

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
TA'LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

OLIV MATEMATIKA KAFEDRASI

X.Q.Qarshiboyev, Sh.Djalilov, S.Xudoyberdiyev

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKADAN
MASALALAR YECHISHGA DOIR USLUBIY QO'LLANMA

SAMARQAND-2014

X.Q.Qarshiboyev, Sh.Djalilov, S.Xudoyberdiyev. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir uslubiy qo'llanma. - Samarqand, SamISI, 2014 y.

Taqrizchilar: _____
Qo'ldoshev A.Ch. - t.f.n., SamISI katta o'qituvchisi

Institut UUB da 2014 yil
“_____” _____ (bayon № _____) muhokama
qilingan va chop etishga ruxsat berilgan.

Mazkur qo'llanmada qisqacha nazariy ma'lumotlar va formulalar, tipik masalalarning yechimlari, mustaqil yechish uchun masalalarning javoblari va ko'rsatmalari berilgan. Tajribaga asoslangan ma'lumotlarni statistik tahlil qilish metodlariga e'tibor berilgan. Iqtisodga oid masalalar keltirilgan.

Qo'llanma iqtisodiy Oliy o'quv yurtlarining talabalariga mo'ljallangan.

I -bob
TASODIFIY HODISALAR

1-§. Sinashlar va hodisalar

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri “tajriba” va tajriba natijasida ro’y berishi mumkin bo’lgan “hodisa” tushunchasidir. Tajriba hodisani ro’yobga keltiruvchi shartlar majmui (shartlar kompleksi) S ning bajarilishini ta’minlashdan iboratdir. Tajribadan tajribaga o’tganda ro’y berayotgan hodisalar o’zgarib turadigan hollar hayotda keng miqyosda uchrab turadi, bu yerda, albatta, tajribani vujudga keltiruvchi shartlar majmui (kompleksi) S o’zgarmas hollar tushuniladi.

Tajriba o’tkazda, ma’lum S kompleks shartlar o’zgarmas bo’lishi talab qilinadi. Tajribaning natijasiga hodisa deb qaraymiz.

Ishonchli hodisalar deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda ro’y berishi oldindan aniq bo’lgan hodisalarga aytiladi.

1-misol. Normal atmosfera bosimida harorati 0^0 dan 100^0 gacha bo’lgan suvni suyuq, 100^0 dan yuqori haroratda gaz holatida bo’lishi va 0^0 dan past haroratda qattiq bo’lishi ishonchli hodisalar.

2-misol. Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo’lsin. Yashikdan tasodifiy olingan mahsulotning oliy sifatli bo’lishi ishonchsiz hodisa.

Ishonchsiz hodisalar deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda, ro’y bermasligi oldindan aniq bo’lgan hodisalarga aytiladi.

3-misol. Normal atmosfera bosimida 20^0 haroratda suvni qattiq bo’lishi ishonchsiz hodisa.

4-misol. Yashikda hammasi oliy sifatli mahsulotlar bo’lsin. Yashikdan tasodifiy olingan mahsulotning yaroqsiz bo’lishi ishonchsiz hodisa.

Tasodifiy hodisalar deb, ma’lum S kompleks shartlar bajarilganda ro’y berishi yoki ro’y bermasligi oldindan aniq bo’lmagan hodisalarga aytiladi.

Tasodifiy hodisalar, odatda, lotin alfavitining bosh harflari $A, B, C, \dots$ lar bilan belgilanadi.

5-misol. Simmetrik, bir jinsli tangani tashlaganimizda gerb tomoni yoki raqam tomoni tushishi tasodifiy hodisa.

6-misol. Tomonlari birdan oltigacha nomerlangan o’yin kubini tashlaganimizda juft raqam yoki toq raqam yozilgan tomoni tushishi tasodifiy hodisa.

7-misol. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatli yoki sifatsiz bo’lishi tasodifiy hodisa.

1-ta’rif. Har bir sinashda hodisani ro’y berishi boshqalarining ro’y berishini inkor etsa, bunday hodisalarga *birga ro’y bermas* hodisalar deyiladi.

2-ta’rif. Ikkita A va B hodisalardan birining ro’y berishi boshqasining ro’y berishini inkor etmasa, bunday hodisalarga *birga ro’y beruvchi* hodisalar deyiladi.

3-ta’rif. Sinashlarda qatnashayotgan hodisalar bir nechta bo’lib, har bir sinashda ulardan faqat bittasi ro’y bersa, bunday hodisalarga *birdan -bir imkoniyatli* hodisalar deyiladi.

4-ta’rif. $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalariga *to’la hodisalar gruppasi* deyiladi, agarda bulardan hyech bo’lmasa bittasining ro’y berishi ishonchli bo’lsa.

8-misol. Mergan nishonga qarata o’q uzdi. Quyidagi ikkita hodisadan biri albatta ro’y beradi: o’qning nishonga tegishi, o’qning nishonga tegmasligi.

5-ta’rif. Agar hodisalardan birining ro’y berish darajasi boshqasining ro’y berish darajasidan ortmasa, bunday hodisalarga *teng imkoniyatli* hodisalar deyiladi.

9-misol. Tangani tashlaganda “gerb” va “raqam” tomonlari tushishi teng imkoniyatli hodisalaridir. O’yin kubini tashlaganda har bir tomonini tushishi teng imkoniyatli hodisalaridir.

6-ta’rif. Birga ro’y bermas, teng imkoniyatli hamda to’la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi hodisalarga *elementar hodisalar* deyiladi.

Tajriba natijasida ro’y berishi mumkin bo’lgan barcha elementar hodisalar to’plami elementar hodisalar fazosi deyiladi. Elementar hodisalar fazosini Ω -orqali, har bir elementar hodisani ω belgilaymiz.

Agar tajriba natijasida $A, A \subseteq \Omega$ ga kirgan ω elementar hodisalardan birortasi ro’y bersa, A hodisa ro’y berdi deyiladi. Agar shu elementar hodisalardan birortasi ro’y bermasa, A hodisa ro’y bermaydi, unda A hodisaga *teskari hodisa* (uni $\bar{A}$ orqali belgilaymiz) ro’y bergan deymiz. A va $\bar{A}$ o’zaro qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

Birorta ham elementar hodisani o’z ichiga olmagan hodisa *mumkin bo’lmagan (ishonchsiz) hodisa* deyiladi $\emptyset$.

Endi tasodifiy hodisalar orasida ayrim munosabatlarni ko’rib chiqaylik.

