

O'ZBEKISTAN RESPUBLİKASI XALIQ BİLIMLENDIRIW
MINISTRŁIGI

A'JINIYAZ ATT'NDAG'I NO'KIS MA'MLEKETLIK
PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI

G. Qaypnazarova

YEKINSHI TA`RTIPLI SIZIQLARDIN` ULIWMA
KORINISTEGI TEN`LEMELERIN A`PIWAYILASTIRIW

*(matematikani` woqi`ti`w metodikasi`, informatikani` woqi`ti`w
metodikasi`, fizikani` woqi`ti`w metodikasi`)
bag`dar`i`ndag`i` 1-kurs talabalari` ushi`n woqi`w-metodikali`q qollanba)*

NO'KIS – 2015

Du'ziwshi: Qaypnazarova G.

**Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` uli`wma
korinistegi ten`lemelerin a`piwayi`lasti`ri`w
(matematikani` woqi`ti`w metodikasi`, informatikani` woqi`ti`w
metodikasi`, fizikani` woqi`ti`w metodikasi`)
bag`dar`i`ndag`i` 1-kurs talabalari` ushi`n woqi`w-metodikali`q qollanba)**

Woqi`w-metodikali`q qollanba matematika woqi`ti`w metodikasi` ta`lim bag`dari`ni`n da`stu`ri tiykari`nda jazi`lg`an boli`p, joqari` oqi`w ori`nlari`ni`n matematika oqi`ti`w metodikasi`, informatika woqi`ti`w metodikasi`, fizika woqi`ti`w metodikasi` bag`dari`ndag`i` talabalarg`a usi`ni`ladi`. Woqi`w-metodikali`q qollanbada analitikali`q geometriyada yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` uli`wma ko`rinistegi ten`lemelerin tekseriw, invariantlar ja`rdeminde kanonikali`q ko`rinistegi ten`lemesine keltiriw qarali`p, og`an baylani`sli` mi`sallar, testler, o`z betinshe jumi`s tapsi`rmalari` berilgen.

Juwapli' redaktor:

Z.Saparov - A`jiniyaz ati`ndag`i` No`kis ma`mleketlik pedagogikali`q instituti` «Uli`wma matematika» kafedراسi` ag`a oqi`ti`wshi`si`, fizika - matematika ilimlerinin` kandidati`.

Pikir bildiriwshiler:

A. Xodjaniyazov

A`jiniyaz ati`ndag`i` No`kis ma`mleketlik pedagogikali`q instituti` «Uli`wma matematika» kafedراسi` basli`gi`, fizika - matematika ilimlerinin` kandidati`.

R. Jiyemuratov

Berdaq ati`ndag`i` Qaraqalpaq ma`mleketlik universiteti «Fukcionalli`q analiz, algebra ha`m geometriya» kafedراسi` docenti.

A`jiniyaz ati`ndag`i` No`kis ma`mleketlik pedagogikali`q instituti`ni`n I`limiy - metodikali`q ken`esinin` 2015 - ji`l 10-aprel ku`ngi ma`jilisi qarari` menen baspag`a usi`ni`s yetilgen (№ 6 sanli` bayanlama).

KIRISIW

Tuwri` mu`yeshli dekart koordinatalar sistemasi`nda yekinshi da`rejeli yeki belgisizli algebrali`q ten`lemeler menen an`lati`lg`an si`zi`qlar yekinshi *ta`rtipli si`zi`qlar* dep ataladi`. Bul yekinshi ta`rtipli si`zi`qlarg`a bizge mektep kursi`nan tani`s bolg`an shen`ber, sonday-aq ellips, giperbola, parabolalar kiredi.

Bul yekinshi ta`rtipli si`zi`qlar teoriyalı`q a`hmiyetke iye boli`p, fizika, mexanika, astronomiya ha`m texnika ilimlerinde ken` qollani`ladi`. Sonday-aq ta`biyat qubi`li`slari`n bayan yetiwde ha`m tu`sindiriwde bul si`zi`qlardi` ko`p ushi`ratami`z.

Mexanikani`n` ni`zamlari`nda ellipstin` ayi`ri`m qa`siyetlerin ko`riwimiz mu`mkin. Ma`selen, quyash sistemasi`nda har bir planeta quyash do`gereginde ellipslik orbita boyi`nsha ha`reket yetedi, quyash ellipstin` bir fokusi`nda jaylasqan boladi`.

Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` qollani`li`wi`n basqa da jerlerde ko`riwimiz mu`mkin. Ma`selen, hawani`n` qarsi`li`g`i`n yesapqa almag`anda i`di`sti`n` tar tesiginen ati`li`p shi`qqan qa`legen suyi`qli`q traektoriyalari` parabola formasi`nda boladi`.

Bul woqi`w-metodikali`q qollanba pedagogikali`q institutlari`ni`n` "Matematika woqi`ti`w metodikasi" , "Informatikani` woqi`ti`w metodikasi" ha`m "Fizika woqi`ti`w metodikasi" ta`lim bag`dari`ndag`i` talabalarg`a arnalg`an boli`p, wol yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi` uli`wma ko`rinistegi ten`lemesi ja`rdeminde u`yreniwge bag`i`shlanga`n.

Bul oqi`w-metodikali`q qollanbada yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` uli`wma ten`lemeleri, yekinshi ta`rtipli si`zi`q ha`m tuwri` si`zi`qti`n` wo`z-ara jaylasi`wi`, yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` uli`wma ten`lemesin a`piwayi`lasti`ri`w ha`m uli`wma ko`riniste berilgen yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` ko`rinishin ani`qlaw usi`llari` u`yreniledi. Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlarg`a baylani`sli` mi`sallar islep ko`rsetilgen ha`m ha`r bo`limnin` aqi`ri`nda test sorawlari`, wo`z betinshe jumi`s tapsi`rmalari` keltirilgen.

§1.YEKINSHI TA`RTIPLI S IZIQLARDIN` ULIWMA TEN`LEMESI

Tegisliktegi qanday da bir dekart koordinatalar sistemasi`nda

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

ten`leme berilgen bo`lsi`n. Bul jerde  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  koefficientlerdin` keminde birewi nolden wo`zgeshe boli`wi` kerek. Bul sha`rtti $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ ko`riniste jazi`w mu`mkin.

**1-ani`qlama:** Tegislikte koordinatalari` (1) ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi yekinshi ta`rtipli si`zi`q dep ataladi`.

Mi`sallar.

1) Tegislikte koordinatalari`  $x^2 + y^2 = 0$  ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi tek g`ana bir noqatdan ibarat.

2) Tegislikte koordinatalari`  $x^2 - y^2 = 0$  ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi yeki tuwri` si`zi`qtan ibarat.

3) Tegislikte koordinatalari`  $xy - 1 = 0$  ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi yeki bo`lekten ibarat ha`m mektep kursi`nan ma`lim, wol giperbola dep ataldi.

1.1. Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` worayi`

Biz bul bapta tegislikte dekart koordinatalar sistemasi`nda

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

ten`leme menen berilgen yekinshi ta`rtipli si`zi`qti` tekseriw menen shug`i`llanami`z.

Buni` koordinatalar sistemasi`n tu`rlendiriw ha`m (1) ten`lemeni apiwayi`lasti`ri`w ja`rdeminde a`melge asi`rami`z. Birinshi wori`nda parallel ko`shiriwde (1) ten`leme koefficientleri qanday wo`zgeretug`i`nli`g`i`n tekseremiz. Buni`n` ushi`n

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \quad (2)$$

formulalar ja`rdeminde tu`rlendiriwdi wori`nlaymi`z. Bul jag`dayda koordinata ko`sherlerinin` bag`i`tlari` wo`zgermeydi, tek g`ana koordinata

basi $O'(x_0, y_0)$ noqatga ko'shedi. Bul formulalardan x, y lardi tawi'p ha'm (1) ge qoyi'p

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (3)$$

ten'lemenini payda yetemiz. Bul ten'lemedegi koefficientler ushi'n

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22}, \\ a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \quad a'_{33} = F(x_0, y_0) \quad (4)$$

ten'likler wori'nli' boli'p, $F(x, y)$ penen (1) ten'lemenin' shep ta'repindegi an'latpa belgilengen.

Joqari'dag'i (3) formulalardan ko'rinip turg'ani'nday, parallel ko'shiriwde yekinshi da'rejeli ag'zalar aldi'ndag'i koefficientler wo'zgermeydi. Yeger $O'(x_0, y_0)$ noqatti'n koordinatalari'

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

sistemani' qanaatlandi'rsa, (3) ten'lemedegi birinshi da'rejeli ag'zalar qatnaspaydi'.

Bulardan basqa, yeger $O'(x_0, y_0)$ noqatti'n koordinatalari' (5) sistemani' qanaatlandi'rsa, $O'(x_0, y_0)$ noqat yekinshi ta'rtpili si'zi'q ushi'n simmetriya worayi' boladi'. Haqi'yqati'ndada bul jag'dayda koordinatalar basi'n $O'(x_0, y_0)$ noqatga ko'shirsek, ten'lemede birinshi da'rejeli ag'zalar qatnaspaydi'. Soni'n ushi'n taza koordinatalar sistemasi'nda

$$F(x', y') = F(-x', -y')$$

ten'lik wori'nli' boladi'. Demek $O'(x_0, y_0)$ noqat si'zi'q ushi'n simmetriya worayi' boladi'. Ha'm kerisinshe, yeger qanday da bir A noqat yekinshi ta'rtpili si'zi'q ushi'n simmetriya worayi' bolsa woni'n koordinatalari' (5) sistemani' qanaatlandi'ri'wi'n ko'rsetemiz. Koordinata basi'n A noqatga jaylasti'ri'p, taza x', y' koordinatalar sistemasi'n kiritemiz. Yeger $M(x', y')$ noqat si'zi'qqa tiyisli bolsa,

$$F(x', y') = 0$$

ten'lik wori'nli' boladi'. Koordinata basi' simmetriya worayi' bolg'ani' ushi'n $F(-x', -y') = 0$ ten'likte wori'nli' boladi'. Bul ten'liklerde yekinshi sin birinshisinen ayi'ri'p

$$a'_{12}x + a'_{23} = 0$$

ten`likti payda yetemiz. Yeger  $a_{13}, a_{23}$  koeficientlerdin` keminde birewi nolden wo`zgeshe bolsa, bul ten`leme tuwri` si`zi`qti` ani`qlaydi`, yag`ni`y yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` barli`q noqatlari` bir tuwri` si`zi`qta jatadi`. Yeger yekinshi ta`rtipli si`zi`q bir tuwri` si`zi`qta jatpasa, bul koeficientlerdin` yekewide nolge ten` boladi`. Bul bolsa A noqattin` koordinatalari` (5) sistemani` qanaatlandi`ratug`i`nli`g`i`n ko`rsetedi. Bul faktlerdi yesapqa alsaq to`mendegi ani`qlamani`n` geometriyali`q ma`nisi jaqsi` tu`sinikli boladi`.

