

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**TOSHKENT AVTOMOBIL-YO'LLAR INSTITUTI
OLIV MATEMATIKA KAFEDRASI**

GAFUROV M., VALIJONOV H., RO'ZMATOVA N.

**DIFFERENSIAL TENGLAMA VA UNING
TATBIQLARI**
(Barcha yo'nalishlar uchun uslubiy ko'rsatma)



TOSHKENT - 2011

ANNOTATSIYA

Ushbu uslubiy ko'rsatma oliy matematika fanidan menejment yo'nalishidan tashqari barcha mutaxassisliklarining bakalavriati I - kurs, II - semestrda mo'ljallab tuzilgan.

Ishlatilayotgan yangi ishchi dasturlarning hali tajribadan to'la o'tmaganligi sababli, keyinchalik mumkin bo'lgan o'zgarishlarni ham iloji boricha e'tiborga olgan holda mavzularni kengroq yoritishni afzal ko'rdik. Shu sababli ham, ko'rsatilgan mavzularni qanday hajmda o'qitishni ishchi dasturlari bilan solishtirgan holda rejalashtirdik. Uslubiy ko'rsatma barcha mutaxassisliklarining bakalavriati yo'nalishi talabalariga «Oliy matematika» fanini yaxshi o'zlashtirishlariga yordam berish maqsadida tayyorlandi. Unda kunduzgi ta'lim talabalari uchun rejalashtirilgan o'quv soatiga mos mavzular kiritilgan va mavzular bo'yicha qisqacha nazariy tushunchalar bayon etilib, namunaviy misol va masalalar yechib ko'rsatilgan.

Ushbu uslubiy ko'rsatma talabalarga to'g'ri yo'nalish berish, qanday adabiyotlardan foydalanish mumkinligini ko'rsatish maqsadida yozilgan bo'lib, u yosh o'qituvchilar hamda aspirant va mutahassislik kafedra xodimlari uchun ham foydalidir.

Ushbu uslubiy ko'rsatma Oliy matematika kafedrasida majlisida muhokama qilingan va ma'qullangan (Bayonnoma №21. 08.02.11y).

Kafedra mudiri:

prof. M.U. Gafurov

Toshkent avtomobil yo'llar instituti Yo'l qurilish fakulteti ilmiy-uslubiy Kengashida tasdiqlangan (bayonnoma №7, 14.02.2011 y.)

Fakultet dekani:

dos. A.Ablakulov

Mualliflar:

prof. M.U. Gafurov
dos. H.Valijonov
kat. o'q. N. Ro'zmatova

Taqrizchi:

Fizika-matematika fanlari doktori,
prof. I. Ganiev (Tosh TYMI)

Differensial tenglamalar

1. Differensial tenglamaning ta'rifi va xossalari

a) Mavzusining pedagogik mazmuni

1.Mavzu nomi. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

2.Mavzuning o'quv maqsadi: Talabalarda oddiy differensial tenglama, differensial tenglamaning yechimi, tartibi, xususiy yechimi, umumiy yechimi haqida bilim, ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarni rasmlantirishdir. Ularga o'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan, bir jinsli, chiziqli, Bernulli, to'liq differensialli tenglamalar, integrallovchi ko'paytuvchi haqida ma'lumot berish.

3. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

Oddiy differensial tenglama, differensial tenglamaning yechimi, tartibi, xususiy yechimi, umumiy yechimi, o'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan, bir jinsli, chiziqli, Bernulli, to'liq differensialli tenglamalar, integrallovchi ko'paytuvchi.

4.Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

Differensial tenglamaning yechimi, tartibi, xususiy yechimi, umumiy yechimi iborasini tushuntirish, o'rgatish, differensial tenglamaning turlarini aniqlashga o'rgatish.

5.Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadiga qo'yilgan talab:

Oddiy differensial tenglama va differensial tenglamaning tartibi, xususiy yechimi, umumiy yechimini topa bilish.

6.Mavzuga oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1- qism, T.: 418-431 b., Soatov Yo.U. Oliy matematika. 2- qism, T.: 198-214 b., Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

b) Matnlar

1.1. Umumiy tushunchalar

Differensial tenglamalar umuman fizika, mexanika va texnika masalalarini yechishdan kelib chiqqan.

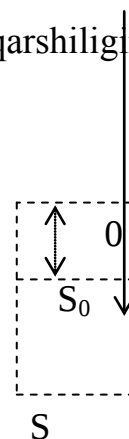
Masalan, massasi m bo'lgan biror qattiq jism ma'lum balandlikdan og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushmoqda. Jismning harakat qonunini havoning qarshiligini hisobga olmasdan toping.

N'yutonning ikkinchi qonunidan foydalansak $F = ma$ ko'rinishda

bo'ladi. Bu erda F - ta'sir qilayotgan kuch (osirlik kuchi) $F = mg$,

m -massa, a -jismning tezlanishi, ya'ni yo'ldan vaqt bo'yicha

olingan ikkinchi tartibli hosila $a = \frac{d^2s}{dt^2}$. Bularni e'tiborga olsak



$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = g \quad (1), \text{ buni ikki marta integrallasak}$$

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1 \quad (2), \text{ bundan } s = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 \quad (3).$$

M

Bu esa izlanayotgan harakat qonunini beradi.

Agar $t = 0$ da tezligini v_0 desak, holatini s_0 desak (2) dan $\frac{ds}{dt} = v_0 = C_1 \Rightarrow v_0 = C_1$

(3) dan $s_0 = C_2 \Rightarrow s = \frac{gt^2}{2} + v_0t + s_0$. (1) va (2) tenglamalarga e'tibor bersak noma'lum

funksiya S ning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari qatnashgan tenglamalardir.

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi x , noma'lum funksiya y va uning har xil tartibli hosilalari yoki differensiallari qatnashgan

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ yoki $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

2-ta'rif. Agar noma'lum funksiya bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, bunday differensial tenglamaga oddiy differensial tenglama deyiladi.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb, tenglamada qatnashgan noma'lum funksiya hosilasining eng yuqori tartibiga aytiladi.

Masalan, $y' = 2x$, $y'' - y' = 5x$, $y^{IV} - y = 0$

4-ta’rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb, shunday $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladiki, uni noma’lum funksiyaning o’rniga qo’yganimizda tenglamani ayniyatga aylantiradi.

Birinchi tartibli differensial tenglama yechimining umumiy ko’rinishi $F(x,y,c)=0$ yoki $F(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ yoki $y = \varphi(x, c)$ ko’rinishda bo’ladi.

Birorta n -tartibli tenglama yechimining umumiy ko’rinishi $F(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ yoki $y = \varphi(x, c_1,c_2,\dots,c_n)$ bo’ladi bunda $c_1,c_2,\dots,c_n$ lar ixtiyoriy o’zgarmaslar.

Agar $c_1,c_2,\dots,c_n$ larning biror boshlang’ich shartlar yordamida konkret aniq qiymatlarini topsak, u holda umumiy yechimlardan xususiy yechimlarini aniqlagan bo’lamiz.

1.2. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

$F(x,y,y') = 0$ yoki $y' = f(x,y)$ ko’rinishdagi differensial tenglamaga birinchi tartibli differensial tenglama deyiladi. Birinchi tartibli differensial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani ya’ni Koshi masalasini isbotsiz ko’rib o’taylik.

Teorema. Agar $y' = f(x,y)$ (1) tenglama berilgan bo’lib, $f(x,y)$ funksiya va uning $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilasi (x_0,y_0) nuqtani o’z ichiga olgan biror D sohada uzluksiz bo’lsa, u holda (1) ning $y|_{x=x_0} = y_0$ boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ bo’lgan yagona yechimi mavjud bo’ladi.

(1) ning umumiy yechimi $y = \varphi(x,C)$ (2) ko’rinishda bo’ladi, chunki yechimda ixtiyoriy o’zgarmas C qatnashgan. Boshlang’ich shartlar yordamida C ga aniq qiymat bersak umumiy yechimdan quyidagi xususiy yechimni hosil qilamiz $y = \varphi(x,C_0)$.

Differensial tenglamaning yechimiga odatda differensial tenglamaning integral chizig'i ham deyiladi.

Endi birinchi tartibli differensial tenglamaning geometrik interpretasiyasini ko'raylik.

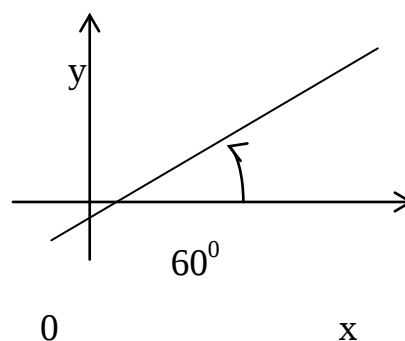
$y' = f(x, y)$ tenglamaning umumiy yechimi $y = \varphi(x, C)$ ko'rinishda bo'ldi, bu yechim umuman egri chiziqlar oilasini ifodalaydi. (2) dagi o'zgarmas C ga harxil qiymatlar berish bilan o'zaro parallel bo'lgan egri chiziqlar to'plamini olishimiz mumkin. Demak, bundan ko'rinadiki differensial tenglama yechimi cheksiz ko'p bo'lar ekan. Lekin boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi yagona bo'ladi, ya'ni egri chiziqlar oilasidan faqat bittasi xususiy yechimga mos keladi. Analizdan ma'lumki $y' = \operatorname{tg} \varphi = k$. Shuning uchun $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tenglamaning chap tomoni integral egri chizig'ining (x, y) nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisientidir.

Agar x, y larga ixtiyoriy qiymatlar bera borsak $y' = k$ o'zgarib boradi va natijada tekislikda yo'nalishlar maydoni hosil bo'ladi.

