

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT AVTOMOBILVAYO'LLAR INSTITUTI

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

VALIJONOV H., RO'ZMATOVA N.

OLIY MATEMATIKADAN
MA'RUZA MATNI

(Menejment yo'nalishlar uchun 1-qism)

2011yil

TOSHKENT

ANNOTATSIYA

Ushbu ma'ruza matnlari oliy matematika fani 5521100-yer usti transport tizimlari, 5521200-transport vositalarini ishlatish va ta'mirlash, 5524100-ko'tarish tashish, yo'l va qurilish mashinalaridan foydalanish va ta'mirlash, 5850100-atrof muhit himoyasi mutaxassisliklarining bakalavriati I - kurs, I - semestrda mo'ljallab tuzilgan.

Ishlatilayotgan yangi ishchi dasturlarning hali tajribadan to'la o'tmaganligi sababli, keyinchalik mumkin bo'lgan o'zgarishlarni ham iloji boricha e'tiborga olgan holda mavzularni kengroq yoritishni afzal ko'rdik. Shu sababli ham, qo'llanmadan foydalanishda ko'rsatilgan mavzularni qanday hajmda o'qitishni ishchi dasturlari bilan solishtirgan holda rejalashtirdik.

Qo'llanma talabalarga to'g'ri yo'nalish berish, qanday adabiyotlardan foydalanish mumkinligini ko'rsatish maqsadida yozilgan bo'lib, u yosh o'qituvchilar hamda aspirant va mutahassislik kafedra xodimlari uchun ham foydalidir.

Ma'ruza matnlari Oliy matematika kafedrasi majlisida muhokama qilingan va ma'qullangan (Bayonnoma №21. 08.02.11y).

Kafedra mudiri:

prof. M.U. Gafurov

Toshkent avtomobil yo'llar instituti Yo'l qurilish fakulteti ilmiy-uslubiy Kengashida tasdiqlangan (bayonnoma №7, 14.02.2011 y.)

Fakultet dekani:

dos. A.Ablakulov

Toshkent avtomobil yo'llar instituti ilmiy-uslubiy Kengashida ko'rib chiqildi va tasdiqlandi (bayonnoma №____, _____ 2011 y.)

TAYI IUK raisi:

dos. A.A. Abduraxmonov

Tuzuvchilar:

prof. M.U. Gafurov
dos. H.Valijonov
kat.o`q. N.Ro`zmatova

Taqrizchi:
doktori,

Fizika-matematika fanlari

prof. I. Ganiev (Tosh TYMI)

*Bilimga chanqoq,
istedodli yoshlarni topib,
ularni Vatanga fidoiy
insonlar qilib tarbiyalash
muqaddas vazifadir.*

Islom Karimov

KIRISH

O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisi Qonunchilik palatasi va Senatining qo'shma majlisidagi prezident I.A. Karimovning ma'ruzalarida "Bugungi kunda davlat va jamiyat qurilishi sohasida mamlakatimiz oldida o'zining miqyosi va qamroviga ko'ra ulkan vazifalar turibdi" deb aytgan edilar.

Bu vazifalar"Jahon moliyaviy – iqtisodiy inqirozi hali – beri davom etayotgan og'ir bir sharoitda iqtisodiyotimizni yanada barqaror rivojlanishini ta'minlash, uni diversifikasiya va modernizasiya qilish, ishlab chiqarishni qayta jixozlash borasidagi ishlarni izchil davom ettirishimiz zarur.

Mintaqamizda va butun dunyoda yuzaga kelayotgan murakkab geosiyosiy sharoitda bizning zimmamizda mamlakatimizning xavfsizligi va barqarorligini ta'minlash, shu muqaddas zaminimizda hukm surayotgan tinch-osoyshta hayotni saqlash kabi bir-biridan ma'sulyatli va keng qo'lamli bir qator vazifalar borki, yurtimizning, jondan aziz farzandlarimizning bugungi va ertangi kuni ana shu masalalarni qanchalik muvaffaqiyat bilan hal etishimizga bog'liqdir.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A. Karimov O'zbekiston Respublikasi Konstitusiyasining 17 yilligiga bag'ishlangan tantanali majlisida:

"O'quv jarayonini yangi axborot va pedagogik texnologiyalarni keng joriy etish, ta'lim tarbiya tizimini sifat jixatdan butunlay yangi bosqichga ko'tarish diqqat markazida bo'lishi lozim. Bunda ta'lim sohasida zamonaviy axborot va kompyuter texnologiyalari, internet tizimi nafaqat maktab, lisey, kollej, oliy o'quv yurtlariga, balki har qaysi oila hayotiga keng kirib borishi uchun zamin tug'dirishning ahamiyatini chuqur anglab olishimiz darkor" deb aytgan so'zlari harbir ta'lim dargohi professor-o'qituvchilarining shioriga aylanganligi sir emas.

Talabalarga bilim berishda zamonaviy ta'lim texnologiyalarining ahamiyati to'g'risida so'z borganda Prezidentimiz I.A. Karimov "O'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyalarni keng joriy etish, bolalarimizni komil insonlar etib tarbiyalashda jonbozlik ko'rsatadigan o'qituvchi va domlalariga e'tiborimizni yanada oshirish, qisqacha aytganda, ta'lim-tarbiya tizimini sifat jixatdan butunlay yangi bosqichga ko'tarish diqqatimiz markazida bo'lishi darkor" degan so'zlarini ta'kidlash o'rinlidir. Bu masala "Barkamol avlod yili" Davlat dasturida ham asosiy yo'nalishlardan biri sifatida e'tirof etilgan.

1-MAVZU.

MATRITSA VA ULAR USTIDA AMALLAR.

a)Mavzuning ta'lim texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi:

Matritsa va ular ustida amallar.

3.Mavzuga oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu,
1985.
6. Pod redaksiyey Demidovicha B. Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu
analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarga matritsalar xaqida umumiy tasavvurni berish , ularda matritsa ta'rifi va xossalari haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: Ustun, element, o'lchov, matritsa, to'g'ri burchakli matritsa, kvadrat matritsa, yo'l matritsa, ustun matritsa, diagonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, matritsaning determinanti, teskari matritsa, transponirlangan matritsa.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:

Matritsa, matritsa o'lchovi, bosh diogonal, diogonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, minor va algebraik to'ldiruvchi, determinant, teskari matritsa, matritsaning rangi xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

1.1. Matritsa va ularning turlari.

Berilgan a_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) sonlardan tashkil topgan quyidagi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{yoki} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ko'rinishdagi jadvalga matritsa deyiladi. (1) ga m ta yo'lli, n ta ustunli, $m \times n$ o'lchovli matritsa deyiladi. a_{ij} larga matritsaning elementlari deyiladi.

Agar $m \times n$ bo'lsa, (1) ga to'g'ri burchakli yoki o'rta matritsa deyiladi. Agar $m = n$ bo'lsa, (1) ga kvadrat matritsa deyilib, uning o'lchami $n \times n$ bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{-kvadrat matritsa.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{-ustun matritsa deyiladi.}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \text{-yo'l matritsa deyiladi.}$$

Matritsa faqat jadval bo'lib, u biror aniq sonni ifodalamaydi. Matritsada katta, kichik degan tushuncha bo'lmaydi.

Matritsalar odatda A, B, C, - harflar orqali belgilanadi.

Faqat kvadrat matritsalar uchun ularning elementlaridan tuzilgan determinantni kiritish va hisoblash mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Hamma elementlari nol bo'lgan matritsaga nol matritsa deyiladi.

Bosh diagonal elementlaridan boshqa hamma elementlari nol bo'lgan kvadrat matritsaga diagonal matritsa deyiladi.

Bosh diagonal elementlari bir bo'lib, boshqa barcha elementlari nol bo'lgan kvadrat matritsaga birlik matritsa deyiladi va odatda E harfi orqali belgilanadi.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |E| = 1, \quad \text{bo'lishi ravshan.}$$

Har qanday A va B matritsalarining $A=B$ bo'lishi uchun ular bir xil o'lchovli va barcha mos elementlari teng bo'lishi shart:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$ bo'lganda $A=B$ bo'ladi.

1.1. Matritsani songa ko'paytirish.

Biror A matritsani k songa ko'paytirish deb, A matritsaning hamma elementlarini shu k songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan matritsaga aytiladi va kA ko'rinishda yoziladi.

$$kA = A_k = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol.

$$3A = 3 \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 12 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 Matritsalar ni qo'shish.

Matritsalar ni qo'shish amali faqat bir xil o'lchovli matritsalar uchun o'rinli bo'ladi.

Agar A va B matritsalar bir xil o'lchovli bo'lsa, ularning yigindisi deb shunday C matritsaga aytiladiki, bu C matritsaning elementlari A va B matritsalarining mos elementlarining yigindisidan iborat bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Misol.

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 15 & 6 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3 Matritsalar ni ko'paytirish.

Bizga

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsin.

Berilgan matritsalar ni ko'paytirish uchun A matritsaning ustunlari soni n , B matritsaning yo'llar soni p ga teng bo'lishi shart. Aks holda $A \times B$ ma'noga ega bo'lmaydi. Ikkita matritsani ko'paytirganda $A \times B = C$ yana matritsa hosil bo'lib, hosil bo'lgan matritsaning yo'llar soni ko'payuvchi matritsaning yo'llar soniga, ustunlar soni esa ko'paytuvchi matritsaning ustunlar soniga teng bo'ladi.

$$A_{mn} \times B_{pq} = C_{mq}, \quad C = A \times B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mq} \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib ikkita matritsaning ko'paytmasi yana matritsa hosil bo'lib, uning

c_{ij} elementi A matritsaning i - yo'lidagi hamma elementlarini B matritsaning j -ustunidagi mos elementlariga ko'paytmalarining yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}. \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

Matritsalarini ko'paytirganda quyidagi

$$(AB)C = A(BC) \text{ va } (A+B)C = AC + BC$$

gruppalash va taqsimot qonunlari orinli bo'lib, o'rin almashtirish qonuni esa o'rinli bolmaydi, ya'ni

$$AB \neq BA$$

Misol.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2. A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matritsa va deterinantning farqi.
2. Kvadrat va birlik matritsalar deb qanday matritsalariga aytiladi?
3. Diognal matritsa nima?
4. Qanday matritsalar teskari matritsaga ega bo'ladi?
5. A^{-1} matritsaning teskari ekanligini qanday bilish mumkin?
6. Minor nima?

2-MAVZU.

DETERMINANTLAR VA ULARNI HISOBLASH

a)Mavzusining pedagogik texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi:

Deteminantlar va ularni hisoblash.

3.Mavzuga oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu,
1985.
6. Pod redaksiyey Demidovicha B. Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu
analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarga determinant xaqida umumiy tasavvurni berish , ularda determinant ta'rifi va xossalari haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: Elementlar, yo'l, ustun va diagonal elementlari, determinant, minor, algebraik to'ldiruvchi, determinantning yoyilmalari.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:

Elementlar, yo'l, ustun va diagonal elementlari, determinant, minor, algebraik to'ldiruvchi, determinantning turlari, determinantning yoyilmalari, determinantni hisoblash xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

2.1. Ikkinchi tartibli determinant.

Ta’rif Agar, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar berilgan bo’lsa, shu sonlar orqali aniqlangan $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ushbu songa ikkinchi tartibli determinant deyiladi va odatda quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. a_{11}, a_{12} larga determinantning birinchi, a_{21}, a_{22} larga esa ikkinchi yo’l elementlari deyiladi. a_{11}, a_{21} larga determinantning birinchi, a_{12}, a_{22} larga esa ikkinchi ustun elementlari deyiladi. a_{11}, a_{22} larga determinantning bosh, a_{21}, a_{12} larga determinantning ikkinchi yoki yordamchi diagonal elementlari deyiladi.

(1) dan ko’rinadiki ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun, bosh diagonal elementlar ko’paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko’paytmasini ayirish kifoya ekan. Determinant lotincha so’z bo’lib, aniqlovchi degan ma’noni ifodalaydi.

Misol. $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 81 = -60$

2.2. Uchinchi tartibli determinant.

Ta’rif. Berilgan $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ sonlar orqali aniqlangan va quyidagicha belgilangan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

songa uchinchi tartibli determinant deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta yo’l va uchta ustun elementlaridan iborat bo’lib, a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) hammasi 9 ta element bo’ladi.

a_{ij} dagi birinchi indeks i yo’lning nomerini ya’ni nechanchi yo’l elementi ekanligini bildiradi. Ikkinchi indeks j esa ustunning nomerini ya’ni nechanchi ustun elemnti ekanligini bildiradi. Determinantlar har vaqt biror aniq son bo’lgani uchun uchunchi tartibli determinant ham biror aniq sonni ifodalaydi, bu son esa quyidagicha hisoblanadi.

Birinchi diagonal elementlar ko’paytmasi va asoslari shu diagonalga parallel bo’lgan ikkita teng yonli uchburchaklar uchlaridagi elementlar ko’paytmalarining

algebraik yig'indisidan ikkinchi diagonal elementlar ko'paytmasi va asoslari shu diagonalga parallel bo'lgan ikkita teng yonli uchburchak uchlaridagi elementlar ko'paytmalarining algebraik yig'indisini ayirganiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \bullet & \cdot \\ \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bullet \\ \cdot & \bullet & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

n-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko'rinishdagi simvolga *n*-tartibli determinant deyiladi. Bu yerda ham yo'l, ustun, element va diagonal tushunchalari o'z kuchlarini saqlab qoladi. *n*-tartibli determinant ham biror aniq sonni ifodalaydi. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashni minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalaridan keyin ko'ramiz.

2.3. Determinantning xossalari.

1-xossa. Agar determinantning yo'llarini mos ustunlari bilan almashtirilsa determinantning qiymati o'zgarmaydi.

2-xossa. Determinantning ixtiyoriy ikkita yo'lini (yoki ustunini) o'zaro almashtirilsa, determinant qiymati o'z ishorasini o'zgartiradi.

3-xossa. Determinantning biror yo'lining (yoki ustunining) barcha elementlari nol bo'lsa, determinantning qiymati nol bo'ladi.

4-xossa. Ixtiyoriy ikkita yo'li yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinant qiymati nol bo'ladi.

5-xossa. Istalgan yo'l (yoki ustun) ning umumiy elementini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

6-xossa. Determinantning biror yo'l (yoki ustun) elementlariga boshqa yo'l (yoki ustunining) elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shganda determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Bu xossalarning to'g'riligini bevosita determinantlarni hisoblab ishonch hosil qilish mumkin.

2.4. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.

1-ta'rif. Biror *n*-tartibli determinantning a_{ij} elementining minori deb, shu element turgan yo'l va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan (*n*-1) - tartibli determinantga aytiladi va odatda M_{ij} orqali belgilanadi.

Masalan.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli determinantning a_{23} elementining minori $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli determinant bo'ladi.

2-ta'rif. n-tartibli determinantning a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi deb shu element minorini $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olinganiga aytiladi va A_{ij} orqali belgilanadi.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Misol.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantning a_{43} elementining minorini va a_{21} elementining algebraik to'ldiruvchisini hisoblang.

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 - 15 + 8 = -24$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -24 + 3 - 6 + 4 = -23.$$

Minor va algebraik to'ldiruvchilar tushunchalari kiritilgandan keyin determinantning yana uchta xossasini ko'rib o'taylik.

7-xossa. Agar determinantning biror i-yo'lida (yoki j-ustunida) a_{ij} elementdan boshqa hamma elementlari nol bo'lsa, u holda bu determinant shu element bilan shu elementning algebraik to'ldiruvchisi ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

8-xossa. Har qanday determinant, biror yo'li (yoki ustuni) elementlari bilan shu elementlarning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{yoki} \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad \text{yoki} \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Determinantning 8-xossasidan foydalanib istalgan tartibli determinantni hisoblash mumkin.

Misol.

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -4 & -8 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-4) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & -8 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -264.$$

9-xossa. Determinantning biror yo'li (yoki ustuni) elementlarining boshqa yo'li (yoki ustuni) elementlarining algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisi nol bo'ladi.

Masalan. Ikkinchi ustun elementlarini birinchi ustun elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirsak $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0$ bo'ladi.

Adabiyotlar.

1. [1] 23-29 betlar.
2. [2] 36-42 betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. 4-tartibli determinantda nechta element bor?
2. Qanday hollarda determinantning qiymati nol bo'ladi?
3. Minor va algebraik to'ldiruvchining farqi nima?
4. Determinantning qiymati uning elementlarini qanday almashtirganda o'zgarmaydi?
5. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash usullari.

3-MAVZU.

TESKARI MATRITSA.

a)Mavzuning ta'lim texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi:

Teskari matritsa .

3.Mavzuga oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu,
1985.
6. Pod redaksiyey Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu
Demidovicha B. analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: talabalarga teskari matritsa xaqida umumiy tasavvurni berish , ularda teskari matritsa ta'rifi va xossalari haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: Kvadrat matritsa, matritsaning determinanti, transponirlangan matritsa, teskari matritsa, matritsaning rangi.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:

Transponirlangan matritsa, minor va algebraik to'ldiruvchi, determinant, teskari matritsani topish, matritsaning rangi xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

3.1. TESKARI MATRITSA TA'RIFI.

Teskari matritsa tushunchasi faqat kvadrat matritsalariga nisbatan kiritiladi.

1-ta'rif. Agar har qanday A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA=E$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda B matritsani A matritsaga (va aksincha) teskari matritsa deyiladi.

Odatda A matritsaga teskari matritsa A^{-1} ko'rinishda yoziladi va $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ bo'ladi. (E-birlik matritsa).

2-ta'rif. Agar A kvadrat matritsaning determinanti $|A| \neq 0$ bo'lsa, A matritsaga maxsusmas (yoki xosmas) matritsa deyiladi. Agar $|A|=0$ bo'lsa, u holda maxsus (yoki xos) matritsa deyiladi.

3-ta'rif. Biror A matritsaning barcha mos yo'l va ustunlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan matritsaga A ga nisbatan transponirlangan matritsa deyiladi va odatda A^* ko'rinishda belgilanadi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Agar $A = A^*$ bo'lsa u holda A matritsaga semmetrik matritsa deyiladi.

Teorema. Har qanday A kvadrat matritsa teskari A^{-1} matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsaning maxsusmas matritsa bo'lishi zarur va kifoya.

Isboti.

Zarurligi. Faraz qilaylik A matritsa teskari A^{-1} matritsaga ega bo'lsin, bu holda $|A| \neq 0$ ekanligini ko'rsataylik. Agar A matritsa teskari A^{-1} matritsaga ega bo'lsa u holda $AA^{-1}=E$ tenglik o'rinli, undan

$$|AA^{-1}|=|E| \Rightarrow |A||A^{-1}|=|E|=1 \Rightarrow |A| \neq 0$$

Kifoyaligi. Qulaylik uchun uchinchi tartibli matritsa uchun ko'raylik.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

bo'lsin. A^{-1} ning mavjud ekanligini ko'rsataylik. Shunday B matritsa tuzaylikki uning har bir elementi A matritsaning xar bir mos elementlarining algebraik to'ldiruvchlarini shu A matritsa determinantiga bo'lishdan hosil bo'lsin.

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}$$

Endi B matritsaga transponirlangan matritsani tuzsak hosil bo'lgan matritsa A^{-1} bo'ladi.

$$A^{-1} = B^* = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = ?, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0. \quad A^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Haqiqatan $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ tenglikni o'rinli ekanligini hisoblab ko'rish mumkin.

3.2. Matritsaning rangi va elementar almashtirishlar.

Bizga $m \times n$ o'lchovli to'g'ri to'rt burchakli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. A matritsaning k-tartibli minori deb, uning k ta ustuni va k ta yo'li kesishishidan hosil bo'lgan $k \times k$ o'lchovli kvadrat matritsaning determinantiga aytiladi ($k = \min(m, n)$) $m \times n$ o'lchovli matritsaning k - tartibli minorlar soni $C_m^k \cdot C_n^k$ bo'ladi.

2-ta'rif. Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli bo'lgan minorlarining eng yuqori tartibiga aytiladi.

Agar matritsaning rangi k bo'lsa, u holda bu matritsaning $k+1$ tartibli minoridan boshlab barcha yuqori tartibli minorlari nol bo'ladi. Matritsaning rangiga quyidagicha ham ta'rif berish mumkin.

3-ta'rif. A matritsaning rangi deb uning chiziqli bog'liqli bo'lmagan yo'llarining (yoki ustunlarining) maksimal soniga aytiladi.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinidiki biror matrisaning rangini hisoblash uchun uning noldan farqli bo'lgan barcha minorlarini hisoblashga to'g'ri keladi. Bu esa har xil tartibli ko'p determinantlarni hisoblashga olib keladi.

Bu noqulaylikni bartaraf qilish uchun elementar almashtirishlarni kiritish, matrisaning rangini hisoblashda maqsadga muvofiq bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matrisa ustida quyidagi elementar almashtirishlar deb ataluvchi almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. A matrisaning istalgan biror yo'l (yoki ustun) elementlarini ixtiyoriy $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirish mumkin.
2. A matrisaning ixtiyoriy ikkita yo'llarini (yoki ixtiyoriy ikkita ustunlarini) o'zaro almashtirish mumkin.
3. A matrisaning ixtiyoriy biror yo'l (yoki ustun) elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirib boshqa biror ixtiyoriy yo'l (yoki ustun) elementlariga qo'shish mumkin.

Bu elementlar almashtirish yordamida har qanday A matritsani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$r(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bosh diagonalda turgan bir raqamlarining soni matrisaning rangi deyiladi va odatda $r(A)$ ko'rinishda belgilandi.

Elementar almashtirishlar natijasida hosil bo'lgan matrisalar ekvivalent matrisalar deyiladi.

Ekvivalent matrisalarning rangi bir xil bo'ladi.

Misol.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad r(A) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 17 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2.$$

Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

Matritsalar nazariyasizamonaviy texnologiya rivojlanish jarayonida asosiy muxim iqtisodiy msalalarni yechishda katta rol o'ynamoqda. Jumladan quyidagi ko'p tarmoqli iqtisod modeli masalasida ko'rish mumkin.

Balans modelining asosiy masalasi, makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko'p tarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maqsadga muvofiq tarzda samarali olib borishdan iborat bo'lib, bu masala quyidagicha qo'yiladi: n ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi? Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i - tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda $i=1,2,\dots, n$. x_{ij} deb i - tarmoq mahsulotining j tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i - tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan mahsulot hajmi x_i , n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lish kerak, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

(1) tenglamalar balans munosobotlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) belgilash kiritsak, a_{ij} - j - tarmoqning

mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i – sarf tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij} - bevosita harajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij} - koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa, a_{ij} - koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-harajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf-harajatlarni yalpi harajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A – texnologik matritsa, X – yalpi mahsulot vektori, Y – yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (2) tenglikning quyidagi matritsa ko'rinishini hosil qilamiz.

$$X = AX + Y \quad (3)$$

Ko'p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita harajatlar matritsasi A – ga ko'ra X – yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni (3) tenglamani noma'lum vector X ga nisbatan yechish kerak. Bunig uchun uni quyidagi ko'rinishga olib ketamiz $(E-A)X=Y$.

