

**O`ZBEKSTAN RESPUBLIKASI XALIQ BILIMLENDIRIW  
MINISTIRLIGI**

**A`JINIYAZ ATINDAG`I NO`KIS MA`MLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ  
INSTITUTI**

**FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI**

**MATEMATIKA OQITIW METODIKASI KAFEDRASI**

Geometriya pa`ninen

**«ELLIPS»**

temasi` boyi`nsha

**LEKTSIYA TEKSTI**



**NO`KIS - 2015**

## ELLIPS

**Tayanish tu'sinikler:** ellips, u'lken ha'm kishi yarim ko'sherleri, ekssentrisiteti, direktrisasi, fokal radiuslari, ellips urinbasi, ellips diametri

**1-aniqlama.** Tegislikte yekinshi ta'rtpili si'zi'q ten'lemesin qanday da bir Oxy dekart koordinatalar sistemasi'nda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

ko'riniside jazi'w mu'mkin bolsa, wol ellips dep ataladi'.

Bul jerde koeficientler  $a \geq b > 0$  qatnaslardi'qanaatlandi'radi'.

Eger (1) ten'lemede  $a = b$  bolsa, onda ten'leme  $x^2 + y^2 = a^2$  ko'riniske keledi. Bul bolsa, oray koordinatalar basında, al radiusı  $a$  g'a ten' bolg'an shen'ber ten'lemesi. Demek shen'ber ellipstin' dara jag'dayi boladi'.

(1) ten'lemenı u'yreniw na'tiyjesinde ellipsti si'zami'z ha'm wolardi'n' qa'siyetlerin keltirip shi'g'arayi'q. Ten'lemeden ko'rinip turg'ani'nday  $x, y$  wo'zgeriwshiler  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$  ten'sizliklerdi qanaatlandi'radi'.

(1) ten'lemenı  $x$  ha'm  $y$  ke qarata sheship, to'mendegilerge iye bolami'z:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2)$$

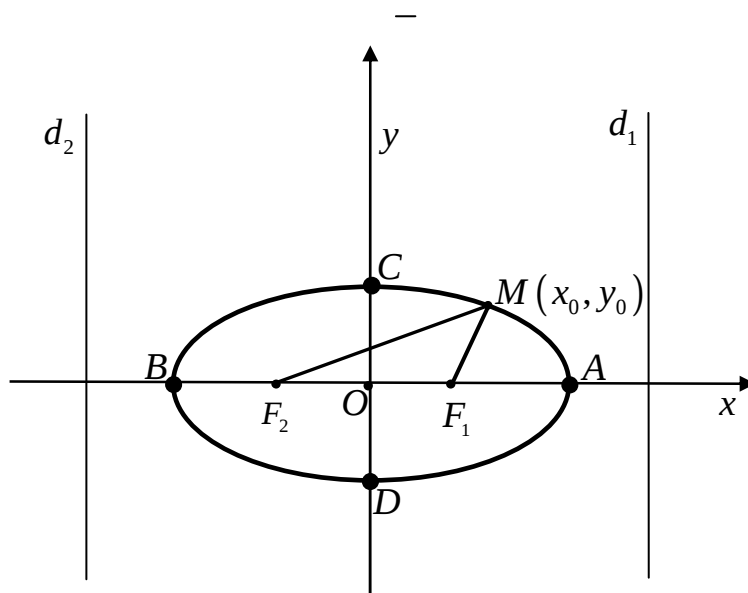
$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (3)$$

(2) ten'lemeden ellipstin' Ox ko'sherine sali'sti'rg'anda simmetriyali' yekenligi, al (3) ten'lemeden ellipstin' Oy ko'sherine qarata simmetriyali' figura yekenligi kelip shi'g'adi'. Demek ellips koordinata ko'sherlerine qarata simmetriyali' jaylasqan boli'p, koordinata basi' wolardi'n' simmetriya worayi' boladi' (1-si'zi'lma).