Shunday qilib, differensial tenglamani yechish geometrik nuqtai nazardan shunday egri chiziqni topish degan so'zki, bu egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidagi urinmaning yo'nalishi shu nuqtadagi maydon yo'nalishi bilan bir xil demakdir.

Misol. 1. $y' = x - y$ differensial
tenglama $y' = \operatorname{tg} \varphi = k = 60^\circ$ bo'lsa
 $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; $x - y = \sqrt{3}$

2. $y dy + x dx = 0$ ya'ni $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow$



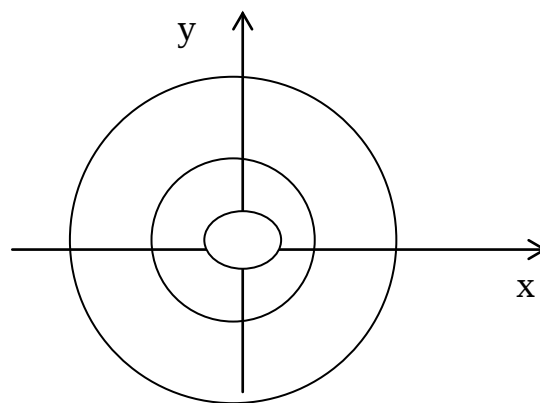
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C. \quad x^2 + y^2 = C^2 \quad \text{umumiy}$$

yechimning geometrik o'rni cheksiz ko'p konsentrik aylanalarni ifodalaydi.

$$y|_{x=0} = 4 \quad \text{boshlang'ich shartlarni}$$

qanoatlantiruvchi xususiy yechim

$$4 = C^2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



1.3. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi.

(1)ning umumiy yechimini topish uchun uni bevosita integrallash kifoya:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamani o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi.

(2)ning har ikkala tomonini $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$ ga bo'lib, so'ng integrallasak

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_1(y)}{N_2(y)} dy = C \quad \text{- umumiy yechim.}$$

Misol. 1. $y' = 3x^2 - 10x + 5$ differensial tenglamaning $x=1$ da $y=2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

$$\underline{y = x^3 - 5x^2 + 5x + C} \quad \text{umumiy yechim.}$$

$$2 = 1 - 5 + 5 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = x^3 - 5x^2 + 5x + 1 \quad \text{xususiy yechim.}$$

2. $(1+y^3)xdx - (1+x^2)y^2dy = 0$, $y(0) = 1$ boshlang'ich shart

$$(1+y^3)xdx - (1+x^2)y^2dy = 0 \quad | : (1+y^3)(1+x^2)$$

$$\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{y^2dy}{1+y^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{3}\ln|1+y^3| = \frac{1}{6}\ln C$$

Demak, $\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2} = C$ - umumiy yechim.

$y|_{x=0} = 1$ desak $C = \frac{1}{4}$ bo'lib $(1+y^3)^2 - 4(1+x^2)^3 = 0$ xususiy yechim.

1.4. Birinchi tartibli birjinsli differensial tenglamalar va ularga keltiriladigan differensial tenglamalar

1-ta'rif. Agar λ ning istalgan qiymati uchun $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiyaga n - o'lchovli birjinsli funksiya deyiladi.

Masalan. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y)$ demak bir o'lchovli funksiya.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} \quad . \quad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y) \quad \text{— demak nolq o'lchovli}$$

funksiya.

2-ta'rif. Agarda $f(x, y)$ funksiya x, y argumentlariga nisbatan nol o'lchovli bo'lsa, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (1) birinchi tartibli differensial tenglamaga birjinsli tenglama deyiladi.

Demak ta'rifga ko'ra $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ bu ayniyatda λ ni $\frac{1}{x}$ bilan almashtirsak

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{— demak nol o'lchovli bir jinsli funksiya}$$

argumentlarining nisbatiga bog'liq bo'lar ekan. Bu holda (1) ni

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ (2) ko'rinishda yozish mumkin. Agar $u = \frac{y}{x}$ desak $y = xu$

bo'lib $dy = udx + xdu$ dan $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Bularni (2) ga qo'ysak

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1, u) \Rightarrow udx + xdu = f(1, u)dx \Rightarrow (u - f(1, u))dx + xdu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u - f(1, u)} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (x \neq 0, u - f(1, u) \neq 0) \Rightarrow \int \frac{du}{u - f(1, u)} + \int \frac{dx}{x} = C$$

Misol. $(y - x)ydx + x^2dy = 0$ tenglamaning umumiy echimini toping.

$y = ux$ desak $dy = udx + xdu$ bo'lib,

$$(ux - x)uxdx + x^2(udx + xdu) = 0 \Rightarrow u^2du - udx + udu + udx + xdu = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u^2} = 0 \Rightarrow \ln x - \frac{1}{u} = C \Rightarrow \ln x - \frac{x}{y} = C.$$

Quyidagi ko'rinishda berilgan $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ (3)

tenglamaga birjinsli tenglamaga keltiriladigan tenglama deyiladi.

$\left. \begin{matrix} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{matrix} \right\}$ desak $\left. \begin{matrix} dx = du \\ dy = dv \end{matrix} \right\}$ bo'lib, (α va β - ixtiyoriy o'zgarmaslar)

(3) dan $\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv + a\alpha + b\beta + c}{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right)$ tenglamani yozish mumkin.

Endi α, β larni shunday tanlab olaylikki natijada: $\left. \begin{matrix} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{matrix} \right\}$ bo'lsin.

So'ngra yuqoridagi tenglama birjinsli tenglamaga keladi.

Misol. 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{-x + y + 1}$

$\left. \begin{matrix} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{matrix} \right\}$ desak $\left. \begin{matrix} dx = du \\ dy = dv \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u + v + \alpha + \beta - 3}{-u + v + (-\alpha + \beta + 1)}$

Endi α, β larni shunday tanlab olaylikki natijada: $\left. \begin{matrix} \alpha + \beta - 3 = 0 \\ -\alpha + \beta + 1 = 0 \end{matrix} \right\}$ bo'lsin.

Bu holda $\alpha = 2, \beta = 1$. $\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{-u+v}$, bu esa birjinsli tenglama,

bu erda $v = uz$ desak $\frac{dv}{du} = z + u \frac{dz}{du}$ bo'lib,

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{u + uz}{-u + uz} \Rightarrow z + u \frac{dz}{du} = \frac{1+z}{-1+z} \Rightarrow u \frac{dz}{du} = \frac{1+z+z-z^2}{-1+z} \Rightarrow \frac{(z-1)dz}{1+2z-z^2} = \frac{du}{u}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{(2z+2)dz}{(1+2z-z^2)} = \frac{du}{u} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|1+2z-z^2| = \ln u - \ln C \Rightarrow -\ln|1+2z-z^2| - 2\ln u = -2\ln C \Leftrightarrow$$

$$u^2(1+2z-z^2) = C^2 \Rightarrow u^2(1+2\frac{v}{u}-\frac{v^2}{u^2}) = C^2 \Rightarrow u^2 + 2uv - v^2 = C^2$$

$$\left. \begin{matrix} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} u = x - 2 \\ v = y - 1 \end{matrix} \right\} \text{ dan } (x-2)^2 + 2(x-2)(y-1) - (y-1)^2 = C^2 \text{ -umumiy integral.}$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$$

$$3x-4y = z \text{ desak } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \frac{dz}{dx} = \frac{z-2}{z-3} \Rightarrow \left(\frac{4}{z+1} - 1 \right) dz = dx \Rightarrow$$

$$4\ln|z+1| - z = x + 4C \Rightarrow \ln|3x-4y+1| = x - y + C$$

1.5. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi (chunki noma'lum funksiya y va uning hosilasi y' lar birinchi darajada ya'ni chiziqli qatnashgan).

(1) ning umumiy yechimini $y = u(x) \cdot v(x)$ (2) ko'rinishda izlaymiz. Bu erda

$$u(x), v(x) \text{ lar hozircha noma'lum funksiyalar. (2) dan } \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (3).$$

$$(2), (3) \text{ larni (1) ga qo'ysak } u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + P \cdot u \cdot v = Q(x) \Rightarrow \left(\frac{dv}{dx} + P \cdot v \right) u + v \frac{du}{dx} = Q(x). (4)$$

yordamchi o'zgaruvchi $v(x)$ ni ixtiyoriy tanlash mumkin bo'lgani uchun $v(x)$ ni

shunday tanlaymizki natijada $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$ bo'lsin, bu holda

$$\frac{dv}{dx} = -Pv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -Pdx \Rightarrow \ln v = -\int P dx + \ln C \Rightarrow v = Ce^{-\int P dx} \text{ bu erda } C=1 \text{ desak}$$

$v = e^{-\int P dx}$ (5). Endi (5) ni (4) ga qo'ysak qavs nol bo'lib ketadi va

$$v \frac{du}{dx} = Q(x) \Rightarrow du = \frac{Q(x)}{v(x)} dx \Rightarrow u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \quad (6)$$

$$y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y = \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right] v(x) \quad (1) \text{ ning umumiy yechimi bo'ladi.}$$

Agar chiziqli tenglamamiz bir jinsli bo'lsa

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y - \ln C = -\int P(x)dx \Rightarrow \ln \frac{y}{C} = -\int P(x)dx \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx}$$

Demak $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ - umumiy yechim.

