O`ZBEKSTAN RESPUBLIKASI XALIQ BILIMLENDIRIW MINISTIRLIGI

A'JINIYAZ ATINDAG'I NO'KIS MA'MLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ INSTITUTI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIKA OQITIW METODIKASI KAFEDRASI

Geometriya pa`ninen

«Vektor haqqi`nda tu`sinik. Vektorlar u`stinde si`zi`qli` a`meller»

temasi` boyi`nsha

LEKTSIYA TEKSTI

N O ` K I S - 2 0 1 5

VEKTOR HAQQI`NDA TU`SINIK. VEKTORLAR U`STINDE SI`ZI`QLI` A`MELLER

Tayani`sh tu`sinikler: *Bag`i`tlan`g`an kesindi, vektor uzinlig`i`, birlik vektor, nollik vektor, kollinear vektor , vektorlardi` qosi`w, ali`w, san`g`a ko`beytiw.*

Fizikada ha`mde basqada texnikali`q ilimlerde ja`nede matematikada qaralatug`i`n shamalar tiykari`nan yeki tu`rge bo`linedi.

Birinshisi, wo`zlerinin` san ma`nisleri menen ushi`rasatug`i`n yag`ni`y bir san menen toli`q ani`qlanatug`i`n fizikali`q yamasa mexanikali`q shamalardi` gezlestiremiz (ti`g`i`zli`q, massa, temperatura, waqi`t, maydan, ko`lem h.t.b). Bul shamalar skalyar shamalar dep ataladi`.

Yekinshisi san ma`nisi menen toli`q ani`qlana almaytug`i`n shamalardi` ushi`rasti`rami`z. Bunday shamalardi`n` san ma`nisleri menen birge wolardi`n` bag`i`tlari` ko`rsetiliwi talap etiledi ha`m bul shamalar vektorli`q shamalar (ku`sh, tezlik, tezleniw) boladi`.

1- ani`qlama: Bag`i`tlang`an kesindi vektor dep ataladi`.

Biz vektordi` $\overrightarrow{AB}$ ko`riniste yamasa bir kishi lati`n ha`ribi menen $\bar{a}$ ko`riniste belgileymiz. Vektordi` $\overrightarrow{AB}$ ko`riniste belgilesek, $A, B$ noqatlar sa`ykes vektordi`n` basi` ha`m aqi`ri` jaylasqan noqatlar boli`p tabi`ladi`. $A$ ha`m B noqatlar arasi`ndag`i` arali`q $\overrightarrow{AB}$ vektordi`n` uzi`nli`g`i` dep ataladi`, wol bolsa $|\overrightarrow{AB}|$, $|\bar{a}|$ ko`riniste belgilenedi (1.a-su`wret).

Bag`i`tlari` birdey bolg`an vektorlar birdey bag`i`tlang`an vektorlar dep ataladi` ha`m $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ ko`riniste beriledi (1.b-su`wret).

Bag`i`tlari` qarama-qarsi` bolg`an vektorlar qarama-qarsi` vektorlar dep ataladi` ha`m $\bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ ko`riniste beriledi (1.c-su`wret).

Yeger vektordi`n` basi` ha`m aqi`ri` bir noqatta bolsa, wol *nol` vektor* dep ataladi`. Nol` vektor bag`i`tg`a iye yemes, woni`n` uzi`nli`g`i` bolsa nol`ge ten`.

Uzi`nli`g`i` birge ten` bolg`an vektor *birlik vektor* yamasa *ort* dep ataladi`.

2-ani`qlama: Bir tuwri` si`zi`qqa parallel` bolg`an yeki vektor kollinear vektorlar dep ataladi`.

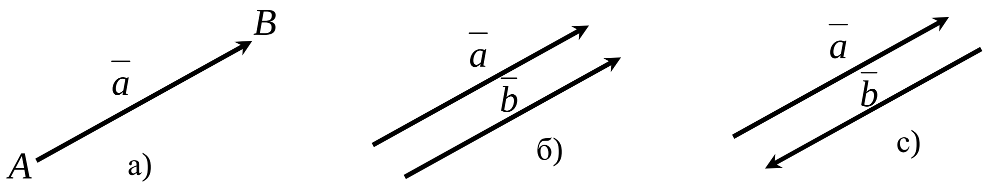
Kerisinshe, yeger bir tuwri` si`zi`qqa parallel` bolmasa, wonda bul vektorlar nokollinear vektorlar dep ataladi`.