(3) ten'lemede  $y$  ti nolge ten'lese, abscissalari' sa'ykes  $x = \pm a$  bolg'an Ox ko'sheri menen kesilisiwshi A ha'm B noqatlarg'a iye bolami'z. (2) ten'lemede

$x=0$  dep alsaq, wonda ellipstin` ordinata ko`sherleri menen kesilisiwshi sa`ykes ordinatalari`  $y=\pm b$  bolg`an  $C$  ha`m  $D$  noqatlari`na iye bolami`z.

Bul  $A(a,0)$ ,  $B(-a,0)$ ,  $C(0,b)$ ,  $D(0,-b)$  noqatlari` ellipstin` to`beleri dep ataladi`. Bunda  $|AB|=2a$ ,  $|CD|=2b$  arali`qlari` ellipstin` ko`sherleri dep ataladi`.  $2a$  arali`g`i` **u`lken ko`sher** dep, al wog`an vertikal ko`sher  $2b$  arali`g`i` **kishi ko`sher** dep ataladi`, al  $a$  ha`m  $b$  bolsa sa`ykes **u`lken yari`m ko`sheri** ha`m **kishi yari`m ko`sheri** dep ataladi`. Abscissa ko`sherinde jati`wshi`  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  noqatlar ellipstin` fokuslari`, Oy ko`sherine parallel ha`m  $x \pm \frac{a}{e} = 0$  ten`lemeler menen ani`qlani`wshi`  $d_1$  ha`m  $d_2$  tuwri` si`zi`qlar ellipstin` *direktrisalari`* dep ataladi`.



### 1-si`zi`lma

Bul jerde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $e = \frac{c}{a}$  boli`p,  $e$  sani` ellipstin` ekscentrisiteti dep ataladi`. Ellips ekscentrisiteti ellipstin` qi`si`li`w da`rejesin xarakterleydi. Ellipstin` ekscentrisiteti barli`q waqi`tta 0 menen 1 arali`g`i`nda jaylasadi`, yag`ni`y  $0 \leq e \leq 1$ , yeger ekscentrisitet qansha u`ken bolsa, ellips sonsha qi`si`lg`an boladi`. Yeger  $e$  nolge ten` bolsa, wonda ellips shen`berge aylanadi`, sebebi fokuslar birigip ketip, ellips ko`sherleri wo`z-ara ten` boli`p qaladi`, yag`ni`y  $a=b$ . Yeger  $e$  birge ten` bolsa, wonda ellips qos yeki tuwri`si`zi`qqa aylanadi`, bul jerde ellips

fokuslari` u`lken ko`sherdin` ushlari` menen u`stpe-u`st tu`sip qaladi`, al kishi ko`sher bolsa nolge aylanadi`.

### ***Ellipstin` qa`siyetleri:***

1<sup>0</sup>. Ellipstin` qa`legen noqati`nan wolardi`n` fokuslari`na shekemgi arali`qlar qosi`ndi`si` wo`zgermes sang`a ten`.

Bul qa`siyet tuwri`dan- tuwri`  $r_1 + r_2 = 2a$  ten`lemeneni tekseriw ja`rdeminde da`liyllenedi.  $F_1M = r_1$  ha`m  $F_2M = r_2$  belgilewlerin kiritelik. Bul jerde  $M$  ellipske tiyisli noqat. Joqarida keltirip o`tkenimizdey ellips fokuslari  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$  noqatlardan ibarat. Sonliqtan

$$r_1^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad r_1^2 - r_2^2 = 4cx \text{ ten`liklerin jazıp alamız.}$$

$$\text{Sonnan } r_2^2 = (2a - r_1)^2 = 4a^2 + r_1^2 - 4ar_1 \Rightarrow 4ar_1 = r_1^2 - r_2^2 + 4a^2.$$

$$r_1 = \frac{c}{a}x + a. \text{ Bul aqi`rg`i` ten`likti kvadratqa ko`terip, joqari`dag`i` } r_1^2 \text{ ti`n`}$$

orni`na apari`p qoyami`z ha`m a`piwayi`lasti`ri`wlar ori`nlaymi`z. Sonda ten`leme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \text{ ko`riniske keledi. Bizde } a > c \text{ bolg`anli`qtan}$$

$a^2 - c^2 = b^2$  dep ali`wi`mi`z mu`mkin. Bunnan  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ten`like iye bolamsi`z. Bul bolsa ellips ten`lemesi ekenligi ma`lim.