Agar $\det(E-A) \neq 0$ bo'lsa, u holda teskari $(E-A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$X = (E - A)^{-1} Y \quad (4)$$

$S = (E - A)^{-1}$ - matritsa bevosita harajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma'nosini tushunish uchun $Y_i(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) i – o'rnida 1, qolgan joylarda 0 bo'lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz.

Ularga mos keluvchi (4) tenglama yechimlari quyidagiga teng bo'ladi.

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S = (s_{ij})$ matritsaning s_{ij} - elementi i - tarmoqning j - tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y_j^i ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo'lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, (4) tenglamada $y_i \geq 0$, $(i = \overline{1, n})$, $a_{ij} \geq 0$ ($i, j = \overline{1, n}$) bo'lishi kerak. Bu holatni biz $Y \geq 0$, $A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (4) ning yechimi mavjud bo'lsa, $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

A matritsaning samarali bo'lishi uchun, bir nechta kriteriyalar mavjud.

Ulardan biri shundan iboratki, agar A matritsaning har bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan katta bo'lmay, hech bo'lmaganda biron – bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan kichik bo'lsa, u holda A samarali

matritsa bo'ladi, ya'ni: $\max_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$ bo'lib,

shunday j_0 mavjudki, uning uchun $\sum_{i=1}^n a_{ij_0} < 1$ o'rinli bo'lsa,

A -samarali matritsabo'ladi.

a)Mavzuning ta`lim texnologiyasi

2.Mavzu nomi:

3.Mavzuga oid o'quv adabiyotlar:

- 4.Mavzuning o'quv maqsadi:** Talabalarga chiziqli algebraik tenglamalar

6. Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:

Tenglamalar sistemasi, noma'lumlar, yechimlar, birgalikda bo'lgan va bo'lmagan sistema, elementar almashtirishlar xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

4.1. Kroneker – Kapelli teoremasi.

Bizga quyidagi n ta noma'lumlar m tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

[illegible]

a_{ij} lar noma'lumlarning oldidan koeffisientlar bo'lib, a_{ij} dagi birinchi indeks i tenglama nomerini, ikkinchi indeks j da noma'lum nomerni bildiradi, b_i lar esa ozod hadlar, x_j lar esa noma'lumlar ($i=1,..., m$; $j=1,..., n$)

1 – ta’rif. Agar (1) sistema yechimga ega bo’lsa, unga birgalikda bo’lgan sistema, agar yechimga ega bo’lmasa birgalikda bo’lmagan sistema deyiladi.

2 – ta’rif. Agar birgalikda bo’lgan sistema yagona yechimga ega bo’lsa, uni aniq sistema deyiladi. Agar cheksiz ko’p yechimga ega bo’lsa, uni aniqmas sistema deyiladi.

Endi (1) sistemadagi noma'umlarning koeffisientlaridan tuzilgan matrisa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

tuzaylik. So'ngra A matrisaning ustunlariga ozod hadlardan iborat bo'lgan ustun qo'shgan holda quyidagi matrisani tuaylik.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (3)$$

Endi qachon (1) sistema birgalikda bo'ladi degan savol tug'iladi.
Bu savolga quyidagi **Kroneker – Kapelli teoremasi** javob beradi.

Bu erda bo'lishi mumkin:

- 1) Agar $r(A) < r(B)$ bo'lsa sistema birgalikda bo'lmagan sistema bo'lib yechimi mavjud bo'lmaydi.
 - 2) Agar $r(A) = r(B) = n$ bo'lsa sistema birgalikda bo'lib yagona yechimga ega bo'ladi.
 - 3) Agar $r(A) = r(B) = r < n$ bo'lsa sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.
- Boshqacha aytganda tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

[illegible]

Agar $\Delta = 0$ bo'lsa (4) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$$
$$r(A) = r(B) = n \text{ bo'лади.}$$

Bu esa (4) sistemaning yagona $x_1=0, \quad x_2=0, \dots, x_n=0$ yechimlar mavjud ekanligini ko'rsatadi.

Teorema. (4) sistema faqat nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun A matrisaning rangi noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va kifoya.

$$r(A) < n.$$

Eslatma. Agar bir jinsli sistemada tenglamalar soni m noma'lumlar soni n dan kichik bo'lsa, u holda $r(A) \leq m < n$ bo'lib sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

4.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.

Faraz qilaylik birinchi darajali, ikkita noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

(1) sistemaning 1-tenglamasini a_{22} ga, 2-tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \Rightarrow x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

Agar (1) sistemaning 1-tenglamasini $-a_{21}$ ga, 2-tenglamasini a_{11} ga ko'paytirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \Rightarrow x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (3)$$

(2) va (3) larga e'tibor bersak ikkinchi tartibli determinantning ta'rifiga ko'ra

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad (4)$$

(4) ga Kramer formulasi deyiladi.

(1) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta \neq 0$ bo'lishi zarur va kifoya.

(4) ga e'tibor bersak Δ berilgan (1) sistemadagi noma'lumlarning oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan 2-tartibli determinant Δ_1, Δ_2 lar esa mos ravishda Δ ning birinchi va ikkinchi ustunlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantlar.

Agar uch noma'lumli uchta algebraik tenglamalar sistemasi

Agar $\Delta=0$ bo'lsa, (9) ning cheksiz ko'p yechimi bo'lib, ular (7) kabi aniqlanadi.

Misol.

$$1) \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad (x=3t; u=4t; z=11t),$$

$$2) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases} \quad (x=2t; y=-3t; z=5t).$$

4.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

[illegible]

a_{ij} ($i=1,..., m$; $j=1,..., n$) koeffitsiyentdagi birinchi indeks tenglama nomerini, ikkinchi indeks esa noma'lum nomerini bildiradi.

Chiziqli tenglamalar sistemasida ustida quyidagi elementar almashtirishlarni bajarish mumkin.

1. Istalgan ikkita tenglamani o'rinlarini almashtirish mumkin.
2. Tenglamalarning ixtiyoriy bittasining ikkala tomonini noldan farqli istalgan songa ko'paytirish mumkin.
3. Ixtiyoriy bitta tenglamasining har ikkala tomonini biror haqiqiy songa ko'paytirib, boshqa biror tenglamaga qo'shish mumkin.

Bu elementar almashtirishlarni bajarganimizda hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga teng kuchli bo'ladi.

Endi (1) sistemani Gauss usuli bilan yechishga o'taylik. Bu usulning mohiyati shundan iboratki elementar almashtirishlar yordamida noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib, berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan uchburchak (yoki po'gonasimon) ko'rinishdagi sistemaga keltiriladi.

Xaqiqatdan $a_{11} \neq 0$ deb (1) ning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, so'ngra uni $-a_{21}$ ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamaga qo'shamiz.

Keyin $-a_{31}$ ga ko'paytirib, uchinchi tenglamaga qo'shamiz va shu jarayonni davom ettiraversak natijada shunday sistema hosil bo'ladi, u sistemaning faqat birinchi tenglamasida x_1 qatnashib qolganlarida qatnashmaydi.

Shu jarayonni (1) sistemaning qolgan tenglamalariga ketma-ket tadbiq etsak, quyidagi ikkita sistemaning bittasiga kelimiz.

2)

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

1-tenglamani (-2) ga ko'paytirib 2-tenglamaga, (-1) ga ko'paytirib

$$\text{3-tenglamaga qo'shsak} \quad \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ -3x_2 + 3x_3 &= -3 \\ -3x_2 + 3x_3 &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

$$x_2 = 1 + x_3; \quad x_1 = 1 - 2 - 2x_3 + 4x_3 = 2x_3 - 1.$$

Shunday qilib $x_1 = 2x_3 - 1$; $x_2 = 1 + x_3$.

Demak berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan, chunki x_3 ga ixtiyoriy son berib, x_1, x_2 larning cheksiz ko'p qiymatlarini hosil qilamiz.

Ba'zi hollarda (1) chiziqli tenglamalar sistenasini Gauss usulida kengaytirilgan matritsa yordamida yechish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Buning uchun (1) sistemadagi noma'lumlarning oldidagi koeffisientlaridan va ozod hadlaridan tashkil topgan quyidagi kengaytirilgan matritsani tuzamiz:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (4)$$

So'ngra elementar almashtirishlar yordamida (4) matritsa quyidagi ko'rinishdagi birlik matritsaga keltiriladi.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 00\dots 0 & & & c_1 \\ 0 & 10\dots 0 & & & c_2 \\ \hline & & & & - \\ \hline & & & & - \\ 0 & 00\dots 1 & & & c_n \end{array} \right) \quad (5)$$

Bu holda sistema yagona yechimga ega bolib, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3 - \dots$, $x_n = c_n$ ko'rinishda bo'ladi.

Eslatma:

1. Agar elementar almashtirishlar natijasida (2) matritsa biror yo'lining barcha elementlari nol bo'lsa, u holda bu yo'lni tashlab yuborish mumkin. Bu holda berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.
2. Agar elementar almashtirishlar natijasida (2) matritsaning biror yo'l elementlari $(0 \ 0 \dots \dots \ 0 \ | \ c)$ ko'rinishda bo'lsa, sistemaning yechimi

mavjud bo'lmaydi. Ya'ni sistema birgalikda bolmagan sistema deyiladi.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

Echish. Endi elementlari noma'lumlarning oldidagi koeffisientlardan ba ozod hadlardan tuzilgan kengaytirilgan matrisa tuzaylik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

Birinchi yo'l elementlarini -2 ga ko'paytirib, ikkinchi yo'l elementlariga, -1 ga ko'paytirib uchinchi yo'l elementlariga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

Ikkinchi yo'l elementlarini $-\frac{1}{11}$ ga, uchinchi yo'l elementlarini $-\frac{1}{8}$ ga ko'paytirsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

kelib chiqadi.

Ikkinchi yo'l elementlarini -4 ga ko'paytirib, birinchi yo'l elementlariga, -1 ga ko'paytirib, uchinchi yo'l elementlariga qo'shsak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{31}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{44} & \frac{1}{22} \end{array} \right) \quad \text{hosil bo'ladi.}$$

Uchinchi yo'l elementlarini -44 ga ko'paytirsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{31}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

hosil bo'ladi.

Uchinchi yo'l elementlarini $-\frac{3}{11}$ ga ko'paytirib, ikkinchi yo'l elementlariga, so'ngra, $-\frac{10}{11}$ ga ko'paytirib, birinchi yo'l elementlariga qo'shsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

hosil bo'ladi.

Bundan $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=-2$ ekanligi kelib chiqadi.

2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Echish.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

Birinchi yo'l elementlarini -1 ga ko'paytirib, ikkinchi yo'l elementlariga, so'ngra -2 ga ko'paytirib, uchinchi yo'l elementlariga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

Ikkinchi yo'l elementlarini -1 ga ko'paytirib, uchinchi yo'l elementlariga qo'shsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

hosil bo'ladi.

Elementar almashtirishlar natijasida oxirgi yo'l elementlari $(0 \ 0 \ 0 \ | \ -4)$ ko'rinishga kelib qoladi. Bunday holda berilgan sistemaning echimi mavjud bo'lmaydi. Demak, berilgan sistema birgalikda emas.

3-misol

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Echish.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Birinchi yo'l elementlarini -2 ga ko'paytirib, ikkinchi yo'l elementlarini -1 ga ko'paytirib, uchinchi yo'l elementlariga qo'shsak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

hosil bo'ladi.

Ikkinchi yo'l elementlarini -1 ga ko'paytirib, uchinchi yo'l elementlariga qo'shsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{yoki} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

hosil bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, berilgan sistema cheksiz ko'p echimga ega ekan.

4.4. Matritsalar yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish.

Qulaylik uchun uchta noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

Elementlari noma'lumlarning koeffitsiyentlaridan, noma'lumlardan va ozod hadlardan tuzilgan quyidagi matritsalarini ko'raylik.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Bu holda (1) sistemani quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=C \quad (2).$$

Agar A matritsa maxsusmas matritsa bo'lsa, u holda unga teskari bo'lgan A^{-1} matritsa mavjud bo'ladi. Shuning uchun (2) ning har ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytirsak

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}C \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}C$$

Agar $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ va $EA = AE = A$ tengliklarni e'tiborga olsak

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}C \Rightarrow EX = A^{-1}C \Rightarrow X = A^{-1}C \quad (3),$$

(3) (1)-sistemaning yechimini ifodalaydi.

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini matritsaviy usulda yeching:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$$

Yechish. Sistemani matritsa ko'rinishida yozaylik:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 50$$

Demak A matritsa uchun A^{-1} matritsa mavjud. Berilgan A matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini hisoblab teskari matritsani topamiz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -5/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Endi (3) formulaga asosan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & -1/5 \\ 2 & 12/5 & -5/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_1=2$; $x_2=1$; $x_3=3$.

Adabiyotlar.

1. [1] 55-60 betlar.
2. [2] 43-48; 87-90 betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Tenglamalar sistemasi qanday masalalarni yechishda ishlatiladi?
2. Sistemani yechish usullari, ularni bir-biridan farqi.
3. Qanday holda sistema cheksiz ko'p yechimga ega?
4. Qanday almashtirishlar natijasida berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli bo'lgan sistema hosil bo'ladi?
5. Gauss usulini mohiyati nimadan iborat?
6. Aniq sistema nima?

5-MAVZU.

VEKTORLAR ALGEBRASI

a)Mavzuning ta'lim texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi: Vektorlar algebrasi.

3.Mavzuqa oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu, 1985.
6. Pod redaksiyey Demidovicha B. Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: Talabalarga vektorlar algebrasi xaqida umumiy tasavvurni berish , ularda tekislik va fazoda vektorlar algebrasi haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: Vektor, vektorning boshi, oxiri (uchi), vektorlar. Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak va parallelogramm qoidalari. Vektorning proyeksiyalari, chiziqli bog'liqli va chiziqli bog'liqsiz vektorlar. Bazis. Yo'naltiruvchi kosinuslar. Vektorning koordinatalari. Vektorlar orasidagi burchak.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:

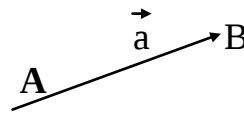
Vektorlar. Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak va parallelogramm qoidalari. Vektorning proyeksiyalari, chiziqli bog'liqli va chiziqli bog'liqsiz vektorlar. Bazis. Yo'naltiruvchi kosinuslar. Vektorning koordinatalari. Vektorlar orasidagi burchak va parallelizm,perpendikulyarlik shartlari. Skalyar ko'paytma. Vektor ko'paytma. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

Tayanch so'zlar: Vektor, vektorning boshi, oxiri (uchi), vektorlar. Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak va parallelogramm qoidalari. Vektorning proyeksiyalari, chiziqli bog'liqli va chiziqli bog'liqsiz vektorlar. Bazis. Yo'naltiruvchi kosinuslar. Vektorning koordinatalari. Vektorlar orasidagi burchak.

5.1. Vektor.

1-ta'rif. Aniq yo'nalishga ega bo'lgan chekli kesmaga vektor deyiladi.



A nuqtani vektorning boshi, B nuqtani esa vektorning oxiri yoki uchi deyiladi. Odatda vektor $\overline{AB}$ yoki $\vec{a}$ ko'rinishda yoziladi. Kesmaning uzunligi $\overline{AB}$ vektorning modulini ya'ni son qiymatini ifodalaydi va $|\overline{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda yoziladi. Vektor degan so'z asli lotincha bo'lib, ko'chiruvchi, siljituvchi yoki tortuvchi degan ma'noni bildiradi.

2-ta'rif. Agar vektorlar bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi.

Kollinear so'zi lotincha «com» ya'ni birgalikda yoki umumiy ma'nosidagi va «Linia» ya'ni chiziq ma'nosidagi so'zlardan tuzilgan bo'lib, «chiziqdosh» degan ma'noni bildiradi.

3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi.

4-ta'rif. Har qanday $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning

- 1) modullari teng bo'lsa;
- 2) kollinear bo'lsa;
- 3) yo'nalishlari bir xil bo'lsa, u holda $\vec{a} = \vec{b}$ deyiladi.

5-ta'rif. Uzunliklari teng bo'lib, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan vektorlarga qarama-qarshi vektorlar deyiladi.

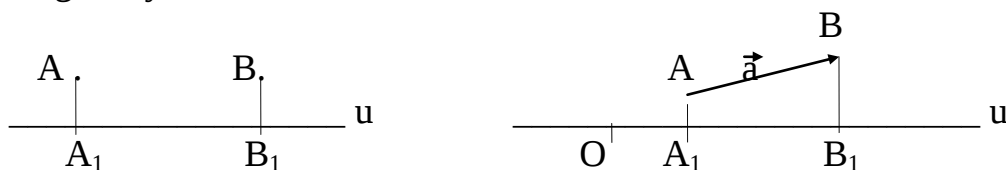
5.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

Vektorlarni qo'shish, ayirish amallari o'rta maktab dasturidan ma'lum bo'lgan uchburchak va parallelogramm qoidalariga asosan amalga oshiriladi.

Vektorni songa ko'paytirish. $\vec{a}$ vektorni biror α haqiqiy songa ko'paytirganda shu $\vec{a}$ ga kollinear bo'lgan $\vec{b}$ vektor hosil bo'lib, uning uzunligi $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$ ga teng bo'lib, yo'nalishi esa $\alpha > 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\alpha < 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ yo'nalishiga qarshi bo'ladi. Vektorlarni songa ko'paytirish qoidasidan ko'rinadiki $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ bo'lsa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear vektorlar va aksincha. Demak $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinear vektorlar bo'lishi uchun $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ tenglik o'rinli bo'lishi zarur va kifoya.

5.3. Vektorlarning o'qqa proyeksiyasi.

Proyeksiya so'zi lotincha «projectiv» so'zidan olingan bo'lib, «tasvir» yoki «soya» degan ma'noni bildiradi. Biror A nuqtaning u o'qdagi proyeksiyasi deb, shu nuqtadan u o'qqa tushirilgan perpendikulyarning A_1 asosiga aytiladi va quyidagicha yoziladi



$\text{Pr}_u A = A_1$, $\text{Pr}_u B = B_1$. $\vec{AB}$ vektorning o'qdagi geometrik proyeksiyasi deb, vektor boshining proyeksiyasi bo'lgan A_1 dan uchining proyeksiyasi bo'lgan B_1 nuqta tomon yo'nalgan $\vec{A_1B_1}$ vektorga aytiladi. $\text{Pr}_u \vec{AB} = \vec{A_1B_1}$.

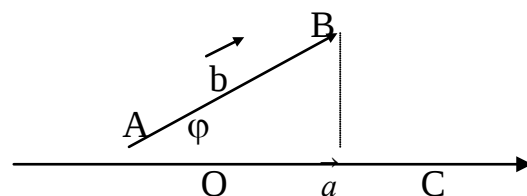
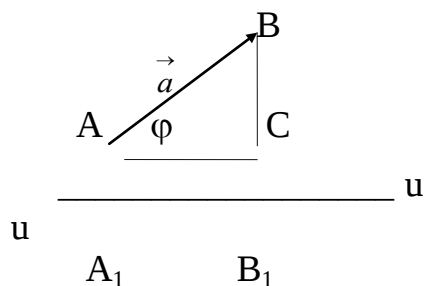
Har qanday vektorning biror o'qdagi geometrik proyeksiyasi vektordir, lekin uning algebraik miqdori biror aniq sonidir. Shuning uchun vektorning proyeksiyasi deb shu son qabul qilinadi.

Demak $\vec{A_1B_1}$ vektorning uzunligi $\vec{AB}$ vektorning u o'qdagi proyeksiyasi deyiladi.

Agar A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda x_1, x_2 desak $\text{Pr}_u \vec{AB} = x_2 - x_1$ bo'ladi.

Teorema. $\vec{a}$ vektorning u o'qdagi proyeksiyasi shu vektor uzunligini, shu vektor bilan u o'q orasidagi φ burchak kosinus ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$\text{Pr}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$



chizmadan: $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = |\vec{a}| \cos \varphi$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A_1B_1}|$,

$\text{pr}_{\vec{u}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi \Rightarrow \text{pr}_{\vec{u}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$.

Agar φ burchak o'tkir bo'lsa proyeksiya musbat, φ burchak o'tmas bo'lsa, proyeksiya manfiy bo'ladi. Bizga $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsa, $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$, $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ tengliklarning o'rinli ekanliklarini ko'rsatish mumkin.

Vektor koordinatalari deganda vektorning uchi bilan boshining bir xil koordinatalari ayirmalariga shu vektorning koordinatalari deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$\vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

Vektor koordinatalar kvadratlarining yisindisidan olingan kvadrat ildizga vektor uzunligi deyiladi.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

5.4. Chiziqli bog'liqli va chiziqli bog'liqsiz vektorlar.

1-ta'rif. Agar $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ (1) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ larning hammasi bir paytda nolga teng bo'lmagan holda o'rinli bo'lsa, u holda

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarga chiziqli bog'liqli vektorlar deyiladi.

2-ta'rif. Agar (1) tenglik faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ vektorlarga chiziqli bog'liqsiz vektorlar deyiladi.

Tekislikdagi har qanday ikkita vektorning chiziqli bog'liqli bo'lishi uchun ularning kollinear vektorlar bo'lishi zarur va kifoya. Fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liqli bo'lishi uchun, ularning komplanar vektorlar bo'lishi shart.

Tekislikdagi har qanday ikkita vektorning va fazodagi har qanday uchta vektorning chiziqli bog'liqsiz vektorlar bo'lishi uchun ularning mos ravishda kollinear va komplanar vektorlar bo'lmashliklari zarur va kifoya.

5.5. Vektorni bazislar bo'yicha yoyish.

1-ta'rif. Tekislikdagi bazis deb ikkita kollinear bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektorlarga aytiladi.

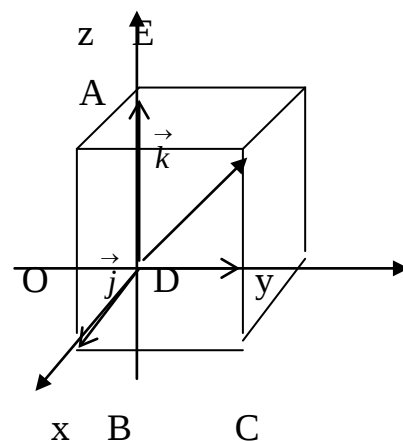
1-teorema. Tekislikdagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

2-ta'rif. Fazodagi bazis deb, undagi har qanday uchta komplanar bo'lmagan, ya'ni chiziqli bog'liqsiz bo'lgan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ vektorlarga aytiladi.

2-teorema. Fazodagi biror $\vec{a}$ vektorning $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ bazislar orqali yoyilmasi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$ (2) ko'rinishda bo'lib, yagona bo'ladi.

Endi dekart koordinata sistemasidagi bazis va ular bo'yicha vektorlarni yoyishni ko'raylik. Dekart koordinata sistemasida Ox, Oy, Oz o'qlar yo'nalishida mos ravishda uzunliklari birga teng bo'lgan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarni $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ olaylik. Uzunliklari birga teng bo'lgan vektorlarga birlik vektor yoki ort deyiladi. Bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lib komplanar bo'lmagani uchun, ya'ni chiziqli bog'liqsiz vektorlar bo'lgani uchun bazislarni tashkil qiladi. Shuning uchun ularga dekart ortogonal bazislar deyiladi.