Birdey uzi`nli`qqa, birdey bag`i`tqa iye bolg`an ha`m kollinear bolg`an vektorlarg`a ten` vektorlar dep ataladi` ha`m $\vec{a}=\vec{b}$ ko`riniste belgilenedi.

3-ani`qlama: U`sh $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorlar bir tegislikke parallel` bolsa, wolar komplanar vektorlar dep ataladi`.*

Kerisinshe, yeger bir tegislikke parallel` bolmasa, wonda bul vektorlar nokomplanar(komplanar yemes) vektorlar dep ataladi`.

Yeger vektorlar parallel` bolsa, wolardi` parallel` ko`shiriw na`tiyjesinde bir tegislikte jaylasti`ri`wi`mi`z mu`mkin.



1-su`wret.

Vektorlar u`stinde wori`nlanatug`i`n to`mendegi a`meller *si`zi`qli` a`meller* dep ataladi`.

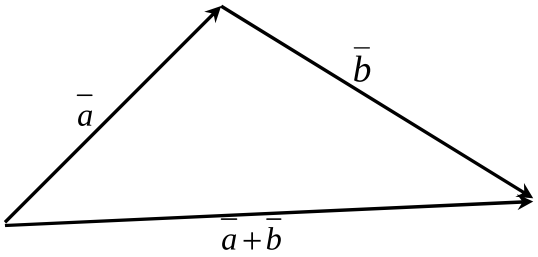
1. Vektorlardi` qosi`w

2. Vektorlardi` ali`w

3. Vektordi` sang`a ko`beytiw

1.Vektorlardi` qosi`w

*4-ani`qlama:* Yeki $\overline{a}=\overrightarrow{AB}$ ha`m $\overline{b}=\overrightarrow{CD}$ vektorlardan $\overline{b}=\overrightarrow{CD}$ vektor basi` $\overline{a}=\overrightarrow{AB}$ vektor aqi`ri`na qoyi`lg`anda $\overrightarrow{AB}$ vektor basi`nan $\overrightarrow{CD}$ vektor aqi`ri`na bag`i`tlang`an vektor, bul vektorlardi`n` qosi`ndi`si` dep ataladi` ha`m $\overline{a}+\overline{b}$ ko`riniste jazi`ladi`. (2-su`wret)



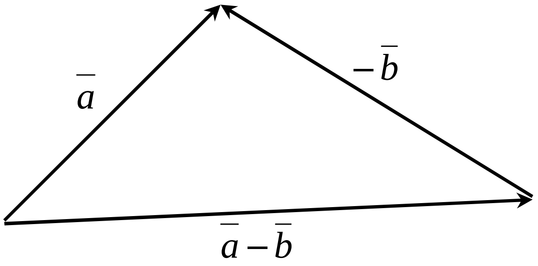
2-su`wret

Vektorlardi` bul usi`lda qosi`w qag`i`ydasi` u`shmu`yeshlik qag`i`ydasi` dep ataladi`.

2. Vektorlardi` ali`w

Arifmetikadag`i` si`yaqli`, vektorlardi` ali`w a`meli qosi`w a`meline keri a`mel si`pati`nda ani`qlanadi`.

*5-ani`qlama:* Berilgen $\overline{a}$ ha`m $\overline{b}$ vektorlari`ni`n` ayi`rmasi` dep, $\overline{a}$ vektor menen $\overline{b}$ vektorg`a qarama-qarsi` bolg`an $-\overline{b}$ vektordi`n` qosi`ndi`si`na ayti`ladi`. (3-su`wret)

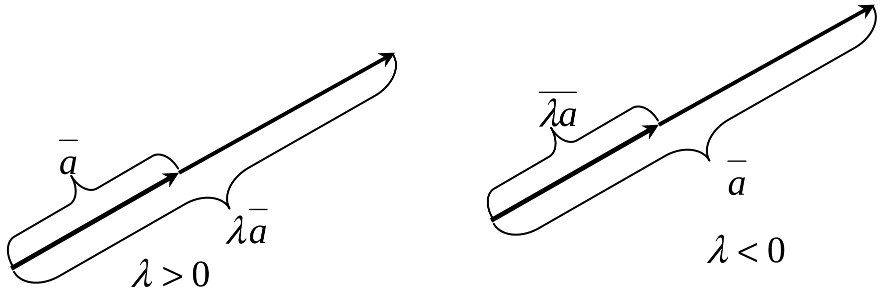


3-su`wret

Vektorlardi` qosi`w ha`m ali`wdi`n` parallelogramm usi`li`da bar boli`p, bul usi`ldi` talabalarg`a wo`z betinshe u`yreniwge qaldi`rami`z.