**2-ani`qlama:** Tegisliktegi  $M_0(x_0, y_0)$  noqatti`n` koordinatalari` (5) sistemani` qanaatlandi`rsa, wol (1) ten`leme menen berilgen yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` worayi` dep ataladi`.

(5) sistema jalg`i`z sheshimge iye boli`wi`, sheksiz ko`p sheshimge iye boli`wi` yamasa uli`wma sheshimge iye bolmawi` mu`mkin. Yeger

$$a_{11}a_{22} - a_{21}^2 \neq 0$$

qatnas wori`nli` bolsa, (5) sistema jalg`i`z sheshimge iye boladi`. Yeger

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

qatnas wori`nli` bolsa sistema sheksiz ko`p sheshimge,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

qatnas wori`nlansa sistema sheshimge iye yemes. Bulardi` itibarg`a ali`p, biz yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi` u`sh toparg`a aji`ratami`z:

- a) jalg`i`z worayg`a iye bolg`an si`zi`qlar;
- b) sheksiz ko`p worayg`a iye bolg`an si`zi`qlar;
- c) worayg`a iye bolmag`an si`zi`qlar;

To`mendegi determinantlardi` kiritemiz:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bul jerde $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$ belgilewler kiritilgen. Jalg`i`z worayg`a iye si`zi`qlar ushi`n $\delta \neq 0$, jalg`i`z worayg`a iye bolmag`an si`zi`qlar ushi`n  $\delta = 0$ . Si`zi`qlar sheksiz ko`p worayg`a iye boli`wi` ushi`n $\Delta = 0$ ten`lik wori`nlani`wi` kerek.

U`shinshi ta`rtipli determinantti`

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko`riniste jazi`p alsaq, aqirg`i` determinant δ ga ten`. Yeger  $\delta = 0$  bolsa, qanday da bir  $k$  sani` ushi`n

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

qatnas wori`nlanadi`. Bul ten`likti yesapqa ali`p

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ten`likti payda yetemiz. Yeger  $\Delta = 0$  ten`likte wori`nlansa

$$a_{13} - ka_{23} = 0 \text{ yamasa } \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Bul ten`liklerdin` birinshisi wori`nli` bolsa

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k \text{ qatnastan } \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k \text{ qatnas kelip shi`g`adi`.$$

Yeger

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

bolsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ ha`m  $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$  ten`liklerden

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

qatnas kelip shi`g`adi`. Demek  $\delta = 0$  ha`m $\Delta = 0$ ten`liklerdin` bir waqi`tta wori`nlani`wi`

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

sha`rtke ten` ku`shli. Na`tiyjede biz to`mendegi tasti`yi`qlawlarg`a kelemiz:

1. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q

a) $\delta \neq 0$ bolsa jalg`i`z worayg`a iye,

b) $\delta = 0$ ha`m  $\Delta = 0$  bolsa sheksiz ko`p worayg`a iye ha`m woraylar ko`pligi bir tuwri` si`zi`qti` payda yetedi;

v) $\delta = 0$ ha`m  $\Delta \neq 0$  bolsa worayg`a iye yemes.

2. Jalg`i`z worayg`a iye bolg`an yekinshi ta`rtipli si`zi`q worayi` wog`an tiyisli boli`wi` ushi`n $\Delta = 0$ ten`liktin` wori`nlani`wi` za`ru`rli ha`m jeterli.

**Da`liylleniwi.** Yekinshi ta`rtipli si`zi`q worayi`  $M_0(x_0, y_0)$  noqatta boli`p, wol si`zi`qqa tiyisli bolsa

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

ha`m

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0 \quad (7)$$

ten`likler wori`nlanadi`. Joqari`dag`i` (6) ten`liktin` birinshisin x_0 ge, yekinshi sin y_0 ge ko`beytip, (7) ten`likten ayi`rsa

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} = 0$$

ten`likti payda yetemiz. Demek  $(x_0, y_0, 1)$  u`shlik

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \quad (8)$$

bir tekli sistemani`n` trivial yemes sheshimi boli`p tabi`ladi`. Bul bolsa  $\Delta = 0$  sha`rtke ten` ku`shli. Kerisinshe $\Delta = 0$ bolsa, (8) sistema notrivial (x_0, y_0, z_0) sheshimge iye. Bul u`shlikte  $z_0 \neq 0$ , sebebi  $\delta \neq 0$ . Biz  $z_0 = 1$  deb yesaplay alami`z, sebebi $\delta \neq 0$ bolg`anli`g`i` ushi`n har bir  $Z_0$  ushi`n (x_0, y_0) jupli`q bar. Joqari`dag`i` (8) sistemada $z_0 = 1$ bolg`anda  $(x_0, y_0)$  jupli`q woraydi`n` koordinatalari` yekenligi kelip shi`g`adi`. Bunnan basqa (8) sistemadan paydalani`p

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

ten`likti ali`w mu`mkin.

1.2.Yekinshi ta`rtipli si`zi`q ha`m tuwri` si`zi`qti`n` wo`z-ara jaylasi`wi`

Bizge (1) ten`leme menen ani`qlang`an yekinshi ta`rtipli si`zi`q ha`m

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \end{aligned} \tag{9}$$

parametrlik ten`lemeler ja`rdeminde ℓ tuwri` si`zi`q berilgen bolsi`n. Tuwri` si`zi`q ha`m yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` kesilisiw noqatlari`n tabi`w ushi`n (9) an`latpalardi` (1) ge qo`yami`z. Na`tiyjede to`mendegi

$$(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2) t^2 + 2(a_{11}lx_0 + a_{12}(ly_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m) t + F(x_0, y_0) = 0 \tag{10}$$

kvadrat ten`lemeni payda yetemiz. Bul ten`lemede yekinshi da`rejeli ag`za aldi`ndag`i` an`latpa tuwri` si`zi`qti`n` tek g`ana bag`i`ti`na baylani`sli`. Bazi` bag`i`tlar ushi`n bul an`latpa nolge ten` boladi` ha`m joqari`dag`i` ten`leme si`zi`qli` ten`lemege aylanadi`. Bazi` bag`i`tlar ushi`n bul an`latpa nolge ten` yemes ha`m joqari`dag`i` ten`leme kvadrat ten`leme boladi`.

**3-ani`qlama:** Berilgen  $\{\ell, m\}$  bag`i`t ushi`n

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \tag{11}$$

ten`lik wori`nlansa, bul bag`i`t **asimptotikali`q bag`i`t**,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0 \tag{12}$$

qatnas wori`nlansa **asimptotikali`q yemes bag`i`t** dep ataladi`.

Tuwri` si`zi`qti`n` bag`i`ti` asimptotikali`q yemes bolsa, joqari`dag`i` ten`leme kvadrat ten`leme boladi`. Demek bul tuwri` si`zi`q (1) si`zi`q penen yeki yaki bir uli`wma noqatqa iye boli`wi` mu`mkin. Asimptotikali`q yemes bag`i`ttag`i` tuwri` si`zi`q yekinshi ta`rtipli si`zi`q penen bir noqatta kesilisse, wol **uri`nba** deb ataladi`.

Tuwri` si`zi`qti`n` bag`i`ti` asimptotikali`q bolsa, joqari`dag`i` (10) ten`leme si`zi`qli ten`leme boladi`. Demek bul jag`dayda tuwri` si`zi`q (1) ten`leme menen berilgen si`zi`q penen bir noqatta kesilisedi, yamasa tuwri` si`zi`qti`n` ha`mme noqatlari` (1) ten`leme menen berilgen si`zi`qqa tiyisli

boladi. Yeger yekinshi da`rejeli ag`za koeficienti nolge ten` boli`p, saltan` ag`za nolden wo`zgeshe bolsa, tuwri` si`zi`q yekinshi ta`rtipli si`zi`q penen kesilispeydi. Asimptotikali`q bag`i`ttag`i` tuwri` si`zi`q yekinshi ta`rtipli si`zi`q penen kesilispese wol yekinshi ta`rtipli si`zi`q ushi`n asimptota dep ataladi.

Biz

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

ten`lemede  $\ell \neq 0$  bolsa,  $k = \frac{m}{\ell}$  belgilew kiritip, woni`

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

ko`riniste, yeger  $m \neq 0$  bolsa,  $k = \frac{\ell}{m}$  belgilew kiritip, woni`

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$$

ko`riniste jazami`z. Yeki jag`daydada diskriminant ushi`n

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

ten`lik wori`nli. Demek $\delta > 0$ bolsa asimptotikali`q bag`i`t joq. Bul jag`dayda (1) si`zi`q elliptikali`q tiptegi si`zi`q dep ataladi, yeger  $\delta = 0$  bolsa, asimptotikali`q bag`i`t birew, bul jag`dayda (1) si`zi`q parabolali`q tiptegi, $\delta < 0$ bolsa yeki asimptotikali`q bag`i`t bar boli`p, si`zi`q bolsa giperbolali`q tiptegi si`zi`q dep ataladi.