$\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE}$
 $\vec{OB}$ va $\vec{i}$; $\vec{OD}$ va $\vec{j}$; $\vec{OE}$ va $\vec{k}$ vektorlarning kollinear vektorlar ekanligini e'tiborga olsak $\vec{OB} = \lambda_1 \vec{i}$; $\vec{OD} = \lambda_2 \vec{j}$; $\vec{OE} = \lambda_3 \vec{k}$ kelib chiqadi $\vec{a} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini mos ravishda



$\text{pr}_{Ox} \vec{OA} = a_x = \lambda_1$, $\text{pr}_{Oy} \vec{OA} = a_y = \lambda_2$, $\text{pr}_{Oz} \vec{OA} = a_z = \lambda_3$ desak $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ formula kelib chiqadi.

Agar $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini x, y, z desak,

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{x, y, z\},$$

$$\vec{a} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

ko'rinishlarda ham yozish mumkin.

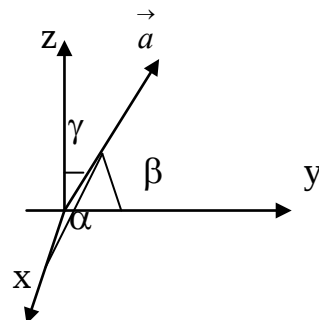
5.6. Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari.

$\vec{a} = \{x, y, z\}$ vektor Ox, Oy, Oz koordinata o'qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklar tashkil qilsin.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchaklar kosinuslariga ya'ni $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ larga $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

Proyeksiyalash qoidalaridan foydalansak chizmadan ko'rinadiki

$$x = a_x = \text{pr}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$



$$y = a_y = \text{pr}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$z = a_z = \text{pr}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Misol. A(1,2,3) V(2,4,5) bo'lsa, $\vec{a} = \vec{AB}$ vektoring yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. $\vec{AB} = \{1; 2; 2\}$, $|\vec{AB}| = 3$, $\cos \alpha = 1/3$; $\cos \beta = 2/3$; $\cos \gamma = 2/3$.

5.7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

$$\begin{array}{ccccc} A(x_1, y_1, z_1) & & N(x, y, z) & & B(x_2, y_2, z_2) \\ \hline & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \\ & x=?; y=?; z=? & & & \end{array}$$

$$\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} = \lambda \Rightarrow \vec{AN} = \lambda \vec{NB}.$$

$\vec{AN}$ va $\vec{NB}$ vektorlarning kollinearlik shartidan

$$\vec{AN} = \lambda \vec{NB} \Rightarrow (x - x_1) \vec{i} + (y - y_1) \vec{j} + (z - z_1) \vec{k} = \lambda \cdot [(x_2 - x) \vec{i} + (y_2 - y) \vec{j} + (z_2 - z) \vec{k}]$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

xususiyl holda $\lambda = 1$ bo'lsa, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$

5.8. Skalyar ko'paytma.

1-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, shunday songa aytiladiki, bu son shu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng bo'ladi va odatda $\vec{a} \vec{b}$ yoki $(\vec{a} \vec{b})$ ko'rinishda yoziladi.

Demak ta'rifga ko'ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$; $\varphi = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Misol. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\varphi=60^\circ$ bo'lsa $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$

Skalyar ko'paytmani quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

2-ta'rif. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb, ihtiyoriy bittasining uzunligini ikkinchisining birinchi vektor yo'nalishidagi proyeksiyasi bilan ko'paytmasiga aytiladi. $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$ yoki $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ tengliklardan foydalansak

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}; \quad \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}; \quad \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Skalyar ko'paytmaning fizik ma'nosi: $\vec{F}$ kuchning moddiy nuqtani s masofaga ko'chirgandagi bajargan ishdur. $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ yoki $A = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \varphi$.

Skalyar ko'paytmaning xossalari.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ o'rin almashtirish xossasi.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ taqsimot xossasi.
3. $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$ guruhlash xossasi.
4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ chunki $\cos 0 = 1$.

Agar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$ chunki $\cos 180^\circ = -1$.

5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

6. $\vec{a}$ perpendikulyar $\vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'ladi.

Eslatma. 5 va 6 xossalardan foydalanib $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning skalyar ko'paytmalarini ko'rsak

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi ravshan.

Skalyar ko'paytmaning koordinatalari orqali ifodasi.

Agar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar koordinatalari orqali berilgan bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ni hisoblaylik.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\} \cdot \{x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\} = (\text{eslatmaga ko'ra}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Demak koordinatalari bilan berilgan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi mos koordinatalari ko'paytmalarining yigindisiga teng bo'lar ekan.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yigindisi esa quyidagicha hisoblanadi:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$$

5.9. Ikki vektor orasidagi burchak va parallel, perpendikulyarlik shartlari.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni φ desak bu vektorlarning skalyar ko'paytmasidan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (1)$$

ikki vektor orasidagi burchak kosinusini hisoblash formulasi kelib chiqadi.

Agar $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa,

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (2)$$

Agar $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lib $\cos \varphi = 0$ bo'ladi va (2) dan

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \quad (3)$$

(3) ikki vektorning perpendikulyarlik sharti. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa, u holda bu vektorlarning kollinearlik shartidan ya'ni $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ dan

$$x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} = \lambda (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \Rightarrow x_1 = \lambda x_2 ; y_1 = \lambda y_2 ; z_1 = \lambda z_2 .$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (5)$$

(5) ikki vektorning parallel sharti.

Misol. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ bo'lsa $(\vec{a} + \vec{b})^2 = q$,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2 = 9 - 12 + 16 = 13$$

5.10. Vektor ko'paytma.

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, quyidagicha aniqlanadigan shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ vektorning moduli son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning yuziga teng $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$

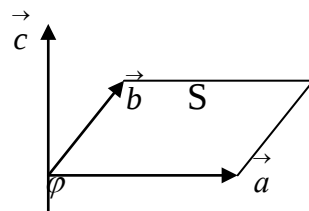
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$.

3. $\vec{c}$ vektorning musbat yo'nalishi shundayki, agar $\vec{c}$ vektorning uchidan (oxiridan) qaralsa, $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa masofa soat strelkasi aylanishiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

Vektor ko'paytma $[\vec{a} \vec{b}]$ yoki $\vec{a} \times \vec{b}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

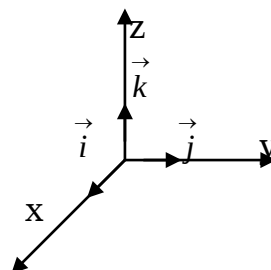
$$S_p = |\vec{c}| = |[\vec{a} \vec{b}]| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

$$S_{uch} = \frac{1}{2} |[\vec{a} \vec{b}]| = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$



Vektor ko'paytmaning xossalari.

1. $[\vec{a} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a}]$.
2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lsa, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
3. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.



Endi 1,2 xossalardan foydalanib $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning vektor ko'paytmalarini chiqaraylik.

2-xossaga ko'ra $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ ekanligi ravshan.

$$|\vec{c}| = |[\vec{i} \vec{j}]| = |\vec{i}| |\vec{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Ikkinchi tomondan $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{c}$ bu vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lib z o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan va $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ gacha eng qisqa masofa soat strelkasiga qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak bu vektor $\vec{c} = \vec{k}$ ekan, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ xuddi shuningdek qolganlarini yozsak:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektor ko'paytmasi.

$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ va $\vec{a} \times \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = (y_1 z_2 - z_1 y_2)$$

$$\vec{i} + (-x_1 z_2 + z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad \text{ko'rinishda ham yozish mumkin.}$$

Misol. $\vec{a} = \{2; 5; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 4\}$, $|[\vec{a} \vec{b}]| = q$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 6\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}; \quad |[\vec{a} \vec{b}]| = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38}$$

5.11. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi.

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \text{ va } \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$$

vektorlar berilgan bo'lsa, bu vektorlarning aralash ko'paytmasi deb, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektor ko'paytma bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasiga aytiladi va odatda $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ko'rinishda yoziladi

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}, \quad \vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right) (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi qirralari berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning modullaridan tashkil topgan parallelopedning hajmini ifodalaydi.

Fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanar vektorlar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nol bo'lishi zarur va kifoya.

Misol. Uchlari $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$, $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo'lgan parallelopipedning hajmini toping.

$$V = (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{OC} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 84 \text{ kub birlik.}$$

Adabiyotlar.

1. [1] 8-23, 30-38 -betlar.
2. [2] 49-65 -betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Vektor proyeksiyasi nima?
2. anday vektorlarni chiziqli bog'li deymiz?
3. Bazis nima?
4. Vektorlar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
5. Vektorning koordinatalari qanday aniqlanadi?
6. Komplanar vektorlar nima?
7. Skalyar va vektor ko'paytmalarning farqi.
8. Vektor ko'paytmaning geometrik ma'nosi.
9. Aralash ko'paytmaning geometrik talqini.
10. Vektorlarning o'zaro joylashuvi skalyar ko'paytma orqali qanday aniqlanadi?

6-MAVZU.

TEKISLIKDAGI ANALITIK GEOMETRIYA.

a)Mavzuning ta'lim texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi: Tekislikdagi analitik geometriya.

3.Mavzuqa oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu, 1985.
6. Pod redaksiyey Demidovicha B. Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: Talabalarga tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va egri chiziq tenglamalari xaqida umumiy tasavvurni berish , ularda to'g'ri chiziq egri chiziq tenglamalarining turlari va ular orasidagi tafavutlar haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: Burchak ko'effisiyent, burchak, parallel, perpendikulyar, kesma. vektor. Kollinear, normal vektor, yo'naltiruvchi vektor, normal tenglama, kanonik tenglama, normallovchi ko'paytuvchi. Fokuslar, o'qlar, eksentrisitet, direktrisa, fokal radiuslar, asimptotalar.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi: To'g'ri chiziq tenglamalari turlari haqida, normal vektor, burchak ko'effisiyentli, kesmalar bo'yicha, parametrik va normal tenglamalar, ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri tenglamasini tuzish va aylana, ellips, giperbola, parabola tenglamalarini topa olish xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

Tekislikdagi to'g'ri chiziqli tenglamalari.

Umuman aytganda $F(x,y)=0$ (1) ko'rinishdagi tenglama tekislikda biror chiziqni ifodalaydi va aksincha tekislikdagi har qanday chiziqli tenglamasi (1) ko'rinishda bo'ladi.

Agar (1) da x, y lar birinchi darajada qatnashsa, u holda (1) tenglama albatta biror to'g'ri chiziqli ifodalaydi. Agar x, y lar birinchi darajadan yuqori darajada qatnashsa, u holda (1) tenglama albatta biror egri chiziqli ifodalaydi.

6.1. To'g'ri chiziqli burchak koeffitsiyentli tenglamasi.

Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ ($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$) burchak tashkil qilib, Oy o'qidan b kesma ajratib o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini tuzaylik. Bu to'g'ri chiziqli tenglamasini tuzish degan so'z undagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta koordinatalarini o'zaro bog'lovchi tenglamani topish demakdir.

$OB=b, AM=y-b, AB=x, \triangle ABM$ dan

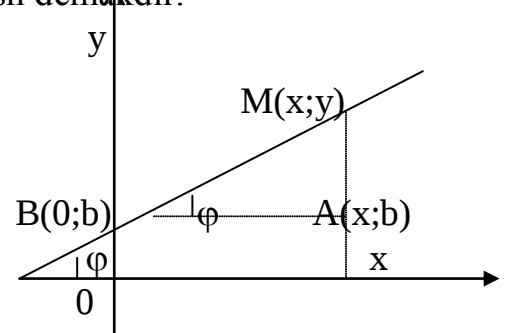
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y-b}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg} \varphi + b, \operatorname{tg} \varphi = k \text{ desak}$$

$y = kx + b$. (1) to'g'ri chiziqli burchak koeffitsiyentli tenglamasi deyiladi.

$k = \operatorname{tg} \varphi$ (2) to'g'ri chiziqli burchak

koeffitsiyenti deyiladi.

$k=0$ bo'lsa, $y=b$; $b=0$ bo'lsa $y=kx$ bo'ladi.



Misol. $b=-2, k=45^\circ$ bo'lsa, to'g'ri chiziqli tenglamasi $y=x-2$ bo'ladi.

6.2. To'g'ri chiziqli umumiy tenglamasi.

$Ax+By+C=0$ (1) ko'rinishdagi birinchi darajali tenglamaga to'g'ri chiziqli umumiy tenglamasi deyiladi.

1. Agar (1) da $C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ bo'lib koordinata boshidan o'tgan to'g'ri chiziqli ifodalaydi.

2. Agar (1) da $A=0$ bo'lsa, $By+C=0 \Rightarrow y=-C/B$ bu esa $(0, -C/B)$ nuqtadan o'tib Ox o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli.

3. Agar $B=0$ bo'lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo'lib Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqli bo'ladi.

4. $C=0, B=0$ bo'lsa, $Ax=0 \Rightarrow x=0$ - bu Oy o'qining tenglamasi.

5. $C=0, A=0$ bo'lsa, $By=0 \Rightarrow y=0$ - bu Ox o'qining tenglamasi.

Misol. $2x+3y+7=0$ umumiy tenglamani burchak koeffitsiyentli ko'rinishda yozing.
 $2x+3y+7=0$, $3y=-2x-7$, $y=-2x/3-7/3$; $k=-2/3$; $b=-7/3$.

6.3. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Bir - biri bilan kesishadigan L_1 , L_2 to'g'ri chiziqlarning tenglamalari mos ravishda

$$L_1: y = k_1x + b_1$$

$$L_2: y = k_2x + b_2$$

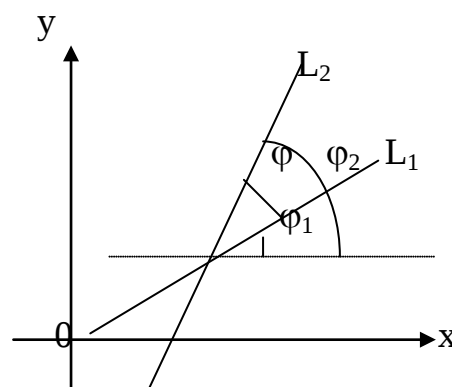
bo'lsin. $\text{tg } \varphi = ?$

Chizmadan $\varphi_2 = \varphi + \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\text{tg } \varphi = \text{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\text{tg } \varphi_2 - \text{tg } \varphi_1}{1 + \text{tg } \varphi_1 \text{tg } \varphi_2}$$

$$\text{tg } \varphi_1 = k_1, \text{tg } \varphi_2 = k_2$$

ekanliklarini e'tiborga olsak



$$\text{tg } \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (1) \text{ ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.}$$

Agar $0 < \varphi < 90^\circ$ bo'lsa, $\text{tg } \varphi > 0$; $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ bo'lsa, $\text{tg } \varphi < 0$.

Agar L_1 , L_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa $\varphi = 0$ bo'lib $\text{tg } \varphi = 0$ bo'ladi.

Bu holda (1) dan $k_2 - k_1 = 0$ $k_2 = k_1$ (2)

(2)-ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti.

Agar L_1 , L_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, $\varphi = 90$ bo'lib

$$\varphi_2 = \varphi + \varphi_1 = 90 + \varphi_1; \text{tg } \varphi_2 = \text{tg}(90 + \varphi_1) = -\text{ctg } \varphi_1 = -\frac{1}{\text{tg } \varphi_1}; \text{tg } \varphi_2 = -\frac{1}{\text{tg } \varphi_1}, k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ yoki}$$

$$\boxed{k_1 k_2 = -1} \quad (3)$$

(3) ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

Misol. 1) $3x+y-6=0$ $x+2y+1=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi = 45^\circ$.

2) $M_1(-3;1)$ nuqtadan o'tib $2x+y-3=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $x-2y+5=0$ bo'ladi.

6.4. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

xOy tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{N}$ vektorga L to'g'ri chiziqning normal vektori deyiladi. L to'g'ri chiziqning xOy tekislikdagi holati $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va $\vec{N} = \{A, B\}$ normal vektorlarning berilishi bilan to'liq aniqlanadi.

L to'g'ri chiziqda biror M(x, y) nuqta olaylik va bu nuqta koordinatalarini o'zaro bog'lovchi shu to'g'ri chiziqning tenglamasini chiqaraylik.

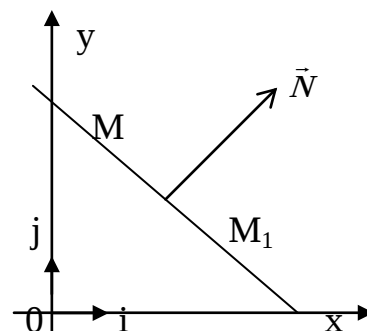
$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} \text{ va } \overrightarrow{M_1M} = (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j}$$

vektorlar perpendikulyar bo'lgani uchun ularning skalyar ko'paytmasi nol bo'ladi.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0 \text{ dan } (A\vec{i} + B\vec{j})((x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j}) = 0,$$

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) = 0$$

izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi.



Misol. M(-1, 3) nuqtadan o'tib $\vec{N} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi $2x - 3y + 11 = 0$ bo'lishi ravshan.

6.5. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

XOY tekisligidagi biror L to'g'ri chiziqda yotgan biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va bu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan yoki ustma-ust tushgan $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ vector berilgan bo'lsin. $\vec{s}$ vektorni L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

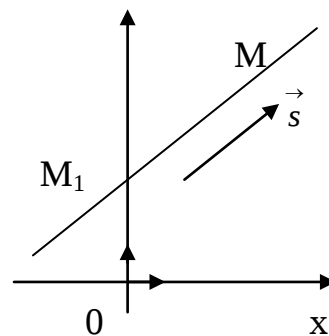
L to'g'ri chiziqning holati $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va

$\vec{s} = \{m, n\}$ larning berilishi bilan to'la aniqlanadi.

L ustida M(x, y) nuqta olsak $\overrightarrow{M_1M}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear bo'lgani uchun

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \vec{s} \Rightarrow (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} = \lambda(m\vec{i} + n\vec{j}),$$

$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n}$ - to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.



6.6. Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

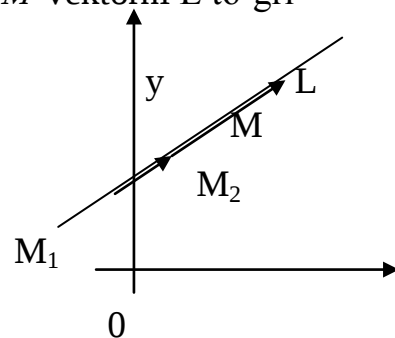
Tekislikda berilgan $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzaylik. L da biror $M(x, y)$ nuqta olib, $\vec{s} = \vec{M_1M}$ vektorni L to'g'ri

chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida olsak

$$\begin{aligned} \vec{M_1M} &= \lambda \vec{M_1M_2} \Rightarrow (x-x_1) \vec{i} + (y-y_1) \vec{j} = \\ &= \lambda[(x_2-x_1) \vec{i} + (y_2-y_1) \vec{j}] \Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \end{aligned}$$

-berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

x



Misol. $M_1(1,2)$, $M(2,3)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.
 $x-y+1=0$

6.7. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

xOy tekisligidagi Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan φ burchak tashkil qiluvchi biror L to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning holati shu φ burchak bilan shu to'g'ri chiziqda yotuvchi biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqtaning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. L to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida shu L to'g'ri chiziqga parallel bo'lgan

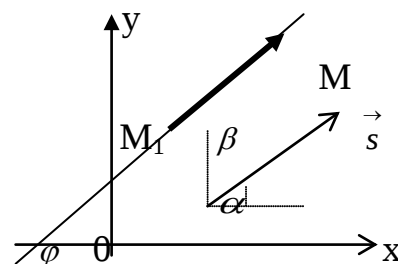
$$\vec{s} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha ; |\vec{s}| = 1 ; [\cos \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha]$$

birlik vektorni olaylik. L to'g'ri chiziq ustida

biror $M(x, y)$ nuqta olsak $\vec{s}$ va $\vec{M_1M}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun

$$\vec{M_1M} = \lambda \cdot \vec{s} \Rightarrow (x-x_1) \vec{i} + (y-y_1) \vec{j} = \lambda \cdot (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha)$$

$$\begin{cases} x-x_1 = \lambda \cos \alpha \\ y-y_1 = \lambda \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{x-x_1}{\cos \alpha}, \quad \lambda = \frac{y-y_1}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\sin \alpha} \Rightarrow y-y_1 = k(x-x_1) \\ (k = \tan \alpha)$$



Bu tenglamaga berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

Misol. M(2,-1) nuqtadan o'tgan Ox o'qi bilan $\alpha = \frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini toping. $k = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ $\sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0$.

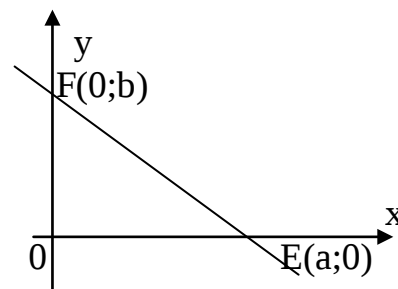
6.8. To'g'ri chiziqli kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Koordinata o'qlaridan mos ravishda a va b kesmalarni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini chiqaraylik. Izlanayotgan to'g'ri chiziqli tenglamasini $Ax + By + C = 0$ (1) ko'rinishda olaylik. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, deb, E(a,0), F(0,b) nuqtalar to'g'ri chiziqli yotgani uchun, bu nuqtalar koordinatalarini (1) ga qo'ysak

$A = -\frac{C}{a}$, $B = -\frac{C}{b}$ kelib chiqadi. Bularni (1) ga qo'ysak

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (2)$$

to'g'ri chiziqli kesmalar bo'yicha tenglamasi kelib chiqadi.



6.9. To'g'ri chiziqli normal tenglamasi.

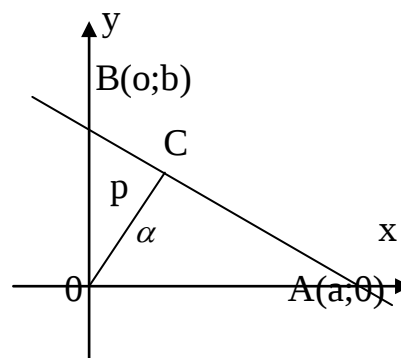
Izlanayotgan to'g'ri chiziqli tenglamasini

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (1) \text{ ko'rinishida olaylik.}$$

Koordinata boshidan to'g'ri chiziqli gacha bo'lgan masofani $OC = p$ deylik.

p masofa va α burchaklar berilgan bo'lsin.

u holda AOC uchburchakdan, $a = \frac{p}{\cos \alpha}$



BOC uchburchakdan $\frac{p}{OB} = \cos(90^\circ - \alpha) \Rightarrow b = \frac{p}{\sin \alpha}$

topilgan a, b larni (1) ga qo'ysak

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (2)$$

to'g'ri chiziqli normal tenglamasi deyiladi.

Agar to'g'ri chiziqli tenglamasi $Ax + By + C = 0$ (3) umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni normal ya'ni (2) ko'rinishga keltirish uchun (3) ning har ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi $\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ ga

ko'paytirish kifoya . Ildiz oldidagi $\pm$ ishora (3) dagi C ning ishorasiga teskari olinadi.