3. Vektordi` sang`a ko`beytiw

6-ani`qlama: Berilgen $\lambda$ haqi`yqi`y san ha`m $\overline{a}$ vektordi`n` ko`beymesi sonday vektor boli`p tabi`ladi`, woni`n` uzi`nli`g`i` $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ g`a ten`, bag`i`ti` $\lambda > 0$ bolg`anda $\overline{a}$ vektor bag`i`ti` menen birdey, $\lambda < 0$ bolg`anda bolsa $\overline{a}$ vektor bag`i`ti`na qarama-qarsi` boladi`.



4-su`wret

Ko`beyme $\lambda\overline{a}$ ko`rinisinde jazi`ladi`.

Vektorlar algebrasi` degende, vektorlar ko`pliginde vektorlardi` qosi`w ha`m skalyar sang`a ko`beytiw a`melleri tu`siniledi. Biz $V$ menen ha`mme vektorlar ko`pligin belgileymiz. Bunda vektorlari`mi`z bir tuwri` si`zi`qta, bir tegislikte yaki ken`islikte jaylasqan boli`wi` mu`mkin.

Vektorlardi` qosi`w ha`m skalyar sang`a ko`beytiw a`melleri to`mendegi qa`siyetlerge iye:

1. $\forall\overline{a},\overline{b}\in V$ ushi`n; $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ –kommutativlik.

2. $\forall\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in V$ ushi`n; $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$ -associativlik.

3. $\forall\overline{a}\in V$ ushi`n $\exists\,\overline{b}\in V$ $\overline{a}+\overline{b}=\overline{0},\overline{b}=-\overline{a}$

4. $\forall\overline{a}\in V$ ushi`n; $\overline{a}\cdot 1=\overline{a}$ -birlik element.

5. $\forall\overline{a},\overline{b}\in V$ ha`m $\forall\lambda\in R$ ushi`n $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$

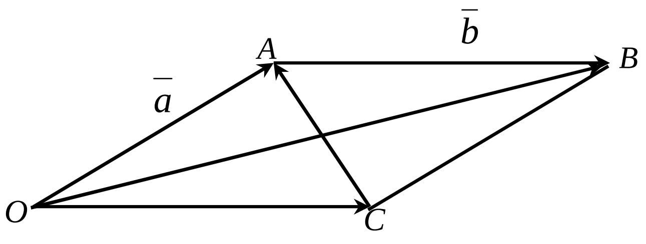
6. $\forall\lambda,\mu\in R$ ha`m $\forall\overline{a}\in V$ ushi`n: $\overline{a}(\lambda+\mu)=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$

7. $\forall\lambda,\mu\in R$ ha`m $\forall\overline{a}\in V$ ushi`n $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$

8. $\forall\overline{a}\in V$ ushi`n $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$

Bul qa`siyetlerdin` bazi` birewlerin da`lilleymiz, bazi`lari`ni`n` da`lilleniwi bolsa talabalarg`a wo`z betinshe jumi`sqa beriledi.

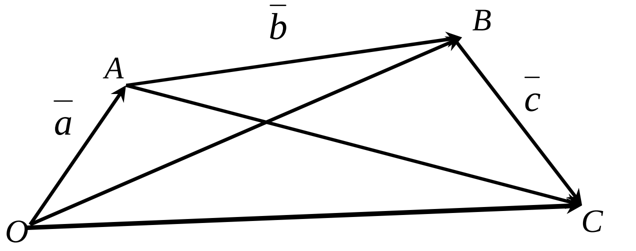
Birinshi qa`siyetti da`lillew ushi`n qa`legen yeki $\bar{a}$ ha`m $\bar{b}$ vektorlardi`n` basi`n bir O noqatqa jaylasti`rami`z ha`m



5-su`wret

5-su`wrettegi $OABC$ parallelogrammdi` payda etemiz. Bul parallelogrammdag`i` OAB u`shmu`yeshliginen $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$ ten`lik, $OCB$ u`shmu`yeshlikten bolsa $\overline{OB} = \bar{b} + \bar{a}$ ten`likti payda etemiz. Demek, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Yekinshi qa`siyetti da`liyllew ushi`n $\bar{a}$ vektordi`n` basi`n O noqatqa, $\bar{b}$ vektordi`n` basi`n $\bar{a}$ vektordi`n` aqi`ri`na jaylasti`rami`z ha`m $\bar{c}$ vektordi`n` basi`n bolsa $\bar{b}$ vektordi`n` aqi`ri`na jaylasti`rami`z (6-su`wret).