(1) ning umumiy yechimini o'zgarmaning variatsiyalash (Lagranj usuli) usuli bilan ham topish mumkin. Buning uchun birinchi bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \Rightarrow y = C \cdot e^{-\int P(x)dx} - \text{bu echimda } c=c(x) \text{ deb faraz qilib, } x \text{ bo'yicha hosila}$$

$$\text{olsak: } \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}. \text{ So'ngra } y, \frac{dy}{dx} \text{ larni (1) ga qo'ysak:}$$

$$\frac{dC(x)}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \text{ bo'ladi.}$$

$$dC(x) = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)dx \text{ ni integrallab } C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \text{ ni topamiz.}$$

U holda (1) ning umumiy yechimi $y = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right] e^{-\int P(x)dx}$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol. 1. $xy' - 3y = x^2$

$$y = uv; y' = uv' + vu' \Rightarrow xuv' + xv'u - 3uv = x^2 \Rightarrow (xv' - 3v)u + xu'v = x^2 \Rightarrow xv' - 3v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = 3 \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = 3 \ln x \Rightarrow v = x^3$$

$$x \cdot u' \cdot x^3 = x^2 \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow u = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Demak } y = x^3 \left(C - \frac{1}{x} \right)$$

2. $\frac{dy}{dx} - \operatorname{ctgx} = a \sin x$ o'zgaruvchini variatsiyalash usuli bilan yeching.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctgx} = 0 \Rightarrow \ln y - \ln \sin x = \ln C \Rightarrow y = C \cdot \sin x$$

S=S(x) desak $y = C(x) \sin x$; $\frac{dy}{dx} = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$ bularni berilgan tenglamaga qo'ysak

$$C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot \operatorname{ctgx} \cdot \sin x = a \sin x$$

$$C'(x) = a \Rightarrow dC(x) = a dx \Rightarrow C(x) = ax + C_1$$

$$y = (ax + C_1) \sin x \text{ umumiy yechim.}$$

1.6. Bernulli tenglamasi

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^m \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga $m \neq 0, m \neq 1$ bo'lgan holda Bernulli tenglamasi deyiladi, aks holda chiziqli yoki o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil bo'ladi.

(1) ning har ikkala tomonini y^m ga bo'lsak

$$y^{-m} \frac{dy}{dx} + y^{-m+1} p(x) = Q(x) \text{ agar } z = y^{-m+1} \text{ desak}$$

$$\frac{dz}{dx} = (-m+1) y^{-m} \frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-m} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-m} \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{1}{1-m} \frac{dz}{dx} + zp(x) = Q(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-m)zp(x) = (1-m)Q(x) \text{ bu chiziqli tenglama, uni biz bilamiz.}$$

Misol. $y' - 2xy = 2x^3 y^2$

$$y^{-2} y' - 2xy^{-1} = 2x^3$$

$$z = y^{-1} ; z' = -y^{-2} y' ; z' + 2xz = 2x^3 ; dz + 2xzd x = -2x^3 dx ; z = u \cdot v \text{ desak } dz = u dv + v du$$

$$u dv + v(du + 2xudx) = -2x^3 dx \Rightarrow du + 2xudx = 0 \Rightarrow u = e^{-x^2}$$

$$u dv = -2x^3 dx \Rightarrow dv = -2e^{x^2} x^3 dx \Rightarrow v = -\int x^2 e^{x^2} d(x^2) = \text{bo'laklab integrallab} =$$

$$-(x^2 e^{-x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2x dx) = \int e^{x^2} d(x^2) - x^2 e^{x^2} = e^{x^2} - x^2 e^{x^2} + C = e^{x^2} (1 - x^2) + C$$

$$z = u \cdot v = C e^{-x^2} + 1 - x^2 ; z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} = \frac{1}{C e^{-x^2} + 1 - x^2}$$

1.7. To'liq differensialli tenglama

Agar $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1) tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to'liq differensialli, ya'ni $M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y)$ bo'lsa, (1) ga to'liq differensialli tenglama deyiladi. Bu holda (1) ni quyidagicha yozish mumkin: $du(x,y) = 0 \Rightarrow u(x,y) = C$

Savol tug'iladi: qanday hollarda (1) to'liq differensialli tenglama bo'ladi?

Teorema. (1) tenglama to'liq differensialli tenglama bo'lishi uchun biror D sohada uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lgan $M(x,y), N(x,y)$ funksiyalar uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Misol. $(7x + 3y)dx + (3x - 5y)dy = 0$

$$M(x,y) = 7x + 3y, N(x,y) = 3x - 5y; \frac{\partial M}{\partial y} = 3; \frac{\partial N}{\partial x} = 3; \text{demak } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 7x + 3y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x - 5y \end{array} \right\} \Rightarrow u = \int (7x + 3y)dx + \varphi(y) = \frac{7}{2}x^2 + 3xy + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \varphi'(y) = 3x - 5y$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = -5y \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{5}{2}y^2 + C \Rightarrow u(x,y) = \frac{7}{2}x^2 + 3xy - \frac{5}{2}y^2 + C \Rightarrow \frac{7}{2}x^2 + 3xy - \frac{5}{2}y^2 = C$$

1.8. Integrallovchi ko'paytuvchi

Agar $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lsa, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1) tenglama to'liq

differensialli tenglama bo'lmaydi. Lekin (1) ni $\mu(x,y)$ funksiyaga ko'paytirgandan keyin uning chap tomoni biror funksiyaning to'liq differensialli bo'ladi. Bunday holda $\mu(x,y)$ funksiyaga integrallovchi ko'paytuvchi deyiladi.

$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ - bu to'liq differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \text{ (bo'lishi zarur va kifoya)} \Rightarrow \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} =$$

$$\mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \text{ har ikkala tomonini } \mu \text{ ga bo'lsak}$$

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (2) \quad \text{bu tenglamani qanoatlantiruvchi ixtiyoriy}$$

$\mu(x,y)$ funksiya integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi.

(2) xususiy hosilali tenglama uning cheksiz ko'p yechimlari bo'ladi. Umumiy holda (2) ni yechish (1) ni yechishdan qiyin.

Lekin ba'zi xususiy hollarda $\mu(x,y)$ ni topish mumkin.

1) $\mu = \mu(y)$ bo'lsin, bu holda $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ bo'lib (2) dan

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \quad (3) \Rightarrow \ln \mu = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} dx$$

$$2) \text{ Agar } \mu = \mu(x) \text{ bo'lsa } \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0 \text{ bo'lib } \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \quad (4)$$

Misol. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

$$\left. \begin{array}{l} M(x,y) = x^2 + y \\ N(x,y) = -x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{array} \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ya'ni } 1 \neq -1$$

Nazariyaga ko'ra $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = F(y)$ yoki $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \Phi(x)$ bo'lishlari kerak.

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-2}{x^2 + y} \neq F(y); \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2}{-x} = -\frac{2}{x} = \Phi(x) \quad \text{demak } \mu = \mu(x) \text{ faqat } x \text{ ga}$$

bog'liq bo'lar ekan.

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \partial \ln \mu = -\frac{2}{x} dx \text{ integrallasak}$$

$$\ln \mu = -2 \ln x \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2} (x^2 + 1) dx - \frac{1}{x^2} \cdot x dy = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M(x, y) &= \left(1 + \frac{y}{x^2} \right) \\ N(x, y) &= -\frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} M(x, y) \\ N(x, y) \end{aligned}} \right\} \text{demak } \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = \left(1 + \frac{y}{x^2} \right) \Rightarrow u = x - \frac{y}{x} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$$

$$x - \frac{y}{x} = C \text{ umumiy yechim.}$$

1.9. Namunaviy tatbiqiy masalalar

1- Misol. . Normalining uzunligi va $|y y'|$ yig'indisi o'zgarmas a songa teng bo'lgan egri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: Normal uzunligi $|y \sqrt{1 + (y')^2}|$ ga teng bo'lib, masala shartiga ko'ra quyidagi tenglikni yozamiz

$$|y y'| + |y \sqrt{1 + (y')^2}| = a.$$

Bu tenglamani y' ga nisbatan yechib

$$y' = \pm \frac{a^2 - y^2}{2a y}$$

differential tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada o'zgaruvchilarini ajratib,

$$\frac{2y dy}{a^2 - y^2} = \pm \frac{dx}{a}$$

o'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamani yechamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi $\ln|a^2 - y^2| = \pm \left(\ln c - \frac{x}{a} \right)$ ko'rinishda bo'ladi. Potinsirlab quyidagi

tenglamani yozamiz $y^2 = a^2 - c e^{\pm \frac{x}{a}}$. Bu izlangan egri chiziqli tenglamasi.

2- Misol. Balandligi $6m$, asosining diametri $4m$ bo'lgan silindrik idish vertical holda qo'yilib suv bilan to'ldirilgan. Idish asosidagi radiusi $\frac{1}{20}m$ ga teng bo'lgan teshikdan qancha vaqtda suv oqib ketadi?

Yechish: Bernulli formulasiga ko'ra suyuqlikning idishdan chiqib ketish tezligi $v = \sigma \sqrt{2gh}$, $g = 9,8m/c^2$ - og'irlik kuchi tezlanishi, σ - suyuqlik xossasiga bog'liq bo'lgan koeffitsient ($\sigma \approx 0,6$).

t vaqtdan so'ng idish ichidagi suv balandligi h m balandlikda bo'lsin va dt vaqt davomida dh m ga pasaygan bo'lsin. dt vaqt davomida oqqan suvning hajmini ikki usulda hisoblaymiz.

Bir tomondan dh m balandlikdagi, asosining radiusi r ga teng bo'lgan silindrik idishning hajmi $d\omega$ ga teng. U holda $d\omega = \pi r^2 |dh| = -\pi r^2 dh$. Ikkinchi tomondan bu idish asosidagi radiusi $\rho = 12^{-1}m$ ga teng bo'lgan teshikdan iborat balandligi v dt ga teng bo'lgan silindrik idish hajmiga teng. Shunday qilib, $d\omega = \pi \rho^2 v dt = \pi \rho^2 \sigma \sqrt{2gh} dt$. Ikkala tenglikdan $-r^2 dh = \sigma \rho^2 \sqrt{2gh} dt$ tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamada o'zgaruvchilarini ajratib,

Integrallab $dt = -\frac{r^2 dh}{\sigma \rho^2 \sqrt{2gh}}$; $t = C - \frac{2r^2 \sqrt{h}}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}}$ ni topamiz. $t=0$ da $h=h_0=6$ m bo'lib

$C = \frac{2r^2 \sqrt{h_0}}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}}$ ga teng. Shunday qilib, t va h orasida quyidagi tenglikni yozish

mumkin $t = \frac{2r^2}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$, bu erda $h=0$ deb to'liq vaqtni topamiz $T = \frac{2r^2 \sqrt{h_0}}{\sigma \rho^2 \sqrt{2g}}$.