2<sup>0</sup>. Ellipstin` qa`legen noqati`nan wolardi`n` fokuslari`na shekemgi arali`qlar sa`ykes direktrisalari`na shekemgi arali`qlardi`n`qatnasi` wo`zgermes ha`m  $e$  sani`na ten`.

Bul qa`siyet bolsa, tuwri`dan tuwri`  $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$  ten`lemeneni tekseriw ja`rdeminde da`liyllenedi.

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + c^2 + 2xc + b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}} =$$

$$\sqrt{x^2 - \frac{x^2b^2}{a^2} + 2aex + a^2} = \sqrt{x^2 \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2aex + a^2} = |xe + a|$$

$$d_1 = \left| -x - \frac{a}{e} \right| = \left| x + \frac{a}{e} \right| = \frac{|xe + a|}{e} \Rightarrow \frac{r_1}{d_1} = e$$

## *Ellipstin` geometriyalı`q anı`qlanı`wı`*

**1. Tegislikte yeki noqat berilgen bolsa, bul noqatlarg`a shekemgi bolg`an aralı`qlardı`n` qosi`ndi`si` wo`zgermes sang`a ten` bolatug`ı`n noqatlardı`n` geometriyalı`q worni` ellips boladı`.**

**Da`liylleniwi.** Tegislikte  $F_1, F_2$  noqatlar berilgen bolsı`n. Biz tegisliktin` noqatı`nan bul noqatlarg`a shekemgi bolg`an aralı`qlardı` sa`ykes  $r_1, r_2$  ko`riniste belgilep

$$r_1 + r_2 = 2a$$

ten`lemenı qanaatlandı`rı`wshi` noqatlardı`n` geometriyalı`q worni`n anı`qlawı`mi`z kerek. Bul aralı`qlar **ellipstin` fokal radiuslari`** dep ataladı`. Berilgen noqatlar arası`ndag`ı` aralı`qtı`  $2c$  menen belgilesek,  $\Delta F_1 M F_2$  den  $r_1 + r_2 > 2a$  ten`sizlikten  $a > c$  qatnas kelip shı`g`adı`. Tegislikte dekart koordinatalar sisteması`n to`mendegishe kiritemiz. Berilgen  $F_1, F_2$  noqatlardan wo`tiwshi tuwri` si`zi`qtı` abscissa ko`sheri si`pati`nda alamı`z, wonda won` bag`ı`t  $F_1$  noqatdan  $F_2$  noqatqa qarap bag`ı`tlang`an boladı`. Koordinata bası`n  $F_1, F_2$  noqatlardı`n` wortası`na jaylastı`rı`p, ordinata ko`sheri si`pati`nda abscissa ko`sherine perpendikulyar qa`legen ko`sherdi alamı`z. Aralı`qlar ushi`n

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

an`latpalardı` joqarı`dag`ı` ten`likke qoyı`p

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

ten`lemenı payda yetemiz. Bul ten`liktin` yeki ta`repinde kvadratqa ko`terip, ko`p ag`zalı`lardı` a`piwayi`lasti`ramı`z:

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (cx + a^2).$$

Bul an`latpani` ja`ne bir ma`rte kvadratqa ko`terip, yesaplawlar wori`nlaymi`z:

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 + 2a^2cx + a^4.$$

Bul an`latpani`  $x^2$  ha`m  $y^2$  qa qarata gruppalaymi`z:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Buni`  $a^2(a^2 - c^2)$  qa bo`li`p ha`m  $a^2 - c^2 = b^2$  belgilew kiritsek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ten`lemenı payda yetemiz. Bul ten`leme *ellipstin` kanonikali`q ten`lemesi* dep ataladi`.