1. Agar A hodisani tashkil etgan elementar hodisalar B hodisaga ham tegishli bo’lsa, A hodisa B hodisani *ergashtiradi* deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.
2. A va B hodisalar bir xil elementar hodisalardan tashkil topgan bo’lsa, A va B hodisalar *teng* deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi.
3. A va B hodisalarlarning *yig’indisi* deb, A yoki B ning, yoki ikkalasining ham ro’y berishidan iborat C hodisani aytamiz va $A \cup B$ (yoki $A + B$) kabi belgilaymiz.
4. A va B hodisalarlarning bir vaqtda ro’y berishini ta’minlovchi barcha $\omega, \omega \in \Omega$ lardan tashkil topgan C hodisa A va B hodisalarlarning *ko’paytmasi* deyiladi va $A \cap B$ (yoki AB) kabi belgilanadi.
5. A va B hodisalarlarning *ayirmasi* deb, A ro’y berib, B ro’y bermasligidan iborat C hodisaga aytiladi. A va B hodisalarlarning ayirmasi $A \setminus B$ kabi belgilanadi.
6. Agar $A \cap B = \emptyset$ bo’lsa, A va B hodisalar *birga ro’y bermas* deyiladi.

Ehtimollar nazariyasidagi terminalogiyalari va to’plamlar nazariyasidagi terminalogiyalar orasida quyidagicha o’xshashliklar bor.

Belgilashlar	To'plamlar nazariyasidagi terminalogiyalar	Yehtimollar nazariyasidagi terminalogiyalar
Ω	Fazo (asosiy to'plam)	Yelesmentar hodisalar fazosi, ishonchli hodisa
$\omega, \omega \in \Omega$	ω fazoning yelesmenti	ω yelesmentar hodisa
$A, A \subseteq \Omega$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B, A + B$	A va B to'plamlarning birlashmasi, yig'indisi	A va B hodisalar yig'indisi
$A \cap B, AB$	A va B to'plamlarning kesishmasi	A va B hodisalarining ko'paytmasi
$A \setminus B$	A va B to'plamlarning ayirmasi	A va B hodisalarining ayirmasi
$\emptyset$	bo'sh to'plam	ishonchsiz hodisa
$\bar{A}$	A to'lamning to'ldiruvchisi	A hodisaga teskari hodisa
$AB = \emptyset$	A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birga ro'y bermas
$A \subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B hodisaga yergashadi
$A = B$	A va B to'plamlar teng	A va B hodisalar teng kuchli

Umumiy holda, Ω fazo cheksiz bo'lsa, biz Ω ning barcha qism to'plamlarini qaramaymiz, balki faqatgina uning algebra va σ -algebra deb ataluvchi qism to'plamlar sinfini qaraymiz.

7-ta'rif. Ω ning qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{F}$ to'plamlar sistemasi algebra deyiladi, agar quyidagi munosabatlar bajarilsa:

- (1) $\emptyset \in \mathfrak{F}, \Omega \in \mathfrak{F}$;
- (2) $A \in \mathfrak{F}$ ekanligidan $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ kelib chiqsa;
- (3) $A, B \in \mathfrak{F}$ ekanligidan, $A \cup B \in \mathfrak{F}, A \cap B \in \mathfrak{F}$ lar kelib chiqsa.

10-misol. 1) Osongina tekshirib ko'rish mumukinki, $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ algebraning barcha shartlarini qanoatlantiradi va bu algebraga trivial algebra deyiladi.

2) $\mathfrak{F} = \{A, \bar{A}, \Omega, \emptyset\}$ - A hodisadan hosil bo'lgan algebra.

8-ta'rif. Ω ning qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{F}$ sistema, σ -algebra deyiladi, agar quyidagi munosabatlar bajarilsa:

(1) $\mathfrak{F}$ algebra;

(2) $A_n \in \mathfrak{F}, n = 1, 2, 3, \dots$ ekanligidan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ lar kelib chiqsa.

11-misol. Ω ning elementlari cheklita bo'lmasa, u holda barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{F} = \{A: A \subseteq \Omega, \emptyset\}$ to'plamlar sistemasi σ -algebra tashkil qiladi.

Eslatma. Har qanday σ -algebra, algebra bo'ladi. Har qanday algebra σ -algebra bo'lmasligi mumkin.

9-ta'rif. $\mathfrak{F}$ σ -algebrada aniqlangan, to'plam funksiyasi P ehtimol deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa: ixtiyoriy $A \in \mathfrak{F}$ uchun

1) $P(A) \geq 0$ bo'lsa;

2) $P(\Omega) = 1$ bo'lsa;

3) o'zaro birga ro'y bermas $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ hodisalar uchun $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ tenglik bajarilsa.

12-misol. Elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$ sanoqlita elementlardan tashkil topgan bo'lsin. $\mathfrak{F}$ orqali Ω ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan σ -algebrani belgilaymiz.

$\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ - musbat hadli yaqinlashuvchi qatorning yelementlari bo'lib, bu qatorning yig'indisi Q ga teng bo'lsin, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = Q$. p_n -orqali quyidagi ketma-

-ketlikni belgilaymiz $\{p_n = \frac{\eta_n}{Q}, n = 1, 2, \dots\}$. Bu ketma-ketlikning barcha

yelementlari $0 < p_n < 1$, tengsizlikni qanoatlantiradi va $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ bo'ladi. Har

yelementar hodisa ω_n ning ro'y berish yehtimoli $p(\omega_n) = p_n$ ga teng deb olib, $A \in \mathfrak{F}$ hodisaning yehtimolini $P(A) = \sum_{\{n: \omega_n \in A\}} p(\omega_n)$ ko'rinishda aniqlaymiz. Aniqlangan

$P = \{P(A), A \in \mathfrak{F}\}$ funksiya 9-ta'rifning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

10-ta'rif. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ -uchlikga *ehtimolli fazo* deb ataymiz.

13-misol. 1) Bir jinsli tanga ikki marta ketma-ket gerb tomoni tushgunga qadar tashlansa, unga mos ehtimolli fazoni tuzing.

2) Tashlashlar soni besh martadan oshmasa, ikki marta ketma-ket gerb tomoni hodisasi ehtimolini toping.