$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ (4) normal tenglama (2) bilan (4) ni solishtirsak

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; \sin \alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}; -p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

Misol. $4x-3y-10=0$ to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltiring.

Yechish. $\mu = \frac{1}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$ -bu normal tenglama.

6.10. Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.

Tekislikda tenglamasi $Ax+By+C=0$ (1) bo'lgan L to'g'ri chiziq va $M_0(x_0, y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasini $M_1(x_1, y_1)$ deylik. Bu holda berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan L to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa

$\vec{d} = \vec{M_1M_0} = (x_0-x_1)\vec{i} + (y_0-y_1)\vec{j}$ vektorning moduliga teng bo'ladi. $\vec{d}$ va $\vec{N}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun ular orasidagi burchak yoki 0 yoki π ga teng bo'lib, $\cos\varphi = \pm 1$ bo'ladi.

Shuning uchun $\vec{N} \cdot \vec{d} = \pm |\vec{N}| \cdot |\vec{d}| \cos \varphi \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{d} = |\vec{N}| \cdot |\vec{d}|$ (2).

Ikkinchi tomondan $\vec{N} \cdot \vec{d} = (A\vec{i} + B\vec{j})[(x_0-x_1)\vec{i} + (y_0-y_1)\vec{j}]$

$$\vec{N} \cdot \vec{d} = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) \quad (3)$$

$M_1(x_1, y_1)$ nuqta L to'g'ri chiziqda yotgani uchun

$Ax_1 + By_1 + C = 0$, $C = -(Ax_1 + By_1)$ bu holda (3) quyidagicha bo'ladi.

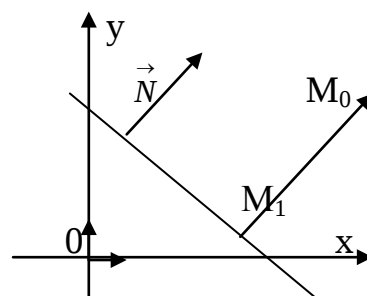
$\vec{N} \cdot \vec{d} = Ax_0 + By_0 + C$ (4), $|\vec{d}| = d$, $|\vec{N}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ L larni e'tiborga olib (2) va (4) larning o'ng tomonlarini tenglashtirsak

$$\pm |\vec{N} \cdot \vec{d}| = Ax_0 + By_0 + C \Rightarrow d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{ёки} \quad d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

izlanayotgan masofa formulasi kelib chiqadi.

Misol. Uchlarining koordinatalari A(1,2); B(-2,1); C(2,3) bo'lgan uchburchakning A uchidan tushirilgan balandlikning uzunligini toping.

Yechish. BC: $x-2y+4=0$ A nuqtadan BC to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa



$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0,45$$

Adabiyotlar.

1.[1] 39-40, 53-54 betlar.

2.[2] 120-129 betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Tekislikdagi chiziqning tenglamasi qanday ko'rinishda yoziladi?
2. To'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvini ifodalovchi munosabatlar.
3. To'g'ri chiziqning har xil tenglamalari.
4. Normallovchi ko'paytuvchi nima?
5. Ikkita to'g'ri chiziqlar
6. To'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasining ko'rinishi.
7. Koordinata o'qlarining tenglamalari.
8. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishida o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday ko'rinishga ega?

7-MAVZU

IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

7.1. Aylana.

Tayanch so'zlar: Fokuslar, o'qlar, eksentrisitet, direktrisa, fokal radiuslar, asimptotalar.

Ta'rif. Berilgan nuqtadan baravar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi.

Berilgan $C(a,b)$ nuqtadan R masofada turgan $M(x,y)$ nuqtani olaylik. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$ - markazi $C(a,b)$ nuqtada radiusi R bo'lgan aylana tenglamasi. Agar $C(0,0)$ bo'lsa, $x^2 + y^2 = R^2$ bo'ladi.

Misol. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ aylananing markazi va radiusini toping.

$$(x-2)^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = 2 + 4 + \frac{25}{16} = \frac{121}{16} \Rightarrow (x-2)^2 + (y + \frac{5}{4})^2 = \frac{121}{16}; R = \frac{11}{4}; C(2; -\frac{5}{4}).$$

7.2. Ellips va uning tenglamasi.

1-ta'rif. Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalarining yig'indisi o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga ellips deyiladi.

Fokuslarini $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ desak, ular orasidagi masofa $2c$ bo'lib o'zgarmas masofani $2a$ deb belgilasak $2a > 2c$ bo'ladi.

Shartga ko'ra

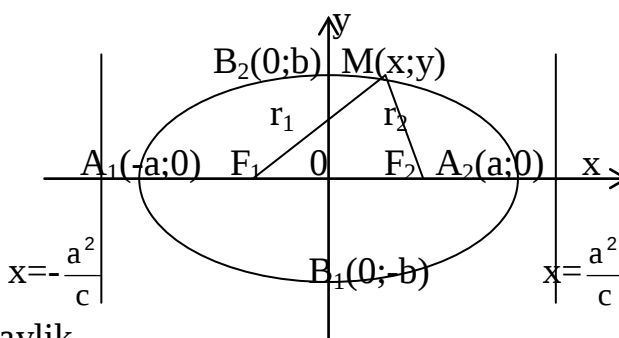
$$F_1M + F_2M = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ desak } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Ellips shaklini birinchi chorakda ko'raylik.

(1) ni y ga nisbatan yechsak $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ - bundan ko'rinadiki 1-chorakda x

0 dan a gacha o'sganda ($0 \leq x \leq a$), y b dan 0 gacha kamayadi ($b \geq y \geq 0$).

Demak ellipsning 1-chorakda yotgan qismi $A_2(a,0)$ va $B_2(0,b)$ nuqtalar orasidagi yoydan iborat bo'lar ekan. Ellipsning simmetrikligidan $A_1(-a,0)$, va $B_1(0,-b)$ nuqtalarning kelib chiqishi ravshan. $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$ larga mos ravishda ellipsning katta va kichik o'qlari deyiladi, a va b larga esa katta va kichik yarim o'qlar deyiladi.

2-Ta'rif. Ellips fokuslari orasidagi masofaning katta o'qiga nisbati ellipsning eksiyentrisiteti deyiladi va odatda e harfi orqali belgilanadi.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}; \quad c < a, \quad c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

3-Ta'rif. Ellipsning biror nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofa shu nuqtaning radius vektori deyiladi. $r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

$r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ yoki $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$ ko'rinishda bo'ladi.

$x = \pm \frac{a^2}{c}$ to'g'ri chiziqlarga ellipsning direktrisalari deyiladi. Ellipsning biror

$M_1(x_1, y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \text{ urinma, } y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1) \text{ normal}$$

Misollar.

1.) $2c=6$, $2b=8$. Ellips tenglamasini tuzing. $c=3$, $b=4$, $a^2=b^2+c^2=25$;

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

2) $3x^2 + 5y^2 - 16 = 0$; $a=?$; $b=?$; $F_1(-c; 0)=?$.

$$a^2 = \frac{16}{3}; \quad b^2 = \frac{16}{5}; \quad c^2 = \frac{32}{15}; \quad F_1(-\sqrt{\frac{32}{15}}; 0), \quad F_2(\sqrt{\frac{32}{15}}; 0)$$

7.3. Giperbola va uning tenglamasi.

Ta'rif. Har bir nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi berilgan ikki nuqttagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga giperbola deyiladi.

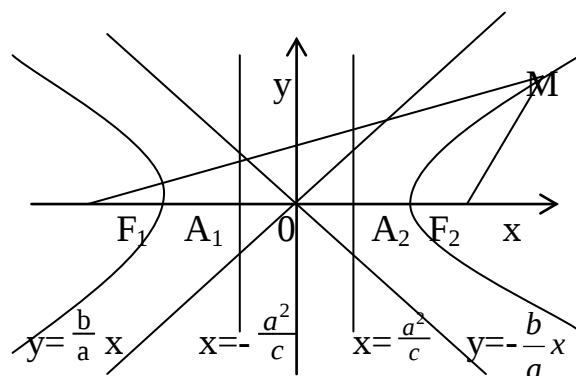
Fokuslari $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

bo'lsa ular orasidagi masofa

$F_1F_2 = 2c$ bo'ladi. O'zgarmas miqdorni esa $2a$ desak $|F_1M - F_2M| = 2a$; $2a < 2c$.

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$
 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, $a^2 - c^2 < 0$
 chunki $a < c$, shuning uchun $a^2 - c^2 = -b^2$

desak $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1)



giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi

(1) ni y ga nisbatan yechsak $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ bo'ladi. Birinchi chorakda

$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ bo'lib , x a dan cheksizgacha o'sganda y 0 dan cheksizgacha

o'sadi. Demak, bu holda giperbolaning birinchi chorakdagi qismi A_2M yoydan iborat bo'ladi. Giperbola koordinatalar o'qiga simmetrik joylashgani uchun uning qolgan choraklardagi geometrik o'zni chizmadagi kabi bo'ladi.

Ox -haqiqiy o'q , Oy -mavhum o'q deyiladi.

$A_1A_2 = 2a$ ga giperbolaning haqiqiy o'qi, A_1, A_2 nuqtalarga giperbolaning uchlari deyiladi. $B_1B_2 = 2b$ ga giperbolaning mavhum o'qi deyiladi, chunki u giperbola bilan kesishmaydi.

a va b larga mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari deyiladi. Giperbola fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o'qga nisbati giperbolaning ekssyentrisiteti deyiladi .

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} ; \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

tenglamalari $x = \pm \frac{a^2}{c}$ bo'lgan to'g'ri chiziqlarga giperbolaning direktrisalari

deyiladi. Giperbolaning $M(x_1, y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \text{ - urinma , } y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \text{ - normal}$$

Giperbolaning asimptotalari.

(1) tenglamani y ga nisbatan yechib $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ grafigini birinchi chorakda ko'raylik. Bu funksiyaning 1-chorakdagi grafigining nuqtalari koordinata boshidan yetarli darajada uzoqlashgan sari tenglamasi $y = \frac{b}{a} x$ bo'lgan to'sri chiziqdagi $M_1(x_1, y_1)$ va giperboladagi $M(x, y)$ nuqtalar ordinatalarining ayirmasini ko'rsak

$$y_1 - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y_1 - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

bundan ko'rinadiki x o'sganda $y - y_1 \rightarrow 0$, chunki surat o'zgarmas, maxraji esa x o'sgan sari o'sadi. Giperbola koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgani uchun $y = -\frac{b}{a} x$ to'g'ri chiziq ham mavjud bo'ladi. Shunday qilib $y = \pm \frac{b}{a} x$ to'g'ri chiziqlarga giperbolaning asimptotalari deyiladi.

Misollar. 1. $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$ giperbolaning eksentrisiteti va asimptotalarini toping.

Yechish. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$; $a^2 = 9$, $b^2 = 5$, $c^2 = a^2 + b^2 = 14$

$$c = \sqrt{14}, y = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{14}}{3}; \quad y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} x.$$

2. Mavhum o'qi $2\sqrt{3}$ va direktrisasi $x = \pm 2$ bo'lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. $2b = 2\sqrt{3}$; $b = \sqrt{3}$; $2 = \frac{a^2}{c}$ dan $c = \frac{a^2}{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \frac{a^4}{4} = a^2 + 3 \rightarrow a^4 - 4a^2 - 12 = 0$. $a^2 = z$, desak $z^2 - 4z - 12 = 0 \rightarrow z_1 = 6, z_2 = -2$; $a^2 = 6$,

$$a = \sqrt{6}; \quad a^2 \neq -2, \quad \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

7.4. Parabola va uning tenglamasi.

Ta'rif. Fokus deb ataluvchi berilgan F nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga parabola deyiladi.

Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilib, direktrisadan fokusgacha bo'lgan masofani p deylik. Agar koordinata boshini p ning o'rtasidan olsak, direktrisa tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo'lishi ravshan. Ta'rifga kura $NM = FM$;

$NM = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2}$; $FM = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$; $NM = FM \rightarrow \boxed{y^2 = 2px}$ (1) - parabolaning kanonik tenglamasi; p ga parabolaning parametri deyiladi.

(1) da y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

Parabolaning simmetrik o'qi uning fokal, ya'ni haqiqiy o'qi deyiladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi.

Parabolaning biror nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofa shu nuqtaning radius vektori deyiladi.

$$r = FM = x + \frac{p}{2} \quad \text{parabola tenglamalari } y^2 = -2px, x^2 = 2py, y^2 = -2py$$

bo'lgan hollarni chizmada ko'rish mumkin. Shunday qilib, $x = \pm \frac{p}{2}$ yoki $y = \pm \frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqlar parabolaning direktrisalari deyiladi. Parabolaning biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari quyidagicha bo'ladi.

$$yy_1 = p(x + x_1) \text{ -urinma; } y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \text{ - normal.}$$

Misollar.

1. $y^2 = 20x$ parabolaning parametri, direktrisasini va absissasi 7 bo'lgan nuqtasining radius vektorini toping.

Yechish. $2p = 20$; $p = 10$; $x = -\frac{p}{2}$, $x = -5$, $r = x + \frac{p}{2}$, $r = 12$.

2. $y^2 = 12x$ parabolaning absissasi 3 va ordinatasi musbat bo'lgan nuqtasidan o'tgan urinma va normal tenglamasini tuzing.

Yechish. $2p = 12$, $p = 6$, $x_1 = 3$; $y_1 > 0$, $y_1 = 6$. Demak $x_1 = 3$; $y_1 = 6$; $6y = 6(x + 3)$, $x - y + 3 = 0$ urinma $y - 6 = \frac{6}{6}(x - 3)$, $x + y - 9 = 0$ normal.

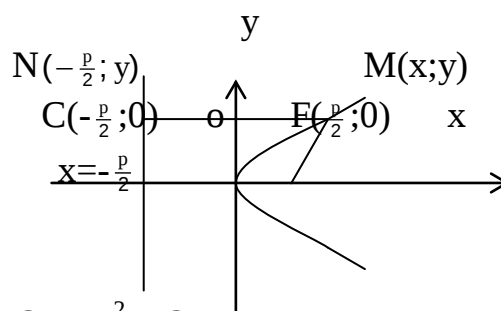
Adabiyotlar.

[1] 98-108- betlar.

[2] 131-140- betlar .

QYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Ikkinchi tartibli chiziq deb qanday chiziqqa aytiladi?
2. Aylana qanday ta'riflanadi?
3. Ellips, giperbola va parabolaning kanonik tenglamalarining umumiy xususiyati.
4. Ellipsning yarim o'qlar va ular orasidagi munosabatlar.
5. Giperbolaning mavhum o'qi nima?
6. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning urinma va normalining tenglamalari.
7. Parabolaning uchi qanday topiladi?
8. Ellipsning radius vektori qanday topiladi.



a) Mavzuning ta'lim texnologiyasi

2.Mavzu nomi:Tekislik va uning tenglamalari

Tekislik va to'g'ri chiziqli tenglamalarini keltirib chiqarish, tekislik va to'g'ri chiziqli orasidagi burchakni topa olish xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

8.1. Sirt tenglamasi.

Fazoda biror S sirt berilgan bo'lsa, uning tenglamasi

$$F(x,y,z)=0 \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi va aksincha (1) tenglama fazoda biror sirtni ifodalaydi. Agar (1) tenglamada x, y, z lar birinchi darajada qatnashsa, u holda (1) fazoda biror tekislikni ifodalaydi. Agar x, y, z lar birinchi darajadan yuqori darajada qatnashsa biror sirtni ifodalaydi. Agar biror sirtning hamma nuqtalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, u holda (1) ni shu sirtning tenglamasi deyiladi.

8.2. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.

Fazodagi biror Q tekislikda yotgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor berilgan bo'lsin. $\vec{N} = \{A, B, C\}$ vektorga Q tekislikning normal vektori deyiladi. Fazodagi Q tekislikning holati undagi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va $\vec{N} = \{A, B, C\}$ normal vektorning berilishi bilan to'liq aniklanadi. Tekislikda ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olsak, M nuqtani Z tekislikning qayeridan olmaylik $\vec{M_1M} \perp \vec{N}$ bo'ladi.

Shuning uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{M_1M} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0 \quad (1)$$

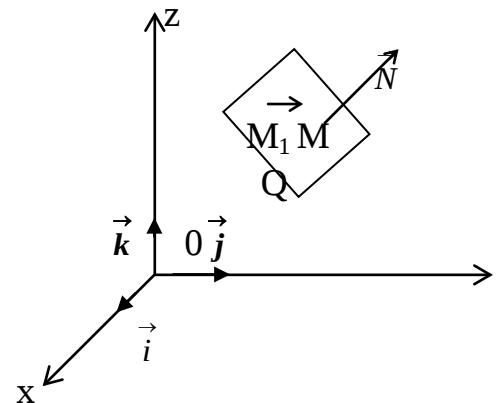
(1) ga $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tib berilgan

$\vec{N}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik

tenglamasi deyiladi. Agar (1) dagi A, B, C larga har xil qiymatlar bersak, boshqacha aytganda

$\vec{N}$ vektorning yo'nalishini o'zgartirib borsak, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tgan tekisliklar to'plamini hosil qilamiz.

Misol. $M_1(1, 1, 1)$ nuqtadan o'tgan va $\vec{N} = \{2, 2, 3\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi $2(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$, $2x + 2y + 3z - 7 = 0$



8.3. Tekislikning umumiy tenglamasi.

Agar $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ tenglamada qavslarni ochib so'ngra

$$-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D \text{ desak}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

tenglama kelib chiqadi. (1) ga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.

1. Agar (1) da $D=0$ bo'lsa, $Ax+By+Cz=0$ bo'lib, koordinata boshidan o'tgan tekislikni ifodalaydi.
2. Agar (1) da $A=0$ bo'lsa, $By+Cz+D=0$ tekislik Ox o'qiga parallel. Agar $B=0$ bo'lsa, $Ax+Cz+D=0$ tekislik Oy o'qiga parallel bo'ladi. $C=0$ bo'lsa, $Ax+By+D=0$ tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi.
3. Agar $C=0$ $D=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ tenglama Oz o'qidan o'tgan tekislikni tasvirlaydi. Agar $A=0$, $D=0$ bo'lsa, tekislik Ox o'qidan o'tadi. Agar $B=0$, $D=0$ bo'lsa, tekislik Oy o'qidan o'tadi.
4. $A \neq 0$, $D \neq 0$, $B=C=0$ bo'lsa, $Ax+D=0$ yoki $x = -\frac{D}{A}$ yoz koordinatalar tekisligiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi bo'ladi. Shuningdek $A=C=0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$ bo'lsa, $By+D=0$ xoz tekisligiga parallel, $A=B=0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ bo'lsa, $Cz+D=0$ xoy tekisligiga parallel tekisliklarni ifodalaydi.
5. Agar $A \neq 0$, $B=C=D=0$ bo'lsa, $Ax=0$ yoki $x=0$ tenglama yoz tekislikni tasvirlaydi.
 $B \neq 0$, $A=C=D=0$ bo'lsa, $By=0$ yoki $y=0$ xoz tekislikni,
 $C \neq 0$, $A=B=D=0$ bo'lsa, $Cz=0$ yoki $z=0$ xoy tekisliklarni ifodalaydi.

8.4. Tekislik tenglamalari.

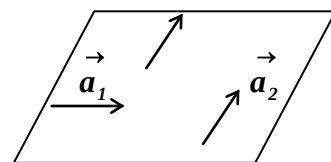
Endi amaliy mashsg'ulotlar uchun zarur bo'lgan tekislikning ba'zi tenglamalarini ko'rib chiqaylik.

1. Tekislikda biror $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta va shu tekislikka parallel bo'lgan

$\vec{a}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ vektorlar berilgan bo'lsa, u holda $\vec{M_1M}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$

vektorlarning komplanarlik shartidan, shu M_1 nuqtadan o'tib $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi kelib chiqadi.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$



2. Shuningdek berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tib, berilgan $\vec{a} = \{l, m, n\}$ vektorga parallel bo'lgan tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

3. Agar $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, bu uchta nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasini chiqarish uchun tekislikda ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olsak, $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$, $\vec{M_1M_3}$ vektorlarning komplanarlik shartidan ya'ni bu uchta vektorning bitta tekislikda yotish shartidan biz izlayotgan tenglama kelib chiqadi.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklarga $\perp$ bo'lgan tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi.

5. Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tib berilgan $Ax + Vy + Sz + D = 0$ tekislikga $\perp$ bo'lgan tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

8.5. Tekislikning kesmalar buyicha tenglamasi.

Koordinata boshidan o'tmagan va koordinata o'qlariga parallel bo'lmagan tekislik tenglamasi $Ax + By + Cz + D = 0$ (1) ko'rinishda bo'lib, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ bo'lsin. (1) ni quyidagicha yozib olaylik:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

Agar $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ desak $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

bo'ladi.

Oxirgi tenglamaga tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi deyiladi. a, b, c lar tekislikning mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlaridan ajratgan kesmalardir.

Misol. $-3x - 2y + 1,5z = 6$ tenglamani kesmalar ko'rinishga keltiring.

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1; \quad a = -2; \quad b = -3; \quad c = 4.$$

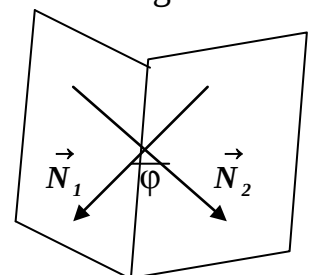
8.6. Tekisliklar orasidagi burchak va ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Fazoda o'zaro kesishuvchi ikkita tekislik quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. $Q_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$Q_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ Ikkita tekislik kesishganda ikkita ikki yoqli burchak hosil bo'lib, ularning bittasi

shu tekisliklarning normal vektorlari

orasidagi φ burchak bo'lib, ikkinchisi esa $180^\circ - \varphi$ bo'ladi



Tekisliklarning normal $\vec{N}_1 = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j} + C_1 \vec{k}$, $\vec{N}_2 = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j} + C_2 \vec{k}$ vektorlari orasidagi burchak:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = |\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1)$$

Agar tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'lsa, $\varphi = 90^\circ$ bo'lib $\cos \varphi = 0$ bo'ladi. Bu holda (1) dan

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (2)$$

ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi.

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ normal vektorlar kollinear bo'lib, ularning koordinatalari proporsional bo'ladi.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3)$$

(3) ikkita tekislikning parallellik sharti.

Misol. $2x+3y-z+2=0$, $x+y+5z-1=0$ tekisliklar orasidagi burchak $\varphi=90^\circ$ bo'lishini ko'rish qiyin emas.

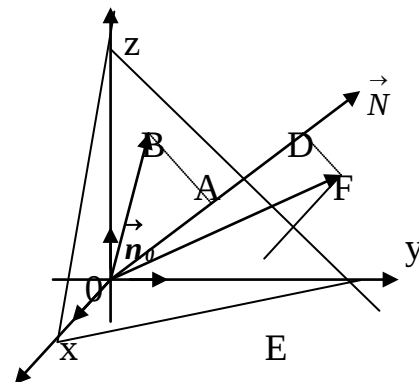
8.7. Tekislikning normal tenglamasi. Tekislikdan berilgan nuktagacha bo'lgan masofa.