**2.  $l$  tuwri` si`zi`q ha`m wog`an tiyisli bolmag`an noqat  $F$  berilgen bolsa, tegislikte berilgen noqatqa shekemgi bolg`an arali`g`i`ni`n` berilgen tuwri` si`zi`qqa shekemgi arali`g`i`na qatnasi` wo`zgermes ha`m birden kishi  $e$  sani`na ten` bolg`an noqatlardi`n` geometriyalı`q worni` ellips boladi`.**

Bul faktti da`liyllew ushi`n berilgen  $F$  noqatdan tuwri` si`zi`qqa perpendikulyar tuwri` si`zi`q wo`tkizip, woni` abscissa ko`sheri si`pati`nda alami`z. Na`tiyjede abscissa ko`sherin  $F$  noqat yeki bo`lekke aji`ratadi`. Berilgen  $F$  noqatdan tuwri` si`zi`qqa shekemgi arali`qti` n`  $e$  sani`na ko`beymesin  $p$  menen belgilep, to`mendegi ten`likler menen

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \text{ ha`m } c = ea, b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$a, b, c$  sanlardi` kiritemiz. Koordinata basi`n abscissa ko`sherinin`  $l$  tuwri` si`zi`qti` kespeytug`i`n bo`leginde  $F$  noqatdan  $c$  birlik arali`qta jaylasti`rami`z. Na`tiyjede koordinata basi`nan  $l$  tuwri` si`zi`qqa shekemgi arali`q

$$p_1 + c = \frac{p}{e} + ea = \frac{a(1 - e^2)}{e} + ea = \frac{a}{e}$$

shamalg`a ten` boladi`. Bul jerde  $p_1$  menen  $F$  noqatdan  $l$  tuwri` si`zi`qqa shekemgi arali`q dep belgilengen. Demek  $l$  tuwri` si`zi`qti`n` ten`lemesi

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

ko'riniste boladi'. Yekinshi koordinata ko'sherin  $l$  tuwri' si'zi'qqa parallel ju'rgizip, tegisliktin'  $M(x, y)$  noqati'nan  $F$  noqatqa shekemgi arali'qti'  $r$  menen,  $l$  tuwri' si'zi'qqa shekemgi arali'qti'  $d$  menen belgilesek,

$$r = e d$$

ten'likten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ten'lemenini alami'z.

Biz joqari'da tegisliktin' noqati'nan berilgen noqatlarga shekemgi (ellips fokuslari'na shekemgi) bolgan arali'qlardi' **ellipstin' fokal radiuslari** dep keltirgen yedik. Yendi ellipstin' qa'legen  $M(x, y)$  noqati'na ju'rgizilgen fokal radiuslari'

$$r_1 = a - ex, r_2 = a + ex \quad (4)$$

formulalari' menen beriletug'i'ni'n ko'rsetemiz.

Bizge belgili  $r_1 = MF_1$  ha'm  $r_2 = MF_2$  arali'qlar sa'ykes

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

ten'lemeleri menen ani'qlanadi'. Ellips ten'lemesinen  $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$  ti' tawi'p,

bul jerdegi  $y^2$  ti'n' worni'na qoysaq, to'mendegige iye bolami'z:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - 2cx + c^2 + b^2} = \\ &= \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} \end{aligned}$$

Bul jerde  $x \leq 0$  bolsa,  $a - \frac{c}{a}x > 0$  boladi', al  $x > 0$  bolsa,  $x \leq a$  boladi'.