Masala shartidan $r = 2m$, $h_0 = 6m$, $\sigma = 0,6$; $\rho = \frac{1}{12}m$, $g = 9,8m/c^2$ bo'lib,

$T \approx 1062$ sek $\approx 17,7$ min kelib chiqadi.

3- Misol. 20°C li xonada biror jism 20 min. davomida 100°C dan 60°C gacha soviydi. Qancha vaqtda 30°C gacha sovishi mumkin bo'lgan sovish qonunni toping.

Yechish: Nyuton qonuniga binoan (sovish tezligi temperaturalar ayirmasiga proporsional) quyidagi tenglikni yozish mumkin

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20) \quad \text{yoki} \quad \frac{dT}{T - 20} = k dt, \quad \text{yani} \quad \ln|T - 20| = kt + \ln c, \quad T = 20 + ce^{kt}.$$

Bu erdan $t=0$ va $T=100$ da $c=80$ bo'lib, $t=20$ va $T=60$ da $\ln 40 = 20k + \ln 80$

dan $k = -\frac{1}{20} \ln 2$

kelib chiqadi. Shunday qilib sovish qonunni $T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bundan $T=30^{\circ}$ da $t=60 \text{ min.} = 1 \text{ soat}$ ekani ma'lum bo'ladi.

4- Misol. Teng yonli uchburchak asosining ixtiyoriy nuqtasida urinuvchi va $A(0;1)$ nuqtadan o'tuvchi egri chiziq tenglamasini toping. Bunda uchburchakning OY o'qda yotgan tomoni koordinata boshidan urinish nuqtasigacha bo'lgan masofa (uchburchakning ikkinchi tomoni)ga teng.

Yechish: $y=f(x)$ funksiya qidirilayotgan egri chiziq tenglamasi bo'lsin. Ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqta va OY o'qdagi $N(0;Y)$ nuqtadan MN urunma o'tkazamiz. Shartga ko'ra $|ON| = |OM|$ bo'lib, $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ va $|ON|$ esa $Y-y = y'(X-x)$ urunma tenglamasidan topiladi. $N(0;Y)$ nuqta urunmada yotgani uchun $Y-y = -y'x$ tenglamadan $Y = y - y'x$ kelib chiqadi. $|ON| = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$.

Bu yerda $y=tx$ deb begilasak $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{dx}{x}$ yoki $\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln c - \ln x$ kelib

chiqadi. Bundan $x^2 = c(c-2y)$ bo'ladi. Bu OY o'qqa simmetrik bo'lgan parabolalar oilasi bo'lib, $A(0;1)$ nuqtaning kordinatalarini parabola tenglamsiga qo'yib, $c=0$ va $c=2$ qiymatlarini topamiz. Bu holda $c=2$ qiymatda izlanayotgan parabola tenglamasi

$x^2 = 4(1-y)$ yoki $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ ko'rinishda bo'ladi.

5-Misol. $x=ay^2$ (a -parametr) parabola oilasining orthogonal trayektoriyasini toping.

Yechish: Egri chiziqlar oilasining tuzish trayektoriyasi deb shunday egri chiziqlar tushuniladiki, ularning har biri avvalgi egri chiziqlar bilan to'g'ri burchak ostida kesishadi. Agar egri chiziq tenglamasi $F(x, y, y')=0$ berilgan bo'lsa, uning orthogonal trayektoriyasini tuzish uchun;

1) berilgan egri chiziqni ifodalovchi differensial tenglamani tuzish kerak

$$f(x, y, y')=0,$$

2) orthogonallik shartidan $y'_1 \cdot y'_2 = -1$ bo'lib, $x=ay^2$ ning differensialida y' ni $-\frac{1}{y'}$ bilan almashtirish kerak,

3) hosil bo'lgan $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)=0$ differensial tenglamani yechish kerak bo'ladi.

Qo'yilgan masalani yechish uchun $x=ay^2$ va $2ayy'=1$ tenglamalardan a -parametrni yo'qotish natijasida $2xy'=y$ differensial tenglamani topamiz. Bu tenglamada y' ni $-\frac{1}{y'}$ bilan almashtirib orthogonal trayektoriyalarning differensial tenglamalarini yozamiz

$$2x + yy' = 0 \text{ yoki } 2xdx + ydy = 0.$$

Differensial tenglamalarni yechib orthogonal trayektoriyalar oilasining tenglamasini yozamiz $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c$ yoki $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{2c} = 1$. Shunday qilib, orthogonal trayektoriyalar o'xshash ellipslar bo'lib, ularning katta yarim o'qlari kichik yarim o'qlaridan $\sqrt{2}$ marta katta ekan.

6-Misol. O'q qalinligi 10 sm bo'lgan taxtaga 200 sm/sek, tezlik bilan kirib, 50 m/sek tezlik bilan chiqib ketadi. Taxtaning o'q xarakatiga qarshiligi o'qning tezligi kvadratiga proporsional bo'lsa, o'q taxtani teshib chiqquncha ketgan vaqt topilsin.

Yechish: m - o'qning massasi, S - o'qning taxtaga sanchilgan vaqtdan boshlab t vaqt ichida o'tgan yo'li bo'lsin. U holda, Nyuton qonuniga binoan,

o`qning taxta ichidagi xarakatining diffensial tenglamasi  $m \frac{d\vartheta}{dt} = -k\vartheta^2$  ko`rinishga ega bo`ladi.

O`zgaruvchilarni ajratib, $\frac{d\vartheta}{\vartheta^2} = -adt$ bunda $a = \frac{k}{m}$ ni topamiz.

Bu tenglamani integrallab $\frac{1}{\vartheta} = at + c$, $\vartheta = \frac{1}{at + c}$ ni hosil qilamiz.

Boshlang`ich shartga ko`ra $t=0$, tezlik 200 m/sek.

Shuning uchun

$200 = \frac{1}{c}$ dan $c = \frac{1}{200}$. Demak, o`qning taxta ichidagi tezligi bilan

vaqt orasidagi bog`lanish  $\vartheta = \frac{200}{200at + 1}$  (1) ko`rinishda bo`ladi.

Oxirgi tenglamada $\vartheta = \frac{ds}{dt}$ ekanini hisobga olib, o`zgaruvchilarni ajratib va

integrallab $ds = \frac{200dt}{200at + 1}$, ni hosil qilamiz.

Demak, o`qning taxta ichida o`tgan yo`li va vaqt orasidagi bog`lanish

$S = \frac{1}{a} \ln(1 + 200at) + c$, (2) bo`lib, (1) tenglikda $\vartheta = 50$ m/sek (2) tenglikda esa $s = 0,1$ m deb,

$$\begin{cases} 50 = \frac{200}{1 + 200at} \\ 0,1 = \frac{1}{a} \ln(1 + 200at) \end{cases}$$

t va a ikki no`malumli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Birinchi tenglamadan  $1 + 200at = 4$  ni topib, ikkinchi tenglamaga qo`yib, a ni topamiz:

$$0,1 = \frac{1}{a} \ln 4, \quad a = 10 \ln 4.$$

Nihoyat, a ning bu qiymatini birinchi tenglamaga qo`yib, o`q taxtani teshib

chiqquncha ketgan vaqt $t = \frac{3}{2000 \ln 4} = 0,001$ ni topamiz .

7-Misol. Atomning radioaktiv tezligi boshlang'ich momentda atom yemirilish soniga to'g'ri proporsional bo'lsa, boshlang'ich massasi m_0 ($t=0$) bo'lgan radiy massasining vaqt birligida o'zgarish qonunini yozing.

Yechish: t vaqtda radiy massasi m ga $t + \Delta t$ vaqtda massasi $m + \Delta m$ ga teng bo'lsin, $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ - radiy atomlarining o'rtacha yemirilish tezligi bo'lsa, t vaqtda tezlik

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ ga teng bo'ladi. Masala shartiga ko'ra $\frac{dm}{dt} = -k m$ (1) bo'lib,

k -proporsionallik koeffisienti atom yemirilish holatini xarakterlaydi (temperatura, agregat holati va h.k)

(1) differensial tenglamani yechib, $\ln m = -kt + \ln c$ yoki $\ln \frac{m}{c} = -kt$, $m = c e^{-kt}$ radiy

atomlarining yemirilish qonuni kelib chiqadi. Bu erda c -ozgarmas son bo'lib, uni topish ushuni boshlang'ich shartdan foydalanamiz $m_0 = c e^{-k \cdot 0}$ dan $m_0 = c$.

Shunday qilib, $m = m_0 e^{-kt}$ (2) radiy massasining t vaqt birligida o'zgarish qonunini kelib chiqdi. Bu formuladan radiy massasining yarmi qolguncha qancha

vaqt sarflanishini topamiz, $m = \frac{m_0}{2}$ dan (2) formulaga ko'ra $e^{-kt} = \frac{1}{2}$ bo'lib $t = \frac{\ln 2}{k}$.

8-Misol. Qalinligi $h=20$ sm bo'lgan devorga o'q $\mathcal{Q}_0=400\text{m/c}$ tezlik bilan kirib, $\mathcal{Q}_1=100\text{ m/c}$ tezlik bilan uchib chiqadi. O'qning devor orasida xarakatlanish vaqtini hisoblang, agar devorning qarshilik kuchi o'q tezligining kvadratiga proporsional bo'lsa.