Joqari`dag`i` (10) ten`lemedegi birinshi da`rejeli ag`za aldi`ndag`i` koeficientti

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x + (a_{12}\ell + a_{22}m)y + a_{13}\ell + a_{22}m = 0 \quad (13)$$

ko`riniske keltirip alami`z. Yeger

$$\begin{aligned} a_{11}\ell + a_{12}m &= 0 \\ a_{21}\ell + a_{22}m &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ten`likler bir waqi`tta wori`nlanbasa, (13) ten`leme tuwri` si`zi`qti` ani`qlaydi.

Berilgen $\{\ell, m\}$ bag`i`t ushi`n (14) ten`likler wori`nlansa,  $\{\ell, m\}$  bag`i`t ayri`qsha bag`i`t dep ataladi. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q ushi`n $\delta \neq 0$ bolsa, (14) sistema tek g`ana trivial sheshimge iye, demek jalg`i`z worayg`a iye bolg`an si`zi`qlar ushi`n ayri`qsha bag`i`tlar joq.

4-aniqlama: Ayriqsha bolmag'an $\{\ell, m\}$ bag'it ushi'n (13) tenleme menen aniqlani'wshi tuwri' si'zi'q yekinshi ta'rtipli si'zi'qti'n $\{\ell, m\}$ bag'itqa tu'yinles' diametri dep ataladi'.

Diametr tu'siniginin' korrekt aniqlang'anli'g'in ko'rsetemiz. Da'slep $\{\ell, m\}$ bag'it asimptotikali'q bag'it bolg'an jag'daydi' qaraymi'z. Bul jag'dayda

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

ten'liktin' shep ta'replari ushi'n

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = (a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m \quad (14)$$

ten'lik wori'nli'. Demek

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m = 0 \quad (15)$$

ten'lik kelip shi'g'adi'. Bul ten'likten

$$\frac{\ell}{-(a_{12}\ell + a_{22}m)} = \frac{m}{a_{11}\ell + a_{12}m} \quad (16)$$

Proporcionalli'q qatnasi' kelip shi'g'adi'.

Diametr ushi'n $\{-(a_{12}l + a_{22}m), a_{11}l + a_{12}m\}$ vektor bag'itlawshi' vektor bolg'anli'g'i' ushi'n diametr $\{\ell, m\}$ bag'itqa parallel boladi'. Diametrge tiyisli noqatlar ushi'n (10) ten'lemedegi birinshi da'rejeli ag'za aldi'ndag'i' koeficient nolge ten' boladi'. Demek bul jag'dayda diametr yekinshi ta'rtipli si'zi'q ushi'n asimptota boladi' (kesilispeydi) yag'ni'y diametrge tiyisli ha'mme noqatlar (1) tenleme menen berilgen si'zi'qta jatadi'.

Asimptotikali'q yemes $\{\ell, m\}$ bag'itqa iye bolg'an tuwri' si'zi'q (1) si'zi'qti' yeki M_1 ha'm M_2 noqatlarda kesip wo'tse, M_1M_2 kesindinin' wortasi'n $M_0(x_0, y_0)$ menen belgilep alami'z, tuwri' si'zi'q bolsa (9) tenleme menen berilgen bolsi'n. Parametrdin' M_1, M_2 noqatlarg'a sa'ykes keliwshi ma'nislerin t_1, t_2 menen belgilesek, wolar (10) tenlemenin' korenleri boladi' ha'm Viet teoremasi'na ko're $t_1 + t_2 = 0$ ten'lik wori'nli' boladi'. Bul ten'likten $M_0(x_0, y_0)$ noqattin' diametrge tiyisli yekenligi kelip shi'g'adi'. Demek asimptotikali'q yemes $\{\ell, m\}$ bag'itqa parallel xordalardi'n' wo'rtalari'nan wo'tiwshi tuwri' si'zi'q usi' bag'itqa tu'yinles' diametr boladi'.

Asimptotikali'q yemes $\{\ell, m\}$ bag'itqa iye bolg'an ha'm tu'yinles' diametrge tiyisli $M_0(x_0, y_0)$ noqattan wo'tiwshi tuwri' si'zi'q (1) si'zi'qti'

M_1 ha'm M_2 noqatlarda kesip wo'tse, bul noqatlarga sa'ykes keliwshi parametrinin' ma'nisleri (10) ten'lemenin' korenleri boladi'. Tuwri' si'zi'qti'n' $M_0(x_0, y_0)$ noqati' diametrg'e tiyisli bolg'anli'g'i' ushi'n (10) ten'lemede birinshi da'rejeli ag'za aldi'ndag'i' koefficient nolge ten' boladi'. Viet teoryemesi'na ko're $t_1 + t_2 = 0$ bolg'anli'g'i' ushi'n $M_0(x_0, y_0)$ noqat $M_1 M_2$ kesindinin' wortasi' boladi'. Demek, diametr tu'sinigi korrektli aniqlang'an.

Berilgen $\{\ell, m\}$ bag'i'tqa tu'yinles diametrdin' ten'lemesin

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\ell + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \quad (17)$$

ko'riniste jazi'w mu'mkin. Bul ten'lemeden ko'rinip turg'ani'nday, har qanday diametr (1) si'zi'q worayi'nan wo'tedi.

1.3. Tu'yinles bag'i'tlar ha'm bas bag'i'tlar

Berilgen $\{\ell, m\}$ bag'i'tqa tu'yinles diametrdin' bag'i'ti' $\{\ell', m'\}$ ushi'n

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \quad (18)$$

qatnas wori'nli'. Bul qatnaslardi'

$$(a_{11}l + a_{12}m)l' + (a_{12}l + a_{22}m)m' = 0 \quad (19)$$

ko'riniste yaki

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0 \quad (20)$$

ko'rinistede jazi'w mu'mkin.

5-aniqlama: Eki $\{\ell, m\}$ ha'm $\{\ell', m'\}$ bag'i'tlar ushi'n (20) qatnas wori'nlansa, bul bag'i'tlar (1) si'zi'qqa qarata tu'yinles bag'i'tlar dep ataladi'.

Bul qatnasta (1) ten'leme koefficientleri qatnasadi'. Koefficientler bolsa koordinatalar sistemasi'na baylani'sli'. Yeki $\{\ell, m\}$ ha'm $\{\ell', m'\}$ bag'i'tlar qanday da bir koordinatalar sistemasi'nda (1) si'zi'qqa qarata tu'yinles bag'i'tlar bolsa, wolar qa'legen koordinatalar sistemasi'nda (1) si'zi'qqa qarata tu'yinles bag'i'tlar boli'wi'n ko'rsetemiz.

Biz Oxy koordinatalar sistemasi'nan $O'x'y'$ koordinatalar sistemasi'na

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned} \quad (21)$$

tu`rlendiriwler ja`rdeminde wo`tsek , (1) ten`leme

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (22)$$

ko`riniske keledi. Yeki  $\{\ell, m\}$  ha`m $\{\ell', m'\}$ bag`i tlar ushi`n tu`yinles boli`w sha`rti bolg`an (21) ten`likti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (23)$$

belgilew kiritip

$$(l', m') A \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

ko`riniste , (1) ten`lemeneni bolsa

$$(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0 \quad (25)$$

ko`riniste jazi`w mu`mkin. Tu`rlendiriwler formulasi` ushi`n

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (26)$$

belgilew kiritip, matricalar ha`m vektorlar ja`rdeminde jazsaq

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

ko`riniste boladi`. Yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` (25) ten`lemesine (27) formuladag`i` an`latpani` qoysaq ha`m

$$(x, y) = \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right]^T, \quad A = A^T \text{ ha`m } (a, b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (c, d) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ten`liklerdi yesapqa alsaq, (25) ten`leme to`mendegishe wo`zgeredi:

$$\left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right]^T A \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + 2(a_{13}, a_{23}) \left[C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] + a_{33} = 0$$

$$\begin{aligned} & (x', y') C^T A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x', y') C^T A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (x_0, y_0) A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x_0, y_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\ & + 2(a_{13}, a_{23}) C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x', y') C^T A C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0) A] C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \\ + (x_0, y_0) A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2 (a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Bul ten`lemelerdin` aqi`rg`i`si`nan ko`rinip turg`ani`nday taza koordinatalar sistemasi`ndag`i` koefficientlerden ibarat

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \text{ matrica} \quad A' = C^T A C$$

ni`zam boyi`nsha wo`zgeredi ha`m

$$\begin{aligned} (a'_{13}, a'_{23}) &= [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0) A] C \\ a'_{33} &= (x_0, y_0) A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2(a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + a_{33} \end{aligned} \quad (29)$$

ten`likler wori`nli` yekenligin ko`riw mu`mkin.

Biz $\bar{a}$ vektori`ni`n` yeski koordinatalari`n a_1, a_2 menen, taza koordinatalari`n a'_1, a'_2 menen belgilesek,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$$

ten`lik wori`nli` boladi`. Bul ten`likti yesapqa ali`p $\bar{a} = \{\ell, m\}$, $\bar{b} = \{\ell', m'\}$ vektorlardi`n` taza koordinatalari`n $\{\ell_1, m_1\}$, $\{\ell'_1, m'_1\}$ menen belgilesek,

$$(\ell', m') A \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = (\ell', m') C^T A C \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = (\ell'_1, m'_1) A' \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix}$$

ten`lik wori`nli` boladi`. Bul ten`likten (24) ten`lik

$$(\ell'_1, m'_1) A' \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (30)$$

ten`likke ten` ku`shli yekenlig`i koordinatalar sistemasi`na baylani`sli yemesligi kelip shig`adi`. Demek $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlardi`n` (1) ten`leme menen berilgen si`zi`qqa qarata tu`yinles boli`wi` koordinatalar sistemasi`na baylani`sli` yemes.

