Ташкентский автомобильно-дорожный институт

Кафедра «Высшая математика»

# Закон больших чисел. Теорема Чебышева

Ст.преп. Н.Рузматова

# Содержание:

# Закон больших чисел

Для решения многих практических задач необходимо знать комплекс условий, благодаря которому результат совокупного воздействия большого количества случайных факторов почти не зависит от случая. Данные условия описаны в нескольких теоремах, носящих общее название закона больших чисел, где случайная величина $\xi_к$ равна 1 или 0 в зависимости от того, будет ли результатом k-го испытания успех или неудача. Таким образом, Sn является суммой n взаимно независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и q.

Простейшая форма закона больших чисел - **теорема Бернулли**, утверждающая, что если вероятность события одинакова во всех испытаниях, то с увеличением числа испытаний частота события стремится к вероятности события и перестает быть случайной.

# Теорема Бернулли

Пусть *A* — событие, которое может произойти в любом из *n* независимых испытаний с одной и той же вероятностью *P(A)*.

Пусть *Vn(A)* — число осуществлений события *A* в *n* испытаниях. Тогда

$$\frac{v_n(A)}{n} \xrightarrow{P} P(A)$$

При этом для любого ε > 0

$$P\left(\left|\frac{v_n(A)}{n} - P(A)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{P(A)(1 - P(A))}{n\varepsilon^2}$$

## Теорема Пуассона

Утверждает, что частота события в серии независимых испытаний стремится к среднему арифметическому его вероятностей и перестает быть случайной.

Предельные теоремы теории вероятностей, теоремы Муавра-Лапласа объясняют природу устойчивости частоты появлений события. Природа эта состоит в том, что предельным распределением числа появлений события при неограниченном возрастании числа испытаний (если вероятность события во всех испытаниях одинакова) является нормальное распределение.

## Центральная предельная теорема

Объясняет широкое распространение нормального закона распределения. Теорема утверждает, что всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин с конечными дисперсиями, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом.

## Теорема Ляпунова

Объясняет широкое распространение нормального закона распределения и поясняет механизм его образования. Теорема позволяет утверждать, что всегда, когда случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией суммы, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом. А поскольку случайные величины всегда порождаются бесконечным количеством причин и чаще всего ни одна из них не имеет дисперсии, сравнимой с дисперсией самой случайной величины, то большинство встречающихся в практике случайных величин подчинено нормальному закону распределения.

# Неравенство Чебышева

В основе качественных и количественных утверждений закона больших чисел лежит **неравенство Чебышева**. Оно определяет верхнюю границу вероятности того, что отклонение значения случайной величины от ее математического ожидания больше некоторого заданного числа. Замечательно, что неравенство Чебышева дает оценку вероятности события для случайной величины, распределение которой неизвестно, известны лишь ее математическое ожидание и дисперсия.

Если случайная величина $\xi$ имеет дисперсию, то для любого $\xi > 0$

справедливо неравенство $$P\left(\left|\xi - \mathrm{M}\xi\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

где **M** $\xi$ и **D** $\xi$ - математическое ожидание и дисперсия случайной величины

## Теорема ЗБЧ в форме Чебышева

Для *любой* последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом $E\xi_1^2 < \infty$ имеет место сходимость:

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} E\xi_1$$

ЗБЧ утверждает, что среднее арифметическое большого числа случайных слагаемых «стабилизируется» с ростом этого числа. Как бы сильно каждая с. в. не отклонялась от своего среднего значения, при суммировании эти отклонения «взаимно гасятся», так что среднее арифметическое приближается к постоянной величине.

# Доказательство.

Обозначим через $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ сумму первых *n* с. в., а их среднее арифметическое через $\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$. Тогда

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \ldots + E\xi_n}{n} = \frac{nE\xi_1}{n} = E\xi_1$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} \overset{\text{независ.}}{=} \frac{D\xi_1 + \ldots + D\xi_n}{n^2\varepsilon^2} \overset{\text{од. распред.}}{=} \frac{nD\xi_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} \to 0$$

при $n \to \infty$, поскольку $D\xi_1$, по условию, конечна.

# Примеры использования ЗБЧ и неравенства Чебышёва:

Пример 1. Монета подбрасывается 10 000 раз. Оценить вероятность того, что частота выпадения герба отличается от вероятности более чем на одну сотую.

Требуется оценить $P\left(\left|\frac{\nu_n(A)}{n}-\frac{1}{2}\right|>0{,}01\right)$ , где $n=10^4, \nu_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ -- число выпадений герба,

а — $\xi_i$ независимые с. в., имеющие распределение Бернулли с параметром 1/2, равные «числу гербов, выпавших при *i*-м подбрасывании» (то есть единице, если выпал герб и нулю иначе, или индикатору того, что выпал герб). Поскольку $D\xi_1=1/2\cdot 1/2=1/4$ , искомая оценка сверху выглядит так:

$$P\left(\left|\frac{\nu_n(A)}{n}-\frac{1}{2}\right|>0{,}01\right)\le\frac{D\xi_1}{n\cdot 0{,}01^2}=\frac{1}{4\cdot 10^4\cdot 10^{-4}}=\frac{1}{4}$$

Иначе говоря, неравенство Чебышёва позволяет заключить, что, в среднем, не более чем в четверти случаев при 10 000 подбрасываниях монеты частота выпадения герба будет отличаться от 1/2 более чем на одну сотую.

Пример 2.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, дисперсии которых ограничены одной и той же постоянной $C$, а ковариации любых с. в. $\xi_i$ и $\xi_j (i \neq j)$, не являющихся соседними в последовательности, равны нулю. Удовлетворяет ли эта последовательность ЗБЧ?

Воспользуемся неравенством Чебышева :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} \qquad D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Но для $i < j$, по условию, $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$, если $i \neq j-1$. Следовательно, в сумме $\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$ равны нулю все слагаемые кроме, может быть, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2), \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_3), \ldots \operatorname{cov}(\xi_{n-1}, \xi_n)$

Оценим каждое из них, используя одно из свойств коэффициента корреляции

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_{i+1})}{n^2\varepsilon^2} \le \frac{nC + 2(n-1)C}{n^2\varepsilon^2} \to 0$$

при $n \to \infty$ т.е. последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет ЗБЧ.

# Литература:

1. В. Е. Гмурман “Руководство по решению задач по теории вериятности и математической статистике”

2. В.А. Подольский, А.М. Суходский ,,Сборник задач по математике для техников-программистов”, Москва, ,,Высшая школа”, 1978 г.

*Интернет:*

http:/ /www. krugosvet.ru

http:/ /www.  ru.wikipedia.org

http:/ /www.  allmatematika.ru

http:/ /www. math.ru