Yechish. 1) Yelementar hodisalar fazosi Ω sifatida, yelementlari, cheklita G-gerb va R-raqam simvollaridan tashkil topgan, uzunligi ikkita simvoldan kam bo'lmagan va ohirlari GG, lardan iborat bo'lgan zanjirlar to'plami, hamda biror marta ham ketma-ket GG uchramaydigan cheksiz uzunlikdagi zanjirlar to'plamini belgilaymiz. $\mathfrak{S}$ orqali Ω ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan σ -algebrani belgilaymiz. P ehtimolni quyidagicha aniqlaymiz: har bir chekli n usunlikdagi elementar hodisaga $\frac{1}{2^n}$ ni mos qo'yamiz, agar elementar hodisa cheksiz uzunlikda bo'lsa u hodisaga 0 ni mos qo'yamiz.

2) Yuqorida aniqlangan yehtimolga asosan tashlashlar soni besh martadan oshmasa, ikki marta ketma-ket gerb tomoni hodisasi yehtimolini $\frac{19}{32}$ ga teng bo'ladi.

2-§. Ehtimolning klassik va statistik ta'riflari

1-ta'rif. A hodisaning ehtimoli deb, unga sharoit yaratuvchi hodisalar sonini hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soniga nisbatiga aytiladi va quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

bu yerda $k - A$ hodisaning ro'y berishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni, $n -$ hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni.

2-ta'rif. A hodisaning nisbiy sanog'i deb, uning ro'y berishlar sonini, hamma sinashlar soniga nisbatiga aytiladi

$$W(A) = \frac{\mu}{n}.$$

bu yerda $\mu - A$ hodisaning ro'y berishlar soni, $n -$ hamma sinashlar soni.

1-misol. Yashikda 4 ta oq, 10 ta qora va 6 ta ko'k shar bor. Yashikdan tasodifan bitta shar olinadi. Shu sharning oq rangda bo'lish ehtimolini toping.

Ye ch i sh. Bu yerda elementar hodisalar yashikdan ixtiyoriy shar olinishidan iborat. Barcha bunday natijalar soni yashikdagi sharlar soniga teng, ya'ni $n = 30$. Oq shar chiqishi hodisasini A bilan belgilasak, unga sharoit yaratuvchi hodisalar soni yashikdagi oq sharlar soniga tengligi ravshan, ya'ni $m = 4$. Demak, ta'rifga asosan

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

2-misol. O'yin kubi tashlanganda juft raqam yozilgan tomoni tushish ehtimoli topilsin.

Ye ch i sh. O'yin kubida 6 ta tomoni bo'lib, har bir tomoniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan biri yozilgan. Demak, hamma ro'y berishi mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $n = 6$. Juft raqam yozilgan tomoni tushishiga sharoit yaratuvchi

hodisalar esa 2, 4, 6 ya'ni ularning soni $k=3$. Agar o'yin kubi tashlanganda juft tomoni tushish hodisasini A bilan belgilasak, u holda uning ehtimoli ta'rifga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

3-misol. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning tushgan tomonlaridagi ochkolar yig'indisi juft son, shu bilan birga kublardan hyech bo'lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechish. «Birinchii» o'yin kubida tushgan tomonida bir ochko, ikki ochko, ..., olti ochko tushishi mumkin. «Ikkinchi» kubni tashlaganda ham shunday oltita elementar hodisa bo'lishi mumkin. «Birinchii» kubni tashlashdagi hodisalarining har biri «ikkinchi» kubni tashlash natijasidagi har bir hodisa bilan birga ro'y berishi mumkin. Shunday qilib, hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalar soni $6 \cdot 6 = 36$ ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (hyech bo'lmaganda bitta tomonida olti ochko chiqadi, tushgan ochkolar yig'indisi juft son) sharoit yaratuvchi hodisalar quyidagicha beshta bo'ladi:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) 6, 2; $6 + 2 = 8$, | 4) 2, 6; $2 + 6 = 8$, |
| 2) 6, 4; $6 + 4 = 10$, | 5) 4, 6; $4 + 6 = 10$. |
| 3) 6, 6; $6 + 6 = 12$, | |

Demak, $n = 36$, $k = 5$ bo'lsa, izlanayotgan hodisaning ehtimoli:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{5}{36}.$$

4-misol. Yashikka 21 ta yaroqli va 10 ta yaroqsiz detal solingan. Uni tashish vaqtida bitta detal yo'qolgani ma'lum bo'ldi. Yashikdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan detal yaroqli detal bo'lib chiqdi: a) yaroqli detal; b) yaroqsiz detal yo'qolgan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. a) Ravshanki, olingan yaroqli detal yo'qolgan bo'lishi mumkin emas, qolgan o'ttizta detalning ($21 + 10 - 1 = 30$) istalgan biri yo'qolgan bo'lishi mumkin, shu bilan birga ularning orasida 20 ta detal yaroqlidir ($21 - 1 = 20$).

Yaroqli detal yo'qolgan hodisasini A bilan belgilsak, uni ehtimoli:

$$P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

b) Har biri ham yo'qolishi mumkin bo'lgan o'ttizta detal orasida 10 ta yaroqsiz detal bor edi. Yaroqsiz detal yo'qolgan bo'lishi hodisasi $\bar{A}$ bo'lsa, uni ehtimoli:

$$P(\bar{A}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

3-ta'rif. Turli to'plam elementlaridan tuzilgan kombinasiyalarga birlashmalar deyiladi.

Hodisaning ehtimolini hisoblash uchun zarur bo'lgan birlashmalarni qaraymiz.

1. **O'rin almashtirishlar.** n ta har xil elementlardan tuzilgan o'rin almashtirishlar deb, bir-biridan faqat elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha aniqlanadi:

$$P_n = n! \quad \text{bu yerda} \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

5-misol. Uchta a, b, c elementlardan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan a, b, c elementlardan faqat o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

$$abc \quad bac \quad cab,$$

$$acb \quad bca \quad cba.$$

Demak, uchta elementdan tuzilgan o'rin almashtirishlar soni 6 ta ekan. Buni formula orqali hisoblasak ham bo'ladi:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

2. **O'rinlashtirishlar.** n ta har xil elementlardan k ($k \leq n$) tadan tuzilgan o'rinlashtirishlar deb, bir-biridan elementlari bilan hamda elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

6-misol. Uchta a, b, c elementlardan ikkitadan tuzilgan o'rinlashtirishlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan bir-biridan elementlari hamda elementlarining o'rinlari bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz, ya'ni

$$ab \quad ac \quad bc,$$

$$ba \quad ca \quad cb.$$

Demak, ularning soni 6 ta ekan. Agar buni formulada hisoblasak:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

3. **Gruppashlar.** n ta har xil elementlardan k tadan tuzilgan gruppashlar deb, bir-biridan faqat elementlari bilan farq qiladigan birlashmalarga aytiladi. Ularning soni quyidagicha topiladi:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

7-misol. To'rtta a, b, c, d elementlardan ikkitadan tuzilgan gruppashlar soni topilsin.