Joqari`dag`i` tu`rlendiriwler formulasi`n keltirgenimizden keyin bul faktti algebrali`q jol menen da`liyllewimiz mu`mkin. Haqi`yqati`ndada biz sistemani`

$$(x, y) A + (a_{13}, a_{23}) = (0, 0) \quad (31)$$

ko`riniste jazi`wi`mi`z mu`mkin. Yekinshi ta`repten taza koordinatalar sistemasi`nda bul ten`lik

$$(x', y')A' + (a'_{13}, a'_{23}) = (0, 0) \quad (32)$$

ko`riniste boladi`. Joqari`dag`i` tu`rlendiriw formulalari`n yesapqa ali`p, wolardi`n` (31) ten`likke ten` ku`shli yekenligin ko`rsetemiz. Bul ten`likte

$$(x', y') = \left[C^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T, \quad A' = C^T A C, \quad (a'_{13}, a'_{23}) = [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C$$

tu`rlendiriwdi wori`nlasaq, wol

$$\left[C^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T C^T A C + [(a_{13}, a_{23}) + (x_0, y_0)A]C = (0, 0) \quad (33)$$

ko`riniske keledi. Bul ten`likte

$$\left[C^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \right]^T = [(x, y) - (x_0, y_0)](C^{-1})^T$$

ten`likti yesapqa alsaq, (33) ten`lik

$$[(x, y)A + (a_{13}, a_{23})]C = (0, 0) \quad (34)$$

ko`riniste jazi`ladi`. Bul ten`liktegi matricani`n` determinanti` nolden wo`zgeshe bolg`anli`g`i` ushi`n, bul ten`lik (31) ten`likke ten` ku`shli.

**6-ani`qlama:** Qanday da bir bag`i`t wo`zine perpendikulyar bag`i`tqa tu`yinles bolsa, wol bas bag`i`t dep ataladi`.

Bul ani`qlamag`a ko`re  $\{\ell, m\}$  bag`i`t bas bag`i`t boli`wi` ushi`n wol $\{-m, \ell\}$ bag`i`tqa tu`yinles boli`wi` kerek. Yeger  $\{\ell, m\}$  bag`i`t bas bag`i`t bolsa,  $\{-m, \ell\}$  bag`i`t ham bas bag`i`t boladi`. Berilgen $\{\ell, m\}$ bag`i`ti`ni`n` bas bag`i`t boli`w sha`rti

$$a_{11}l'l' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0$$

ten`likte  $\{\ell', m'\}$ vektordi`n` worni`na $\{-m, \ell\}$ vektordi` ali`wi`mi`z na`tiyjesinde payda boladi` ha`m to`mendegi ko`riniste boladi`:

$$a_{12}\ell^2 + (a_{22} - a_{11})\ell m - a_{21}m^2 = 0 \quad (35)$$

Yeger $\{\ell, m\}$ ayri`qsha bag`i`t bolsa,

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

ten`lik wori`nli` boladi` ha`m joqari`dag`i` (35) sha`rt wori`nlang`an. Bizge ma`lim, tek g`ana  $\delta = 0$  bolg`an jag`daylarda g`ana yekinshi ta`rtipli si`zi`q ayri`qsha bag`i`tqa iye boli`p, wol yekinshi ta`rtipli si`zi`q ushi`n

asimptotikaliq bag'it boladi. Demek jalg'iz worayg'a iye bolmag'an yekinshi ta'rtpi si'ziqlar ushi'n asimptotikaliq bag'it bas bag'it boladi. Ayriqsha bag'itqa perpendikulyar bag'itta bas bag'it boladi. Basqa bas bag'itlar joq. Demek jalg'iz worayg'a iye bolmag'an yekinshi ta'rtpi si'ziqlar ushi'n wo'z-ara perpendikulyar tek g'ana yeki bas bag'it bar.

Joqari'dag'i (35) ten'likte $a_{12} = 0$ ha'm $a_{11} = a_{22}$ qatnaslar wori'nlanisa, bul ten'lik qa'legen $\{\ell, m\}$ bag'it ushi'n wori'nlanadi. Demek bul jag'dayda qa'legen bag'it bas bag'it boladi. Yeger $a_{12} \neq 0$ bolsa, (35) ten'lik $k = \frac{\ell}{m}$ (ha'm $k = \frac{m}{\ell}$) an'latpa ushi'n kvadrat ten'leme boladi. Bul ten'lemede diskriminant ushi'n

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$$

qatnas wori'nli' bolg'ani' ushi'n wol yeki koreng'e iye ha'm demek yekinshi ta'rtpi si'ziq ushi'n yeki wo'z-ara perpendikulyar bas bag'it bar boladi.

1-mi'sal. $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ yekinshi ta'rtpi si'ziqti'n' abscissa ko'sheri menen kesilisiw noqatlari'ndag'i' uri'nbalar ten'lemeleri du'zilsin.

$$\text{Sheshiliwi: } \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ten'lemeler sistemasi'nan}$$

abscissa ko'sheri menen kesilisiw noqatlari'n tawi'p alami'z.

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$$

Yekinshi ta'rtpi si'ziqqa berilgen noqatta ju'rgizilgen uri'nba ten'lemesi

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})y + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

Bul jerde (x_0, y_0) berilgen noqat koordinatalari'.

Ma'sele sha'rtinde $a_{11} = 1, a_{22} = -2, a_{13} = -\frac{5}{2}, a_{23} = 2, a_{33} = 6$ yekenligi ma'lim.

$$x_0 = 2, y_0 = 0 \text{ de } \left(1 \cdot 2 - \frac{5}{2}\right)x + 2y - \frac{5}{2} \cdot 2 + 6 = 0 \Rightarrow x - 4y - 2 = 0$$

$$x_0 = 3, y_0 = 0 \text{ de } x + 4y - 3 = 0 \text{ ge iye bolami'z.}$$

Demek juwap: $x - 4y - 2 = 0$, $x + 4y - 3 = 0$.

**2-mi`sal.**  $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$  yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` $(-4, 2)$ noqat arqali` wo`tiwshi diametr ten`lemesin jazi`n`.

Sheshiliwi: $4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

$$a_{11} = 0, a_{12} = 2, a_{22} = -5$$

$$a_{13} = 1, a_{23} = 3, a_{33} = 1$$

Yekinshi ta`rtipli si`zi`q worayi`n ani`qlaymi`z. Wol ushi`n to`mendegi ten`lemeler sistemasi`n sheshimin tabami`z :

$$\begin{cases} 2y_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 - 5y_0 + 3 = 0 \end{cases}$$

Ten`lemeler sistemasi`ni`n` sheshimi $x_0 = -\frac{11}{4}$, $y_0 = -\frac{1}{2}$

Demek woray koordinatalari`  $\left(-\frac{11}{4}; -\frac{1}{2}\right)$ . Yendi  $(-4; 2)$  noqattan ha`m woraydan wo`tiwshi tuwri` si`zi`q ten`lemesin jazami`z. Bul ushi`n biz yeki noqattan wo`tiwshi tuwri` si`zi`q ten`lemesinen paydalanami`z:

$$\frac{x + \frac{11}{4}}{-\frac{11}{4} + 4} = \frac{y + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 2}$$

A`piwayi`lasti`ri`wlar wori`nlag`ani`mi`zdan keyin $4x + 2y + 12 = 0$ ten`lemege iye bolami`z.

Demek izlengen diametr ten`lemesi:

$$2x + y + 6 = 0$$

**3-mi`sal.**  $(1; -2)$  noqattan  $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$  yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` diametri ju`rgizilgen. Bul diametrdin` ha`m bul diametrge tu`yinles` diametrinin` ten`lemeleri tabi`lsin.

Sheshiliwi: $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

$$a_{11} = 3, a_{12} = -1, a_{22} = 3, a_{13} = 2, a_{23} = 2, a_{33} = -4$$

$$3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 + k(-1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 2) = 0 \quad 7 - 5k = 0.$$

Bunnan $k = \frac{7}{5}$. Yendi k_1 di tabami`z:

$$3 + (-1)\left(\frac{7}{5} + k_1\right) + 3 \cdot \frac{7}{5} \cdot k_1 = 0 \quad \text{bunnan} \quad k_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Tabi`lg`an } k_1 \text{ den } 3x - y + 2 - \frac{1}{2}(-x + 3y + 2) = 0$$

$$6x - 2y + 4 + x - 3y - 2 = 0 \quad \text{diametr ten`lemesi} \quad 7x - 5y + 2 = 0.$$

Tu`yinles` diametr ten`lemesin tabami`z: $k = \frac{7}{5}$ yekenliginen

$$3x - y + 2 + \frac{7}{5}(-x + 3y + 2) = 0$$

$$15x - 5y + 10 - 7x + 21y + 14 = 0$$

$$8x + 16y + 24 = 0$$

$$\text{Juwap: } x + 2y + 3 = 0.$$

**4-mi`sal.**  $6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$  yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` abscissalar ko`rsheri menen  $45^\circ$  mu`yesh payda yetiwshi diametri ani`qlansin.