6-su`wret

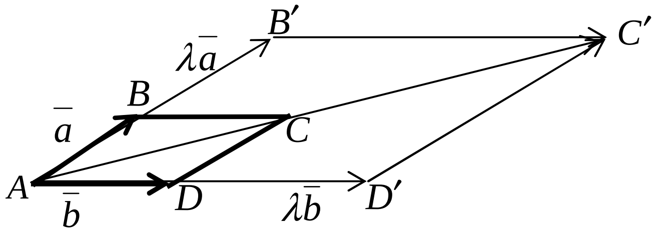
Si`zi`lmadan to`mendegi ten`liklerdi payda etemiz:

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overrightarrow{OC}$, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \overrightarrow{OC}$

Demek , $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$

Ha`r bir $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor ushi`n $\overline{b} = \overrightarrow{BA}$ vektor $\overline{a}$ vektorg`a qarama-qarsi` bag`i`tlang`an, uzi`nli`g`i` bolsa $\overline{a}$ vektordi`n` uzi`nli`g`i`na ten` vektor. Vektorlardi` qosi`w qag`i`ydasi`na ko`re $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{0}$ ten`likti payda etemiz.

Besinshi qa`siyetti da`liyllew ushi`n $\overline{a}$ ha`m $\overline{b}$ vektorlari`ni`n` baslari`n bir noqatqa jaylasti`ri`p, wolar ja`rdeminde to`mendegi $ABCD$ parallelogrammdi` payda yetemiz.



7-su`wret

Berilgen λ san ushi`n $\lambda\overline{a}$ ha`m $\lambda\overline{b}$ vektorlardan quri`lg`an $AB'C'D'$ parallelogramm $ABCD$ parallelogrammg`a uqsas. Soni`n` ushi`n woni`n` diagonali`ni`n` uzi`nli`g`i` $ABCD$ parallelogramm diagonali` uzi`nli`g`i`nan $|\lambda|$ ma`rte «u`lken». Bunnan bolsa $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$ ten`likti payda etemiz.

Alti`nshi` qa`siyetti da`liyllew ushi`n $\lambda\mu > 0$ ha`m $\lambda\mu < 0$ jag`daylardi` qaraymi`z. Birinshi jag`dayda λ ha`m $\mu$ sanlari`ni`n` belgisi birdey boladi`. Soni`n` ushi`n wolardi`n` yekewide yaki won`, yaki teris boladi`. Biz wolardi`n` yekewide teris bolg`an jag`daydi` qarayi`q. Bul jag`dayda $\overline{a}(\lambda + \mu)$, $\lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$ vektorlar $\overline{a}$ vektorg`a qarama-qarsi` bag`i`tlang`an boladi`. Demek wolar birdey bag`i`tqa iye. Wolardi`n` uzi`nli`qlari` bolsa $|\lambda + \mu||\overline{a}|$ g`a ten`. Yeger λ ha`m $\mu$ sanlari` won` san bolsa, joqari`dag`i` wori`nlang`an operaciyalar qaytalanadi`. $\lambda$ ha`m μ sanlari`ni`n` belgileri ha`r qi`yli` bolsa biz ja`ne yeki jag`daydi` qaraymi`z:

$\lambda+\mu>0$ ha`m $\lambda+\mu<0$. $\lambda+\mu>0$ bolg`anda $\overline{a}(\lambda+\mu)$, $\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}, \lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$ vektorlar $\overline{a}$ vektor menen birdey bag`i`tqa iye. $\mu\overline{a}$ vektordi`n` basi`n $\lambda\overline{a}$ vektordi`n` aqi`ri`na jaylasti`ri`p, wolardi`n` uzi`nli`qlari`da ten`ligin ko`remiz. Qalg`an jag`daylarda joqari`da keltirilgenler tiykari`nda tekseriledi.