Bizga biror Q tekislik berilgan bo'lsin.

Koordinata boshidan shu tekislikka tushirilgan perpendikulyarni shu tekislikning normal vektori sifatida olaylik. Normal vektorning

tekislik bilan kesishish nuqtasini A deb, $OA=p$ deylik.

Tekislikning $\vec{N}$ normal yo'nalishida



$\vec{n}_0 = \{ \cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma \}$ birlik vektorni va biror $B(x, y, z)$ nuqtani olaylik. Bu holda $\text{pp}_{\vec{n}_0} \vec{OB} = OA = p$ (1) bo'ladi. Ikkinchi tomondan proyeksiyalar haqidagi nazariyaga ko'ra

$$|\vec{n}_0| \text{pp}_{\vec{n}_0} \vec{OB} = \vec{n}_0 \cdot \vec{OB} \quad (2) \quad |\vec{n}_0| = 1 \quad (1) \quad \text{va} \quad (2) \quad \text{larning chap tomonlari teng bo'lgani}$$

uchun o'ng tomonlarini tenglashtirsak

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{OB} = p \quad \text{yoki} \quad (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}) (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = p$$

$$\text{yoki} \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3)$$

tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi $Ax + By + Cz + D = 0$ (4) ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni (3) normal ko'rinishga keltirishni ko'raylik. (3) va (4) lar bitta tekislik tenglamasi bo'lgani uchun bu tenglamalarning koeffitsiyentlari proporsional

bo'lishi kerak. Shuning uchun (4) ni λ ga ko'paytirib (3) ga tenglasak
 $\lambda(Ax+By+Cz+D) = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p$,

$$\lambda A = \cos\alpha; \lambda B = \cos\beta; \lambda C = \cos\gamma; \lambda D = -p \quad (5)$$

(5) dan $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ kelib chiqadi. λ ga normallovchi ko'paytuvchi deyiladi, uning ishorasi (4) dagi D ning ishorasiga teskari olinadi.

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + D = 0 \Rightarrow \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (6).$$

(6) tekislikning normal tenglamasi bo'ladi.

$$(5) \text{ dan } \cos\alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos\beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos\gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$p = -\frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \text{ekanligi ravshan.}$$

Endi Q tekislikdan berilgan $F(x_0; y_0; z_0)$ nuqtagacha bo'lgan masofani hisoblashni ko'raylik.

Bu masofa $F(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan tekislikka tushirilgan $d=EF$ perpendikulyar bo'lishi ravshan. Agar tekislik tenglamasi

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$$

normal ko'rinishda berilgan bo'lsa, izlanayotgan masofa

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p| \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (7) \quad \text{bo'ladi.}$$

Isboti. Berilgan $F(x_0; y_0; z_0)$ nuqtaning $\vec{N}$ normal vektorga proyeksiyasi D nuqta bo'lsin, u holda $AD=EF=d$, $AD=OD-OA$ dan $d=|AD|=|OD-OA|$: bizga ma'lumki,

$$OA=p; OD=|np_{\vec{n}_0}| \quad \vec{OF} = \vec{n}_0 \cdot \vec{OF} = (\cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k})(x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}) =$$

$$= x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma$$

$$\text{Demak, } d=|AD|=|OD-OA|=|np_{\vec{n}_0} \vec{OF} - p| \Rightarrow d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|$$

(8) formula kelib chiqadi. $\vec{N}=\{A,B,C\}$ normal vektor bilan

$\vec{EF}=\{x_0-x_1; y_0-y_1; z_0-z_1\}$ vektorlarning kollinearlik shartidan foydalanib, bu vektorlarni skalyar ko'paytirsak (7) kelib chiqadi.

Misol. $F(3,-2,1)$ nuqtadan $3x+6y-5z+2=0$ tekislikgacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. Tenglamani normal ko'rinishga keltiraylik.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{70}}, \quad -\frac{3}{\sqrt{70}}x + \frac{6}{\sqrt{70}}y - \frac{5}{\sqrt{70}}z + \frac{2}{\sqrt{70}} = 0 \Rightarrow d = \left| \frac{3 \cdot 3}{\sqrt{70}} - \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{70}} - \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{70}} + \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{70}} \right| = \frac{6}{\sqrt{70}}$$

Adabiyotlar.

- 1.[1] 42-45, 53-54- betlar.
- 2.[2] 149-155-betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Sirtning umumiy ko'rinishidagi tenglamasi.
2. Tekislikni fazodagi holati qachon to'la aniqlangan deyiladi?
3. Berilgan nuqtadan o'tib berilgan vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi qanday ko'rinishga ega?
4. Tekislikning qanday tenglamalarini bilasiz?
5. Tekisliklarning o'zaro joylashuvi ifodalovchi munosabatlar.
6. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
7. Uch tekislik o'zaro kesishganda qanday holatlar yuz beradi?
8. Tekislikdan nuqtagacha masofa qanday aniqlanadi?

9-MAVZU FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Fazodagi chiziq deganda, ixtiyoriy ikkita sirtning kesishishidan hosil bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnini tushunamiz. Shuning uchun fazodagi chiziqning umumiy tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar (1) tenglamadagi x, y, z lar birinchi darajada qatnashsa, ular tekisliklarni ifodalab, bu tekisliklarning kesishish nuqtalarining geometrik o'rnini to'g'ri chiziq bo'ladi. Shuning uchun fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

9.1. Fazodagi to'g'ri chiziqning vektor, parametrik va kanonik tenglamalari.

Fazoda biror ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, bu to'sri chiziqning holati, shu to'g'ri chiziqda yotuvchi $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqta bilan shu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan yoki ustma-ust tushgan $\vec{s} = \{\ell, m, n\}$ vektorning berilishi bilan to'liq aniqlanadi. $\vec{s} = \ell\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ vektorni ℓ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

ℓ to'g'ri chiziq ustida ixtiyoriy $V(x, y, z)$ nuqta olaylik.

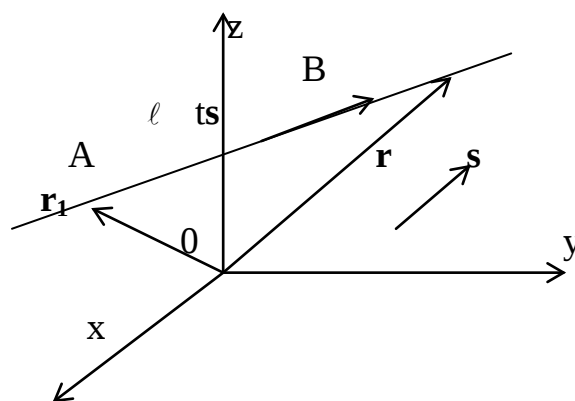
Chizmadan ko'rinadiki
 $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$ $\vec{AB}$ va $\vec{s}$ vektorlar
 kollinear vektorlar bo'lgani uchun

$$\vec{AB} = t\vec{s}$$

Yoki

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s} \quad (1)$$

(1)ga fazodagi to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.



Agar $\vec{r} = \vec{OB} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\vec{r} = \vec{OA} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $t\vec{s} = t\ell\mathbf{i} + tm\mathbf{j} + tn\mathbf{k}$ ekanliklarini e'tiborga olsak

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x_1 + t\ell)\mathbf{i} + (y_1 + tm)\mathbf{j} + (z_1 + tn)\mathbf{k} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= x_1 + t\ell \\ y &= y_1 + tm \\ z &= z_1 + tn \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) ga fazodagi to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamasi deyiladi.**

To'sri chiziqning (2) ko'rinishdagi parametrik tenglamasidan to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasining koordinatasini topishda foydalanish qulaydir.

Haqiqatan, to'g'ri chiziq tenglamasi (2) ko'rinishda, tekislik tenglamasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, (2) ni (3) ga qo'ysak:

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Al + Bm + Cn} \quad (4)$$

hosil bo'ladi. $Al+Bm+Cn \neq 0$ chunki to'g'ri chiziq bilan tekislik parallel emas.

(4) ni (2) ga qo'ysak izlanayotgan nuqtaning koordinatasi kelib chiqadi. Agar (2) dan

$$t \text{ ni topsak, } t = \frac{x-x_1}{l}; t = \frac{y-y_1}{m}; t = \frac{z-z_1}{n} \Rightarrow \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad (5)$$

(5) ga to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi yoki **berilgan nuqtadan o'tgan va berilgan yo'nalishdagi** to'g'ri chiziq tenglamasi ham deyiladi.

Xususiyl holda $\vec{s}$ yo'naltiruvchi vektor koordinata o'qlari bilan α, β, γ burchak tashkil qiluvchi birlik vektor bo'lsa, u holda (5) tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma} \quad (6).$$

Agar ℓ to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining biriga masalan Ox ga perpendikulyar bo'lsa, u holda $l=0$ bo'lib, (2) va (5) formulalar quyidagicha bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 + tm \\ z &= z_1 + tn \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad (5')$$

Agar to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining biriga masalan Oz ga parallel bo'lsa, $\vec{s} \perp Ox$, $\vec{s} \perp Oy$ bo'lib, $\vec{s} = \{0,0,n\}$ bo'ladi. Bu holda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{0} = \frac{z-z_1}{n} \quad \text{ko'rinishda bo'ladi.}$$

Agar to'g'ri chiziqning tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsa, (5) kanonik tenglamasiga o'tish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak.

1. (5) dagi $A(x_1, y_1, z_1)$ nuqtaning koordinatasini topish kerak. Buning uchun (7) dagi x, y, z larning ixtiyoriy bittasiga biror aniq qiymat berib, qolgan ikkitasini shu (7) sistemadan topamiz.

2. ℓ to'g'ri chiziqning $\vec{s} = \{l, m, n\}$ yo'naltiruvchi vektorini topish kerak. ℓ to'g'ri chiziq $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklarning kesishishidan hosil bo'lgani uchun bu tekisliklarning $\vec{N}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$ va $\vec{N}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ normal vektorlariga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun ℓ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ vektorlarning vektor ko'paytmasini olsa bo'ladi:

$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{l} + \vec{m} + \vec{n};$$

$$\vec{s} = \{l; m; n\} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Misol. $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzaylik.

1) $x_1 = 1$ desak $\begin{cases} y + 2z = 4 \\ y - 3z = -1 \end{cases}$ $y_1 = 2; z_1 = 1.$ $A(x_1, y_1, z_1) = A(1, 2, 1).$

2) $s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 17\vec{j} - \vec{k};$ Demak, $\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}$

9.2. Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tgan ℓ to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzaylik. Buning uchun to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqta olib, ℓ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{M_1M_2} = \vec{s}$ vektorni olaylik. U holda $\vec{M_1M}$ va $\vec{s} = \vec{M_1M_2}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'lgani uchun $\vec{M_1M} = \lambda \vec{s}$, ya'ni

$$\vec{M_1M} = \lambda \vec{M_1M_2} \Leftrightarrow (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k} = \lambda [(x_2-x_1)\vec{i} + (y_2-y_1)\vec{j} + (z_2-z_1)\vec{k}] \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x-x_1 &= \lambda(x_2-x_1) \\ y-y_1 &= \lambda(y_2-y_1) \\ z-z_1 &= \lambda(z_2-z_1) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} - \text{bu hosil bo'lgan tenglamaga}$$

berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.

9.3. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.

Fazodagi ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

Agar to'g'ri chiziqlar kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni

$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ va $\frac{x-x_1}{l_2} = \frac{y-y_1}{m_2} = \frac{z-z_1}{n_2}$ bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ bo'lishlari ravshan.

Bu vektorlar orasidagi burchak

$$\vec{s}_1 \vec{s}_2 = |\vec{s}_1| |\vec{s}_2| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{s_1 s_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (1)$$

Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, u holda $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ yo'naltiruvchi vektorlar kollinear bo'lib, ularning koordinatalari (proyeksiyalari) proporsional bo'ladi, ya'ni

$$\vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2, \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (2)$$

(2) formula fazodagi ikki to'g'ri chiziqlarning parallellik shartidir.

Agar to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lib, $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ bo'ladi. U holda (1) dan $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ (3) fazodagi ikki to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz.

Agar $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ to'g'ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik berilgan bo'lsa, ularning o'zaro parallel bo'lishi uchun to'g'ri chiziqlarning $\vec{s} = \{l, m, n\}$ yo'naltiruvchi vektori va tekislikning normal vektori $\vec{s} = \{A, B, C\}$ lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi shart, ya'ni

$$Al+Bm+Cn=0 \quad (4).$$

Agar to'g'ri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo'lsa, $\vec{s} \parallel \vec{s}$ bo'ladi. Bundan

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \quad (5)$$

shart kelib chiqadi.

9.4. Tekisliklar dastasi.

Berilgan ℓ to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi tekisliklar to'plamiga tekisliklar dastasi deyiladi. ℓ to'g'ri chiziq esa dasta o'qi deyiladi.

Dasta o'qi ya'ni ℓ to'g'ri chiziqlarning umumiy tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)ning ikkinchi tenglamasini o'zgarmas λ ga ko'paytirib birinchisiga qo'shamiz.

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \quad (2)$$

tenglama λ ning har qanday qiymatida (1) to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi ($A_2x+B_2y+C_2z+D_2$ tekislikdan tashqari) har qanday tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Haqiqatan (2) dastaning ixtiyoriy tekisligi uning dasta o'qida yotmagan $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtasi bilan aniqlanadi. Shuning uchun M nuqtaning koordinatalarini (2) ga qo'ysak,

$$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1+\lambda(A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2)=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{A_1\tilde{o}_1+B_1\tilde{o}_1+C_1z_1+D_1}{A_2\tilde{o}_1+B_2\tilde{o}_1+C_2z_1+D_2}$$

(3)

(3) ni (2) ga qo'ysak, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini hosil qilamiz. λ ning turli qiymatlarida esa, (1) to'g'ri chiziq orqali o'tgan har xil tekisliklar tenglamasini hosil qilamiz. Shuning uchun (2) ga tekisliklar dastasining tenglamasi ham deyiladi.

Misollar.

1. $\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0 \\ 3x-y+z+28=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq va $M_1(1, -2, 3)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $2x+3y-5z+1+\lambda(3x-y+z+28)=0$ bunga berilgan M_1 nuqtaning koordinatalarini qo'ysak $\lambda = \frac{1}{2}$ $2x+3y-5z+1+\frac{1}{2}(3x-y+z+28)=0$
 $7x+5y-9z+30=0$

2. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi va $3x+3y-z+1=0$ (a) tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-5=0 \\ y-3z+1=0 \end{cases}$

Bu holda tekisliklar dastasining tenglamasi

$$3x-2y-5+\lambda(y-3z+1)=0 \Leftrightarrow 3x+(\lambda-2)y-3\lambda z-5+\lambda=0 \text{ (b).}$$

(a) va (b) tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'lgani uchun ularning $N_1=\{3; 3; -1\}$ va

$N_2=\{3; \lambda-2; -3\lambda\}$ normal vektorlari perpendikulyar bo'ladi. U holda

$$N_1N_2=0 \Rightarrow (3\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})[3\mathbf{i}+(\lambda-2)\mathbf{j}-3\lambda\mathbf{k}]=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, 3x-2y-5-\frac{1}{2}(y-3z+1)=0 \Rightarrow 6x-5y+3z=0.$$

Adabiyotlar.

- 1.[1] 47-55- betlar.
2. [2] 155-162- betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Fazoda chiziq tushunchasi qanday kiritiladi?
2. To'g'ri chiziqning fazodagi umumiy tenglamasi
3. To'g'ri chiziqning har xil tenglamalarining ko'rinishlari.
4. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini izoxlang.
5. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi uning umumiy tenglamasidan qanday hosil qilinadi?
6. To'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuv va ularni ifodalovchi analitik munosabatlar.
7. Tekisliklar dastasini qanday tushunasiz?
8. To'g'ri chiziq va berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

10-MAVZU

SONLAR KETMA-KETLIGI. FUNKSIYA VA UNING LIMITI

a)Mavzuning ta'lim texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi: Sonlar ketma-ketligi, funksiya va uning limiti.

3.Mavzuga oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qisqa kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu, 1985.
6. Pod redaksiyey Demidovicha B. Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: Talabalarga sonlar ketma-ketligi, uning limiti, o'zgaruvchi va o'zgamas miqdorlar, funksiya va uning limiti haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: : sonlar ketma-ketligi, atrof, kamayuvchi, o'suvchi, limit, yaqinlashuvchi, uzoqlashuvchi, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar, oraliq (interval), kesma (segment), o'zgarish va aniqlanish sohasi, o'zgaruvchining limiti.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:

Talabalarda sonlar ketma-ketligi, uning limiti, o'zgaruvchi va o'zgamas miqdorlar, funksiya va uning limiti, xossalari, aniqlanishliklarni yechish, ajoyib limitlar va ularni echish xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

10.1. Sonlar ketma-ketligi.

1-ta'rif. Agar biror qonunga ko'ra $1, 2, 3, \dots, n, \dots (n \in N)$ natural sonlarga $x_1, x_2, x_3, \dots$ haqiqiy sonlar mos keltirilgan bo'lsa, u holda $x_1, x_2, x_3, \dots$ sonlar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Qisqacha ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda yoki $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ko'rinishda yoziladi.

x_i -larga ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) $\{x_n\}$ ketma-ketlikning elementlari, x_n -ga esa ketma-ketlikning umumiy hadi deyiladi.

Misol. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$
 $\{n^2 + 1\} = \{2, 5, 10, 17, \dots\}$
 $\{1 + (-1)^n\} = \{0, 2, 0, 2, \dots\}$

2-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan x_n elementi uchun $x_n \leq M$ (yoki $x_n \geq m$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi M (yoki m) soni mavjud bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni yuqoridan (pastdan) chegaralangan deyiladi.

M va m larga yuqori va quyi chegaralari deyiladi. Ham pastdan, ham yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

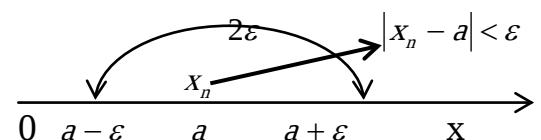
3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n \leq x_{n+1}$ (yoki $x_n \geq x_{n+1}$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi ketma-ketlik, agar $x_n > x_{n+1}$ bo'lsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikni kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklarga monoton ketma-ketliklar deyiladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N natural son mavjud bo'lsaki, $n > N$ bo'lgan barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ yoki $x_n \rightarrow a$ ko'rinishlarda yoziladi.

$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$ tengsizlikni
qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga
 a nuqtaning ε atrofi deyiladi.

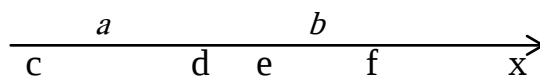


Ta'rifning geometrik ma'nosi quyidagicha: agar a berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'lsa, u holda a nuqtaning ε atrofida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashgan bo'ladi. Shunday hadlarning nomerlari N dan katta bo'lib, bu atrofdan tashqarida esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_1 dan x_N gacha bo'lgan chekli hadlari bo'ladi.

6-ta'rif. Limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklarga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi. Aks holda uzoqlashuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

1-teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar faqat bitta limitga ega bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita a va b limitlarga ega bo'lsin, u holda a va b nuqtalarni o'z ichiga olgan va bir-biri bilan kesishmaydigan $] \tilde{n}, d [$ va $] e, f [$ va



$] e, f [$ intervallarni olaylik. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ bo'lsin, bu holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ bo'lgani uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari $] \tilde{n}, d [$ da bo'lib $] e, f [$ da sanoqli elementlari qoladi. Bundan ko'rinadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementlari $] e, f [$ da bo'la olmaydi. Bu esa farazimizga qarama-qarshi.

2-teorema. Har qanday yuqoridan chegaralangan kamaymaydigan va quyidan chegaralangan o'smaydigan sonli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, limitga ega bo'ladi.

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u albatta chegaralangan bo'ladi. Lekin aksi qarvaqt to'g'ri emas, ya'ni zarur lekin kifoya emas.

4-teorema. (Bolsiano-Veyershtass). Ixtiyoriy cheksiz, chegaralangan va monoton bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo'ladi.

Agar cheksiz $\{x_n\}$ ketma-ketliklar yuqoridan yoki quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u albatta uzoqlashuvchi bo'ladi, ya'ni chekli limitga ega bo'lmaydi.

Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer topish mumkin bo'lsaki, barcha $n > N$ lar uchun $|x_n - 0| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. Boshqa so'z bilan aytganda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n| \geq M$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlikka cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

Sonli ketma-ketliklarning limiti uchun quyidagi xossalar o'rinli:

$$1^0. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$2^0. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$3^0. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0)$$

10.2. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar.

Biz amaliy faoliyatimizda mazmun jixatidan turlicha bo'lgan uzunlik, yuza, hajm, temperatura, tezlik kabi turli miqdorlarga duch kelamiz. Bu miqdorlar aniq sharoitda ba'zan turli qiymatlarni qabul qilsa, ba'zan bir xil qiymatga teng bo'ladi. Masalan, tasodifiy 10 ta mashinaning tezligi tekshirilsa, ular har xil bo'lishi mumkin. Demak tezlik o'zgaruvchi miqdor.

Maqlumki har qanday aylana uzunligi ℓ ning diametri $2R$ ga nisbati har doim o'zgarmas son (mikdor) $\pi=3,14...$ ga tengdir. Jismlarning erkin tushish tezlanishi ham o'zgarmas miqdordir.

Shunday qilib ikki xil o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar bo'ladi. Odatda o'zgaruvchi miqdorlar $x, y, z, \dots$ o'zgarmas miqdorlar esa $a, b, c, \dots$ harflar orqali belgilanadi. Agar x o'zgaruvchi miqdor berilgan bo'lsa, bu miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamiga x o'zgaruvchi miqdorning o'zgarish sohasi deyiladi. x o'zgaruvchi miqdorning o'zgarish sohasini sonlar o'qida tasvirlasak, $a < x < b$ yoki $a \leq x \leq b$ tengsizliklardan x ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a, b) , $[a, b[$ oraliqda yoki $[a, b]$ kesmalarda bo'lishi ravshan.

O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlarni quyidagicha ham taqriflash mumkin.

Ta'rif. Har xil son qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan har qanday x miqdorga o'zgaruvchi miqdor deyiladi. Barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bir xil bo'lgan miqdorga o'zgarmas miqdor deyiladi.

10.3 Funksiya.

Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan D va E to'plamlar berilgan bo'lib, o'zgaruvchi x miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari D to'plamda, y o'zgaruvchi miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari E to'plamda bo'lsin.

1-Ta'rif. Agar x o'zgaruvchining D to'plamdagi har bir qiymatiga biror qoida yoki qonunga ko'ra y o'zgaruvchining E to'plamdagi faqat aniq bitta qiymati mos qo'yilgan bo'lsa, u holda o'zgaruvchi y ni o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyiladi va odatda $y=f(x)$ ko'rinishda yoziladi.

x ga erkli o'zgaruvchi yoki argument, y ga esa erksiz o'zgaruvchi yoki x o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

x o'zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami D ga funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ yoki $D(y)$ ko'rinishda belgilanadi. E to'plamga esa funksiyaning o'zgarish sohasi deyiladi va $E(f)$ yoki $E(y)$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. $y = \sqrt{1 - x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1, 1]$ to'plamdan ya'ni $D(y) = [-1, 1]$ iborat bo'ladi. O'zgarish sohasi esa $E(y) = [0, 1]$ bo'ladi.