Sheshiliwi: Diametr ten`lemesin  $Fx + Fy + Fz = 0$  ko`riniste izleyimiz. Ma`sele shartine ko`re $l(12x - y) + m(-x - 4y + 4) = 0$

$$\varphi = 45^\circ \quad \text{bolg`anli`qtan} \quad \tan 45^\circ = 1$$

Yendi $\{l, m\}$ bag`i`tti` ani`qlaymi`z, woni` diametr ten`lemesinen ani`qlaymi`z. $12l - m = l + 4m \quad 11l - 5m = 0$

$$\text{Bunnan} \quad l = 5, \quad m = 11$$

Demek izlengen diametr ten`lemesi

$$\text{Diametrdin` mu`yesh koefficienti } k = \frac{12l - m}{l + 4m} \text{ ha`m soni`n` menen}$$

birge wol 1 ge ten` bolg`anli`qtan $12l - m = l + 4m$

$$5(12x - y) + 11(-x - 4y + 4) = 0$$

$$60x - 5y - 11x - 44y + 44 = 0$$

$$\text{Juwap: } 49x - 49y + 44 = 0.$$

§2. Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi` invariantlar ja`rdeminde izertlew ha`m a`piwayi`lasti`ri`w

Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlar a`dette to`mendegi ten`lemelerdin` birewi ko`rinishinde beriledi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

(1) ten`leme to`mendegi si`zi`qlardi`n` birin ani`qlaydi:

$$\Gamma. \begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 & - \text{ellips} \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1 & - \text{jori`ma ellips} \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0 & - \text{yeki jori`ma kesilisiwshi tuwri`si`zi`q} \\ \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 & - \text{giperbola} \\ \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 & - \text{yeki kesilisiwshi tuwri`si`zi`q} \end{cases}$$

$$\Gamma\Gamma. Y^2 = 2pX \quad - \text{parabola}$$

$$\Gamma\Gamma\Gamma. X^2 = a^2, \quad a \neq 0 - \text{yeki parallel tuwri`si`zi`q}$$

$$X^2 = -a^2, \quad a \neq 0 - \text{yeki jori`ma parallel tuwri`si`zi`q}$$

$$X^2 = 0 - \text{yeki u`stpe} - \text{u`st tu`siwshi tuwri`si`zi`q}$$

To`mendegi

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \quad (4)$$

an`latpalar tuwri` mu`yeshli koordinatalar sistemasin`nan basqa tuwri` mu`yeshli koordinatalar sistemasina tu`rlendiriwge qarata yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` invariantlari` dep ataladi`, bul jerde $a_{12} = a_{21}$ dep yesaplanadi`. Invariantlar ja`rdeminde yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi` an`sat a`piwayi`lasti`ri`wg`a boladi`. Bul bolsa to`mendegilerdi bildiredi: yeger

qanday da bir tuwri` mu`yeshli koordinatalar sistemasi`nda yekinshi ta`rtipli si`zi`q

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Ten`leme menen, basqa tuwri` mu`yeshli koordinatalar sistemasi`nda

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0$$

Ten`leme menen berilse, wol jag`dayda

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}, \quad I_1 = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}. \quad I_2 = 0, K_3 = 0 \text{ bolg`an jag`dayda}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

An`latpada invariant boladi` ha`m semi invariant dep ataladi`.

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \quad (6)$$

ten`leme xarakteristikali`q ten`leme dep ataladi`. Woni`n` λ_1, λ_2 sheshimleri ha`r dayi`m on`.

Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi` u`sh toparg`a aji`rati`w mu`mkin yekenligin biz I`I` bapta keltirip wo`tken yedik.

Birinshi toparg`a jalg`i`z simmetriya worayi`na iye bolg`an si`zi`qlar kiredi, wolar ellips, jori`ma ellips, kesilisiwshi yeki jori`ma tuwri` si`zi`q giperbola ha`m kesilisiwshi yeki tuwri` si`zi`q.

Yekinshi ta`rtipli si`zi`q jalg`i`z worayg`a iye yag`ni`y birinshi toparg`a tiyisli boli`wi` ushi`n $I_2 \neq 0$ sha`rttin` wori`nlani`wi` za`ru`rli ha`m jeterli.

Yekinshi toparg`a simmetriya worayi`na iye bolmag`an si`zi`qlardi`, yag`ni`y parabolani` kiritemiz. Si`zi`qti`n parabola boli`wi` ushi`n  $I_2 = 0, K_3 \neq 0$  sha`rttin` wori`nlani`wi` za`ru`rli ha`m jeterli.

Ushinshi toparg'a simmetriya woraylari` tuwri` si`zi`qti` payda yetetug`i`n si`zi`qlardi` kiritemiz, wolar yeki parallel tuwri` si`zi`q, yeki parallel jori`ma tuwri` si`zi`q, u`stpe-u`st tu`siwshi yeki tuwri` si`zi`q, yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` simmetriya woraylari` tuwri` si`zi`qti` payda etiwu ushi`n $I_2 = 0, K_3 = 0$ sha`rttin` wori`nlani`wi` za`ru`rli ha`m jeterli.

Tuwri` mu`yeshli koordinatalar sistemasi`n tu`rlendiriw na`tiyjesinde I topar si`zi`qlardi`n ten`lemesi

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \quad (7)$$

II topar si`zi`qlardi`n ten`lemesi

$$I_1 X^2 \pm 2 \sqrt{\frac{K_3}{I_1}} Y = 0 \quad (8)$$

III topar si`zi`qlardi`n ten`lemesi

$$\lambda_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0 \quad (9)$$

ko`riniske keltiriw mu`mkin.

Yekinshi ta`ptipli si`zi`qlardi`n sa`ykes toparlarga` tiyisli boli`wi`ni`n` za`ru`rli ha`m jeterli **belgileri** invariantlar arasi`ndag`i` qatnaslar to`mendegishe ani`qlanadi`:

I. Ellips $I_2 > 0, I_1 K_3 < 0$

Jori`ma ellips $I_2 > 0, I_1 K_3 > 0$

Kesilisiwshi yeki jori`ma tuwri` si`zi`q $I_2 > 0, K_3 = 0,$

Giperbola $I_2 > 0, K_3 \neq 0,$

Kesilisiwshi yeki tuwri` si`zi`q $I_2 > 0, K_3 = 0.$

II. Parabola $I_2 > 0, K_3 \neq 0.$

III. Yeki parallel tuwri` si`zi`q $I_2 = 0, K_3 = 0, K_2 < 0,$

Yeki jori`ma parallel tuwri` si`zi`q $I_2 = 0, K_3 = 0, K_2 > 0$

U`stpe-u`st tu`siwshi tuwri` si`zi`q $I_2 = 0, K_3 = 0, K_2 = 0$

Joqari`da keltirilgen mag`li`wmatlar 1-tablicada keltirilgen.

Ellips yaki giperbolani`n` baslang`i`sh koordinatalar sistemasi`na qarata jaylasi`wi` to`mendegishe ani`qlanadi`:

Taza koordinatalar sistemasi`ni`n` basi`

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

sistemi n sheshiw nati'yjesinde tabi'ladi'. Jana $O'X$ ko'sherdin mu'yesh koefficienti ($a_{12} \neq 0$ halda)

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \quad (11)$$

formuladan tabi'ladi', bul jerde λ_1 san xarakteristikali'q ten'lemenin sheshimi boli'p,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$$

ten'leme'degi X^2 aldindag'i koefficient boli'p tabi'ladi'.

Yeger si'zi'q ellips boli'p, λ_1 xarakteristikali'q ten'lemenin absolyut ma'nisi boyi'nsha kishi koreni bolsa,

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

formula ellips u'lken ko'sherinin mu'yesh koefficientin ani'qlaydi'.

Yeger si'zi'q giperbola boli'p, λ_1 xarakteristikali'q ten'lemenin K_3 penen birdey belgidegi koreni bolsa, wol jag'ayda:

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$$

($a_{11} \neq 0$) formula giperbola haqi'yqi'y ko'sherinin mu'yesh koefficientin ani'qlaydi'.

Yeger parabolani'n to'besi, parametrlik ha'm ko'sheri boyi'nsha do'n'eslik ta'repine bag'i'tlang'an vektor ma'lim bolsa, parabolani'n baslang'ish sistemag'a qarata jaylasi'wi' ma'lim boladi'.

1-tablica

Topar	Woraylar orni`	Woraylar orni`ni`n` belgisi	Tu`rlendirilgen ten`leme	No	Si`zi`qti`n` ati`	Si`zi`qti`n` belgisi	Si`zi`qti`n` kanonikalı`q ten`lemesi
I	Noqat	$I_2 \neq 0$	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$	1	Ellips	$I_2 > 0, I_1 K_3 < 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$
				2	Jori`ma ellips	$I_2 > 0, I_1 K_3 > 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$
				3	Kesilisiwshi yeki jori`ma tuwri` si`zi`q	$I_2 > 0, K_3 = 0$	$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$
				4	Giperbola	$I_2 < 0, K_3 \neq 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$
				5	Kesilisiwshi yeki tuwri` si`zi`q.	$I_2 < 0, K_3 = 0$	$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$
II	Worayi` joq	$I_2 = 0$ $K_3 \neq 0$	$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y = 0$	6	Parabola	$I_2 = 0, K_3 \neq 0$	$Y^2 = 2pX$
III	Tuwri` si`zi`q	$I_2 = 0$ $K_3 = 0$	$I_1 X^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$	7	Yeki parallel tuwri` si`zi`q	$I_2 = 0, K_3 = 0,$ $K_2 < 0$	$X^2 = a^2, a \neq 0$
				8	Yeki jori`ma parallel tuwri` si`zi`q	$I_2 = 0, K_3 = 0,$ $K_2 > 0$	$X^2 = -a^2, a \neq 0$
				9	U`stpe-u`st tu`siwshi tuwri` si`zi`q	$I_2 = 0, K_3 = 0,$ $K_2 = 0$	$X^2 = 0$

Parabola to`besi parabola ko`sheri ten`lemesi menen parabola ten`lemesin birgelikte sheshiw na`tiyjesinde, yag`ni`y parabola ko`sherinin`

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11} + a_{12}} = 0 \quad (12)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + \frac{a_{22}a_{23} + a_{21}a_{13}}{a_{11} + a_{12}} = 0$$

ten`lemesi parabola ten`lemesi menen birge sheshilip tabi`ladi`.

$$\left\{ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \right\} \quad (13)$$

Sanlardan ibarat vektor parabola ko'sherine parallel boli`p, do`neslik ta`repine bag`i`tlang`an. Parabolani`n` parametri

$$p = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}} \quad (14)$$

formuladan ani`qlanadi`.

Yeger yekinshi ta`rtipli si`zi`q yeki tuwri` si`zi`qqa aji`ralsa, bul tuwri` si`zi`qlar ten`lemelerin du`ziw ushi`n si`zi`q ten`lemesinin` shep ta`repin si`zi`qli` ko`beytiwshilerga aji`rati`p, wolardi`n` ha`r biri nolge ten`lestiriledi.