Demek  $a - \frac{c}{a}x \geq a - \frac{c}{a} \cdot a = a - c > 0$  boladi'. Ha'r yeki jag'day ushi'nda

$a - \frac{c}{a}x > 0$  boladi' yeken. Sonli'qtan,

$$r_1 = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = a - \frac{c}{a}x \quad (5)$$

$r_2$  ushi`nda joqari`dag`day tu`rlendiriwlerdi wori`nlasaq

$$r_1 = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = a + \frac{c}{a}x \quad (6)$$

ten`ligine iye bolami`z. Yeger  $\frac{c}{a} = e$  yekenligin yesapqa alsaq, wonda (5)

ha`m (6) ten`liklerden (4) ten`likke iye bolami`z. Demek (4) ten`leme ellipstin` fokal radiuslari`ni`n` ten`lemeleri boladi`.

**1-mi`sal.** Yari`m ko`sherleri sa`ykes 5 ha`m 4 ke ten` bolg`an ellipstin` kanonikali`q ten`lemesin du`zin`.

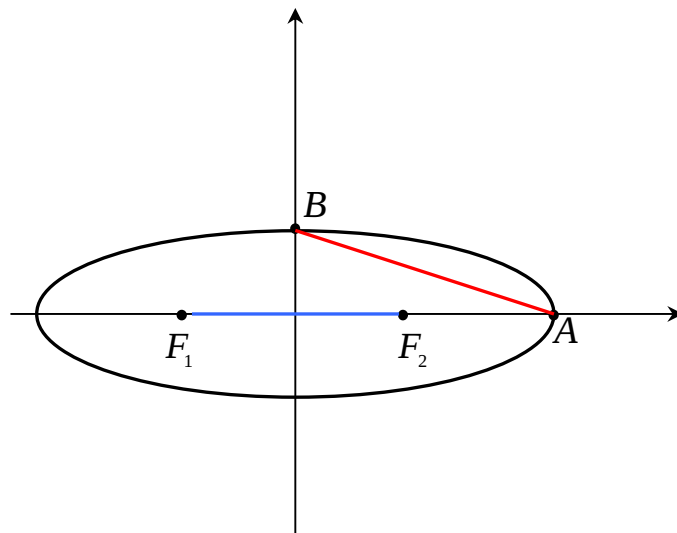
**Sheshiliwi:** Demek, ma`sele sha`rtine ko`re  $a = 5$ ,  $b = 4$ , wonda ellips ten`lemesi

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ko`riniste boladi`.

**2-mi`sal.** Ha`r qi`yli` to`beleri arasi`ndag`i` arali`q fokuslari` arasi`ndag`i` arali`qtan yeki yese u`lken bolg`an ellipstin` ekscentrisitetin ani`qlan`.

**Sheshiliwi:** Ma`sele sha`rtine k`ore  $|F_1F_2| = 2c$ ,  $|AB| = 4c$ ,  $e = \frac{c}{a} - ?$



$$\begin{cases} 16c^2 = a^2 + b^2 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{17} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2}{17}}$$

**3-mi`sal.**  $x = \pm 8$  tuwri` si`zi`qlari` ellipstin` direktrisalari`, kishi ko`sheri 8 ge ten`. Ellipstin` ten`lemesin du`zin`.

**Sheshiliwi:** Demek  $2b = 8 \Rightarrow b = 4$ , al  $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm 8$ .

$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - 16$  bul tabi`lg`andi` direktrisa ten`lemesine aparip qoyami`z ha`m a`pi`wayi`lasti`ri`wlar wori`nlaymi`z:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 16}} = 8 \Rightarrow a^2 = 8\sqrt{a^2 - 16}$$

$$a^4 - 64a^2 + 64 \cdot 16 = 0, \quad a^2 = t$$

$$t^2 - 64t + 64 \cdot 16 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 32. \text{ Bunnan } a^2 = 32.$$

Wonda ellips ten`lemesinin` ko`rinisi  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$  boladi`.