Yechish. Ta'rifga asosan 4 ta elementdan 2 tadan bir-biridan hech bo'lmasa bitta elementi bilan farq qiladigan birlashmalar tuzamiz:

$$ab, ac, bc, bd, ad, cd.$$

Buni formula bilan hisoblasak:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

1. Yashikda 50 ta bir xil mahsulotlar bor, ulardan 5 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga bitta mahsulot olinadi. Olingan mahsulot yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,1$.

2. Ikkita o'yin kubi tashlanganda hyech bo'lmasa bir marta 6 raqam tushish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,5$.

3. Simmetrik kubning ikkita tomoni ko'k rangga, uchta tomoni yashil rangga va bir tomoni qizil rangga bo'yalgan. Kub bir marta tashlanganda yashil tomoni tushish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 1/2$.

4. m ($m \geq 2$) ta oq va n ($n \geq 2$) ta qora shar solingan idishdan tavakkaliga 5 ta shar olinadi. Ular orasida ikkita oq shar bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{m(m-1) + n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}.$$

5. Qur'a tashlashda ishtirokchilar yashikdagi 1 dan 100 gacha nomerlangan jetonlardan tasodifan oladilar. Tavakkaliga olingan birinchi jetonning nomerida 5 raqami uchramaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,81$.

6. Xaltachada 5 ta bir xil kub bor. Har bir kubning barcha tomonlariga quyidagi harflardan biri yozilgan: o, p, r, s, t. Bittalab olingan va «bir qator qilib» terilgan kublarda «sport» so'zini yozilish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{1}{120}.$$

7. Oltita bir xil taxtachaga har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan: a, t, m, r, s, o. Taxtachalar yaxshilab arashlashtirilgan. Bittalab olingan va «bir qator qilib» terilgan to'rtta taxtachada «tros» so'zini o'qish mumkinligi ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{1}{A_6^4} = \frac{1}{360}.$$

8. Hamma tomoni bo'yalgan kub mingta bir xil o'lchamli kubchalarga bo'lingan va yaxshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchani a) bitta; b) ikkita; v) uchta yoqi bo'yalgan g) bo'yalmagan bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. a) 0,384; b) 0,096; v) 0,008; g) 0,512.

9. Yaxshilab aralashtirilgan 28 ta domino toshidan tavakkaliga bitta tosh olingan. Ixtiyoriy ravishda olingan ikkinchi toshni birinchi tosh yoniga o'yin qoidasi bo'yicha qo'yish mumkinligini ehtimolini birinchi soqqa

a) dubl bo'lganda; b) dubl bo'lmaganda toping.

$$\text{Javobi. a) } \frac{2}{9}; \text{ b) } \frac{4}{9}.$$

10. 8 ta turli kitob bitta tokchaga tavakkaliga terib qo'yiladi. Tayin ikkita kitob yonma-yon bo'lib qolish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{1}{4}.$$

11. Kutubxonada 10 ta turli kitob bor, bunda beshta kitobning har biri 4 ming so'mdan, uchta kitob 3 ming so'mdan, ikkita kitob 2 ming so'mdan turadi. Tavakkaliga olingan ikkita kitobning bahosi 5 ming so'mdan bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$$

12. Raqamlari har xil ikki xonali son o'ylangan. O'ylangan son:

a) tasodifan aytilgan ikki xonali son bo'lish; b) tasodifan aytilgan, raqamlari har xil ikki xonali son bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. a) } P = 1/90 \text{ b) } P = 1/81.$$

13. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi yettiga teng bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 1/6.$$

14. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping: a) chiqqan ochkolar yig'indisi sakkizga, ayirmasi esa to'rtga teng; b) chiqqan ochkolar ayirmasi to'rtga tengligi ma'lum bo'lib, ularning yig'indisi sakkizga teng.

$$\text{Javobi. a) } 1/18; \text{ b) } 1/2.$$

15. Ikkita o'yin kubi tashlangan. Kublarning yoqlarida chiqqan ochkolar yig'indisi beshga, ko'paytmasi esa to'rtga teng bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } 1/18.$$

16. Tanga ikki marta tashlangan. Hyech bo'lmaganda bir marta "gerbli" tomon tushish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } 3/4.$$

17. Tangani uch marta tashlaganda hammasida "gerb" tushish ehtimoli topilsin.

$$\text{Javobi. } 1/8.$$

18. Qutida nomerlangan oltita bir xil kubik bor. Hamma kubiklar tavakkaliga bittalab olinadi. Olingan kubiklarning nomerlari ortib borish tartibida chiqish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } 1/720.$$

8-misol. Uchta o'yin kubini tashlashda ikkita kubning (qaysilari bo'lishining ahamiyati yo'q) yoqlarida turli (oltiga teng bo'lmagan) ochkolar chiqsa, qolgan bitta kubda olti ochko chiqish ehtimolini toping.

Yechish. Hamma elementar hodisalar soni 6^3 ga teng. Bitta yoqda olti ochko va qolgan ikkita kubning yoqlarida turli (oltiga teng bo'lmagan) ochkolar chiqishiga sharoit yaratuvchi hodisalar soni 5^2 ga teng. Izlanayotgan ehtimol bizni qiziqtirayotgan hodisalar soni 5^2 ni hamma mumkin bo'lgan elementar hodisalarning jami soni 6^3 ga nisbatiga teng:

$$P(A) = \frac{5^2}{6^3} = \frac{25}{216}.$$

19. Dastada 101, 102, ..., 120 bilan nomerlangan ixtiyoriy taxlangan 20 ta perfokarta bor. Perfokartachi tavakkaliga ikkita karta oladi. 101 va 120 nomerli kartalar chiqish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{1}{C_{20}^2} = \frac{1}{190}.$$

20. Yashikda 15 ta mahsulot bo'lib, ulardan 10 tasi sifatli. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta mahsulot oladi. Olingan mahsulotlarning sifatli bo'lishi ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = C_{10}^3 / C_{15}^3 = 24/91.$$

21. Konvertidagi 100 ta fotokartochka orasida bitta izlanayotgan fotokar-tochka bor. Konvertidan tavakkaliga 10 ta kartochka olinadi. Bularning orasida kerakli kartochka ham bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = C_{99}^9 / C_{100}^{10} = 0,1.$$