(1) ten`leme menen berilgen yekinshi ta`rtipli si`zi`q worayi`ni`n` koordinatalari`

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Ten`lemeler sistemasi`nan ani`qlanadi`.

Yeger $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ bolsa, wol jag`dayda **jalg`i`z** woray bar.

Yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n`  $\{l, m\}$  vektorg`a parallel xordalarg`a tu`yinles bolg`an diametri

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0$$

Yamasa

$$lF_x + mF_y = 0$$

Ten`leme` menen ani`qlanadi`, bul jerdegi

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13},$$

$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

An`latpalar si`zi`q ten`lemesinin` shep ta`repinen sa`ykes  $x$  ha`m y boyi`nsha ali`ng`an dara tuwi`ndi` lari`ni`n` yari`mi`na ten`.

Yeger xorda bag`i`ti`ni`n` mu`yesh koeficienti k bolsa, diametr ten`lemesi to`mendegi ko`riniste boladi`:

$$F_x + kF_y = 0$$

Worayli` si`zi`qti`n` barli`q diametrleri woray arqali` wo`tedi.

Parabola diametrlari wo`z-ara parallel boladi`, woldi`n` mu`yesh koefficienti

$$K = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad (a_{12} \neq 0) \quad \text{yamasa}$$

$$K = -\frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ bolsa, } (a_{22} \neq 0) \text{ ge ten` boladi`}.$$

$a_{12} = a_{22} = 0$ bolgan jag`dayda diametrlari Oy ko`sherine parallel boladi`. Wo`z-ara tu`yinles eki diametrlar din` bag`i`tlawshi`  $\{l_1, m_1\}, \{l_2, m_2\}$  vektorlari`

$$a_{11}l_1l_2 + a_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) + a_{22}m_1m_2 \quad (30)$$

sha`rtti qanaatlandi`radi`.

Tu`yinles bag`i`tlar mu`yesh koefficientlar menen berilgen (30) sha`rt to`mendegi ko`rinishke keledi:

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0$$

Koordinatalar ko`sherleri yekinshi ta`rtipli si`zi`qqa qarata tu`yinles bolsa, ten`leme`de koordinatalar ko`beymesi qatnaspaydi` ($a_{12} = 0$).

Worayg`a iye si`zi`qti`n` tu`yinles diametrlariga qarata ten`lemesi

$$a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{33} = 0$$

ko`rinishke iye.

Yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` simmetriya ko`sheri tu`yinles xordalarg`a perpendikulyar diametr boladi`.

Worayli` si`zi`qlar yeki ko`sherge iye boladi`. Tuvri` mu`yeshli koordinatalar sistemasi`nda koordinatalar ko`sherlarini`n` mu`yesh koefficientlari

$$a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \quad (a_{12} \neq 0)$$

ten`lemeden ani`qlanadi`.

Parabola jalg`i`z ko`sherge iye. Tuvri` mu`yeshli koordinatalar sistemasi`nda ko`sherge tu`yinles bolgan xordalardi`n` wortalari`ni`n` mu`yesh koefficientin

$$k = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad a_{11} \neq 0 \text{ sha`rtte} \quad \text{yamasa}$$

$$k = \frac{a_{22}}{a_{12}}, \quad a_{12} \neq 0 \text{ sha`rtte} \quad \text{ten`likten ani`qlanadi`}.$$

$a_{11} = a_{12} = 0$ jagʻdayda parabolani n koʻsherge perpendikulyar xordalari Oy koʻsherine parallel boladi.

Bir neshe miʻsallar qaraymiʻz:

1-miʻsal. Toʻmendegi tenʻleme menen berilgen yekinshi taʻrtipli siʻziʻqti n tuʻri haʻm jaylasi wiʻ aniʻqlansi n:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Sheshiliwi: Berilgen tenʻleme den daʻslep $a_{11} = 5, a_{12} = 2, a_{22} = 8, a_{13} = -16, a_{23} = -28, a_{33} = 80$ ge tenʻ yekenligin aniʻqlap alamiʻz.

Soni nan toʻmendegi invariantlardi aniʻqlaymiʻz:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 5 + 8 = 13$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296$$

Demek $I_2 > 0, I_1 K_3 < 0$ yeken. Joqari da keltirilgen tablicag a qaraymiʻz. Yekinshi taʻrtipli siʻziʻq I toparg a tiyisli yekenligin aniʻqlap, woni n tenʻlemesin

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0 \quad (*)$$

koʻrinis te izleyviz.

Bul jerdegi λ_1, λ_2 koeficientilerdi $\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0$ xarakteristikali q tenʻlemeden tabamiʻz:

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$$

Bul tabi lg anlardi joqari dag i (*) tenʻlemege apari p qoysaq:

$$4X^2 + 9Y^2 - \frac{1296}{36} = 0$$

$$4X^2 + 9Y^2 = 36$$

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Koʻriniske keledi. Bul ellips tin tenʻlemesinen ibarat yekenligi maʻlim.

Keyingi basqishta ellipstin` jaylasi`wi`n ani`qlaymi`z yag`ni`y si`zi`lmasi`n keltirip shig`arami`z. Buni`n ushi`n si`zi`qti`n` worayi`n ani`qlap alami`z:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ x + 4y - 14 = 0 \end{cases}$$

Bul ten`lemeler sistemasi`n sheship, $x = 2$, $y = 3$ ke iye bolami`z.

Demek si`zi`q worayi` $O(2,3)$ noqatta yeken.

U`lken ko`sherdi`n` yag`ni`y $O'x$ ko`sherdi`n` mu`yesh koefficientin ani`qlaymi`z:

$$k = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Bas diametr ten`leme`leri

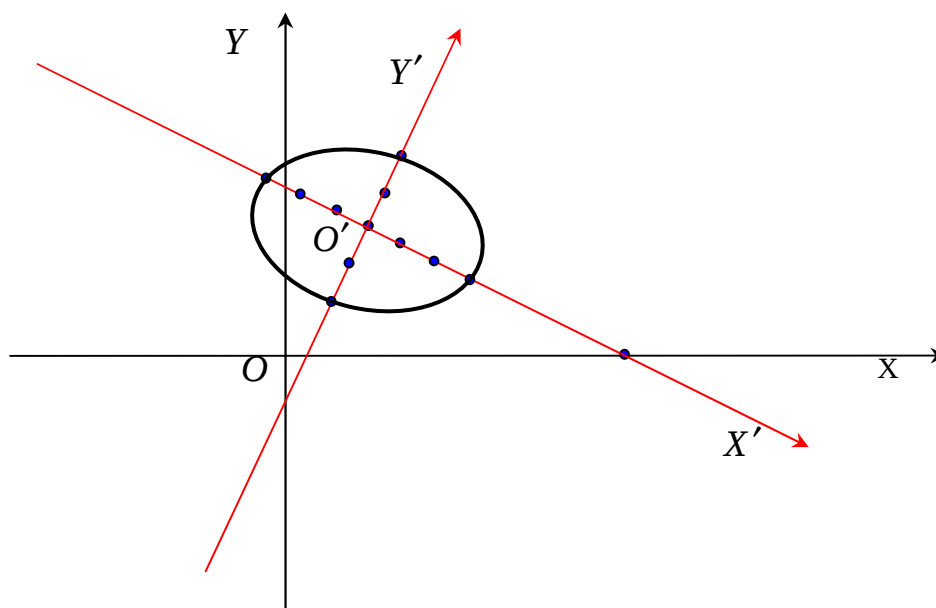
$$x + 2y - 8 = 0, \quad 2x - y - 1 = 0$$

tu`rlarine iye boladi`. Yeski koordinatalar sistemasi`na qarata bul yeki tuwri` si`zi`qti` jasap alami`z. Wolardi` jan`a koordinatalar sistemasi` retinde qabi`l yetemiz.

Si`zi`lmada ko`sherler sa`ykes $O'X'$ ha`m $O'Y'$ ler menen belgilengen.

Ellipsimizde $a = 3$, al $b = 2$ yekenligi ma`lim.

Bul tabi`lg`anlardan ellipsti an`sat si`zi`w mu`mkin (1-si`zi`lma).



1-si`zi`lma

2-mi'sal. To'mendegi yekinshi ta'rtpili si'zi'qti'n' tu'rin ani'qlan' ha'm wol si'zi'qti' jasan'

$$7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0.$$

Sheshiliwi: Bul jerdede joqari'dag'i' mi'saldag'i'day kerekli mag'li'wmatlardi' tabi'wg'a ha'reket qi'lami'z:

$$a_{11} = 7, a_{12} = -12, a_{22} = 0, a_{13} = -19, a_{23} = 12, a_{33} = 175$$

$$I_1 = 7, I_2 = -144, K_3 = -20736$$

Demek $I_2 < 0, K_3 \neq 0$. Sonli'qtan bul yekinshi ta'rtpili si'zi'qti'n' I' toparg'a derek yekenligin bildiredi.

Xarakteristikali'q ten'lemenin' korenlerin tabi'wdi' qarasti'rami'z:

$$\lambda^2 - 7\lambda - 144 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -9, \lambda_2 = 16.$$

Bul tabi'lg'anlardi' $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$ ten'lemege qoyi'p,

a'piwayi'lasti'ri'wlar wori'nlayi'q:

$$-9X^2 + 16Y^2 + \frac{(-20736)}{(-144)} = 0$$

$$9X^2 - 16Y^2 = 144 \Rightarrow \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$$

Haqi'yqi'y yari'm ko'sheri $a = 4$, jori'ma yari'm ko'sheri $b = 3$ bolg'an giperbola ten'lemesine iye bolami'z.

Si'zi'qti'n' worayi'n bolsa

$$\begin{cases} 7x - 12y - 19 = 0 \\ -12x + 12 = 0 \end{cases}$$

ten'lemeler sistemasi'nan tabami'z ha'm wol $O(1, -1)$ ge ten'.