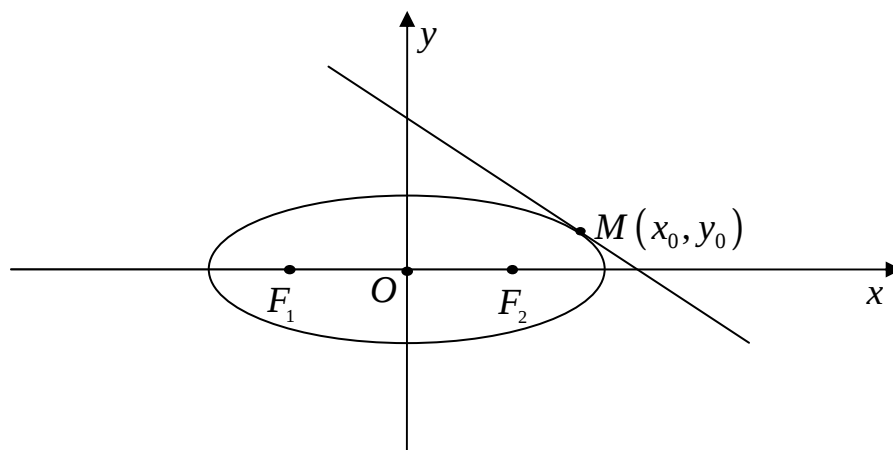
### ***Ellipstin` uri`nbasi`***

Yendi biz ellipstin` uri`nbasi`ni`n` ten`lemesin keltirip shi`g`arayi`q.

Bizge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsi berilgen ha`m woni`n` bazi`-bir  $M(x_0, y_0)$  noqati`nan ju`rgizilgen uri`nbasi`ni`n` ten`lemesin du`ziwdi qarayi`q (**2-si`zi`lma**).



**2-si`zi`lma**

Bizge mektep kursi`nan belgili uri`nbani`n` ten`lemesi

$$y - y_0 = y'(x - x_0) \quad (7)$$

menen beriledi. Bul ten`lemedegi  $y'$  ti` tabi`w ushi`n ellipstin` kanonikali`q ali`q ten`lemesin, yag`ni`y (1) ten`lemeni  $x$  boyi`nsha differenciallaymi`z, yag`ni`y  $x$  boyi`nsha tuwi`ndi` alami`z:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0,$$

Bul jerde  $y$  quramali` funksiya dep qaraladi`. Bunnan  $y'$  ti` tapsaq ha`m wo`zgeriwshi noqatti`n` koordinatalari`n berilgen  $M(x_0, y_0)$  noqati`ni`n` koordinatalari` menen almasti`rsaq:

$$y' = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

ten`ligin payda yetemiz.

Bul tabi`lg`andi` (7) ten`lemege qoyami`z.

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0).$$

yamasa

$$a^2 y_0 (y - y_0) + b^2 x_0 (x - x_0) = 0 \quad (8)$$

Tiyisli a`piwayi`lasti`ri`wlardi` wori`nlasaq, to`mendegi ten`likke iye bolami`z:

$$b^2 x x_0 + a^2 y y_0 = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2.$$

Bul ten`liktin` yeki ta`repi  $a^2 b^2$  qa bo`lse:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \quad (9)$$

Bul jerde  $M(x_0, y_0)$  noqati` ellipske tiyisli bolg`anli`qtan, woni`n` koordinatalari` ellipstin` ten`lemesin qanaatlandi`wi` tiyis, yag`ni`y:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Sonli`qtan (9) ten`likti to`mendegi ko`riniste jaza alami`z:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (10)$$

Bul (10) ten`leme ellipstin`  $M(x_0, y_0)$  noqati` arqali` ju`rgizilgen uri`nbasi`ni`n` ten`lemesi boladi`.

**4-mi`sal.**  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$  ellipske  $M(4,3)$  noqatta ju`rgizilgen uri`nbasi`ni`n` ten`lemesin du`zin`.

**Sheshiliwi:** Berilgen mag`li`wmatlardi` ellips uri`nbasi` ten`lemesindegi worni`na aparip qoyami`z:

$$\frac{4x}{32} + \frac{3y}{18} = 1,$$

a`piwayi`lasti`ri`wlar wori`nlaymi`z ha`m  $3x + 4y - 24 = 0$  ten`lemege iye bolami`z. Demek soralg`an uri`nba ten`lemesi  $3x + 4y - 24 = 0$ .

