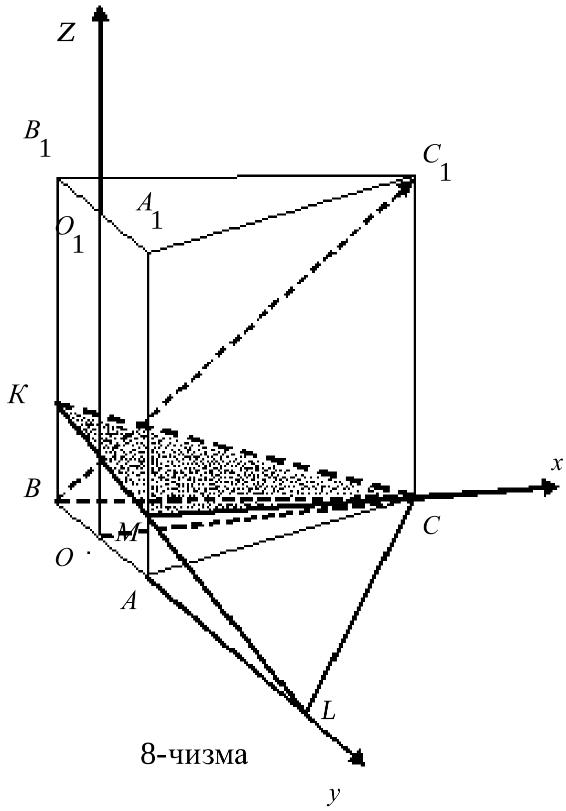
(*) билан AD тўғри чизиқ кесишган $N(n_1, n_2, n_3)$ нуқтани излаймиз. У ҳолда $n_2=1$ ва $n_3=0$ эканлиги аён, буларни (*) га қўйиб $n_1=\frac{5}{3}$ ни топамиз. Демак, $N(\frac{5}{3},1,0)$. Энди шу (D_1, N, L) нуқталар орқали кесувчи текислик ўтказиб, D_1NLK кўпбурчакни қурамиз-ки, бу берилган кесимдир.

Энди (*) текислик берилган координатани кесиб, D учни ўз ичига олган бўлагининг ҳажми V_D десак, бу бўлак асослари тўғри бурчакли $\Delta\ DD_1N$ ва ΔCKL бўлган кесик пирамидадан иборат, унинг баландлиги CD. У ҳолда $V_D=\frac{1}{3}CD\left(S_{DD_1N}+\sqrt{S_{DD_1N}\cdot S_{CKL}}+S_{CKL}\right)$. $S_{DD_1N}=\frac{1}{2}DD_1DN, S_{CKL}=\frac{1}{2}CK\cdot CL$.

$AB=a$ (ёрдамчи параметр) десак, $DD_1=2a$, $DN=AD-AN=3a-\frac{5}{3}a=\frac{4}{3}a$;

$CL=BC-BL=3a-2a=a$. $\Delta CKL \sim \Delta DD_1N => CK$ ни топамиз:

$\frac{CK}{DD_1}=\frac{CL}{DN}; => CK=\frac{3}{2}a$.



8-чизма

Шундай қилиб, $S_{DD_1N}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{4}{3}a=\frac{4}{3}a^2$; $S_{CKL}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a\cdot a=\frac{3}{4}a^2$.

$$V_D=\frac{1}{3}a\left(\frac{4}{3}a^2+\sqrt{\frac{4}{3}a^2\cdot\frac{3}{4}a^2}+\frac{3}{4}a^2\right)=\frac{37}{36}a^2.$$

Б учни ўз ичига олган 2 – бўлак кўпёқнинг ҳажми V_B бўлиб, $V_B=V-V_D$ га тенг. $V=a\cdot 3a\cdot 2a=6a^3$ бўлишидан, $V_B=6a^3-\frac{37}{36}a^3=\frac{179}{36}a^3$.

Натижада $V_D:V_B=\frac{37}{36}a^3:\frac{179}{36}a^3=37:179$ бўлади.

<u>4–масала.</u> $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам призма асосининг томомнини призма ён қиррасига нисбати $1:\sqrt{3}$. BC_1 тўғри чизиққа перпендикулряр ҳолда C уч орқали кесувчи текислик ўтганда $AB=a$ деб, кесишиш натижасида бутун призмадан ёқларидан бири ABC учбурчак бўлган кўпёқлининг ҳажмини топиш талаб этилади.