Yendi bul giperbolani'n' koordinatalar ko'sherlerine qarata jaylasi'wi'n ani'qlaymi'z:

Da'slep haqi'yqi'y ko'sherdin' mu'yeshlik koefficientin ani'qlap alayi'q:

$$k = \frac{-9-7}{-12} = \frac{4}{3}, \text{ demek } k = \frac{4}{3}.$$

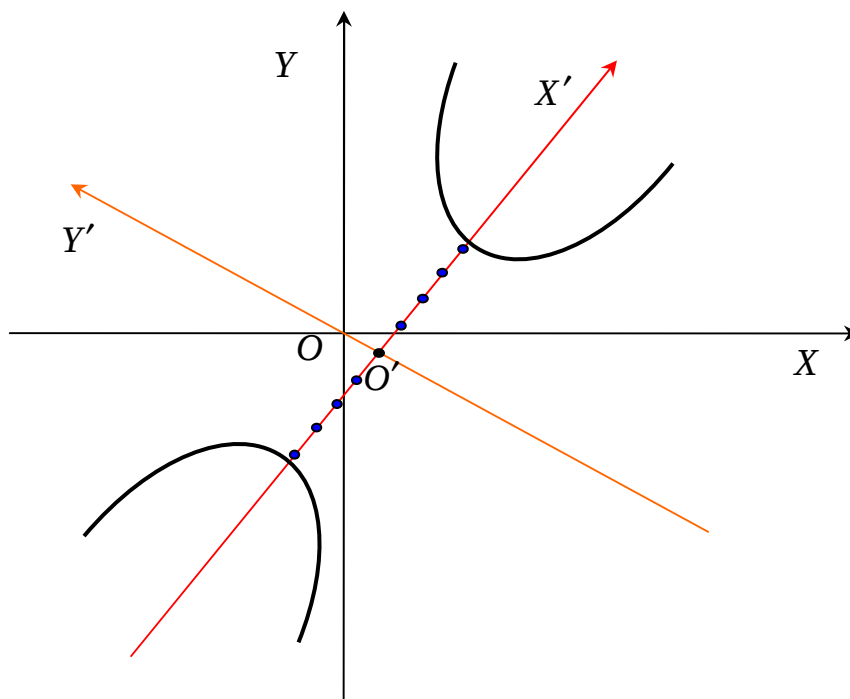
Bas diametr ten'leme'leri bolsa:

$$y + 1 = \frac{4}{3}(x - 1) \text{ ha'm } y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 1).$$

Bunnan

$4x - 3y - 7 = 0$, $3x + 4y + 1 = 0$ ten'lemelerine iye bolami'z.

Bul tabi'lg'anlar boyi'nsha giperbolani' si'zi'w mu'mkin (2-si'zi'lma).



2-si'zi'lma

3-mi'sal. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$ ten'leme' menen berilgen yekinshi ta'rtpili si'zi'qti'n' tu'ri ani'qlansin.

Sheshiliwi: Da'slep si'zi'qti'n' qaysi' toparg'a tiyisli yekenligin ani'qlaymi'z. Bul ushi'n to'mendegi mag'li'wmatlardi' ani'qlap alami'z:

$$a_{11} = 9, a_{12} = 12, a_{22} = 16, a_{13} = -115, a_{23} = 55, a_{33} = -475$$

$$I_1 = 25, I_2 = 0, K_3 = 390625$$

Demek $I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$. Sonli'qtan yekinshi ta'rtpili si'zi'q paraboladan ibarat boladi'. Ten'lemesi

$$I_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}Y = 0 \text{ ko`rinis`te izlenedi.}$$

$$25X^2 \pm 2 \cdot \sqrt{15625}Y = 0 \Rightarrow X^2 = 10Y.$$

To'mendegishe tu'rlendiriwler jasaymi'z:

$X = X'$, $Y = Y'$. Wol jag'dayda parabola ten'lemesi $Y'^2 = 10X'$ ko`riniske keledi.

Yendi parabolani`n` to`besin tabi`wdi` qarasti`rami`z:

$$\begin{cases} 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0 \\ 3x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

Bul ten`lemeler sistemasi`n sheshemiz ha`m  $x = -1$ ,  $y = 2$  degen sheshimge iye bolami`z. Demek parabola to`besi $C(-1, 2)$ noqatta yeken.

Do`n`eslik ta`repine bag`i` tlang`an ko`sher vektori` bolsa

$$\left\{ \begin{vmatrix} 12 & 16 \\ -115 & 55 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ -115 & 55 \end{vmatrix} \right\} = \left\{ 1; \frac{3}{4} \right\} = \{4; 3\} = \left\{ \frac{4}{5}; -\frac{3}{5} \right\}$$

TESTLER

$$1. \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases} \text{ sistemani` qanaatlandi`ri`wshi` noqat}$$

koordinatalari` yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` ... dep ataladi`

A. Worayi`.

B. Noqati`

C. Uri`nbasi`

D. Ten`lemesi

2. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q ushi`n

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ bolsa, yekinshi ta`rtipli si`zi`q ...}$$

A. Jalg`i`z worayg`a iye

B. Sheksiz ko`p worayg`a iye

C. Worayg`a iye yemes

D. duri`s juwap joq

3. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q ushi`n

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ bolsa, yekinshi ta`rtipli si`zi`q ...}$$

A. Sheksiz ko`p worayg`a iye

B. Jalg`i`z worayg`a iye

C. Worayg`a iye yemes

D. Duri`s juwap joq

4. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q ushi`n

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ bolsa, yekinshi ta`rtipli si`zi`q ...}$$

A. Sheksiz ko`p worayg`a iye

B. Jalg`i`z worayg`a iye

C. Worayg`a iye yemes

D. Duri`s juwap joq

5. $\{l, m\}$ bag`i`t asi`mtotik bag`i`t boli`wi` ushi`n qanday sha`rt wori`nlani`w kerek.

A. $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$

B. $a_{11}l + 2a_{12}lm + a_{22}m = 0$

C. $a_{11}l - 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$

D. $a_{11}l - 2a_{12}lm - a_{22}m^2 = 0$

6. $\{l, m\}$ bag'i't ushi'n $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ sha'rt wori'nlansa, bul bag'i't ...

- A. Asimptotikali`q
- B. Noasi`mtotik
- C. Bag`i`tlawshi`
- D. Duri`s juwap joq

7. Asimptotikali`q yemes bag`i`ttag`i` tuwri` si`zi`q yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` ... dep ataladi`.

- A. Uri`nbasi`
- B. Diametri
- C. Asimptotasi`
- D. Duri`s juwap joq

8. Asimptotikali`q bag`i`ttag`i` tuwri` si`zi`q yekinshi ta`rtipli si`zi`q penen kesilispese wol yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` ... dep ataladi`.

- A. Asimptotasi`
- B. Diametri
- C. Uri`nbasi`
- D. Duri`s juwap joq

9. Qanday da bir bag`i`t wo`zine perpendikulyar bag`i`tqa tu`yinles bolsa, wol .. bag`i`t dep ataladi`.

- A. Bas
- B. Asimptotikali`q
- C. Asimptotikali`q emes
- D. Tu`yinles

10. Jalg`i`z worayg`a iye bolmag`an yekinshi ta`rtipli si`zi`qlar ushi`n wo`z-ara perpendikulyar bas bag`i`t neshew?

- A. Yekew
- B. Birew
- C. U`shew
- D. Joq

11. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x + 18y + 11 = 0$ yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` worayi`n ani`qlan`.

- A. (1, 1)
- B. (-1, 1)
- C. (1, -1)
- D. (-1, -1)

12. $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$ yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n` worayi`n ani`qlan`.

- A. (7, 5)
- B. (5, 7)
- C. (-7, -5)
- D. (7, -5)

13. $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$ ten`leme menen qanday yekinshi ta`rtipli si`zi`q berilgen.

- A. Ellips ($\Delta \neq 0, \delta > 0$)
- B. Giperbola ($\Delta \neq 0, \delta < 0$)
- C. Parabola ($\Delta \neq 0, \delta = 0$)
- D. Duri`s juwap joq.

14. $x^2 + y^2 + 6xy + 6x + 2y - 1 = 0$ yekinshi ta`rtipli si`zi`q tu`rin ani`qlan`.

- A. Giperbola
- B. Ellips
- C. Parabola
- D. Duri`s juwap joq.

15. $x^2 - 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$

- A. Giperbola ($\Delta \neq 0, \delta < 0$)
- B. Ellips ($\Delta \neq 0, \delta > 0$)
- C. Parabola ($\Delta \neq 0, \delta = 0$)
- D. Duri`s jauwap joq.