**5-mi`sal.**  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  ellipske  $N(10;4)$  noqattan o`tiwshi uri`nba ten`lemelerin jazi`n`.

**Sheshiliwi:** Bul mi`sal sha`rtine ko`re 4-mi`salg`a uqsap ketedi. Bul mi`saldi` talabalarg`a bergenimizde da`rhal 4-mi`sal sheshiliwindey etip isleydi. Lekin bul qa`te. Sebebi ma`sele sha`rtinde berilip turg`an noqat ellipske tiyisli emes, demek da`slep bul noqatti`n` ellipske qarata awhali`n ani`qlaymi`z.

$$\frac{10^2}{25} + \frac{4^2}{16} = 1 \Rightarrow 2000 > 1. \text{ Demek noqat ellipstin` si`rti`nda jaylasqan, onda}$$

ellipske bul noqattan o`tiwshi eki uri`nba ten`lemesin jazi`wi`mi`z mu`mkin.

Ellipstin` uri`nba ten`lemesin jazi`w ushi`n ellipske tiyisli noqatti`da ani`qlawmi`z kerek. Ol ushi`n ellipske tiyisli bol`gan noqatti` to`mendegi ten`lemeler sistemasi`nan ani`qlaymi`z :

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \\ \frac{10x_0}{25} + \frac{4y_0}{16} = 1 \end{cases}$$

Bul jerden  $x_0, y_0$  lerdin` ma`nisleri tabi`ladi`, soni`nan (10) ten`leme ja`rdeminde  $N(10;4)$  ha`m  $M(x_0, y_0)$  noqatlari`nan o`tiwshi uri`nba ten`lemeleri jazi`ladi`. **Juwap:**  $y = 4$  ha`m  $16x - 15y - 100 = 0$ .

**Ellipstin` diametrleri**

Mektep kursi`nda shen`berdin` diametri degen tu`sinikke iye bolg`an yedik. Wol jerde shen`ber diametri dep shen`ber worayi`nan wo`tiwshi yen` u`lken xorda dep keltiriler edi. Biraq bul ani`qlama yekinshi ta`rtipli si`zi`qlar ushi`n toli`q ani`qlama bola almaydi`. Sonli`qtan yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` diametrleri haqqi`nda so`z bolg`anda, ha`r qanday yekinshi ta`rtipli si`zi`qlarg`a uli`wma bolg`an diametrge ani`qlama beriwimiz kerek.

**2-ani`qlama.** Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` wo`z-ara parallel bolg`an xordalari`ni`n` wortalari`n tutasti`ri`wshi` tuwri` si`zi`q, woni`n` diametri dep ataladi`.

Usi` ani`qlamadan ellipstin` diametrinin` ten`lemesin keltirip shi`g`arami`z:

Bizge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellips ha`m usi` ellipstin`  $\bar{a}$  vektor bag`i`ti`na parallel bolg`an

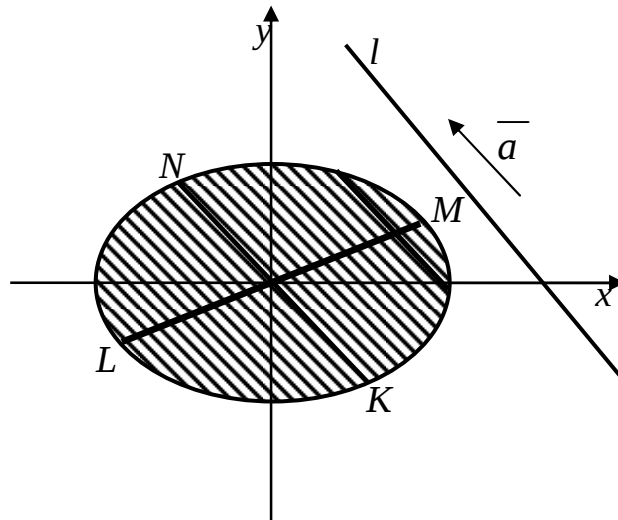
$$y = kx + m$$

ten`lemesi menen ani`qlani`wshi` xordasi` berilgen bolsi`n.