<u>Ечиш.</u> $AB=1$ деб 8-чизмада кўрсатилганидек $Oxyz$ координаталар системани киритамиз. (O- нуқта AB томон ўртаси, $OO_1//AA_1$).

8-чизмадаги нуқталар координаталари билан қуйидагича: $A\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, $B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $B_1\left(0,-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$, $C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\sqrt{3}\right)$, $O(0,0,0)$, $O_1(0,0,\sqrt{3})$, $K\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $L\left(0,\frac{3}{2},0\right)$.

Энди зарур нуқталарнинг ва $\overline{BC_1}$ векторнинг координаталарини топамиз: $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$, $A\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, $O_1(0,0,\sqrt{3})$, $B\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$, $B_1\left(0,-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$, $C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\sqrt{3}\right)$, $\overline{BC_1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$.

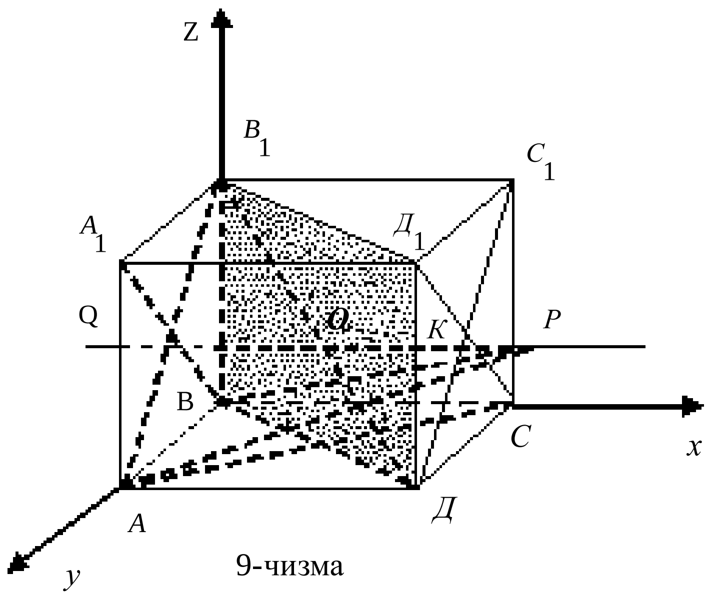
Кесувчи текислик BC_1 тўғри чизиқга перпендикулярлигидан $\overline{BC_1}$ векторни шу текисликнинг нормали учун қабул қилиш мумкин. У ҳолда текислик тенгламаси (C нуқта орқали ўтади): $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}+(y-0)\frac{1}{2}+(z-0)\sqrt{3}=0$ ёки $2\sqrt{3}x+2y+4\sqrt{3}z-3=0$ (*) бўлади.

(*) текисликни ясаш учун яна унга тегишли 2 та нуқтани топамиз; агар (*) текислик *Oy* ўқни *L* нуқтада кесиб ўтса, унинг координаталри *(0,l,0)* бўлади. Бу координаталарни (*) га қўйиб $l=\frac{3}{2}$ ни топамиз. Демак, $L(0,\ \frac{3}{2},0)$. (*) текислик BB_1 тўғри чизиқни кесиши аён, кесиш нуқтаси *K* бўлса, унинг координаталари $K\left(0,-\frac{1}{2},k\right)$ бўлиб, буни (*) га қўйсак $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ бўлиб, бундан $K\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ бўлади. *C, K, L* нуқталар орқали кеувчи текисликни ясаймиз.