22. Yashikda 100 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasida: a) yaroqsiz bo'lmasligi; b) yaroqli detallar bo'lmasligi ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } a) P = C_{90}^4 / C_{100}^4 \approx 0,65; \quad b) P = C_{10}^4 / C_{100}^4 \approx 0,00005.$$

23. Qurilma 5 ta elementdan iborat bo'lib, ularning 2 tasi eskirgan. Qurilma ishga tushirilganda tasodifiy ravishda 2 ta element ulanadi. Ishga tushirishda eskirmagan elementlar ulangan bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0,3.$$

24. Abonent, telefon nomerini terayotib nomerning oxirgi uch raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgani holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}.$$

9-misol. N ta detaldan iborat partiyada n ta yaroqli detal bor. Tavakkaliga m ta detal olingan. Olingan detallar orasida rosa k ta yaroqli detal bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Hamma elementar hodisalar soni N ta detaldan m tadan detalni ajratib olish usullari soniga, ya'ni N ta elementdan m tadan tuzilgan gruppalar soni C_N^m ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (m ta detal orasida rosa k ta yaroqli detal bor) sharoit yaratuvchi hodisalar sonini hisoblaymiz: n ta yaroqli detal orasidan k ta yaroqli detalni C_n^k ta usul bilan olish mumkin; bunda qolgan $m - k$ ta detal yaroqsiz bo'lishi lozim: $m - k$ ta yaroqsiz detalni esa $N - n$ ta yaroqsiz detal

orasidan C_{N-n}^{m-k} usul bilan olish mumkin. Demak, sharoit yaratuvchi hodisalar soni $C_n^k C_{N-n}^{m-k}$ ga teng.

Izlanayotgan ehtimol, hodisaga sharoit yaratuvchi hodisalar sonining barcha elementar hodisalar soniga nisbatiga teng:

$$P = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

25. Sexda 6 erkak va 4 ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 7 kishi ajratilgan. Ajratilganlar orasida 3 ayol bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = 0,5.$$

26. Yashikda 15 ta mahsulot bo'lib, ularning 10 tasi a'lo sifatli. Tavakkaliga olingan beshta mahsulot orasida 3 tasi a'lo sifatli bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = C_{10}^3 \cdot C_5^2 / C_{15}^5 \approx 0,4.$$

27. Gruppada 12 student bo'lib, ulardan 8 tasi a'lochi. Ro'yxat bo'yicha tavakkaliga 9 student ajratilgan. Ajratilganlar orasida 5 a'lochi student bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = C_8^5 \cdot C_4^4 / C_{12}^9 = 14/55.$$

28. Qutida 5 ta bir xil buyum bo'lib, ularning 3 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga 2 ta buyum olingan. Olingan ikkita buyum orasida : a) bitta bo'yalgan buyum; b) ikkita bo'yalgan buyum; v) hech bo'lmaganda bitta bo'yalgan buyum bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. a) } P = C_3^1 \cdot C_2^1 / C_5^2 = 0,6; \quad \text{b) } P = C_3^2 / C_5^2 = 0,3; \quad \text{v) } P = 0,9.$$

29. "Maxfiy" qulfning umumiy o'qida 4 ta disk bo'lib, ularning har biri 5 ta sektorga bo'lingan va sektorlarga turli raqamlar yozilgan. Disklarni ulardagi raqamlar aniq to'rt xonali son tashkil qiladigan qilib o'rnatilgan holdagina qulf ochiladi. Disklarni ixtiyoriy o'rnatishda qulfning ochilish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 1/5^4.$$

30. 100 ta detalli partiyadan texnik kontrol bo'limi 5 ta nostandart detal topdi. Nostandart detallar chiqishining nisbiy chastotasi nimaga teng.

$$\text{Javobi. } W = 0,05.$$

31. Nishonga 20 ta o'q uzilgan, shundan 18 ta o'q nishonga tekkani qayd qilingan. Nishonga tegishlar nisbiy chastotasini toping.

$$\text{Javobi. } P = 0,9.$$

32. Asboblarning partiyasini sinov vaqtida yaroqli detallarning nisbiy chastotasi 0,9 ga teng bo'lib chikdi. Agar hammasi bo'lib 200 ta asbob sinalgan bo'lsa, yaroqli asboblarning sonini toping.

$$\text{Javobi. } 180 \text{ ta asbob.}$$

3-§. Ehtimolning geometrik ta'rifi

Biror G soha berilgan bo'lib, bu soha g sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tashlangan nuqtaning g sohaga ham tushish ehtimolini topish talab qilinadi. Tashlangan nuqta G sohaga albatta tushsin va uning biror g qismiga tushish ehtimoli shu qismning o'lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, g ning formasiga va g ni G ning qayeriga joylashganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda nuqtaning g sohaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{l \text{ ning uzunligi}}{L \text{ ning uzunligi}}, \quad (1)$$

$$P = \frac{g \text{ ning yuzi}}{G \text{ ning yuzi}} \quad (2)$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

1-misol. Uzunligi 20 sm bo'lgan L kesmaga uzunligi 10 sm l kesma joylashtirilgan. Katta kesmaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kichik kesmaga tushish ehtimolini toping.

Yechish. L kesmaning uzunligi 20 sm. l kesmaning uzunligi 10 sm. (1) formulaga ko'ra izlanayotgan ehtimol quyidagicha topiladi:

$$P = \frac{l \text{ ning uzunligi}}{L \text{ ning uzunligi}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

2-misol. Doiraga kvadrat ichki chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan nuqta kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

Yechish. Doiraning yuzi $S_{\text{doira}} = \pi R^2$, kvadratning yuzi $S_{\text{kv}} = 2R^2$, bu yerda R - doiraning radiusi. (2) formulaga asosan doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kvadrat ichiga tushish ehtimoli

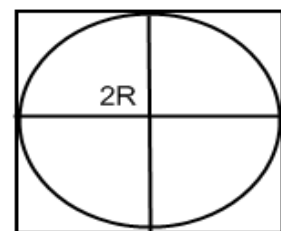
$$P = \frac{\text{kvadratning yuzi}}{\text{doiraning yuzi}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

3-misol. Tomoni $2R$ ga teng kvadratga doira ichki chizilgan. Kvadratga tashlangan nuqtani doiraga tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Doiraning yuzi $S_{\text{doira}} = \pi R^2$, kvadratning yuzi $S_{\text{kv}} = 4R^2$. (2) formulaga asosan doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning kvadrat ichiga tushish ehtimoli

$$P = \frac{S_{\text{doira}}}{S_{\text{kv}}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}.$$

33. Radusi R bo'lgan doiraga radusi r bo'lgan kichik doira joylashtirilgan. Katta doiraga tashlangan nuqtaning kichik doiraga ham tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doiraga tushish ehtimolini doira yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga bog'liq emas faraz qilinadi.



deb

Javobi. $P = r^2 / R^2$.