Berilgen ellips ha`m xordani`n` kesilisiw noqatlari`n ani`qlaymi`z. Buni`n` ushi`n

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases} \quad (11)$$

ten`lemeler sistemasi`n sheshiwdi qarasti`rami`z. Sebebi kesilisiw noqatlari` ellipskede, xordag`ada tiyisli boli`wi` kerek. To`mendegi tu`rlendiriwlerdi wori`nlaymi`z:



### 3-si`zi`lma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + m)^2}{b^2} = 1,$$

$$b^2 x^2 + a^2 (kx + m)^2 = a^2 b^2,$$

$$b^2 x^2 + a^2 k^2 x^2 + 2a^2 kmx + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0,$$

$$(b^2 + a^2 k^2) x^2 + 2a^2 kmx + a^2 (m^2 - b^2) = 0.$$

Keyingi ten`liktin` yeki ta`repinde  $b^2 + a^2 k^2$  qa bo`lemiz ha`m:

$$x^2 + 2 \frac{a^2 km}{b^2 + a^2 k^2} x + \frac{a^2 (m^2 - b^2)}{b^2 + a^2 k^2} = 0$$

ten`lemesine iye bolami`z.

Bul kbadrat ten`lemenin` korenleri ellips ham xordani`n` kesilisiw noqati`ni`n` abscissalari`n beredi. Xordani` ten` yekige bo`liwshi noqatti`n` koordinatalari`n sa`ykes  $x$  ha`m  $y$  penen belgilesek, kesindini ten` wortadan bo`liw formulasi`nan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (12)$$

ten`lemege iye bolami`z. Kvadrat ten`leme ushi`n Viet teoremasi`nan ha`m (12) ten`lemesinen to`mendegini jaza alami`z:

$$x = -\frac{ka^2 m}{b^2 + a^2 k^2} \quad (13)$$

Bul tabi`lg`an  $x$  ti` (11) sistemani`n` yekinshi ten`lemesine qoyi`p,  $y$  tin` ma`nisin tabami`z:

$$y = m - k \frac{ka^2 m}{b^2 + a^2 k^2}$$

Bul ten`leme ushi`n a`piwayi`lasti`ri`wlar wori`nlasaq, ten`leme

$$y = \frac{b^2 m}{b^2 + a^2 k^2} \quad (14)$$

ko`riniske keledi.

Yeger (14) ten`likti (13) ten`likke bo`lsek

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2 k} \quad (15)$$

ten`ligine iye bolami`z. Bul ten`likte  $m$  qatnaspaydi`, demek bul qatnas berilgen bag`i`tqa parallel bolg`an barli`q xordalardi`n` ten` wortasi`ndag`i` noqatlar ushi`nda wori`nli`. Bul noqatlardi`n` ko`pligi, yag`ni`y bul noqatlardan wo`tiwshi tuwri` si`zi`q diametrdan ibarat. Demek (15) ten`leme diametrdin` ten`lemesi boli`p tabi`ladi`. (15) ten`lemenini a`piwayi`lasti`ri`p

$$\frac{x}{a^2} + k \frac{y}{b^2} = 0 \quad (16)$$

ko`riniske keltiremiz. (16) ten`leme ellipstin` diametrinin` ten`lemesi boladi`.

### ***Tekseriw ushin sorawlar***

1. Ellipstin` kanonik ten`lemesi qanday ko`riniste boladi`?
2. Ellipstin` ekssentrisiteti, direktrisasi, fokal radiuslari dep nege ayyiladi`?
3. Ellipstin` urinbasinin` ten`lemesi qalay keltirilip shig`ariladi`?
4. Ellipstin` diametric haqqida aytib berin`?