1-teorema: Nol` vektordan wo`zgeshe $\overline{a}, \overline{b}$ *vektorlar kollinear boli`wi` ushi`n* $\lambda \in R$ *san bar boli`p,* $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ *ten`liktin` wori`nlani`wi` za`ru`rli ha`m jeterli.*

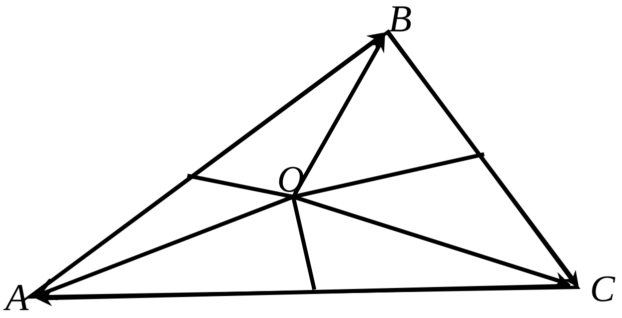
<u>Da`lilleniwi</u>. Vektorlar ushi`n $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ sha`rt wori`nlansa, $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlar kollinearli`g`i`n da`lillew a`piwayi` bolg`anli`g`i` ushi`n woni` da`lillewdi talabalardi`n` wo`zlerine tapsi`rma si`pati`nda beremiz. Bul sha`rttin` za`ru`rligin ko`rsetemiz. Yeger $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlar kollinear bolsa, wolardi` parallel` ko`shiriw na`tiyjesinde bir tuwri` si`zi`qqa jaylasti`ri`w mu`mkin. Soni`n` ushi`n wolar $l$ tuwri` si`zi`qta jatadi` ha`m wolardi`n` basi` $O$ noqatta dep yesaplaymi`z. Yeger $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlar birdey bag`i`tg`a iye bolsa, $\lambda=\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$ ushi`n $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ ten`lik wori`nlanadi`. Yeger $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlar qarama-qarsi` bag`i`tg`a iye bolsa , $\lambda=-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ ushi`n $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ ten`lik wori`nlanadi`.

Vektorlar ha`m wolar u`stinde a`meller elementar geometriyag`a tiyisli ma`selelerdi sheshiwdi an`satlasti`radi`. Sonday ma`selelerdi sheshiwdi qarasti`rami`z.

*1-ma`sele:* $ABC$ u`shmuyeshlikte $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ boli`p, $O$ awi`rli`q worayi` bolsa, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$ boli`wi`n da`lillen`.

Sheshiliwi. To`mendegi 8 -su`wret boyi`nsha vektorlardi` jazi`p alami`z:

$$\overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}-\frac{BC}{2}\right),\ \overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right), \overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$$



8-su`wret

Bul tabi`lg`an vektorlar boyi`nsha

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=0$ ten`likke iye bolami`z.

*2-ma`sele:* Qa`legen to`rtmu`yeshlik ta`replerinin` wortalari` parallelogrammni`n` to`beleri bolatug`i`nli`g`i`n da`lillen`.

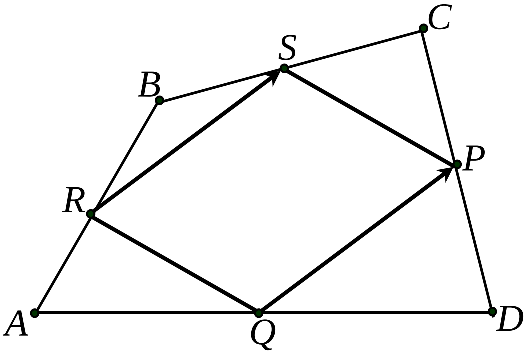
Sheshiliwi. $ABCD$ to`rtmu`yeshlikti qaraymi`z. Ta`replerinin` wortalari` sa`ykes $R,S,P,Q$ noqatlari` bolsi`n. $RSQR$ tin` parallelogramm boli`wi`n da`liyllew talap etiledi. 9–su`wret boyi`nsha to`mendegilerdi jaza alami`z:

$$\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{BS}\right)+\left(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PQ}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\right)=0$$

Sonli`qtan $\overrightarrow{RS}-\overrightarrow{QP}=0$, bunnan $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QP}$.

Demek, $RSQR$ to`rtmu`yeshliktin` qarama-qarsi` yeki ta`repi o`z-ara ten` ha`m parallel` yeken. Bul bolsa $RSQR$ to`rtmu`yeshligi parallelogramm bolatug`i`nli`g`i`n ko`rsetedi.



9-su`wret

Qadag`alaw ushi`n sorawlar

1. Vektor dep nege ayti`ladi`?
2. Vektorlar qanday belgilenedi?
3. Vektorlardi`n` qanday tu`rlerin bilesiz?
4. Vektorlar u`stinde qanday a`meller ori`nlaw mu`mkin?
5. Vektorlar u`stinde si`zi`kli` a`mellerdin` qanday qa`siyetlerin bilesiz?
6. Komplanar vektorlar dep qanday vektorlarg`a ayti`ladi`?