34. Tekislik bir-biridan $2a$ masofada joylashgan parallel to'g'ri chiziqlar bilan bo'lingan. Tekislikka radiusi $r < a$ bo'lgan tanga tavakkaliga tashlangan. Tanga to'g'ri chiziqlarning bittasini ham kesmaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = (2a - 2r) / 2a = (a - r) / a$.

35. Bir-biridan 6 sm masofada yotgan parallel to'g'ri chiziqlar bilan bo'lingan tekislikka radiusi 1 sm bo'lgan doira tavakkaliga tashlangan. Doira to'g'ri chiziqlarning hyech birini kesmaslik ehtimolini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo'lib, uning joylashishiga bog'lik emas deb faraz qilinadi.

Javobi. $P = (6 - 2) / 6 = 2 / 3$.

36. Tekislikda radusilari mos ravishda 5 sm va 10 sm bo'lgan ikkita konsentrik aylana chizilgan. Katta doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning aylanalardan hosil bo'lgan halqaga ham tushish ehtimolini toping. Nuqtaning yassi figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'lik emas deb faraz qilinadi.

Javobi. $P = (10^2 - 5^2) / 10^2 = 0,75$.

37. Radiusi R bo'lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan: a) kvadrat ichiga; b) muntazam uchburchak ichiga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning doira bo'lagiga tushish ehtimoli bu bo'lakning yuziga proporsional bo'lib, uning doiraga nisbatan joylashishiga esa bog'lik emas deb faraz qilinadi.

Javobi. a) $P = 2 / \pi$; b) $P = 3\sqrt{3} / 4\pi$.

38. Kubga shar ichki chizilgan. Kub ichiga tavakkaliga tashlangan nuqta shar ichiga tushish ehtimoli toping.

Javobi. $P = \frac{\pi}{6}$.

39. Tez aylanadigan disk juft sondagi teng sektorlarga bo'linib, sektorlarga birin-ketin oq va qora ranglarga bo'yalgan. Diska qarata o'q uzilgan. O'qning oq sektorlardan biriga tegish ehtimolini toping. O'qning yassi figuraga tegish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional deb faraz qilinadi.

Javobi. $P = 0,5\pi R^2 / \pi R^2 = 0,5$.

II- bob
ASOSIY TEOREMLAR

**1-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.
Shartli ehtimol**

Birga ro'y bermas hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi.

Ikkita birga ro'y bermas hodisadan istalgan birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Natija. Bir nechta birga ro'y bermas hodisalardan birortasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Birga ro'y beruvchi hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasi.

Ikkita birga ro'y beruvchi hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirmasiga teng:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Uchta birga ro'y beruvchi hodisa uchun:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Shartli ehtimol. B hodisaning shartli ehtimoli $P_A(B)$ – deb, A hodisa ro'y bergandan keyin B hodisaning ro'y berish ehtimoliga aytiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad (P(A) > 0).$$

Agar A va B hodisalardan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berish ehtimolini o'zgartirmasa, bu hodisalar *erkli hodisalar* deyiladi. Bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$P_A(A) = P(A); \quad P_A(B) = P(B).$$

Erkli hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi.

Ikkita erkli hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarini ko'paytirilganiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Natija. Bir nechta erkli hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarini ko'paytirilganiga teng:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Erksiz hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasi

Ikkita bir-biriga bog'liq hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining shartli ehtimoliga ko'paytirilganiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B),$$

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Natija. Bir nechta bir-biriga bog'liq hodisalarning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimoli bilan qolganlarining o'zidan oldingilari ro'y bergandan keyingi shartli ehtimollari ko'paytmasiga teng:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$$

bu yerda $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ -hodisaning $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ hodisalar ro'y berdi degan farazda hisoblangan ehtimoli.

1-misol. Yashikda 10 ta mahsulot bo'lib, shulardan 8 tasi oliy sifatli. Tasodifiy ravishda 2 ta mahsulot olindi. Olingan mahsulotlarni hammasini oliy sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. A_1 – birinchi olingan mahsulotni, A_2 – ikkinchi olingan mahsulotni oliy sifatli chiqish hodisasini bildirsin. Demak, A_1 hodisaning ehtimoli

$$P(A_1) = \frac{8}{10}$$

A_1 hodisa ro'y bergandan keyin yashikda hammasi bo'lib 9 ta mahsulot qolib, bulardan 7 tasi oliy sifatli mahsulot qoladi, shuning uchun

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{7}{9}.$$

Yuqoridagi bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasiga asosan

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}.$$

2-misol. Kutubxonada stellajida tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qo'yilgan bo'lib, ulardan 5 tasi muqovalidir. Kutubxonachi ayol tavakkaliga 3 ta darslik oladi. Olingan darsliklarning hych bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lish (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi usul. Olingan uchta darslikdan hych bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lish talabi quyidagi uchta birga ro'y bermas hodisadan istalgan biri ro'y berganda bajariladi: B – bitta darslik muqovali, ikkitasi muqovasiz, C – ikkita darslik muqovali, bittasi muqovasiz, D – uchala darslik muqovali.

Bizni qiziqtirayotgan A hodisani (olingan darslikning hych bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lishi) bu hodisalarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$A = B + C + D.$$

Qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D). \quad (*)$$

B, C va D hodisalarning ehtimollarini topamiz:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91},$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Bu ehtimollarni (*) tenglikka qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(A) = P(B) + P(C) + P(D) = \\ = 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91.$$

Ikkinchi usul. A hodisa (olingan darslikning hyech bo'lmaganda bittasi muqovali) va $\bar{A}$ hodisa (olingan darsliklarning bittasi ham muqovali emas) qarama-qarshi hodisalardir, shuning uchun

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(qarama-qarshi hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng).