2-Ta'rif. Funksiyaning aniqlanish sohasi D dagi har qanday x_1, x_2 lar uchun $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiyani D da o'suvchi deyiladi, agar $f(x_1) \geq f(x_2)$ kelib chiqsa, funksiyani D da kamayuvchi deyiladi.

Funksiyaning berilish usullari. a) x va y o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanish matematik formulalar orqali berilishi mumkin, u holda funksiya analitik usulda berilgan deyiladi;

b) o'zgaruvchi x va y lar orasidagi bog'lanish grafik usulda berilishi mumkin;

v) x va y lar orasidagi bog'lanish jadval usulida ya'ni argument x ning qiymatlariga mos keluvchi y ning qiymatini jadval ko'rinishda berilishi mumkin.

10.4 Funksiya limitining ta'rifi.

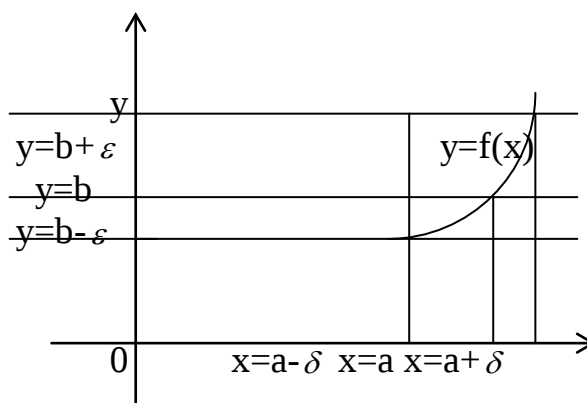
Biror berilgan a nuqtani o'z ichiga olgan har qanday oraliqqa shu a nuqtaning atrofi deyiladi. Masalan, $(a - \delta; a + \delta)$ oraliq a nuqtaning δ atrofi deyiladi.

1-Ta'rif. Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkin bo'lsaki, x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantirgan barcha qiymatlari uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \rightarrow a$) limiti deyiladi va odatda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifning geometrik maqnosi istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ soni mavjud bo'lsaki, x ning $(a - \delta; a + \delta)$ intervaldagi barcha qiymatlari uchun $f(x)$ funksiyaning qiymati $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ oraliqda, ya'ni $y = b - \varepsilon$; $y = b + \varepsilon$ to'g'ri chiziqlar orasida bo'ladi.



1-ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N va M ($N < a < M$) sonlarni ko'rsatish mumkin bo'lib, x ning $N < x < M$ tengsizlikni qanoatlantiradigan ($x = a$ dan tashqari) hamma qiymatlari uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \rightarrow a$) limiti deyiladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

2-Ta'rif. Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $x > N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow \infty$ limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{ko'rinishda yoziladi.}$$

3-Ta'rif. Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > a$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $a < x < M$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, b songa $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x \rightarrow a+0$ ya'ni x a ga o'ngdan intilganda) o'ng limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \quad \text{ko'rinishda yoziladi.}$$

Xuddi shuningdek, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada chap limiti deb, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ ga aytiladi. O'ng va chap limitlarga bir tomonlama limitlar deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti chekli mavjud bo'lsa, u holda albatta

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

bo'lishi shart.

10.5. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

1-Ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning limiti $x \rightarrow a$ da nol bo'lsa ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyani $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

2-Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $y=f(x)$ fuksiyani $x \rightarrow a$ da cheksiz katta fuksiya deyiladi.

Misol. 1) $y=x^2-1$ fuksiya $x \rightarrow 1$ da cheksiz kichik fuksiya chunki $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$

2) $y = \frac{1}{x^2}$ fuksiya ham $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik fuksiya $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

3) $y=x^2$ fuksiya esa $x \rightarrow \infty$ da cheksiz katta fuksiya $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$.

Endi cheksiz kichik fuksiyalarning xossalari xaqidagi quyidagi teoremlarni isbotsiz keltirib o'taylik

1-Teorema. Chekli sondagi cheksiz kichik fuksiyalarning algebraik yig'indisi cheksiz kichik fuksiyadir.

2-Teorema. Cheksiz kichik fuksiyaning chegaralangan fuksiyaga ko'paytmasi cheksiz kichik fuksiya bo'ladi.

3-Teorema. Cheksiz kichik fuksiyalarning ko'paytmasi cheksiz kichik fuksiyadir.

4-Teorema. Cheksiz kichik fuksiyaning limiti noldan farqli bo'lgan fuksiyaga bo'linmasi cheksiz kichik fuksiyadir.

10.6. Funksiya limiti haqidagi asosiy teoremlar

1-Teorema. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ chekli limit mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyani b son bilan $\alpha(x)$ cheksiz kichik fuksiya yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$f(x) = b + \alpha(x)$ va aksincha $f(x) = b + \alpha(x)$ bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'ladi.

Isbot. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ bo'lganda

$$f(x) - b = \alpha(x) \quad (1)$$

ayirmani ko'raylik va $x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik fuksiya ekanligini ko'rsataylik. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ degan so'z, limitning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkinki, x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. (1) ni hisobga olsak $|\alpha(x)| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $\alpha(x)$ fuksiyani cheksiz kichik fuksiya ekanligini ko'rsatadi.

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ mavjud bo'lsa, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

2-teorema. 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Xususan $g(x) = k$ (k - o'zgarmas son)

$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right)$$

Isbot. 1) Faraz qilaylik $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ bo'lsin, bu holda

1-teoremaga ko'ra $f(x) = a + \alpha(x)$, $g(x) = b + \beta(x)$ bo'ladi, bunda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik fuksiyalar bo'ladi.

$f(x) \pm g(x) = a \pm b + [\alpha(x) + \beta(x)]$ - bundan ko'rinadiki, $f(x) \pm g(x)$ funksiya $a \pm b$ son va $\alpha(x) + \beta(x)$ - cheksiz kichik funksiya yig'indisi ko'rinishida ifodalangan.

1-teoremaning ikkinchi qismiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

2) va 3) ham yuqoridagi mulohazalar orqali oson isbotlanadi.

Eslatma. 2-teorema chekli sondagi funksiyalar yig'indisi, ko'paytmasi uchun ham o'rinlidir.

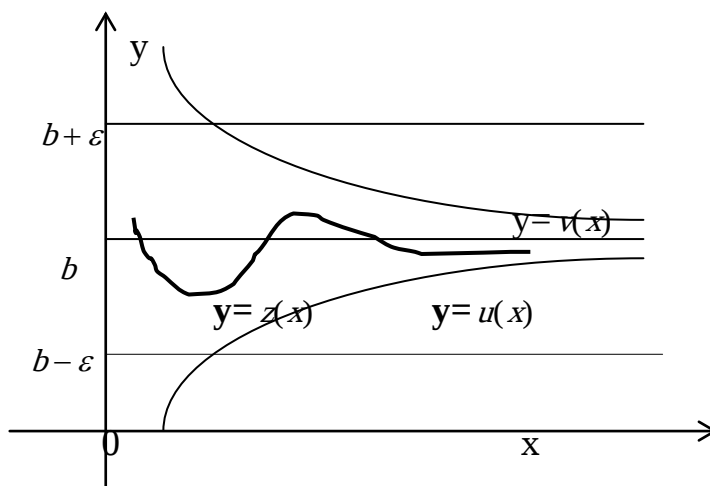
3-teorema. (oraliq o'zgaruvchining limiti haqidagi teorema).

Agar $u(x)$, $z(x)$ va $v(x)$ fuksiyalarning tegishli qiymatlari orasida

$$u(x) \leq z(x) \leq v(x)$$

tengsizliklar bajarilsa va $x \rightarrow \infty$ da $u(x)$, $v(x)$ fuksiyalar birgina b limitga intilsa, u holda $x \rightarrow \infty$ da $z(x)$ fuksiya ham shu b limitga intiladi.

Isbotni chizmada ko'raylik.



10.7. Ajoyib limitlar.

Birinchi ajoyib limit.

1-teorema. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ bo'ladi.

Isboti. Radiusi birga teng bo'lgan birlik aylanani ko'raylik.

S_1 - OAB uchburchakning yuzasi

S_2 - OAB sektorning yuzasi

S_3 - OCB uchburchakning yuzasi

bo'lsin.

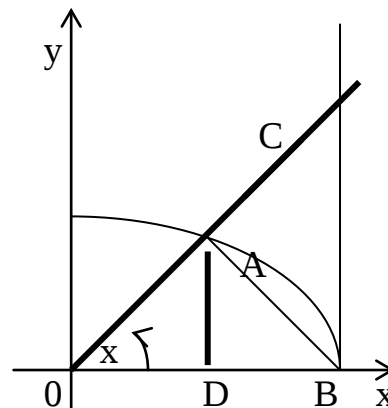
U holda $S_1 < S_2 < S_3$ bo'ladi.

OA=OB=R=1 ekanligini e'tiborga olsak

$$S_1 = \frac{1}{2} OB \cdot AD = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OB \cdot AB = \frac{x}{2} \text{ va } S_3 = \frac{OB \cdot CB}{2} = \frac{1}{2} \tan x$$

bo'ladi.



Demak $\sin x = \frac{AD}{OA} = AD$; $\operatorname{tg} x = \frac{CB}{OB} = CB$.

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Ikkinchi ajoyib limit.

Ta'rif. $(1 + \frac{1}{n})^n$ o'zgaruvchi miqdorning $n \rightarrow \infty$ dagi limiti e soni deyiladi,
 $e = 2,7182818284...$

2-teorema. $(1 + \frac{1}{x})^x$ fuksiyaning $x \rightarrow \infty$ dagi limiti mavjud bo'lib e soniga teng bo'ladi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (3)$$

Isboti. Agar x faqat butun musbat qiymatlarni qabul qilsa, (3) ning o'rirliligi (2) dan kelib chiqadi. Endi, x musbat va manfiy kasr qiymatlarni qabul qilgan holda cheksizlikka intilsin.

1. $x \rightarrow \infty$ deylik, bu holda x ning har qanday qiymati ikki musbat butun sonlar orasida yotadi.

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow (1 + \frac{1}{n+1})^n < (1 + \frac{1}{x})^n < (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Agar $x \rightarrow \infty$ bo'lsa, n ham $n \rightarrow \infty$ chunki n x ning butun qismi, oxirgi tengsizlikdan limitga o'tsak, ikki chekkadagi limitlar e ga intilgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

kelib chiqadi.

2. $x \rightarrow -\infty$ da $t = -(x+1)$ yoki $x = -(t+1)$ almashtirish bajarsak $t \rightarrow +\infty$ da $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^t = e.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ekanligini ham quyidagicha hosil qilamiz:

$$x = \frac{1}{t} \text{ desak } t \rightarrow \infty \text{ da } x \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^t = e.$$

Amaliy mashg'ulotlarda ko'p uchraydigan quyidagi limitlarni ham talabalarning bilishi maqsadga muvofiq bo'lar edi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x = e^{-k}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^n - 1}{x} = -n,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

Adabiyotlar.

1. [1] 129-145 betlar.
2. [2] 20-30, 178-203 betlar.

QAYTARSH UCHUN SAVOLLAR.

1. Funksiya tushunchasiga olib keluvchi qanday masalalarni bilasiz?
2. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar nima?
3. Funksiyaning ta'rifi.
4. Funksiyaning o'zgarish va aniqlanish sohalari.
5. Berilgan nuqtadan aniqlanmagan fuksiyaga misol keltiring.
6. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
7. Funksiyaning berilgan nuqtadagi qiymati qanday topiladi?
8. Funksiya qiymatlari bo'yicha argument qiymatlarini aniqlash mumkinmi?
9. Limit tushunchasi qanday kiritiladi?
10. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarning ta'rifi.

11-MAVZU FUNKSIYA UZLUKSIZLIGI.

a)Mavzuning ta'lim texnologiyasi

1.Fanning umumiy maqsadi: "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishdan maqsad talabalarda uning asosiy tushunchalarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir

2.Mavzu nomi: Funksiyaning uzliksizligi va xosilasi.

3.Mavzuqa oid o'quv adabiyotlar:

1. Soatov Ya.U Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994.
2. Shneyder V. va boshqalar. Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987
3. Kletenik D. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987.
4. Pod redaksiyey Yefimova A.V.i Demidovicha B.
Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986.
5. Berman G.N. Sbornik zadach po matematicheskomu analizu, 1985.
6. Pod redaksiyey Demidovicha B. Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu analizu. VTUZov.

4.Mavzuning o'quv maqsadi: Talabalarga funksiyaning uzliksizligi va xosilasi, differensial, yuqori tartibli xosila va differensial, ularning tadbiqu haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir.

5. Tayanch so'zlar: : bir tomonlama uzluksizlik, uzilish turlari. O'rtacha tezlik, oniy tezlik, kesuvchining burchak koefiyesiyenti, urinmaning burchak koefiyesiyenti, funksiya, orttirma, differensiallanuvchi funksiya.

6.Tayanch so'z va iboralarning o'quv maqsadi:
Talabalarda funksiyaning uzliksizligi, uzilush turlari, differensiallanuvchi funksiya, xosila bilan differensial orasidagi bjg`lanish, yuqori tartibli xosila, xosilaning tadbiqlari, Lopital qoidasi yordamida aniqmasliklarni ochish xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

11.1. Argument va funksiya orttirmasi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymati $y_0=f(a)$ bo'lsin. Argument x ning boshlang'ich a va biror x qiymatlarini ko'raylik. $x-a$ ayirma argument x ning a nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi.

$y-y_0=f(x)-f(a)$ ayirmaga $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δy orqali belgilanadi.

$\Delta x=x-a$, $\Delta y=y-y_0=f(x)-f(a)$ yoki $x=a+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ bo'lib

$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$.

Misol. $y=x^2$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi funksiya orttirmasini hisoblang.

$$\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)=(x+a)^2-a^2=2a\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Endi funksiyaning uzluksizligiga o'taylik. $y=f(x)$ funksiya biror $x=a$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lib, $x=a$ da $u=f(a)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ da limiti mavjud bo'lib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=f(a)$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Demak $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)=f(a) \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu ta'rifni boshqacha ham tushuntirish mumkin.

Agar $x=a$ nuqtaga Δx orttirma bersak, funksiyaning orttirmasi $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$ edi.

Bundan limitga o'tsak

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(a+\Delta x)-f(a)] =$$

$$=f(a)-f(a)=0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y=0 \quad (2)$$

(2) dan ko'rinadiki, funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lishi kerak ekan.

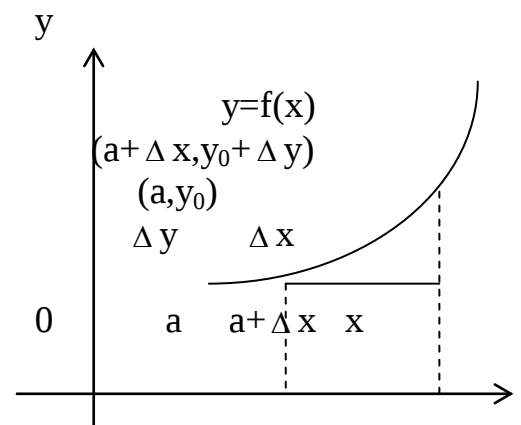
Berilgan nuqtada funksiya uzluksizligining geometrik ma'nosi shuni bildiradiki, agar $|\Delta x|$ yetarli kichik bo'lsa, u holda a va $a+\Delta x$ nuqtalarda funksiya grafigi ordinatalarining ayirmasi absolyut qiymat bo'yicha yetarli darajada kichik bo'ladi.

2-Taqrif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi o'ng limiti

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)=f(a+0) \text{ yoki chap limiti } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)=f(a-0) \text{ lar mavjud bo'lsa, u}$$

holda $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtada o'ngdan yoki chapdan uzluksiz deyiladi.

O'ng va chap uzluksizlikka bir tomonlama uzluksizlik ham deyiladi. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib, o'zaro teng bo'lsa $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)=\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, funksiya shu a nuqtada uzluksiz bo'ladi.



3-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya biror intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiyaning shu intervalda uzluksiz deyiladi.

4-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada aniqlanmagan bo'lsa yoki $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lmasa yoki (1) tenglik o'rinli bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz (yoki a nuqtada uzilishga ega) deyiladi. a nuqtada $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$ chekli limitlar mavjud bo'lib, lekin ular o'zaro teng bo'lmasa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada 1-tur uzilishga ega deyiladi.

1-tur uzilishga kirmaydigan, barcha uzilishlarga II-tur uzilish deyiladi.

Misol. 1. $f(x) = \sqrt{x+4}$ funksiyaning $x=5$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsating.
 $f(5) = \sqrt{5+4} = 3$; $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x+4} = \sqrt{5+4} = 3$; $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5) = 3$.

2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$). $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Demak funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

11.2. Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning uzluksizligi.

Teorema. Agar $f_1(x)$, $f_2(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ va $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ($f_2(a) \neq 0$) funksiyalar ham shu $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti: Isbotini $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ yig'indi uchun ko'raylik, shartga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_1(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_2(a)$, tengliklar o'rinli bo'lgani uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = f_1(a) + f_2(a)$$

bu esa $f_1(x) + f_2(x)$ yig'indining $x=a$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

Endi kesmadagi uzluksiz funksiyalarning quyidagi ikkita xossasini ko'rib o'taylik.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu kesma uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda a va b nuqtalar orasida hech bo'lmaganda shunday bir $x=c$ ($a < c < b$) nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c) = 0$ bo'ladi.

Natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, shu kesmada $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

Adabiyotlar.

1. [1] 150-159 betlar.
2. [2] 207-215 betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLAR.

1. Uzluksiz tushunchasini qanday tasavvur qilasiz?
2. Uzluksizlik ta'rifini limit ta'rifi bilan solishtiring, qaysi biri umumiyroq?
3. Berilgan nuqadan uzluksiz funksiyaga misol keltiraolasizmi?
4. Qachon funksiyani chekli kesmadan uzluksiz deyiladi?
5. Kesmada uzluksiz funksiyaning grafigini tasavvur qiling.
6. Uzluksiz funksiyaga misollar.
7. Uzulish turlari. Ularning farqi nimadan iborat?
8. Berilgan funksiyaning berilgen nuqtadan uzluksizligini qanday tekshiriladi?

12-MAVZU

FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

Tayanch so'zlar. O'rtacha tezlik, oniy tezlik, kesuvchining burchak koeffiyesiyenti, urinmaning burchak koeffiyesiyenti, funksiya, orttirma, differensiallanuvchi funksiya.

12.1. Funksiyaning hosilasi.

Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilganda chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va y' yoki $y'(x_0)$ yoki $f'(x_0)$ yoki $\frac{dy}{dx}$ yoki $\frac{df}{dx}$ ko'rinishlarda belgilanadi.

Demak ta'rifga ko'ra $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Misollar.

1. $y = f(x) = c = \text{const}$ bo'lsin. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$ $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$
2. $y = f(x) = x$ bo'lsin. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$; $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$
3. $y = x^2$ funksiyaning $x = 3$ nuqtadagi hosilasini toping;
 $y_0 = 9$; $y_0 + \Delta y = (3 + \Delta x)^2 = 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$
 $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6 + \Delta x) = 6$;

$$4. y=f(x)=\sqrt{x}, (x>0)$$

$$y'=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

12.2. Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

1-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, uni shu nuqtada differensiallanuvchi funksiya deyiladi.

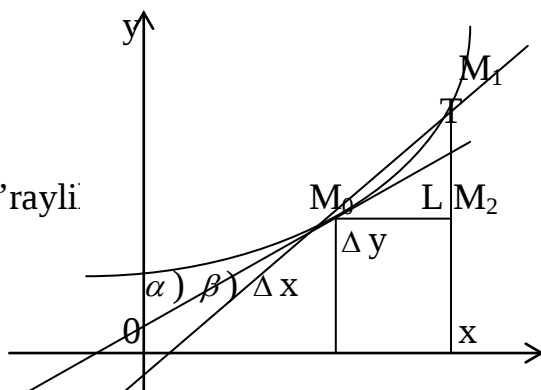
2-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x \in [a, b]$ da differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiyani shu kesmada differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Eslatma. $f(x)$ funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, shu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Lekin aksi har vakt o'rinli emas. Masalan $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas.

Hosilaning geometrik ma'nosi.

Biror (a, b) oraliqda aniqlangan $y=f(x)$ funksiyaning grafigi egri chiziqdan iborat bo'lsin. L da $M_0(x_0, y_0)$ va $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nuqtalar olib, ularni birlashtiruvchi M_0M_1 kesuvchini ko'rayli. Agar M_1 nuqtani M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashtirsak M_0M_1 kesuvchining limit holati bo'lgan M_0T to'g'ri chiziqqa L egri chiziqning M_0 nuqtasiga o'tkazilgan urinma deyiladi.



Yuqoridagi chizmadan ko'rinadiki Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan urinma α burchak, M_0M kesuvchi esa β burchak tashkil qiladi. $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ekanligi ma'lum.

$\Delta x \rightarrow 0$ da $M_1 \rightarrow M_0$ intilib $\beta \rightarrow \alpha$.

Bundan $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$.

Shunday qilib, $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasining qiymati funksiya grafigidagi shu $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil kilgan burchak tangensiga teng bo'lar ekan. Boshqacha aytganda urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng bo'lar ekan: $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

Agar $M_0(x_0, y_0)$ ya'ni $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma tenglamasini $y=kx+b$ ko'rinishda olsak, urinma shu $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtadan o'tgani uchun

$$f(x_0) = kx_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - kx_0.$$

Bu holda $y = kx + b \Rightarrow y = kx + f(x_0) - kx_0 \Rightarrow y = f(x_0) + k(x - x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ urinma tenglamasi.

Misol. $y = \frac{1}{x}$ giperbolaning $x = x_0 = 1$ ya'ni $(1; 1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

$$y(x_0) = f(1) = 1; f'(x) = -\frac{1}{x^2}; f'(1) = -1 \quad y = 1 - 1(x - 1) \Rightarrow y = 2 - x.$$

Hosilaning mexanik ma'nosi.

Moddiy M nuqta $y = f(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlansin. Moddiy nuqta boshlansich holatda 0 nuqtada bo'lib, t_0 momentda esa M_0 holatni olib, $y_0 = f(t_0)$ masofani bossin. $t = t_0 + \Delta t$ momentda esa M_1 holatni olib, bosib o'tgan yo'li $y = f(t_1) = f(t_0 + \Delta t)$ bo'ladi. Δt vaqtda bosib o'tgan yo'li esa $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ bo'ladi.

$\frac{\Delta y}{\Delta t}$ nisbat moddiy nuqtaning Δt vaqtdagi o'rtacha tezligi deyiladi. $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$

moddiy nuqtaning t momentdagi tezligini beradi. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = u'$.

$$\frac{f(t_0) \quad \Delta y \quad f(t_1)}{0 \quad M_0 \quad \Delta t \quad M_1 \quad t} \rightarrow$$

Demak hosilaning mexanik ma'nosi harakatlanayotgan moddiy nuqtaning ma'lum momentdagi tezligini ifodalaydi.

Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasi.

Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va bo'linmasi shu x nuqtada hosilaga ega bo'lib, quyidagi formulalar bo'yicha topiladi:

$$\begin{aligned} (u \pm v)' &= u' \pm v'; \\ (uv)' &= u'v + uv'; \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0) \end{aligned}$$

Isboti. $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$ ekanligini ko'rsataylik. $y = u(x) + v(x)$ deb x ga Δx ortirma bersak $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar ham ortirma oladi:

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$$

teoremaning shartiga ko'ra $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] = u'(x) + v'(x) \Rightarrow [u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

Qolganlari ham shunga o'xshash isbot qilinadi.

Teskari funksiyaning hosilasi.

Teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltirib o'taylik.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu kesmada o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiya teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya mavjud bo'ladi. $y=f(x)$ ga teskari bo'lgan funksiyaning topish uchun tenglamani x ga nisbatan yechish kerak.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya ham shu nuqtada $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ hosilaga ega bo'ladi.

Isboti. $y'_x=f'(x)$ mavjud bo'lsin. $x=\varphi(y)$ funksiya argumenti u ga Δy orttirma bersak

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y), \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow x'_y = \varphi'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$
$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{yoki} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Murakkab funksiyaning hosilasi.

Agar y o'zgaruvchi u o'zgaruvchining $y=f(u)$ funksiyasi bo'lib, u esa o'z navbatida x ning funksiyasi $u=\varphi(x)$ bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ funksiyaning x ning murakkab funksiyasi deyiladi.

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya o'zgaruvchi x nuqtada $u'_x=\varphi'(x)$ hosilaga, $y=f(u)$ funksiya esa o'zgaruvchi u bo'yicha $y'_u=f'(u)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya ham shu x nuqtada

$$y'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'(x)$$

hosilaga ega bo'ladi.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi.

Agar tenglamamiz $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lib, $\varphi(t)$,

$\psi(t)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $\varphi'(t) \neq 0$ bo'lsa $y'_x = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$ ya'ni

$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$ formula o'rinli bo'ladi.

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari.

1. $y=x^n$ ($x>0$) darajali funksiyaning hosilasini topaylik. Funksiya hosilasining ta'rifiga ko'ra $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\Delta x} = \frac{x^{n-1} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}} = n \text{ ajoyib limitni e'tiborga olsak}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

$$y'=(x^n)'=nx^{n-1}.$$

2. $y=a^x$ ($a>0$, $a \neq 1$) ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi.

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\Delta x} = \ln a \text{ ajoyib limitga ko'ra}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Demak, $y'=(a^x)'=a^x \ln a$

3. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a \neq 1$) logarifmik funksiyaning hosilasi ham

$$y'=(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \text{ formula bilan topiladi.}$$

$$\text{Agar } \log_a e = \frac{1}{\ln a}; \log_e a = \ln a; \log_e x = \ln x; \log_x e = \frac{1}{\ln x}. \text{ ekanligini e'tiborga}$$

$$\text{olsak } y'=(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \text{ kelib chiqadi.}$$

Agar $a=e$ desak $\ln a = \ln e = 1$ bo'lib, $y=\ln x$; $y'=(\ln x)' = \frac{1}{x}$ bo'ladi.

4. $y=\sin x$ funksiyaning hosilasini topish uchun x ga Δx orttirma bersak y ham

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left[\frac{(2x+\Delta x)}{2}\right],$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = \cos x.$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

xuddi shuningdek o'rta maktab dasturidan bizga ma'lum bo'lgan boshqa trigonometrik funksiyalarning hosilalarini hisoblash mumkin:

$$(\cos x)' = -\sin x; (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Endi $y = \arcsin x$ teskari trigonometrik funksiyaning hosilasini hisoblashni ko'raylik.

$y = \arcsin x$ funksiya $x = \sin y$ funksiyaga teskari funksiya bo'lgani uchun, teskari funksiyalarning hosilalariga ko'ra

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (-1 < x < 1).$$

Xuddi shuningdek

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}; (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

6. $y = \ln x$ bo'lsa, $y' = \frac{1}{x} \cdot x' = \frac{1}{x}$; Agar $y = \ln u$ bo'lib $u = f(x)$ bo'lsa,

$$y' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{f'(x)}{f(x)};$$

Agar $y = u^{v(x)}$ bo'lsa, $\ln y = v \ln u$ – bundan hosila olsak

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}, \quad y' = u^v \left[v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right].$$

Hosila jadvali (Umumiy hol).

$u = u(x)$, $v = v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

1. $C' = 0$; C – o'zgarmas.	7. $(e^u)' = e^u u'$	13. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
2. $x' = 1$, x – argument	8. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$	14. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
3. $(u^n)' = n u^{n-1} u'$, ($n \in \mathbb{N}, u > 0$)	($u > 0; a > 0; a \neq 1$)	15. $(\arccos u)' =$
4. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	9. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$-\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
5. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	10. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	16. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$
6. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; ($a > 0; a \neq 1$)	11. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	17. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}.$
	12. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	

Differensiallash qoidalari:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3. $(Cu)' = C \cdot u'$ (C-o'zgar.)
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
5. $y=f(u), u=\varphi(x), y=f[\varphi(x)]$ bo'lsa, $y_x' = y_u' \cdot u_x'$ yoki $y_x' = f'(u) \cdot \varphi_x'(x)$.
6. $y=f(x)$ va $x=\varphi(y)$ funksiyalar o'zaro teskari bo'lsa, $y_x' = \frac{1}{x_y'}$.
7. $(u^v)' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$
8. $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$ bo'lsa, $y_x' = \frac{\psi_x'}{\varphi_x'}$ yoki $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}$.

12.3. Differensial va hosila orasidagi bog'hlanish.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsa, bu funksiyaning $x \in [a,b]$ nuqtadagi hosilasi $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (1) tenglik bilan aniqlanar edi. Limitning ta'rifiga ko'ra $\Delta x \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $f'(x)$ ga intiladi. Boshqacha aytganda ular orasidagi farq cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Shuning uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x \quad (\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \alpha \rightarrow 0).$$

Bundan ko'rinadiki funksiya orttirmasi Δy ikkita qo'shiluvchidan iborat bo'lar ekan. Shularning birinchisi $f'(x) \Delta x$ ga funksiyaning differensial deyiladi va dy orqali belgilanadi.

$$dy = f'(x) \Delta x \quad (2)$$

desak (2) dan $dx = x' \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$ ekanligini e'tiborga olsak

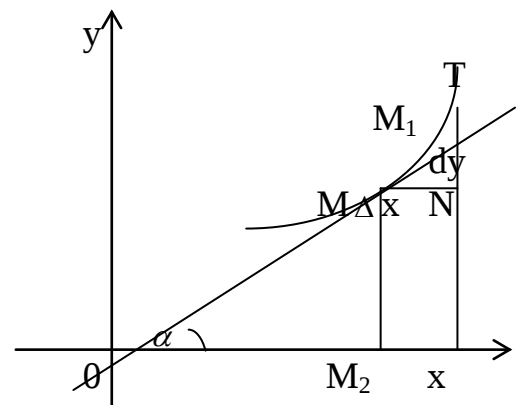
$$dy = f'(x) dx \quad (3)$$

yoki

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (4)$$

(4) dan ko'rinadiki $f'(x)$ hosilani funksiya differensialining argument differensialiga nisbati deb qarash mumkin ekan.

Endi differensialning geometrik ma'nosini ko'rib o'taylik. Tenglamasi $y=f(x)$ bo'lgan egri chiziqning $M(x,y)$ nuqtasiga urinma o'tkazib, bu urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini α deylik. Agar x ga Δx ortirma bersak y ham Δy ortirma olib natijada $M(x+\Delta x, y+\Delta y)$ nuqta hosil bo'ladi. $MN = \Delta x$, $M_1N = \Delta y$,



$tg \alpha = f'(x)$ ekanliklarini eqtiborga olsak
MNT uchburchakdan

$$NT = MN \cdot tg \alpha = f'(x) \cdot \Delta x = dy.$$

$NT = dy$ kelib chiqadi. Bundan ko'rinadiki $f(x)$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtadagi differensial, shu nuqtadagi urinma ordinatasining orttirmasiga teng bo'lar ekan. (3) tenglikdan ko'rinadiki differensialni topish uchun uning hosilasini topib, argument differensialiga ko'paytirish kifoya ekan. Shuning uchun hosilaga tegishli barcha nazariya va formulalar differensial uchun ham o'z kuchini saqlab qoladi. Jumladan quyidagi formulalar ham o'rinli bo'ladi:

1. $dC = 0$ (C-o'zgarmas)
2. $d(Cu) = Cdu$
3. $d(u+v) = du+dv$
4. $d(uv) = vdu+udv$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} \quad (v(x) \neq 0)$

12.4. Differensialning taqribiy hisoblarga tatbiqi.

Agar $y = f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa,

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x \quad (\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \alpha \rightarrow 0 \text{ cheksiz kichik funksiya})$$

yoki

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = 1 + \frac{\alpha \Delta x}{f'(x) \Delta x} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\alpha}{f'(x)}\right) = 1 \Rightarrow \Delta y \approx dy \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

yoki

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Misol.

$$\sin 31^\circ = \sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right); \quad \Delta x = \frac{\pi}{180}; \quad x + \Delta x = 30^\circ + 1^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180};$$

$$\sin(30^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} + \left(\sin x\right)'_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,515.$$

12.5. Yuqori tartibli hosila

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi $f'(x)$ umuman aytganda yana x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun undan x bo'yicha hosila olsak, hosil bo'lgan hosilaga berilgan funksiyadan olingan ikkinchi tartibli hosila deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ lar bilan belgilanadi. Shunday qilib $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$y'' = f''(x) = (y')' = (f'(x))'.$$

$y''=f''(x)$ ikkinchi tartibli hosiladan olingan hosilaga $y=f(x)$ funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi deyiladi:

$$y'''=f'''(x)=(f''(x))'$$

Shu jarayonni n marta davom ettirsak $y=f(x)$ funksiyaning n tartibli hosilasi $y^{(n)}=f^{(n)}(x)=(y^{(n-1)})'=(f^{(n-1)}(x))'$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y=f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+6x-8$

$$y'=8x^3+9x^2-10x+6$$

$$y''=24x^2+18x-10$$

$$y'''=48x+18.$$

Agar $u(x)$, $v(x)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lib, $u^{(n)}(x)$, $v^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$1. (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)} \quad (C\text{-o'zgarmas son})$$

$$2. (u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$$

$$3. (uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)u^{(n-2)}v''}{1 \cdot 2} + \dots + uv^{(n)}.$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Oxirgi tenglikka Leybnis formulasi deyiladi.

Endi yuqori tartibli qosila tushunchasi kabi, yuqori tartibli differensial tushunchasini kiritaylik. Agar $y=f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, uning differensialli $dy=f'(x)dx=y'dx$ formula bilan hisoblanishini ko'rgan edik. Bu yerda x ga faqat $f'(x)$ bog'liq bo'lib, dx bog'liq bo'lmaydi, chunki $dx=\Delta x$ bo'lib argument orttirmasini ifodalaydi. Shuning uchun dy differensialidan yana differensial olsak, hosil bo'lgan differensialga $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differensialli deyiladi va d^2y yoki $d^2f(x)$ lar bilan belgilanadi:

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=d(y')dx=(y'')dx dx=y''dx^2$$

$$d^2y=y''dx^2$$

$$\text{yoki } d^2y=f''(x)dx^2.$$

Xuddi shuningdek uchinchi, to'rtinchi va xokazo tartibli differensiallarni topish mumkin:

$$d^3y=y'''\text{dx}^3, d^4y=y^{IV}\text{dx}^4, \dots, d^ny=y^{(n)}\text{dx}^n.$$

Misol. $y=4x^5-3x^2+6$, $d^4y=?$

$$dy=(20x^4-6x)dx, d^2y=(80x^3-6)dx^2, d^3y=240x^2dx^3, d^4y=480xdx^4$$

Adabiyotlar.

1.[1] 161-171, 179-191-betlar.

2.[2] 223-251-betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. To'g'ri chiziqli noteks harakatning o'rtacha tezligiga ta'rif bering.
2. Oniy tezlik nima?
3. Funksiya hosilasini ta'rifini bering. Hosilani belgilanishlari.

4. Hosila qanday geometrik va mexanik ma'noga ega?
5. Qanday funksiyaning hosilasi nol bo'ladi?
6. Hosila olish qoidalari.
7. Asosiy elementar funksiyalarning hosila jadvalini yozing.
8. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
9. Differensialning ta'rifi, geometrik ma'nosi.
10. Funksiya qiymatini taqribiy hisoblashda differensialning o'rni.
11. Ikkinchi tartibli hosilani ta'rifi va uni geometrik ma'nosi.

13-MAVZU DIFFERENTIALLANUVCHI FUNKSIYALAR XAQIDA BA'ZI TEOREMLAR.

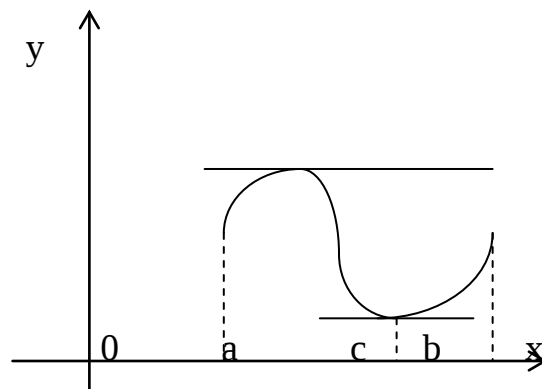
Tayanch so'zlar: Uzluksiz, differensiallanuvchi funksiya, urinma, hosila.

Roll teoremasi (1652-1719y. fransuz).

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida $f(a)=f(b)$ yoki $f(a)=f(b)=0$ bo'lsa, u holda shunday $x=c$ ($a<c<b$) nuqta topiladiki, unda $f'(c)=0$ bo'ladi.

Teoremaning geometrik ma'nosi.

Agar har bir nuqtasida urinmaga ega bo'lgan uzluksiz egri chiziqli absissalari a va b bo'lgan nuqtalarda $f(a)=f(b)$ yoki $f(a)=f(b)=0$ bo'lsa, u holda bu egri chiziqli shunday bir $x=c$ ($a<c<b$) nuqta topiladiki, bu $(c; f(c))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma OX o'qiga parallel bo'ladi.



Lagranj teoremasi (1736-1813 y. fransuz).

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $[a,b]$ kesmada shunday $x=c$ ($a<c<b$) nuqta topiladiki, bu nuqtada hosila

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1) \quad \text{bo'ladi.}$$

Bu teorema ba'zi hollarda chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasi deyilib, quyidagicha ham ifodalanadi; $[a,b]$ da differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi orttirmasi, shu kesma uzunligi bilan c ($a<c<b$) nuqtadagi funksiya hosilasi ko'paytmasiga teng bo'ladi:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Endi Lagranj teoremasining geometrik ma'nosini ko'raylik. Chizmadan ko'rinadiki, (1) ning chap tomonidagi $f'(c)$ kattalik $y = f(x)$ egri chiziqling $x=c$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagining tangensidir:

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$$

(1) ning o'ng tomoni esa A va B nuqtalardan o'tuvchi vatarning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchakning tangensidir:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demak $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.

Bundan chiqadigan xulosa:

Agar $y = f(x)$ funksiya grafigining hamma nuqtalarida urinma mavjud bo'lsa, u holda A va B ($x=a$, $x=b$) nuqtalar orasida shunday bir C ($x=c$) nuqta topiladiki, bu C nuqtada o'tkazilgan urinma A va B nuqtalardan o'tgan vatarga parallel bo'ladi.

Misol. $f(x)=x^4$ funksiya $[0,1]$ da berilgan. Urinmasi $x=a=0$, $x=b=1$ nuqtalardan o'tgan vatarga parallel bo'lgan nuqtaning ordinatasini toping.

Yechish. $f(a) = f(0)=0$; $f(b) = f(1)=1$, $1-0=(1-0) f'(c)$, $f'(c) = 1$ ikkinchi tomondan

$$f'(x)=4x^3, \quad f'(c)=4c^3, \quad 4c^3=1, \quad c=0,63$$

Koshi teoremasi. Agar $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuktalarida differentsiallanuvchi bo'lib, ixtiyoriy $x \in (a,b)$ uchun $\varphi'(x) \neq 0$ bo'lsa,

u holda shunday bir $x=c(a < c < b)$ nuqta topiladiki, unda

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti: $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ chunki aks holda $\varphi'(b) = \varphi'(a) = 0$ bo'lib, Roll teoremasiga ko'ra kesma ichida $\varphi'(x) = 0$ bo'lib qolar edi. Bu esa teoremaning shartiga ziddir.

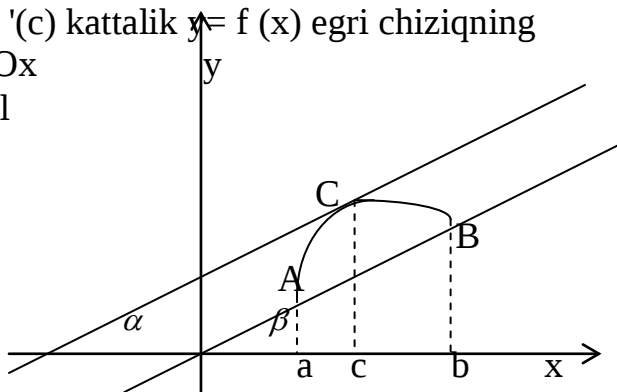
Quyidagi yordamchi funksiyani ko'raylik:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)] \quad (3)$$

(2) Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, u holda shunday $x=c$ ($a < c < b$) nuqta topiladiki, bu nuqtada $F'(c) = 0$ bo'ladi.

Bu holda (3) dan

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$



13.1. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi.

Ba'zi hollarda $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ kasr ko'rinishidagi funksiyalarni tekshirganimizda

$x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow a, x \rightarrow 0$ intilganda $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga uchraymiz. Bu aniqmasliklarni hosila yordamida Lopitalq qoidasiga ko'ra ochishni ko'raylik.

Teorema. Agar $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqta atrofidagi ($x=a$ dan tashqari) barcha nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0 \text{ (yoki } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty) \text{ va } \varphi'(a) \neq 0$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f(a) = \varphi(a) = 0$ hol uchun isbotlaylik.

Bu holda $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiradi. Jumladan $[a, x]$ ($a < x < b$) kesma uchun ham o'rinli bo'ladi:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (2)$$

(2) dagi c kattalik x ga bo'liq bo'lib, $x \rightarrow a$ da c ham a ga intiladi, chunki $a < c < x$ bo'lgani uchun.

$$\text{Demak, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

1-eslatma. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ limit yana $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka olib kelsa, va $f'(x), \varphi'(x)$ funksiyalar esa $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar qanoatlantirgan barcha shartlarni qanoatlantirsa, u holda $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ga yana Lopitalq qoidasini qo'llash mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

Agar zaruriyat bo'lib, teorema sharti qanoatlantirilsa shu jarayonni davom ettirish mumkin.

2-eslatma. $0 \cdot \infty, \infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklar ham $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi.

3-eslatma. $0^0, 1^\infty, \infty^0$ ko'rinishdagi aniqmasliklar odatda $(f(x))^{\varphi(x)}$ ko'rinishdagi ifodani logarifmlash natijasida $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarga keltiriladi.

Misollar.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = 5$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$; bu ∞^0 ko'rinishdagi aniqmaslik
 $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$ desak $\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + x^2)$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1 + x^2} = 0$
 $\ln(\lim_{x \rightarrow \infty} y) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln y) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = 1.$

Adabiyotlar.

1. [1] 193-204 –betlar.
2. [2] 263-270 –betlar

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Rollq teoremasining mohiyati.
2. Lagranj teoremasini keltiring.
3. Koshi teoremasining ma'nosi nimadan iborat?
4. Aniqmasliklar turlari.
5. Aniqmasliklarni ochishda Lopitalq qoidalari.
6. Bir aniqmaslikni boshqa aniqmasliklarga keltirish usullari.
7. Lopitalq qoidalarining qulayliklari nimadan iborat?

a)Mavzuning ta`lim texnologiyasi

2.Mavzu nomi: Funksiyalarni xosila yordamida tekshirish.

Talabalarda funksiyaning xosilasi yordamida unung monotonlik oraliqlari, ekstremum qiymatlari, kesmada eng kichik va eng katta qiymatlar, funksiya grafigining botiqlik va qavariqlik holatlari, asimptotalari xaqida tushunchalar hosil qilish.

b) Matnlar

14.1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi.

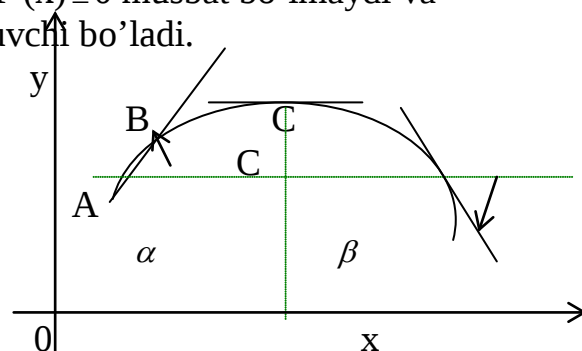
1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da differensiallanuvchi bo'lib unda o'suvchi bo'lsa, uning hosilasi shu intervalda $f'(x) \geq 0$ manfiy bo'lmaydi va aksincha (a,b) da $f'(x) > 0$ bo'lsa funksiya o'suvchi bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da differensiallanuvchi bo'lib unda kamayuvchi bo'lsa, uning hosilasi shu intervalda $f'(x) \leq 0$ musbat bo'lmaydi va aksincha (a,b) da $f'(x) < 0$ bo'lsa, funksiya kamayuvchi bo'ladi.

Bu teoremaning isboti chizmadan kelib chiqadi. Haqiqatan AB yoyda funksiya o'sadi. Demak AB egri chiziqning istalgan nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak tangensi musbat $\tan \alpha > 0$ ya'ni $\tan \alpha = f'(x) > 0$. BC yoyda funksiya kamayadi. Demak BC egri chiziqning istalgan nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qi bilan tashkil qilgan burchagi o'tmas burchak β .

Shuning uchun $\tan \beta < 0$ bundan $\tan \beta = -f'(x) < 0$;

Misol. $y=x^4$; $y'=4x^3 \rightarrow x>0$ da $y'>0$ bo'lib, funksiya o'sadi; $x<0$ bo'lsa, $y'<0$ bo'lib, funksiya kamayadi.



14.2. Funksiyaning ekstremum qiymatlari.

$f(x)$ funksiya (a,b) da aniqlangan bo'lib $x_1 \in (a,b)$ bo'lsin.

1-ta'rif. Absolyut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan ixtiyoriy (musbat yoki manfiy) Δx uchun $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyani x_1 nuqtada maksimumga ega deyiladi.

2-ta'rif. Absolyut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan ixtiyoriy (musbat yoki manfiy) Δx uchun $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyani x_2 nuqtada minimumga ega deyiladi.