16. $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$ *yekinshi ta`rtipli si`zi`q tu`rin ani`qlan`.*

A. Kesilisiwshi tuwri` si`zi`q

B. Giperbola

C. Ellips

D. Parabola

17. $y^2 - xy - 5x + 7y + 10 = 0$ *ten`leme yeki tuwri` si`zi`qti` ani`qlaydi`, usi` yeki tuwri` si`zi`q ten`lemesin tabi`n`.*

A. $y + 5 = 0$ ha`m $y = x - 2$

B. $y - 5 = 0$ ha`m $y = x - 2$

C. $y + 5 = 0$ ha`m $y = x + 2$

D. $y + 5x = 0$ ha`m $y = x - 2$

18. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ *yekinshi ta`rtipli si`zi`q ten`lemesin kanonikali`q ko`riniske keltirin`.*

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$

19. $xy - 1 = 0$ *ten`lemen qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi ... ibarat.*

A. Giperboladan

B. Ellipsten

C. Tuwri` si`zi`qtan

D. Paraboladan

20. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ *yekinshi ta`rtipli si`zi`q ten`lemesin kanonikali`q ko`riniske keltirin`.*

A. $y^2 = 4\sqrt{2}x$

B. $y^2 = 2\sqrt{2}x$

C. $y^2 = 2x$

D. $y^2 = 4x$

21. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ *ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi ... dep ataladi`.*

- A. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q
- B. Tuvri` si`zi`q
- C. Uri`nba ten`lemesi
- D. Duri`s juwap joq

22. *Yekinshi ta`rtipli si`zi`q worayi`ni`n` koordinatalari` qanday tabi`ladi`?*

- A. $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$ sistema ja`rdeminde
- B. $\begin{cases} a_{11}x - a_{12}y = 0 \\ a_{21}x - a_{22}y = 0 \end{cases}$ sistema ja`rdeminde
- C. $\begin{cases} a_{11}x - a_{12}y - a_{13} = 0 \\ a_{21}x - a_{22}y - a_{23} = 0 \end{cases}$ sistema ja`rdeminde
- D. $\begin{cases} a_{13}x + a_{12}y + a_{11} = 0 \\ a_{23}x + a_{22}y + a_{21} = 0 \end{cases}$ sistema ja`rdeminde

23. $x^2 + y^2 = 0$ *ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi ... ibarat.*

- A. Bir noqattan
- B. Ellipsten
- C. Giperboladan
- D. Paraboladan

24. $x^2 - y^2 = 0$ *ten`lemeni qanaatlandi`ri`wshi` noqatlar ko`pligi ... ibarat.*

- A. Eki tuwri` si`zi`qtan
- B. Ellipsten
- C. Giperboladan
- D. Paraboladan

25. $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$ yekinshi ta`rtipli si`zi`q ten`lemesin kanonikali`q ko`riniske keltirin`.

A. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$

B. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{x^2}{-1} - \frac{y^2}{9} = 1$

D. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{-9} = 1$

26. $x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0$, $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$ si`zi`qlarg`i`n` uli`wma diametrin tabi`n`.

A. $x - y + 1 = 0$

B. $x - y - 1 = 0$

C. $x + y + 1 = 0$

D. $x - y = 0$

27. $x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$ giperbolani`n` asimptotalari`n` tabi`n`.

A. $7x - 35y + 22 = 0$, $7x + 14y + 20 = 0$

B. $7x - 5y + 22 = 0$, $7x + 14y + 20 = 0$

C. $7x - 35y + 2 = 0$, $7x + 14y + 20 = 0$

D. $7x - 35y + 22 = 0$, $x + 14y + 20 = 0$

28. Asimptotalari`  $2x - y + 1 = 0$ ,  $x + 2y - 7 = 0$  tuzwri` si`zi`qlardan ibarat bolg`an giperbolani`n` fokusi` $F(-2;2)$ noqatta joylasqanli`g`i` ma`lim bolsa, woni`n` ten`lemesin du`zin`.

A. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$

B. $4x^2 + 6xy - y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$

C. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - x + 18y - 39 = 0$

D. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + y - 39 = 0$

29. Fokusi`  $F(-1;-2)$  noqatta, direktrisa ten`lemesi $x - y + 8 = 0$ bolg`an parabola ten`lemesin du`zin`.

A. $x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 24y - 54 = 0$

B. $x^2 + 2xy + y^2 - x + 24y - 54 = 0$

C. $x^2 + 2xy + y^2 - 12x + y - 54 = 0$

D. $x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 24y - 14 = 0$

30. $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x = 0$ yekinshi ta`rtipli si`zi`qti`n`  $2x - 3y = 0$  tuwri` si`zi`qqa parallel bolg`an diametrinin` ten`lemesin tabi`n`.

A. $4x - 6y + 1 = 0$

B. $4x - y + 1 = 0$

C. $x - 6y + 1 = 0$

D. $4x + 6y + 1 = 0$

WO`Z BETİNSHE JUMIS USHIN TAPSIRMALAR

1. To`mendegi yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` worayi`n tabi`n`.

a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

v) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$

g) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

d) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

2. Yekinshi ta'rtipli si'zi'q ha'm wolardi'n` diametri sa'ykes  $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$  ha'm  $x + 2y - 2 = 0$  ten'lemeler menen berilgen. Bul diametrge tu'yinles diametr ten'lemesi du'zin`.

3. Berilgen bes $(0;0)$, $(0;2)$, $(-1;0)$, $(-2;1)$, $(-1;3)$ noqatlardan wo'tiwshi yekinshi ta'rtipli si'zi'q ten'lemesin du'zin`.

4. Koordinatalar basi`  $O'(1;0)$  noqatqa ko'shirilse, wol jag`dayda $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$ yekinshi ta'rtipli si'zi'q ten'lemesi qanday ko`riniske keledi.

5. To'mendegi giperbolalardi'n` asimptotalari'n` tabi'n`.

a) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$

b) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

c) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$

d) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$

6. Ellips ten'lemesi $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ ko`riniste ha'm yeki tu'yinles diametrlerden biri u'lken ko'sher menen  $30^\circ$  mu'yesh payda yetedi. Diametrlerdin` bag'i'tlari` arasi`ndag'i` mu'yesh tabi'lsin.

7. Ellips ten'lemesi $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{3} = 1$ ko`riniste ha'm yeki tu'yinles diametrleri arasi`ndag'i` mu'yesh  $60^\circ$  qa ten` bolsa, diametrlerdin` uzi'nli`qlari` tabi'lsin.

8. Giperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$ ko`riniste bolsa, wolardi'n` 45° mu'yesh payda etiwshi tu'yinles diametrlerinin` ten'lemesin du'zin`.

9. To'mendegi yekinshi ta'rtipli si'zi'qlardi'n` bas ko'sherlerin tabi'n`.

a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$

b) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$

c) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$

10. Parabola $x^2 = 6y$ ten'leme ja`rdeminde berilgen. Wolardi'n` $4x - y - 5 = 0$

tuwri` si`zi`q bag`i`ti`na tu`yinles diametr ten`lemesin du`zin`.

11. Parabola $y^2 = 2px$ ten`leme ja`rdeminde berilgen. Wolardi`n` parabola ko`sheri menen  $45^\circ$  mu`yesh payda yetiwshi xordalarg`a tu`yinles diametr ten`lemesi du`zilsin.

12. Parabola $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$ ten`leme ja`rdeminde berilgen. Wolardi`n` abscissa ko`sherine tu`yinles diametr ten`lemesin du`zin`.

I. To`mendegi yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` qaysi`lari`ni`n orayg`a iye, qaysi`lari`ni`n orayg`a iye emes yekinshi ta`rtipli si`zi`qlar ekenin ani`qlan`.

1) $3x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

2) $x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$

3) $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

4) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

5) $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 3 = 0$

II. To`mendegi yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` ko`rinishin ani`qlan`.

1) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$

2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

3) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$

4) $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$

5) $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$

PAYDALANILG`AN A`DEBIYATLAR:

1. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия. – Москва: “Наука”, 1990 г., стр. 671.
2. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar to`plami`. – Toshkent, - 2005 y, 546 b.
3. Галикеев М.Г., Аналитикалық геометрия курсы. – Нөкис: “Қарақалпақстан” баспасы, 1974 ж., 435 б.
4. Додажонов Н. Д., Жўраева М. Ш. Геометрия. 1-қисм. – Тошкент: “Ўқитувчи”, 1996 й., 380 б.
5. Ильин В.А. Позняк Э.К. Аналитическая геометрия. – Москва: “Наука” 1988 г., стр 223.
6. Narmanov A.Y. Analitik geometriya. – Toshkent, “O`zbekiston Faylasuflari Milliy jamiyati” nashriyoti, 2008 y., 176 b.
7. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – Москва, 1970 й., 336 с.
8. [www. a-geometry. narod. ru](http://www.a-geometry.narod.ru).

M A Z M U N I

<i>Kirisiw</i>	3
§1. YEKINSHI TA`RTIPLI SIZIQLARDIN` ULIWMA TEN`LEMESI.....	4
1.1. Yekinshi ta`rtipli si`zi`qlardi`n` worayi`	4
1.2. Yekinshi ta`rtipli si`zi`q ha`m tuwri` si`zi`qti`n` wo`z ara jaylasi`wi.....	9
1.3. Tu`yinles bag`i`tlar ha`m bas bag`i`tlar.	12
§2.YEKINSHI TA`RTIPLI SI`ZIQLARDI INVARIANTLAR JA`RDEMİNDE İZERTLEW HA`M A`PIWAYI`LASTI`RIW.....	19
Testler.....	31
Wo`z betinshe jumi`s ushi`n tapsi`rmalar.....	38
Paydalani`lg`an a`debiyatlar	40

Du'ziwshi:

Guljaxan A'jiniyaz ati'ndag'i' No'kis ma'mleketlik pedagogikali'q
Xojanazarovna instituti' «Uli'wma matematika» kafedrası' docenti,
Qaypnazarova - fizika - matematika ilimlerinin' kandidati'.

YEKINSHI TA'RTIPLI SIZIQLARDIN' ULIWMA KORI'NI'STEGI'
TEN'LEMELERIN A'PWAYILASTIRIW
(matematikani' woqi'ti'w metodikasi', fizikani' woqi'ti'w metodikasi'
bag'dar'i'ndag'i' 1-kurs talabalari' ushi'n woqi'w-metodikali'q qollanba)

A'jiniyaz ati'ndag'i' No'kis ma'mleketlik pedagogikali'q instituti'ni'n'
I'limiy-metodikali'q Ken'esi qarari' (10-aprel' 2015-ji'lg'i' №6) menen baspadan
shi'g'ari'wg'a usi'ni'lg'an.

Bas redaktor	K.M. Koshanov
Tex. redaktor	Z.B. Baltabaeva
Korrektor	A.M. Abdikarimova
Operator	N. Ni'sanbaev

A'jiniyaz ati'ndag'i' NMPİ redaktsiya-baspa bo'limi

A'jiniyaz ati'ndag'i' NMPİ baspaxanasi'nda basi'lg'an, 2015-j.

Buyi'rtpa № . Nusqasi' 100 dana. Formati' 60x84. Ko'lemi 2,75 b.t.

230105, No'kis qalasi', A.Dosnazarov ko'shesi-104. Reestr № .