Bundan

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

$\bar{A}$ hodisaning (olingan darsliklarning bittasi ham muqovali emas) ro'y berish ehtimoli

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}.$$

Izlanayotgan ehtimol:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 24/91 = 67/91.$$

1. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 4 tasi yaroqsiz. Yig'uvchiga tavakkaliga 3 ta detal oldi. Olingan detallarning hyech bo'lmaganda bittasi yaroqsiz bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 1 - C_6^3 / C_{10}^3 = 5/6.$$

2. Yashikda 20 ta shar bor, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k va 5 tasi oq. Rangli shar chiqish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 3/4.$$

3-misol. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, u holda $P(B) \geq P(A)$ bo'lishini isbotlang.

Isboti. B hodisani birga ro'y bermas A va $\bar{A}B$ hodisalarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$B = A + \bar{A}B$$

Birga ro'y bermas hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasiga asosan quyidagini hosil qilamiz:

$$P(B) = P(A + \bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A}B).$$

$$P(\bar{A}B) \geq 0 \text{ bo'lgani uchun } P(B) \geq P(A).$$

4-misol. Ikkita birga ro'y bermas A_1 va A_2 hodisalarning har birining ro'y berish ehtimoli mos ravishda p_1 va p_2 ga teng.

Bu hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini toping.

Ye ch i sh. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

B_1 – faqat A_1 hodisani ro'y berishini; B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berishini bildirsin.

B_1 hodisaning ro'y berishi $A_1\bar{A}_2$ hodisaning ro'y berishiga teng kuchli (birinchi hodisa ro'y berdi va ikkinchi hodisa ro'y bermadi), ya'ni $B_1 = A_1\bar{A}_2$.

B_2 hodisaning ro'y berishi $\bar{A}_1A_2$ hodisaning ro'y berishiga teng kuchli (ikkinchi hodisa ro'y berdi va birinchi hodisa ro'y bermadi), ya'ni $B_2 = \bar{A}_1A_2$.

Shunday qilib, A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini topish uchun B_1 va B_2 hodisalar birga ro'y bermas, shuning uchun qo'shish teoremasini qo'llanish mumkin:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2). \quad (*)$$

Endi B_1 va B_2 hodisalardan har birining ehtimolini topish kerak.

A_1 va A_2 hodisalar erkli, demak, A_1 va $\bar{A}_2$ hodisalar, shuningdek $\bar{A}_1$ va A_2 hodisalar ham erkli, shu sababli qo'shish teoremasidan foydalanish mumkin:

$$P(B_1) = P(A_1\bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = p_1q_2;$$

$$P(B_2) = P(\bar{A}_1A_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) = q_1p_2.$$

Bu ehtimollarni (*) munosabatga qo'yib, A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini topamiz:

$$P(B_1 + B_2) = p_1q_2 + q_1p_2.$$

3. Merganning bitta o'q uzishda 10 ochkoga urish ehtimoli 0,1 ga, 9 ochkoga urish ehtimoli 0,3 ga, 8 yoki undan kam ochko urish ehtimoli 0,6 ga teng. Merganning bitta o'q uzishda kamida 9 ochko urish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,4$.

4. 10 ta detalli partiyada 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga olingan ikkita detaldan kamida biri standart bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = \frac{44}{45}$.

5. Yashikdagi 10 ta detal orasida 2 tasi nostandart. Tavakkaliga olingan 6 ta detal orasida nostandart detal bittadan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = 2/3$.

6. A, B, C va D hodisalar to'la gruppaga tashkil qiladi. Hodisalar ehtimollari bunday: $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,5$; $P(C) = 0,3$. D hodisaning ehtimoli qanchaga teng?

Javobi. $P(D) = 0,1$.

7. Avariya yuz berganligi haqida signal berish uchun ikkita erkli ishlaydigan signalizator o'rnatilgan. Avariya yuz berganda signalizator ishlay boshlash ehtimoli birinchisi uchun 0,95 ga, ikkinchisi uchun 0,9 ga teng. Avariya yuz berganda faqat bitta signalizator ishlay boshlash ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,14$.

8. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda. Bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga teng. Bir yo'la o'q uzishda merganlardan faqat bittasining nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,38$.

9. Ikkita to'pdan bir yo'la o'q uzishda nishonga bitta o'q tegish ehtimoli 0,38 ga teng. Agar ikkinchi to'pdan bitta otishda o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, bu ehtimolni birinchi to'p uchun toping.

Javobi. $P = 0,7$.

10. Texnik kontrol bo'limi buyumlarning standartga muvofiqligini tekshiradi. Buyumning standartga muvofiq bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan ikkita buyumdan faqat bittasi standartga muvofiq bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,18$.

11. Qurilma uchta bir-biriga bog'liqsiz ishlaydigan uchta elementlardan iborat. T vaqt ichida qurilmani elementlarini ishlab turish ehtimollari mos ravishda 0,6 , 0,8 , 0,7 ga teng. Shu vaqt ichida qurilmaning a) faqat bitta elementi, b) faqat ikkita elementi, v) hamma elementlari ishlash ehtimollari topilsin.

Javobi.

12. Tanga va o'yin kubi tashlandi. «Gerbli tomon tushdi» va «5 ochko chiqdi» hodisalarining birgalikda ro'y berish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 1/12$.

13. Ikkita yashikda detallar bor: birinchisida 10 ta (ulardan 3 tasi standart), ikkinchisida 15 ta (ulardan 6 tasi standart). Har bir yashikdan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Ikkala detal standart bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,12$.

14. Uchta o'yin kubi tashlanganda kamida bitta kubda 6 ochko tushish (A hodisa) ehtimoli qanchaga teng?

Javobi. $P(A) = \frac{91}{216}$.

15. Korxona tayyorlagan mahsulotning 95% i standart, shundan 86% i birinchi sortdir. Shu korxonada tayyorlangan mahsulotdan tavakkaliga olingan bittasi birinchi sort bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,817$.

16. Tanga bir tomoni bilan ketma-ket ikki marta tushguncha tashlanadi. Quyidagi hodisalarining ehtimollarini toping: a) tajriba oltinchi otishgacha tugaydi; b) tangani juft marta tashlash lozim bo'ladi.

Javobi. a) $P = \frac{15}{16}$; b) $P = \frac{2}{3}$.

17. Biror fizik kattalikni bir marta o'lchashda berilgan aniqlikdan ortiq xatoga yo'l qo'yish ehtimoli 0,4 ga teng. Uchta o'zaro erkli o'lchash o'tkazilgan. Bulardan faqat bittasida yo'l qo'yilgan xato berilgan aniqlikdan ortiq bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,432$.

18. Buyumlar partiyasidan tovarshunos oliy nav buyumlarni ajratmokda. Tavakkaliga olingan buyumning oliy nav bo'lish ehtimoli 0,8 ga teng. Tekshirilgan uchta buyumdan faqat ikkitasi oliy nav bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,384$.