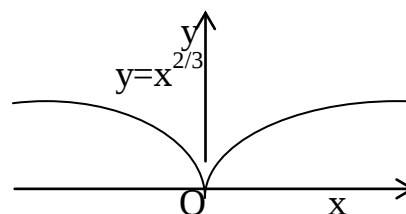
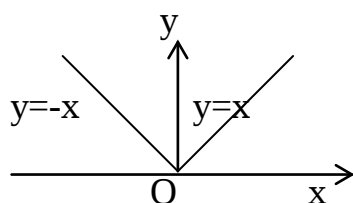
Ta'riflardan ko'rinadiki $f(x)$ funksiya (a,b) kesmada bir nechta nuqtalarda maksimumga va bir nechta nuqtalarda minimumga erishishi mumkin. Funksiyaning maksimum va minimum qiymatlariga funksiyaning ekstremum qiymatlari ham deyiladi.

1-teorema. (ekstremum mavjudligining zaruriy sharti) (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiya $x_1 \in (a,b)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda $f'(x_1) = 0$ bo'ladi. Lekin $f(x)$ funksiyaning biror $x = x_0 \in (a,b)$ nuqtada chekli hosilasi mavjud bo'lib, $f'(x_0) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ da ekstremumga ega bo'lishi har doim kelib chiqmaydi. Masalan $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(x) = 3x^2$ bo'lib, $x=0$ da $f(0)=0$ bo'lsa ham $x=0$ nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki bu funksiya qat'iy o'suvchi funksiyadir.

Demak 1-teorema funksiya ekstremum qiymatlariga erishishi uchun zarur lekin yetarli emas. Odatda funksiyaning hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalarga funksiyaning kritik (tursun, stasionar) nuqtalari deyiladi.

a) $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada ($f'(+0)=1$; $f'(-0)=-1$) hosilasi mavjud emas. Lekin funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'lishi ravshan. Demak funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalarda uning ekstremum qiymatlari mavjud bo'lishi mumkin.

b) $f(x)=x^{2/3}$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi cheksiz, lekin funksiya $x=0$ da minimumga ega ekanligini ko'rish qiyin emas. Demak funksiya hosilasi cheksizga aylanadigan nuqtalarda ham ekstremum qiymatlariga erishar ekan.



Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning ekstremum qiymatlarga erishadigan nuqtalarini:

- 1) funksiyaning kritik nuqtalari;
- 2) funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalari;
- 3) funksiyaning hosilasi cheksiz bo'ladigan nuqtalari orasidan izlash kerak ekan.

2-teorema. (ekstremum mavjudligining yetarli sharti) Agar $f(x)$ funksiya $x=x_1$ kritik nuqtani o'z ichiga olgan biror intervalda uzluksiz va uning barcha nuqtalarida $f'(x)$, $x=x_1$ kritik nuqtadan chapdan o'nga o'tganda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsa funksiya bu x_1 nuqtada maksimumga erishadi. Agar «-» dan «+» ga o'zgartirsa esa minimumga ega bo'ladi.

Isboti. $f'(x)$ hosila $x=x_1$ kritik nuqtadan o'tishda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartirsin. Bu esa hosilaning x_1 nuqtaning chapida musbat, o'ngida manfiy ekanligini ya'ni $x < x_1$ da $f'(x) > 0$, $x_1 < x$ da $f'(x) < 0$ ekanini bildiradi.

Funksiyanin o'sish va kamayish haqidagi teoremaga ko'ra, agar $x_1 - \Delta x < x < x_1$ bo'lsa, $f'(x) > 0$, agar $x_1 < x < x_1 + \Delta x$ bo'lsa, $f'(x) < 0$ bo'ladi.

Bu esa $f(x)$ funksiya $[x_1 - \Delta x; x_1]$ da o'sadi $[x_1; x_1 + \Delta x]$ da kamayadi degan so'z. Demak funksiyaning x_1 nuqtadagi qiymati $[x_1 - \Delta x; x_1 + \Delta x]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi, bu esa funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega ekanligini bildiradi. Minimumga ega bo'lgan hol ham shu yo'l bilan isbotlanadi.

Eslatma. Agar $f'(x)$ hosila kritik nuqtadan o'tayotganda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda funksiya bu nuqtada maksimumga ham minimumga ham erishmaydi.

f'(x) hosilaning x_1 kritik nuqtadan o'tishdagi ishorasi			Kritik nuqtaning harakteri
$x < x_1$	$x = x_1$	$x > x_1$	
+	f'(x)=0 yoki mavjud emas	–	Maksimum
–	f'(x)=0 yoki mavjud emas	+	Minimum
+	f'(x)=0 yoki mavjud emas	+	Funksiya o'sadi
–	f'(x)=0 yoki mavjud emas	–	Funksiya kamayadi

Shunday qilib, differensiallanuvchi funksiyalarning birinchi tartibli hosila yordamida maksimum va minimumlarini topish uchun:

1. f'(x) topiladi.

2. f'(x)=0 tenglamani yechib kritik nuqtalar topiladi.

3. Hosilaning kritik nuqtalardan chapdan o'ngga o'tishdagi ishoralari aniqlanadi.

4. Kritik nuqtalardagi funksiyaning qiymati hisoblanadi.

Misol. $y=f(x)=x^3(x-5)^2$

1. $y'=5x^2(x-3)(x-5)$

2. $y'=0 \Leftrightarrow 5x^2(x-3)(x-5)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=3; x_3=5.$

3. Topilgan kritik nuqtalar funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$ ni to'rtta intervalga bo'ladi: $(-\infty; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 5)$; $(5; \infty)$;

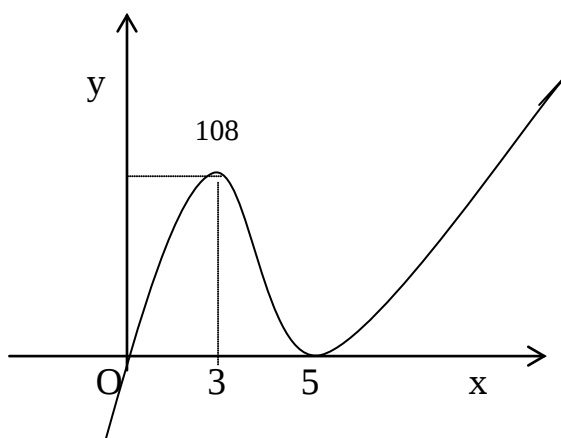
Bu intervallarda hosilaning ishoralarini tekshiramiz.

4. Kritik nuqtalarda funksiyaning qiymatlarini hisoblab hammasini quyidagi jadvalga kiritamiz

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 3)$	3	$(3; 5)$	5	$(5; \infty)$
y'	+	0	+	0	–	0	+
y	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	max	$\rightarrow$	min	$\rightarrow$

$y_{\max}=108$

$y_{\min}=0$



14.3. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

$[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagicha aniqlanadi.

1. $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi hamma maksimum va minimum qiymatlari topiladi.

2. $f(a)$ va $f(b)$ lar hisoblanadi.

3. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi barcha maksimum qiymatlari va $f(a), f(b)$ larning ichidagi eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi barcha minimum qiymatlari va $f(a), f(b)$ larning ichidagi eng kichigi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

Misol. $y=x^3-3x^2-45x+225$ funksiyaning $[0,6]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

1. $y'=3x^2-6x-45$;

2. $y'=0 \quad 3x^2-6x-45=0 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0, \quad x_1=-3; \quad x_2=5, \quad x_1=-3 \notin [0,6]; \quad x_2=5 \in [0,6]$
 $=0=225; \quad y(0)=225; \quad y(5)=50; \quad y(6)=63.$

$y(0)=225$ eng katta qiymati; $y(5)=50$ eng kichik qiymati.

14.4. Funksiyaning ekstremumini ikkinchi tartibli hosila yordamida topish.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiyaning $f'(x), f''(x)$ hosilalari mavjud bo'lib, $x=x_1$ nuqtada $f'(x_1)=0$, $f''(x_1) \neq 0$ bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=x_1$ nuqtadagi hosilasi $f'(x_1)=0$, $f''(x_1) \neq 0$ bo'lib, $f''(x_1) > 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada minimumga erishadi. Agar $f''(x_1) < 0$ bo'lsa funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga erishadi.

Misol. $f(x)=x-2\sin x$ funksiyaning $[0; 2\pi]$ da ekstremumini toping.

1. $f'(x)=1-2\cos x$

2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\cos x=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{3}; \quad x_2=5\frac{\pi}{3}$

3. $f''(x)=2\sin x. \quad f''(\frac{\pi}{3})=2\sin \frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>0.$ Demak $x_1=\frac{\pi}{3}$ nuqtada funksiya minimumga ega.

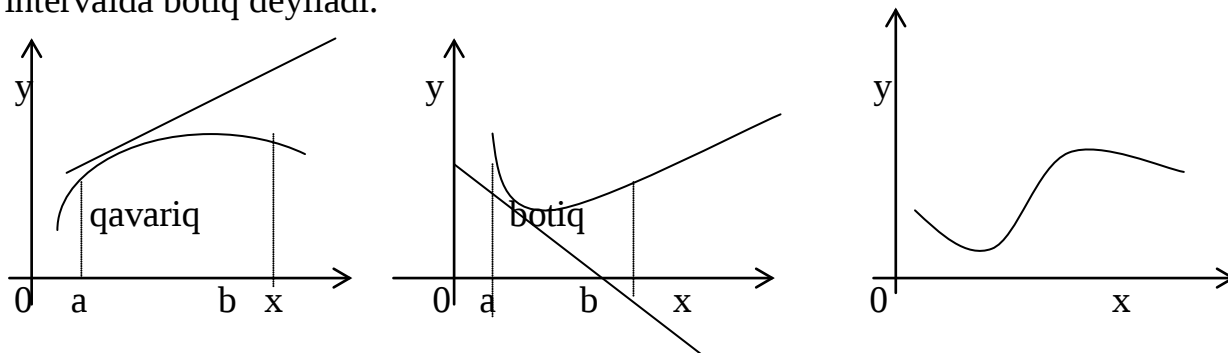
$f_{\min}(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}-2\sin \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3} \approx -0,68. \quad f''(5\frac{\pi}{3})=2\sin 5\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}<0$ Demak funksiya

$x_2=5\frac{\pi}{3}$ nuqtada maksimumga erishadi. $f_{\max}(5\frac{\pi}{3})=5\frac{\pi}{3}-2\sin(5\frac{\pi}{3})=5\frac{\pi}{3}+\sqrt{3} \approx 6,96.$

14.5. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtalari.

Bir qiymatli va differensiallanuvchi bo'lgan $y=f(x)$ funksiyaning grafigini ko'raylik.

1-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi grafigi shu intervaldagi ixtiyoriy nuqtasiga o'tkazilgan urinmadan pastda bo'lsa, funksiya grafigini shu intervalda qavariq deyiladi; Agar yuqorida bo'lsa funksiya grafigini shu intervalda botiq deyiladi.



2-taqrif. $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi nuqtaga egri chiziqning egilish (yoki burilish) nuqtasi deyiladi.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi $f''(x)$ hosilasi mavjud bo'lib, $f''(x)<0$ bo'lsa, u holda funksiya grafigi shu intervalda qavariq bo'ladi, agar $f''(x)>0$ bo'lsa botiq bo'ladi.

Misollar. 1. $y=2-x^2 \Rightarrow y''=-2<0$. Demak egri chizik hamma joyda qavariq.

2. $y=ye^x \Rightarrow y''=ye^x>0$ Demak egri chizik hamma joyda botik.

3. $y=x^3 \Rightarrow y''=6x$; $x<0$ da qavariq, $x>0$ da botiq. $x=0$ burilish nuqtasi bo'ladi.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi $f''(x_0)=0$ (yoki mavjud bo'lmasa) bo'lib, $f''(x)$ ning ishorasi x_0 dan o'tganda o'zgarsa, u holda $x=x_0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning burilish nuqtasi bo'ladi.

Misol. $y=x^3-3x$ funksiyani tekshiring.

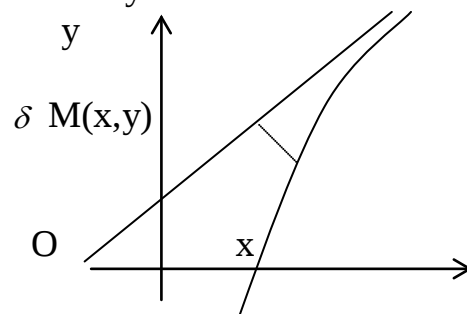
Yechish. $y'=3x^2-3$; $y'=6x \Rightarrow y''=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$; $x<0$ da $f''(x)=6x<0$ demak funksiya $(-\infty;0)$ da qavariq, $x>0$ da $f''(x)=6x>0$ demak funksiya $(0; \infty)$ da botiq. $x=0$ nuqta esa burilish nuqtasi bo'ladi.

14.6. Funksiya grafigining asimptotalari.

Ta'rif. Agar egri chiziqning o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqtasi koordinata boshidan cheksiz uzoqlashganda uning biror to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasi δ nolga intilsa bu to'g'ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

Biz vertikal ya'ni ordinata o'qiga parallel va og'ma ya'ni ordinata o'qiga parallel bo'lmagan asimptotalarni ko'ramiz.

Vertikal asimptotalar. Asimptotaning taqrifidan ko'rinadiki agar $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning asimptotasi bo'lsa,



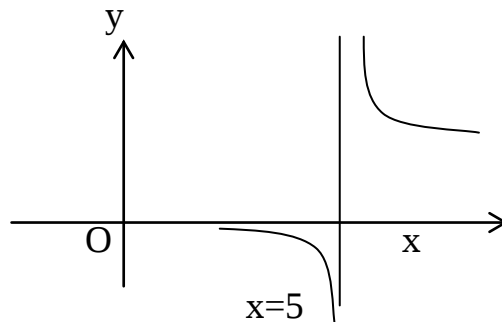
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty \text{ yoki } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty \text{ yoki } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

bo'ladi va aksincha bu munosabatlarning birontasi o'rinli bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning asimptotasi bo'ladi.

Demak $y=f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotalarini topish uchun absissasining shunday $x=a$ qiymatini topish kerakki x shu a ga yaqinlashganda $y=f(x)$ cheksizlikka intilsin. Bu holda $x=a$ to'g'ri chiziq berilgan egri chiziqning vertikal asimptotasi deyiladi.

Misol. $y = \frac{2}{x-5}$ egri chiziqning vertikal asimptotasi $\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{2}{x-5} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 5-0} \frac{2}{x-5} = -\infty$ lardan ko'rinadiki $x=5$ to'g'ri chiziq bo'lar ekan.



Og'ma asimptota. Faraz qilaylik $y=f(x)$ egri chiziq osma ya'ni OY o'qiga parallel bo'lmagan asimptotaga ega bo'lib, uning tenglamasi $y=kx+b$ (1) ko'rinishda bo'lsin. k va b larni aniqlaylik. $M(x,y)$ nuqta egri chiziqda yotgan o'zgaruvchi nuqta, $N(x,y)$ asimptotada yotgan nuqta bo'lsin. MP asimptotadan $M(x,y)$ nuqtachacha bo'lgan masofa.

Asimptota ta'rifiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} MP = 0$ (2)

NMP uchburchakdan $NM = \frac{MP}{\cos \varphi}$ (2) ga ko'ra

$\lim_{x \rightarrow +\infty} NM = 0$ (3).

Ikkinchi tomondan

$NM = QM - QN = y - \bar{y}_{asim} = f(x) - (kx+b)$

bundan (3) ga ko'ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ (4) $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 \quad (5)$$

(5) o'rinli bo'lishi uchun $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (6) k ni

topgandan keyin uni (4) ga qo'ysak $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ (7) (6) va (7) lardan

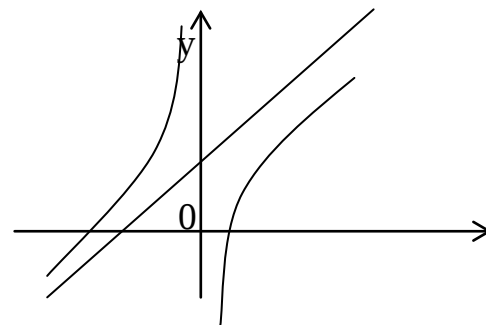
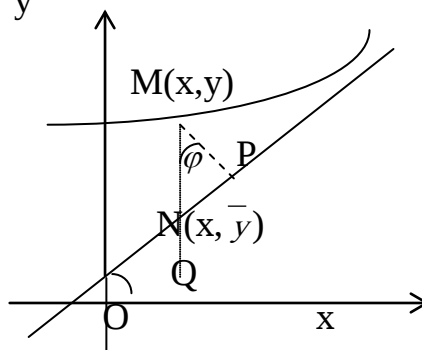
aniqlangan k va b larni (1) ga qo'ysak asimptota tenglamasi kelib chiqadi.

Misol. $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ egri chiziqning asimptotalarini

toping.

1. Vertikal asimptotalarni topaylik. ;

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty$$

Demak $x=0$ to'g'ri chiziq berilgan egri chiziqning vertikal asimptotasi.

$$2. \text{Endi osma asimptotasini topaylik. } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2.$$

$k=1; b=2; y=kx+b \Rightarrow y=x+2$ og'ma asimptota.

Adabiyotlar.

- 1.[1] 217-234 betlar.
- 2.[2] 271-286 betlar.

QAYTARISH UCHUN SAVOLLAR.

1. Funksiyaning o'sish, kamayish shartlari.
2. Funksiyaning maksimum (minimum) ta'rifi.
3. Ekstremumning mavjud bo'lishini yetarli sharti nimadan iborat?
4. Funksiyani tekshirishning umumiy qoidasini keltiring.
5. Ikkinchi tartibli hosila va uning ekstremum topishdagi roli.
6. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi qanday ta'riflanadi?
7. Funksiya gafigini asimptotasi nima?
8. Vertikal asiptotalar qanday topiladi?
9. Og'ma asimptotalar qanday topiladi?

Asosiy adabiyotlar.

- | | |
|---|--|
| 1. Soatov Ya.U | Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994. |
| 2. Shneyder V.
va boshqalar. | Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987 |
| 3. Kletenik D. | Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987. |
| 4. Pod redaksiyey
Yefimova A.V.i
Demidovicha B. | Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986. |

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 5. Berman G.N. | Sbornik zadach po matematicheskomu analizu, 1985. |
| 6. Pod redaktsiyey
Demidovicha B. | Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu
analizu. VTUZov. |

Qo'shimcha adabiyotlar.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Azlarov T.A.
Mansurov X | Matematik analiz. I,II, jild. 1989,1992. |
| 2. Berment A.F. | Kratkiy kurs matematicheskogo analiza
dlya VTUZov. 1971. |
| 3. Danko P.Ye.dr. | Vxsshaya matematika uprajneniya i zadachi.1986. |
| 4. Shipachev V. S. | Osnovx vxsshey matematiki. 1989. |
| 5. Shokirova X | Karali va egri chiziqli integrallar. 1992. |

MUNDARIJA

MAVZULAR		Bet
1-Mavzu.	Matritsa va ular ustida amallar.	4
1.1.	Matritsani songa ko'paytirish.	
1.2.	Matritsalarini qo'shish	
1.3.	Matritsalarini ko'paytirish.	
2-Mavzu.	Determinantlar va ularni xisoblash.	9
2.1.	Ikkinchi tartibli determinant.	
2.2.	Uchinchi tartibli determinant.	
2.3.	Determinantning xossalari.	
2.4.	Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.	
3-Mavzu.	Teskari matritsa.	14
3.1.	Teskari matritsa ta'rifi.	
3.2.	Matritsaning rangi va elementar almashtirishlar.	
4-Mavzu.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi.	21
4.1.	Kroneker – Kapelli teoremasi.	
4.2.	Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechish.	
4.3.	Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.	
4.4.	Matritsalar yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish.	
5-Mavzu.	Vektorlar algebrasi	34
5.1.	Vektor.	
5.2.	Vektorlar ustida chiziqli amallar.	
5.3.	Vektorlarning o'qqa proyeksiyasi.	
5.4.	Chiziqli bog'liqli va chiziqli bog'liqsiz vektorlar.	
5.5.	Vektorni bazislar bo'yicha yoyish.	
5.6.	Vektorlarning yo'naltiruvchi kosinuslari.	
5.7.	Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.	
5.8.	Skalyar ko'paytma.	
5.9.	Ikki vektor orasidagi burchak va parallelizm, perpendikulyarlik shartlari.	
5.10.	Vektor ko'paytma.	
5.11.	Uchta vektorning aralash ko'paytmasi.	
6-Mavzu.	Tekislikdagi analitik geometriya.	44

6.1.	To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi	
6.2.	To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.	
6.3.	Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.	
6.4.	Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.	
6.5.	To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.	
6.6.	Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.	
6.7.	Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalishda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.	
6.8.	To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasi.	
6.9.	To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.	
6.10.	Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.	
7-Mavzu.	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar	51
7.1.	Aylana.	
7.2.	Ellips va uning tenglamasi.	
7.3.	Giperbola va uning tenglamasi	
7.4.	Parabola va uning tenglamasi.	
8-Mavzu.	Tekislik va uning tenglamalari	55
8.1.	Sirt tenglamasi.	
8.2.	Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.	
8.3.	Tekislikning umumiy tenglamasi.	
8.4.	Tekislik tenglamalari.	
8.5.	Tekislikning kesmalar buyicha tenglamasi.	
8.6.	Tekisliklar orasidagi burchak va ularning parallellik va perpendikulyarlik shartlari	
8.7.	Tekislikning normal tenglamasi. Tekislikdan berilgan nuktagacha bo'lgan masofa.	
		62
9-Mavzu.	Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalar	
9.1.	Fazodagi to'g'ri chiziqning vektor, parametrik va kanonik tenglamalari	
9.2.	Berilgan ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.	
9.3.	Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak va ularning parallellik, perpendikulyarlik shartlari.	
9.4.	Tekisliklar dastasi.	
10-Mavzu.	Sonlar ketma-ketligi. Funksiya va uning limiti	68
10.1.	Sonlar ketma-ketligi.	
10.2.	O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar	
10.3.	Funksiya	
10.4.	Funksiya limitining ta'rifi.	

10.5.	Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.	
10.6.	Funksiya limiti haqidagi asosiy teoremlar	
10.7.	Ajoyib limitlar	
11-Mavzu.	Funksiya uzluksizligi	78
11.1.	Argument va funksiya orttirmasi.	
11.2.	Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning uzluksizligi	
12-Mavzu	Funksiyaning hosilasi va differensial	81
12.1.	Funksiyaning hosilasi	
12.2.	Funksiyaning differensiallanuvchanligi	
12.3.	Differensial va hosila orasidagi bog'hlanish.	
12.4.	Differensialning taqribiy hisoblarga tatbiqi	
12.5.	Yuqori tartibli hosila	
13-Mavzu	Differensiallanuvchi funksiyalar xaqida ba'zi teoremlar.	90
13.1.	Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi	
14-Mavzu	Funksiyalarni hosila yordamida tekshirish	94
14.1.	Funksiyaning o'sishi va kamayishi	
14.2.	Funksiyaning ekstremum qiymatlari	
14.3.	Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari	
14.4.	Funksiyaning ekstremumini ikkinchi tartibli hosila yordamida topish	
14.5.	Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtalari.	
14.6.	Funksiya grafigining asimptotalari	