Кесувчи текислик бутун призмадан ёқларидан бири ΔABC бўлган кўпёқли *CBKMA* пирамидадан иборат. Бунда *C* пирамида учи, *BKMA* трапеция пирамида асоси, (*BK//MA* – трапеция асослари, $AB\perp BK$). $\Delta\ ABC$ нинг *CO* медианаси пирамида *CBKMA* баландлиги. Шунга кўра унинг ҳажми $V=\frac{1}{3}S_{BKMA}\cdot CO$. Шунга биноан $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{BK+MA}{2}\cdot AB\cdot CO$; бундан $BK=\frac{1}{3}BB_1=\frac{1}{3}a\sqrt{3}$. $MA=\frac{1}{2}BK=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (ΔBKL ўрта чизиғи), $AB=a,\ CO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Демак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}+\frac{a\sqrt{3}}{6}}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{8}.$$



9-чизма

<u>5–масала.</u> $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг *AD* қиррасига параллел бўлиб, кубнинг *O* маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ кубга ташқи чизилган шар сиртини *P* ва *Q* нуқталарда кэсади; бунда *P* нуқта ва кубнинг *A* учи BDD_1 текисликнинг турли томонларида ётади. Қуйидаги бурчакларни топиш талаб этилади:

а) *AP* ва B_1D тўғри чизиқлар орасидаги,

б) *AP* тўғри чизиқ ва BDD_1 текислик орасидаги,

в) *APB* ва BDD_1 текисликлар орасидаги.

<u>Ечиш.</u> а) фазода боши *B* нуқтада бўлган тўғри бурчакли координаталар системасини киритамиз. *BC, BA,* BB_1 тўғри чизиқлар мос ҳолда *Bx, By* ва *Bz* ўқлари учун қабул қиламиз.

Кубнинг қиррасини 2 га тенг деб ва 9-чизмадагидек, координата ўқлари йўналишини белгиланган ҳолда зарур нуқталарни ва векторларнинг координаталарини топамиз: *B(0,0,0), C(2,0,0), A(0,2,0),* $B_1(0,0,2)$*, D(2,2,0).* Кубга ташқи чизилган сфера диаметри $PQ=2\sqrt{3}$ бўлиб, $OP=\sqrt{3}$. *PQ* тўғри чизиқ CDD_1C_1 ёқни K нуқтада кессин; у ҳолда OK=1, яъни $P(1+\sqrt{3},1,1)$. Демак, $\overline{AP}(1+\sqrt{3},-1,1)$; $\overline{B_1D}(2,2,-2)$ шунинг учун

$cos(AP,\wedge B_1D)=$ $|cos(\overline{AP},\wedge\overline{B_1D})|=\dfrac{\left|2+2\sqrt{3}-2-2\right|}{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+1+1}\sqrt{4+4+4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}$; яъни AP ва B_1D тўғри чизиқлар орасидаги бурчак $\arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}$ га тенг.

<u>Ечиш.</u> б) AC тўғри чизиқнинг BDD_1 текисликка перпендикулярлиги аён, яъни $\overline{AC}(2,-2,6)$ вектор шу текисликнинг нормаси бўлади. AP тўғри чизиқ ва BDD_1 текислик орасидаги бурчак φ_1 десак,

$sin\,\varphi_1=|cos(\overline{AP},\wedge\overline{AC})|=\dfrac{\left|2+2\sqrt{3}+2\right|}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}\sqrt{4+4}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}$, яъни AP тўғри чизиқ ва BDD_1 текислик орасидаги бурчак $arcsin\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}$ га тенг.

<u>Ечиш.</u> в) юқорида қайд қилганимиздек, текисликнинг BDD_1 нормал вектори $\overline{AC}(2,-2,0)$ ни қабул қилиш мумкин ва APB текисликка перпендикуляр $\bar{n}$ векторни топайлик. Айтайлик $\bar{n}(k, l, m)$ бўлсин.

$\bar{n}\perp\overline{BA}(0,2,0)$ ва $\bar{n}\perp\overline{AP}(1+\sqrt{3},-1,1)$, бўлишидан $\begin{cases} k\cdot 0+l\cdot(2)+m\cdot 0=0 \\ k(1+\sqrt{3})+l\cdot(-1)+m\cdot 1=0 \end{cases}$

бўлиб, бундан $k=1-\sqrt{3}$, l=0, m=2, яъни $\bar{n}(1-\sqrt{3},0,2)$. APB ва BDD_1 текисликлар орасидаги бурчак φ_2 десак,

$cos\,\varphi_2=|cos(\overline{AC},\wedge\bar{n})|=\dfrac{\left|2-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+4}\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$.

Шундай қилиб, APB ва BDD_1 текисликлар орасидаги бурчак:

$arccos\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{4-\sqrt{3}}}$ га тенг.