Yechish: O'qning massasi m ga, o'qning devordan chiqqandan so'ng t vaqtda bosib o'tilgan masofa s ga teng bo'lsin. U holda Nyuton qonuniga asosan

o'qning harat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi; $m \frac{d\mathcal{Q}}{dt} = -k \mathcal{Q}^2$.

Bu differensial tenglamani yechib, $\frac{1}{\mathcal{Q}} = at + c$, yoki $\mathcal{Q} = \frac{1}{at + c}$ bu erda $c = \frac{k}{m}$ ni

hosil qilamiz.. Boshlang'ich shartdan foydalanamiz; $\mathcal{Q}_0=400\text{m/c}$ da

$400 = \frac{1}{c}$; $c = \frac{1}{400}$ ga ko`ra  $\mathcal{S} = \frac{400}{400at+1}$  kelib chiqadi.  $\mathcal{S} = \frac{ds}{dt}$  ekanligini e`tiborga

olsak, $\frac{ds}{dt} = \frac{400}{400at+1}$

differensial tenglamani yechib, $s = \frac{1}{a} \ln(1 + 400at + c_1)$ ni topamiz.. $t=0$ da $s=0$ (o`q

devorga kiradi), $c_1=0$; t vaqtda $s=h$ (o`q devordan chiqadi), shuning uchun,

$h = \frac{1}{a} \ln(1 + 400at + c_1)$ va $\mathcal{S}_1 = 100 \text{ m/c}$ bo`lib, $0,2 = \frac{1}{a} \ln(1 + 400at)$ va $100 = \frac{400}{400at+1}$

tenglamalarni yechib, $0,2 = \frac{1}{a} \ln 4$, $a = 5 \ln 4$ bo`lib, $t = \frac{3}{2000 \ln 4} \approx 0,0011 \text{ sek}$ ni topamiz..

c) Test topshiriqlari

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimi qaysi bandeda to`g`ri ko`rsatilgan

1. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

A) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = c$; B) $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+y^2} = c$; C) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$.

2. $y(1+e^x)dy - e^x dx = 0$

A) $\frac{y^2}{2} - \ln(1-e^x) = c$; B) $\frac{y^2}{2} - \ln(1+e^x) = c$; C) $\frac{y^2}{2} + \ln(1+e^x) = c$.

3. $y \ln y + x y' = 0$

A) $x \ln y = 0$; B) $x \ln y = c$; C) $x - \ln y = c$.

4. $2x \cos^2 y - (x^2+1)y' = 0$

A) $\ln|x^2+1| - \operatorname{tg} y = 0$; B) $\ln|x^2+1| - \operatorname{tg} y = c$; C) $\ln|x^2+1| + \operatorname{tg} y = c$.

Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimi qaysi bandeda to`g`ri ko`rsatilgan

5. $x y' - y = x$, $y(1) = 0$

A) $y = x \ln y + c$; B) $y = x \ln x$; C) $y = x \ln x + c$.

6. $y \sin x - \operatorname{tg} x y' = 0$, $y(0) = e$.

A) $\sin x - \ln y + 1 = 0$; B) $\sin x - \ln y = 0$; C) $\sin x + \ln y + 1 = 0$

7. $y \ln \frac{y}{x} - x y' = 0, \quad y(1) = 1$

A) $y = x e^{1-x}$; B) $y = x e^{1+x}$; C) $y = x + e^{1-x}$

8. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama qaysi bandda to'g'ri

ko'rsatilgan. A) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$; B) $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$;

C) $M(x)dx + N(y)dy = 0$.

9. Nol o'lchovli bir jinsli funksiya qanday ko'rinishda yoziladi.

A) $f(x,y) = \varphi\left(1, \frac{x}{y}\right)$; B) $f(x,y) = \varphi\left(1, \frac{y}{x}\right)$; C) $f(x,y) = \varphi(x+y)$.

10. Chiziqli differensial tenglama qaysi bandda to'g'ri ko'rsatilgan.

A) $y' + P(x,y) = Q(x)$; B) $y' + P(x)y = Q(x)$; C) $y' + P(x,y)y = Q(x,y)$.

d) Vazifalar

1. Motorli qayiq turg'un suvda $v_0 = 12$ km/s tezlik bilan xarakatlanadi. Xarakatlanayotgan qayiq motori o'chirilgandan 10 sek. dan so'ng uning tezligi $v_1 = 6$ km/s ga kamaydi. Suvning qarshilik kuchi qayiqning xarakatdagi tezligiga proporsional. Motori o'chirilgandan 1min. keyingi qayiqning tezligi topilsin.

2. Massasi $m = 2$ kg bo'lgan moddiy nuqta suyuqlikka botirilgan. Suyuqlikning qarshilik kuchi suyuqlikka botish tyezligiga proporsiional, proporsionallik koeffisienti $k = 0,002$ kg/s. Agar boshlang'ich xolatda nuqtaning suyuqlikka botish tezligi nolga teng bo'lsa 1s. dan keyingi tezlikni toping.

3. O'q $v_0 = 400$ m/s tezlik bilan xarakatlanib, qalin devorga uriladi. Devor qarshilik kuchi o'qning urilish tezligiga proporsional, $k = 7$ m⁻¹. O'qning devorga urilganidan 0,001 sek. dan keyingi tezligini toping.

4. Massasi $m = 1$ g bo'lgan moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha xarakatlanmoqda. Unga xarakat yo'nalishi bo'yicha proporsionallik koeffisienti $k_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ kg m/s³ bo'lgan vaqtga proporsional kuch va tezlikka proporsional, $k_2 = 0,003$ kg/s bilan tashqi muhitning qarshilik kuchi ta'sir ko'rsatadi. Xarakat

boshlanishidan 3sek. dan keyin moddiy nuqtaning tezligini toping, agar uning boshlag'ich tezligi nolga teng bo'lsa.

5. Idishda 100 litr tuz aralashmasi bor. Idishdga $q=5$ litr/min tezlik bilan toza suv oqadi. Hosil bo'lgan yangi aralashma shu tezlik bilan idishdan oqib chiqadi. Boshlang'ich holatda aralashmada $m_0=10$ kg tuz bo'lgan bo'lsa, 20 min. so'ng aralashmada qancha tuz bo'ladi?

6. A(2,-1) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqqa o'tkazilgan urunmaning burchak koeffisienti urunish nuqtasining ordinatasining kvadratiga proporsional (proporsionallik koeffisienti $k=3$). Egri chiziq tenglamasini toping.

7. A(2,-1) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqqa o'tkazilgan urunmaning burchak koeffisientining urunish nuqtasining koordinatalarining yig'indisiga ko'paytmasi ordinatasining uchlanganiga teng. Egri chiziq tenglamasini toping.

8. A(2,-1) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi ordinatasining uning abssiissasiga bo'lgan nisbati shu nuqtada o'tkazilgan urunmaning burchak koeffisientiga proporsional (proporsionallik koeffisienti $k=3$). Egri chiziq tenglamasini toping.

9. A(1,5) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urunmaning ordinata o'qigacha bo'lgan masofa urunish nuqtasi abssiissasining uchlanganiga teng. Egri chiziq tenglamasini toping.

10. A(1,5) nuqtadan o'tuvchi egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urunmaning abssissa o'qigacha bo'lgan masofa urunish nuqtasi abssissasining uchlanganiga teng. Egri chiziq tenglamasini toping.

2.Yuqori tartibli differensial tenglamalar

a) Mavzusining pedagogik mazmuni

1. Mavzu nomi: Yuqori tartibli differensial tenglamalar

2. Mavzuning o'quv maqsadi: Talabalarda n-tartibli differensial tenglama, xususiy va umumiy yechimlar, integral chiziqlarni hisoblash formulasi va usullarini bilish hamda ularni amalda qo'llashda ko'nikma, malaka va shaxsiy fazilatlarini rasmlantirishdir.

3. Mavzu tayanch so'z va iboralarining nomi:

Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar, chiziqli bog'liqli, chiziqli bog'liqsiz yechimlar, fundamental yechimlar sistemasi, Vronskiy determinanti, ko'phad, xarakteristik tenglama, xarakteristik tenglamaning karrali yechimlari, o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli.

4. Tayanch so'z va iboralarining o'quv maqsadi:

Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar, chiziqli bog'liqli, chiziqli bog'liqsiz yechimlar, fundamental yechimlar sistemasi, Vronskiy determinanti, ko'phad, xarakteristik tenglama, xarakteristik tenglamaning karrali yechimlarini topish, o'zgarmaslarni variatsiyalash usulini o'rgatish

5. Tayanch so'z va iboralar o'quv maqsadiga qo'yilgan talab:

Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning chiziqli bog'liqli, chiziqli bog'liqsiz yechimlar, fundamental yechimlar sistemasini aniqlab yozish, Vronskiy determinanti, ko'phad, xarakteristik tenglama, xarakteristik tenglamaning yechimlarini topa bilish.

6. Mavzuqa oid o'quv- ilmiy adabiyotlar:

Soatov Yo.U. Oliy matematika.1- qism, T.: 441-442, 450-455, 459-465, 470-477 b.,

Soatov Yo.U. Oliy matematika. 2- qism, T.: 215-232 125-234 b., Шипачев

В.С. Высшая математика. М.: Высш.шк.,1989-479с.

B)Matnlar

2.1. Koshi masalasi

Biz differensial tenglamalar nazariyasini boshlaganimizda yuqori tartibli differensial tenglamalarni, jumladan

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

ko'rinishdagi n -tartibli differensial tenglamani ko'rgan edik. Bu erda ham birinchi tartibli tenglamaning yechimi haqidagi teoreмага o'xshash (1) tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi Koshi teoremasini isbotsiz keltirib o'taylik.

Teorema. Agar (1) tenglamada $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya va uning $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ xususiy hosilalari $x = x_0, y = y_0, y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ qiymatlarni o'z ichiga olgan biror D sohada uzluksiz bo'lsalar, bu holda (1) tenglamaning

$$y(x_0) = y_0, y(x_0)' = y_0', \dots, y(x_0)^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$y = \varphi(x) \quad (3)$$

yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Agar $y'' = f(x, y, y')$ ikkinchi tartibli tenglamani olsak boshlang'ich shart $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ bo'lib, Koshi masalasining geometrik ma'nosi tekislikning (x_0, y_0) nuqtasidan faqat bitta egri chiziq o'tishini va bu egri chiziqning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisienti y_0' bo'lishini ifodalaydi.

(1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (4)$$

ko'rinishda bo'lib bu erdagi $C_1, C_2, \dots, C_n$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslar edi.

Agar ixtiyoriy o'zgarma $C_1, C_2, \dots, C_n$ larning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi aniq konkret $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ son qiymatlarini topsak va (4) ga qo'ysak u holda

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) \quad (5)$$

ga (1) ning xususiy yechimi deyiladi.

Umumiy va xususiy yechimlarga mos ravishda umumiy va xususiy integral chiziqlari ham deyiladi.

Endi eng sodda ko'rinishdagi ba'zi bir tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan ikkinchi tartibli tenglamalarni ko'rib o'taylik.

I. $y'' = f(x)$ ko'rinishdagi tenglamani ko'raylik, bu erda y, y' lar bevosita qatnashmagan:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) \text{ yoki } \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = f(x) \Rightarrow d \left(\frac{dy}{dx} \right) = f(x) dx \text{ integrallasak}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x) dx + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + C_1 \Rightarrow dy = (\int f(x) dx + C_1) dx \text{ integrallasak}$$

$$y = \int (\varphi_1(x) + C_1) dx + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$$

Endi eng sodda ko'rinishdagi $y^{(n)} = f(x)$ n-tartibli differensial tenglamani ko'raylik. $y^{(n)} = f(x)$ ning har ikkala tomonini x bo'yicha integrallasak

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) = f(x) \Rightarrow d \left(\frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} \right) = f(x) dx \Rightarrow \text{integrallasak}$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1 - \text{yana integrallasak}$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx + \int_{x_0}^x C_1 dx + C_2 = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1(x - x_0) + C_2$$

Shu prosessni n marta davom ettirsak

$$y = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx dx \dots dx + \frac{C_1(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{C_2(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n$$

II. $y'' = f(x, y')$ ko'rinishdagi tenglamani ko'raylik, ya'ni noma'lum funksiya y bevosita qatnashmagan. Bunday tenglamalarni echish uchun $\frac{dy}{dx} = y' = z(x)$ desak ($z(x)$ -noma'lum funksiya) $y'' = z'(x)$ bu holda $z' = f(x, z)$ yoki $\frac{dz}{dx} = f(x, z)$ - bu esa birinchi tartibli tenglama, bo'lishi mumkin o'zgaruvchilari ajraladigan, bir jinsli yoki chiziqli, uni yechsak $z(x) = z(x, C_1)$, $z(x) = y'$ bo'lgani uchun $y' = z(x, C_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z(x, C_1) \Rightarrow dy = z(x, C_1)dx$
 $y = \int z(x, C_1)dx + C_2$ umumiy yechim.

III. $y'' = f(y, y')$ ko'rinishdagi, erkli o'zgaruvchi bevosita qatnashmagan tenglamani ko'raylik. Bu erda $\frac{dy}{dx} = y' = z(y)$ ya'ni noma'lum funksiya kiritsak

$$\frac{dy}{dx} = z(y),$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

$$z \frac{dz}{dy} = f(y, z) - \text{bu ham birinchi tartibli differensial tenglama, echsak } z = z(y, C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = z \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z(y, C_1) \quad \text{buni ham yechsak} \quad \int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2. \quad \text{Demak}$$

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

Misol. 1. $y'' = 1 - x^2$; $y' = z$ desak $y'' = z'$

$$\Rightarrow z' = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - x^2 \Rightarrow dz = (1 - x^2)dx$$

$$\text{integrallasak} \quad z = x - \frac{x^3}{3} + C_1 \quad \text{hosil bo'ladi, } y' = z \text{ ni hisobga olsak } y' = x - \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$\text{buni integrallasak } y = \int (x - \frac{x^3}{3} + C_1)dx + C_2.$$

$$\text{Demak } y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 - \text{umumiy yechim.}$$

2. $yy'' - y'^2 = 0$ tenglamaning $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \text{ desak } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$$

$$y \cdot z \frac{dz}{dy} - z^2 = 0 \Rightarrow y \frac{dz}{dy} = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln z = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln y = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = e^{C_1 x + C_2} - \text{umumiy yechim.}$$

$$\text{Demak } y' = C_1 e^{C_1 x + C_2}$$

$$\begin{cases} 1 = e^{C_2} \\ 2 = C_1 e^{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 2 \end{cases}, \text{ demak } y = e^{2x} - \text{xususiy yechim.}$$

3. $y'' = \sin kx$, $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

$$y' = \int_0^x \sin kx dx + C_1 = -\frac{\cos kx}{k} \Big|_0^x + C_1 = -\frac{\cos kx - 1}{k} + C_1$$

$$y = -\int_0^x \frac{\cos kx - 1}{k} dx + \int_0^x C_1 dx + C_2 = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2 - \text{umumiy yechim}$$

$$y|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y'|_{x=0} = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\text{demak } y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + x - \text{xususiy yechim.}$$

2.2. Chiziqli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar

1-ta'rif. Noma'lum funksiya y va uning $y', y'', \dots, y^{(n)}$ hosilalariga nisbatan birinchi darajali bo'lgan

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga n - tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

$a_0 \neq 0$ deb faraz qilinib, umumiy holda $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, f(x)$ lar x ning funksiyasi bo'lib, xususiy hollarda o'zgarmas sonlar bo'lishi mumkin.

Agar (1) da $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamaga n - tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa (1) ga n - tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi.

2.3. O'zgarmas koeffisientli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalarni yechish

O'zgarmas koeffisientli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalarni umumiy ko'rinishi $y'' + py' + qy = 0$ (1) ko'rinishda bo'ladi, bu erda $p, q \in R$ (1) ning umumiy yechimini topish uchun chiziqli bog'liqsiz bo'lgan ikkita xususiy yechimini, ya'ni boshqacha aytganda fundamental echimlar sistemasini topish kifoyadir.

(1) ning ko'rinishi uning xususiy yechimlarini o'z hosilalariga teng bo'lgan funksiyalar orasidan izlash kerak ekanligini ko'rsatadi. Ma'lumki, elementar funksiyalar ichida ko'rsatkichli funksiya shunday xossaga ega. SHuning uchun (1) ning xususiy yechimini $y = e^{kx}$ (2) ko'rinishda izlaymiz.

Bu holda (2) ni va uning $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ hosilalarini (1) ga qo'ysak

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \quad (3)$$

(3) o'rinli bo'lishi uchun $k^2 + pk + q = 0$ (4) bo'lishi kerak, chunki $e^{kx} \neq 0$.

Bundan ko'rindiki k (4) ning ildizi bo'lgan holda va faqat shu holdagina (2) (1) ning xususiy yechimi bo'ladi.

(4) algebraik tenglamaga (1) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

$$(4) \text{ ning ildizlari } k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Bu erda quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

$$1) \quad k_1, k_2 - \text{haqiqiy va har xil } D = \frac{p^2}{4} - q > 0$$

$$2) \quad k_1, k_2 - \text{haqiqiy va bir biriga teng, ya'ni } k_1 = k_2, \quad D = 0$$

$$3) \quad k_1, k_2 - \text{lar kompleks sonlar } D < 0$$

I. k_1 va k_2 lar haqiqiy va har xil bo'lsin, u holda (1) ning umumiy yechimi $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ ko'rinishda bo'ladi. C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Misol. $y'' - y' - 2y = 0$

$$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k e^{kx} \Rightarrow y'' = k^2 e^{kx} \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 2; k_2 = -1 \text{ demak } y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

II. k_1, k_2 -lar haqiqiy va o'zaro teng, $k_1 = k_2 = k$ bo'lsin. U holda (1) ning umumiy yechimi $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$.

Misol. $y'' + 2y' + y = 0$

$$y = e^{kx} \Rightarrow y' = k e^{kx} \Rightarrow y'' = k^2 e^{kx}$$

$$(k^2 + 2k + 1)e^{kx} = 0 \Rightarrow (k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -1$$

Demak, $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$ - umumiy yechim.

III. k_1, k_2 -lar xarakteristik tenglamaning kompleks ildizlari bo'lsin. Bu holda

$$D = \frac{p^2}{4} - q < 0 \quad \text{bo'lib} \quad k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \alpha + i\beta; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \alpha - i\beta$$

bo'ladi. Bulardan $\alpha = -\frac{p}{2}$; $\beta = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ekanliklari ravshan.

Bu holda xususiy yechimlar $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$ va $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ ko'rinishdagi haqiqiy argumentli kompleks funksiyalar bo'lib, u holda (1) ning umumiy yechimi

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ ko'rinishda bo'ladi.

Agar xarakteristik tenglamaning ikkita ildizi ham sof mavhum sonlardan iborat bo'lsa, ya'ni $\alpha = -\frac{p}{2} = 0$ bo'lsa; $k_1 = i\beta$; $k_2 = -i\beta$ bo'lib, umumiy yechim

$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$ ko'rinishda bo'ladi.

Misol.

1) $y'' + 2y' + 5y = 0$

$y = e^{kx}$; $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$

Demak $\alpha = -1$; $\beta = 2$. $y_1 = e^{-x} \cos 2x$; $y_2 = e^{-x} \sin 2x$

$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ - umumiy yechim.

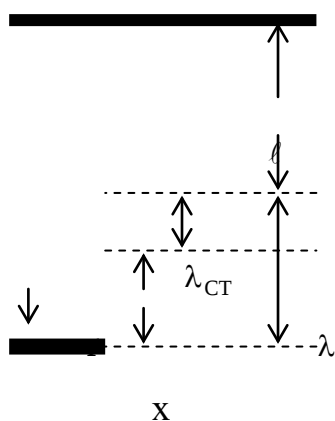
2) $y'' + 9y = 0$

$y = e^{kx}$; $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_1 = 3i, k_2 = -3i$

$y_1 = \cos 3x$; $y_2 = \sin 3x$

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$ - umumiy yechim.

3) **Masala.** Og'irligi P bo'lgan yuk tinch holatdagi uzunligi ℓ bo'lgan vertikal prujinaga osilgan bo'lsin. Yuk biroz pastga tortilib keyin qo'yib yuboriladi. Prujinaning massasini va havo qarshiligini hisobga olmay yukning harakat qonuni topilsin.



Echish. λ - prujinaning ayni momentdagi uzayishi,

λ_{CT} - statik cho'zilishi, ya'ni cho'zilmagan momentdagi prujina oxiridan keyingi muvozanat holatigacha bo'lgan masofa, u holda $\lambda = \lambda_{CT} + x \Rightarrow x = \lambda - \lambda_{CT}$ harakat differensial tenglamasini N'yutonning 2- qonunidan topamiz $F = ma$. Bu erda m - yukning massasi, a - harakat tezlanishi, F - yukka qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi.

F - prujinaning taranglik kuchi bilan yukning og'irlik

$$\text{kuchi yig'indisiga teng } m \frac{d^2x}{dt^2} = -c\lambda + p$$

$c\lambda$ - Guk qonuniga ko'ra prujinaning taranglik kuchi bo'lib, uning cho'zilishiga proporsional bo'ladi. Muvozanat holatda prujinaning taranglik kuchi og'irlik kuchi bilan muvozanatlashgani uchun $p = s\lambda_{CT}$ bo'ladi.

$$\text{Demak } m \frac{d^2x}{dt^2} = -c\lambda + c\lambda_{CT} = -c(\lambda - \lambda_{CT}) = -cx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + r^2x = 0 \quad \text{bunda} \quad r^2 = \frac{c}{m}$$

$$x = e^{kt} ; \quad x' = ke^{kt} ; \quad x'' = k^2 e^{kt}$$

$$k^2 + r^2 = 0 \Rightarrow k_1 = ir; k_2 = -ir \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \cos rt \\ x_2 = \sin rt \end{array} \right\}$$

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 \cos rt + C_2 \sin rt$$

2.4. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Bizga $y'' + py' + qy = f(x)$ (1) ko'rinishdagi bir jinssiz ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama berilgan bo'lsin. (1) ning umumiy yechimi topish quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

1-teorema. (1) ning umumiy yechimi o'zining biror y^* xususiy yechimi bilan $y' + py' + qy = 0$ (2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y}$ larning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni $y = \bar{y} + y^*$ (3) bo'ladi.

2.5. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koffisientli birjinssiz chiziqli differensial tenglamalarni yechish

Faraz qilaylik bizga $y'' + py' + qy = f(x)$ (1) ko'rinishdagi bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama berilgan bo'lsin. p, q -lar ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy sonlar. Biz (1) ning umumiy yechimi $y = \bar{y} + y^*$ ko'rinishda bo'lishini bilamiz va $\bar{y}$ ni ham topishni ko'rganmiz, chunki u $y'' + py' + qy = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi. Shuning uchun bu erda biz faqat y^* ni topish bilan shug'ullanamiz. Bu erda (1) ning o'ng tomonidagi $f(x)$ funksiya har xil ko'rinishlarda bo'lishi mumkin.

$$I. f(x) = (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \dots + B_{n-1} x + B_n) e^{\alpha x} = P_n(x) e^{\alpha x}$$

$B_0, B_1, \dots, B_n$ -lar ixtiyoriy o'zgarmas aniq ma'lum sonlar.

Bu hollarda (1) tenglama $y'' + py' + qy = P_n(x) e^{\alpha x}$ (2) ko'rinishda bo'lib uning o'ng tomoni n - darajali ko'phaddir. SHunday qilib $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$ ko'rinishda bo'lganda bo'lishi mumkin bo'lgan quyidagi hollar:

a) α son $k^2 + pk + q = 0$ (3) xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lmasin. Bu holda (2) ning y^* xususiy yechimini

$$y^* = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n) e^{\alpha x} = Q_n(x) e^{\alpha x} \quad (4)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu erda $Q_n(x)$ ham n - darajali ko'phad bo'lib, $A_0, A_1, \dots, A_n$ lar hozircha noma'lum bo'lgan o'zgarmas koefitsientlardir.

$$y^* = Q_n(x) e^{\alpha x}; \quad (y^*)' = [Q_n'(x) + \alpha Q_n(x)] e^{\alpha x}; \quad (y^*)'' = [Q_n''(x) + 2\alpha Q_n'(x) + \alpha^2 Q_n(x)] e^{\alpha x}$$

larni (2) ga qo'ysak:

$$[Q_n''(x) + 2\alpha Q_n'(x) + \alpha^2 Q_n(x) + pQ_n'(x) + p\alpha Q_n(x) + qQ_n(x)] e^{\alpha x} = P_n(x) e^{\alpha x}$$

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x) \quad (5)$$

Oxirgi ifodaning o'ng va chap tomoni n -darajali ko'phad, ular o'zaro teng bo'lishi uchun bir xil darajali noma'lumlarning oldidagi koefitsientlar teng bo'lishi kerak. Ularni tenglashtirib hosil bo'lgan algebraik tenglamalar sistemasini ychib noma'lum bo'lgan $A_0, A_1, \dots, A_n$ koefitsientlarni topamiz. So'ngra topilgan $A_0, A_1, \dots, A_n$ larni (4)ga qo'yib y^* xususiy yechimni topamiz.

b) α (3) xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lsin, bu holda (5) dagi $Q_n(x)$ ning oldidagi $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ bo'lib natijada (5) ning chap tomonida $n-1$ darajali ko'phad, o'ng tomonida esa n -darajali ko'phad bo'ladi. Ularning o'zaro bir biriga

teng bo'lishi mumkin emas. SHuning uchun (1) ning y^* xususiy yechimini

$y^* = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ (6) ko'rinishda izlanadi.

v) α (3) xarakteristik tenglamaning karrali ildizi bo'lsin. Bu holda $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ va $2\alpha + r = 0$ bo'lib (5) ning chap tomonida ($n-2$) darajali ko'phad, o'ng tomonida esa n -darajali ko'phadlar hosil bo'ladi. SHuning uchun bu holda y^* xususiy yechimni $y^* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$ (7) ko'rinishda izlash kerak.

b) va v) hollarda ham $A_0, A_1, \dots, A_n$ lar a) holdagi kabi aniqlanadi.

Misol. $y' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

$$f(x) = e^{3x}(x^2 + x); P_n(x) = x^2 + x; \alpha = 3$$

$$y' - 3y' + 2y = 0 \quad y = e^{kx} \text{ desak } k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 1$$

Demak, $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ - bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi.

$\alpha = 3$ xarakteristik tenglamaning ildizi emas, chunki xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = 2, k_2 = 1$.

Endi birjinssiz tenglamaning y^* xususiy yechimini $y^* = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{\alpha x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bunda $Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$, A, B, C -lar noma'lum koefitsientlar, ularni topsak bo'ladi.

$$y^{*'} = (3Ax^2 + 3Bx + 3C + 2Ax + B)e^{3x}$$

$$y^{*''} = (9Ax^2 + 9Bx + 9C + 12Ax + 6B + 2A)e^{3x}$$

$y^*, y^{*'}, y^{*''}$ larni berilgan tenglamaga qo'yib ixchamlasak

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + 2A + 3B + 2C = x^2 + x$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 : 2A = 1 \\ x : 6A + 2B = 1 \\ x^0 : 2A + 3B + 2C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -1; C = 1$$

$$y^* = \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right) e^{3x} \text{ xususiy yechim.}$$

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right) e^{3x} \text{ umumiy yechim.}$$

$$II. f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x = [P_n(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x] e^{\alpha x}$$

ko'rinishda

bo'lsin. Bu erda bo'lishi mumkin bo'lgan quyidagi hollar:

a) Agar $\alpha + i\beta$ (3) xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lmasa u holda (1) ning xususiy yechimi

$$y^* = u_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cos \beta x + v_n(x) \cdot e^{\alpha x} \sin \beta x = [u_n(x) \cos \beta x + v_n(x) \sin \beta x] e^{\alpha x} \quad \text{ko'rinishda}$$

izlanadi.

Bu erda $P_n(x), Q_n(x)$ lar berilgan ma'lum darajali ko'phadlar, $u_n(x), v_n(x)$ lar esa hozircha noma'lum bo'lgan va mos ravishda $P_n(x), Q_n(x)$ ko'phadlar bilan birxil darajali bo'lgan ko'phadlardir. Bu ko'phadlar ham I. holdagi kabi aniqlanadi.

b) Agar $\alpha + i\beta$ (3) xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lsa u holda (1) ning xususiy yechimi $y^* = x \cdot e^{\alpha x} [u_n(x) \cos \beta x + v_n(x) \sin \beta x]$ ko'rinishda izlanadi.

$$III. f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x \text{ ko'rinishda bo'lib, } M, N \text{ lar o'zgarmas sonlar bo'lsin.}$$

Bu erda ham quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) agar βi xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lmasa, u holda (1)ning xususiy yechimi $y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ ko'rinishda izlanadi.

b) agar βi xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda (1)ning xususiy yechimi $y^* = x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ ko'rinishda izlanadi.

Noma'lum o'zgarmas A, B lar I. holdagi kabi aniqlanadi.

$$\textbf{Misol. 1)} y' + y - 2y = e^x (\cos x - 7 \sin x) \quad \alpha = 1, \beta = 1$$

$$\text{Echish. } y' + y - 2y = 0, y = e^{\alpha x} \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -2 \text{ demak } \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$\alpha + \beta i = 1 + i$ xarakteristik tenglamaning ildizi emas.

$$y^* = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

$$y^{*'} = (A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x) e^x$$

$$y^{*''} = (A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - A \cos x - B \sin x) e^x = (-2 A \sin x + 2 B \cos x) e^x$$

$$[-2 A \sin x + 2 B \cos x + A \cos x + B \sin x - A \sin x + B \cos x - 2 A \cos x - 2 B \sin x] e^x = e^x (\cos x - 7 \sin x)$$

$$-(3A + B) \sin x + (3B - A) \cos x = \cos x - 7 \sin x$$

$$\left. \begin{matrix} 3A + B = 7 \\ 3B - A = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A = 2 \\ B = 1 \end{matrix} \right\} \text{ demak } y^* = e^x(2 \cos x + \sin x)$$

$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2 \cos x + \sin x)$ umumiy yechim

$$2) \quad y' + y = 2 \sin x \quad \alpha = 0, \beta = 1$$

$$y' + y = 0, \quad k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = i, k_2 = -i \quad \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$\beta i = i$ - demak βi xarakteristik tenglamaning ildizi.

$y^* = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ ko'rinishda izlaymiz. A, B -?

$$y^{*'} = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$y^{*''} = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x) = -2A \sin x + 2B \cos x - x(A \cos x + B \sin x) \\ - 2A \sin x + 2B \cos x - A x \cos x - B x \sin x + A x \cos x + B \sin x = 2 \sin x$$

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 2 \sin x$$

$$\left. \begin{matrix} -2A = 2 \\ 2B = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} A = -1 \\ B = 0 \end{matrix} \right\} \text{ demak } y^* = -x \cos x$$

$y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x$ umumiy yechim.

2.6. O'zgarmaslarni variatsiyalash usuli

Bizga $y' + py + qy = f(x)$ (1) birjinsli bo'lmagan tenglama berilgan bo'lsin va uning yechimini topish talab qilingan bo'lsin. (1) ning umumiy yechimini topish uchun $y' + py + qy = 0$ (2) tenglamaning umumiy yechimini $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (3) ko'rinishda olamiz.

(1) ning umumiy yechimini ham (3) ko'rinishda izlaymiz. Lekin bu erda C_1, C_2 larni o'zgarmaslar sifatida emas, x ning noma'lum funksiyasi $C_1(x), C_2(x)$ sifatida qaraymiz.

U holda (3) dan $y' = C_1 y_1' + C_1' y_1 + C_2 y_2' + C_2' y_2$ hosil bo'ladi.

Endi C_1, C_2 larni shunday tanlab olaylikki, natijada $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$ bo'lsin, u holda

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \quad (4) \Rightarrow y' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1 + C_2' y_2 \quad (5) \text{ hosil bo'ladi.}$$

Endi (3), (4) va (5) larni (1) ga qo'ysak

$$C_1(y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) + C_1' y_1 + C_2' y_2 = f(x)$$

birinchi va ikkinchi qavslar nolga teng, chunki y_1, y_2 lar (2) ning xususiy yechimlari. Demak $C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$ (6)

Shunday qilib (3) (1) ning yechimi bo'ladi, agarda C_1, C_2 lar

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases} \quad (7) \text{ sistemaning yechimi bo'lsa.}$$

(7) dan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli bo'lgani uchun (7) dan C_1, C_2 larni aiqlash mumkin:

$$\left. \begin{cases} C_1' = \varphi_1(x) \\ C_2' = \varphi_2(x) \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \overline{C_1} \\ C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \overline{C_2} \end{cases} \right\} \text{topilgan } C_1, C_2 \text{ larni (3) ga qo'ysak}$$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx + \overline{C_1} y_1 + \overline{C_2} y_2$ - bu (1) ning umumiy yechimi.

c) Test topshiriqlari

Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimi qaysi bandlarda to'g'ri ko'rsatilgan

1. $y'' = \sin x$

A) $y = -\sin x + c_1 x + c_2$; B) $y = \sin x + c_1 x + c_2$; C) $y = -\sin x + c_1 x$.

2. $xy'' + y' = 0$

A) $y = \ln x + c_1 x + c_2$; B) $y = c_1 \ln x + c_2$; C) $y = \ln x + c$

3. $yy'' + y'^2 = 0$

A) $y = \sqrt{c_1 x + c_2}$; B) $y = \sqrt{c_1 x^2 + c_2}$; C) $y = c_1 x + c_2$

4. $yy'' - y'^2 = 0$

A) $y = e^{c_1 x}$; B) $y = c_2 + e^{c_1 x}$; C) $y = c_2 e^{c_1 x}$

5. $y'' - y' - 2y = 0$

A) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$; B) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$; C) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

6. $y''' - y'' + y' - y = 0$

A) $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$; B) $y = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x - c_3 \sin x$;

$$C) y = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

7. $y'' + 4y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ differensial tenglamalarning xususiy yechimi qaysi bandda to'g'ri ko'rsatilgan

$$A) y = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin 2x; \quad B) y = \cos 2x + \sin 2x; \quad C) y = \frac{1}{2} \cos 2x - \sin 2x$$

8. $y'' - 5y' + y = 0$ differensial tenglamalarning xarakteristik tenglamasini ko'rsating.

$$A) k^2 + 5k + y = 0; \quad B) k^2 + 5k + 1 = 0; \quad C) k^2 - 5k + 1 = 0$$

9. $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ differensial tenglamalarning xususiy yechimi qaysi bandda to'g'ri ko'rsatilgan

$$A) y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x; \quad B) y = e^{-x} \sin 2x; \quad C) y = \frac{1}{2} e^x \sin 2x$$

10. Moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat tenglamasini ko'rsating.

$$A) mv = F; \quad B) m \frac{dx}{dt} = F; \quad C) m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

d) Vazifalar

1. Turg'un suvda 12 km/soat tezlik bilan harakatlanayotgan katerning dvigateli o'chirib qo'yildi. Suvning qarshiligi qayiq tezligiga proporsional deb, qayiqning dvigateli o'chirilgandan boshlab, 3 minut o'tgandan keyingi tezligi aniqlansin. k-proporsionallik koeffisientini 20 t ga teng deb hisoblansin, bunda m - qayiqning massasi.

2. Jismning harakat tezligi uning o'tgan yo'lga proporsional bo'lib, 5 sek. da 75 m, 10 sek. Da esa, 225 m masofa o'tsa, jismning xarakat tenglamasi tuzilsin.

3. Havosining harorati 20^0 bo'lgan uydagi jism xarorati 100^0 dan 60^0 gacha soviydi. Jismning sovish tezligi jism xarorati bilan uni o'rab turuvchi havo harakatining ayirmasiga proporsional deb hisoblab, jism 30^0 gacha sovishi uchun qancha vaqt kerakligi topilsin.

4. Radiyning yemirilish tezligi uning miqdoriga proporsional ekanligi va uning dastlabki miqdorining yarmisi 1600 yilda yemirilishi ma'lum. 100 yildan so'ng radiyning necha pro senti yemiriladi?

5. Ox o`qi bo`ylab harakatlanayotgan jism, o`z harakatini M (4,0) nuqtadan  $s = 2t + 3t^2$  tezlik bilan boshlagan bo`lsa, uning harakat qonuni (tenglamasi) topilsin.

6. Jism muvozanat holatidan chiqib, vaqtning har bir momenti $s = 5t^2 + 2$ formula bilan aniqlanadigan tezlik bilan harakatlanadi. Jism harakat qonuni va 3 sek da o`tgan yo`li topilsin.

7. Jismning tezligi o`tilgan yo`lga proporsional ravishda ortib borsa, va xarakatning boshlanishi momentida jism yo`l hisobining boshlanishi nuqtasidan 8 m masofada turgan bo`lib, 24 m/sek tezlikga ega bo`lgan bo`lsa, jism harakatining qonuni va tezligi topilsin.

8. 20^0 xaroratli jismni 0^0 xaroratli muhitga sovitish uchun qo`yildi. N`yuton qonuniga binoan jism sovish tezligi jismning xararatiga proporsional.

9. Jismning sovish vaqti t bilan harorati 0^0 orasidagi bog`lanishi topilsin.

10. Jismning xarakat tezligi $s = \frac{ds}{dt}$ bo`lib,  $s(0) = 0$  bo`lsa, uning $t=5$ sek.da o`tgan yo`li va harakat tenglamasi topilsin.

ASOSIY ADABIYOTLAR.

- | | |
|--|---|
| 1. Soatov YA.U | Oliy matematika. I,II, jild.1992, 1994. |
| 2. Shneyder V.
va boshqalar. | Oliy matematika qiska kursi.I,II, jild.1985-1987 |
| 3. Kletenik D. | Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii.1987. |
| 4. Pod redaksiy
Efimova A.V.i
Demidovicha B. | Sbornik zadach po matematike dlya VTUZov 1986. |
| 5. Berman G.N. | Sbornik zadach po matematicheskomu analizu,
1985. |
| 6. Pod redaksiy
Demidovicha B. | Zadachi i uprajneniya po matematicheskomu
analizu. VTUZov. |

Qo'shimcha adabiyotlar.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Azlarov T.A.
Mansurov X | Matematik analiz. I,II, jild. 1989,1992. |
| 2. Berment A.F. | Kratkiy kurs matematicheskogo analiza
dlya VTUZOV. 1971. |
| 3. Danko P.E.dr. | Vhsshaya matematika uprajneniya i zadachi.1986. |
| 4. Shipachev V. S. | Osnovh vhshey matematiki. 1989. |
| 5. Shokirova X | Karalli va egri chiziqli integrallar. 1992. |