19. Student o'ziga kerakli formulani uchta spravochnikdan izlamogda. Formulaning birinchi, ikkinchi, uchinchi spravochnikda bo'lish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8 ga teng. Formula a) faqat bitta spravochnikda; b) faqat ikkita spravochnikda; v) formula uchala spravochnikda bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. a) $P = 0,188$; b) $P = 0,452$; v) $P = 0,336$.

20. Yig'uvchiga kerakli detalning birinchi, ikkinchi, uchinchi, to'rtinchi yashikda bo'lish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 ga teng. Detalning: a) ko'pi bilan uchta yashikda; b) kamida ikkita yashikda bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. a) $P = 0,6976$; b) $P = 0,9572$.

21. Uchta o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: a) tushgan yoqlarning har birida 5 ochko bo'lishi; b) tushgan yoqlarning hammasida bir xil sondagi ochkolar bo'lishi.

Javobi. a) $P = \frac{1}{6^3}$; b) $P = 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}$.

22. 3 ta o'yin kubi tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimolini toping: a) ikkita tushgan yoqda bir ochko, uchinchi yoqda esa boshqa sondagi ochko bo'lishi; b) tushgan ikkita yoqda bir xil sondagi ochko, uchinchi yoqda esa boshqa sondagi ochko bo'lishi; v) hamma tushgan yoqlarda turli sondagi ochkolar bo'lishi.

Javobi. $P = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6} \right) = \frac{5}{72}$; b) $P = \frac{5}{12}$; v) $P = \frac{5}{9}$.

5-misol. Tushgan yoqlarning bittasida ham 6 ochko bo'lmasligini 0,3 dan kichik ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta o'yin kubini tashlash kerak?

Yechish. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz: A – tushgan yoqlarning bittasida ham 6 ochko bo'lmasligi, A_i – i kubning tushgan yog'ida 6 ochko bo'lmasligi ($i = 1, 2, \dots, n$).

Bizni qiziqtirayotgan A hodisa $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat, ya'ni

$$A = A_1 A_2 \dots A_n.$$

Istalgan tushgan yoqda olitga teng bo'lmagan ochko bo'lish ehtimoli

$$P(A_1) = \frac{5}{6}$$

ga teng.

A hodisalar erkli, shuning uchun erkli hodisalarni ehtimollarini ko'paytirish teoremasini qo'llash mumkin:

$$P(A) = P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n) = \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

Shartga ko'ra $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,3$. Demak, $n \log \frac{5}{6} < \log 0,3$. Bu yerdan $\log \frac{5}{6} < 0$ ni hisobga olib, $n > 6,6$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, o'yin kublarining izlanayotgan soni $n \geq 7$.

23. Merganning bitta o'q uzishda o'qning nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Bitta ham o'q xato ketmasligini 0,4 dan kichik ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun mergan nechta o'q uzishi kerak?

Javobi. $n \geq 5$.

24. Radiusi R bo'lgan doiraga muntazam uchburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlangan. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping: a) 4 ta nuqtaning hammasi uchburchak ichiga tushadi; b) bitta nuqta uchburchak ichiga tushadi va har bir "kichik" segment ichiga bittadan nuqta tushadi. Nuqtaning figuraga tushish ehtimoli figura yuziga proporsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Javobi. a) $P = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; b) $P = 3! \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$.

6-misol. O'quv zalida ehtimollar nazariyasiga doir 6 ta darslik bo'lib, ularning 3 tasi muqovali. Kutubxonachi tavakkaliga 2 ta darslik oldi. Ikkala darslik ham muqovali bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalar quyidagicha belgilaymiz: A – birinchi olingan darslik muqovali, B – ikkinchi olingan darslik muqovali.

Birinchi darslikning muqovali bo'lish ehtimoli:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Birinchi olingan darslik muqovali bo'lish shartida ikkinchi olingan darslikning muqovali bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli

$$P_A(B) = \frac{2}{5}.$$

Ikkala darslik ham muqovali bo'lish ehtimoli bir-biriga bog'liq hodisalarning ehtimollarini ko'paytirish teoremasiga asosan quyidagiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 0,2.$$

7-misol. Sexda 7 erkak va 3 ayol ishchi ishlaydi. Tabel nomerlari bo'yicha tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Barcha ajratib olingan kishilar erkaklar bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Hodisalarni quyidagicha belgilaylik:

A – birinchi ajratilgan erkak kishi, B – ikkinchi ajratilgan erkak kishi, C – uchinchi ajratilgan erkak kishi.

Birinchi ajratilgan erkak kishi bo'lish ehtimoli:

$$P(A) = \frac{7}{10}.$$

Birinchi ajratilgan erkak kishi shartida ikkinchi kishining erkak bo'lish ehtimoli, ya'ni B hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_A(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Oldin ikki erkak kishi ajratilib olinganligi shartida uchinchi ajratilgan kishi erkak bo'lishi ehtimoli, ya'ni C hodisaning shartli ehtimoli:

$$P_{AB}(C) = \frac{5}{8}.$$

Ajratib olingan kishilarning hammasi erkak ishchilar bo'lish ehtimoli:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{24}.$$

25. Biror joy uchun may oyida bulutli kunlarning o'rtacha soni oltiga teng. Birinchi va ikkinchi mayda havo ochiq bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 25/31 \cdot 24/30 = 20/31$.

26. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ular orasida 6 ta yaroqli bor. Yig'uvchi tavakkaliga 4 ta detal oladi. Olingan detallarning hammasi yaroqli bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{14}.$$

27. Yashikda 1 dan 5 gacha nomerlangan 5 ta shar bor. Tavakkaliga bittalab, joyga qaytarib qo'ymasdan, 3 ta shar olinadi. Quyidagi hodisalarning ehtimollarini toping: a) ketma-ket 1, 4, 5 nomerli sharlar chiqadi; b) olingan sharlar kanday tartibda chiqishidan qat'iy nazar 1, 4, 5 nomerga ega bo'ladi.

$$\text{Javobi. a) } P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}; \quad \text{b) } P = 0,1.$$

28. Student programmadagi 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Studentning imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolni bilish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}.$$

29. Xaltachada 1 dan 10 gacha nomerlangan 10 ta bir xil kubik bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta kubik olinadi. Birin-ketin 1, 2, 3 nomerli kubiklar chiqish ehtimolini quyidagi hollarda toping: a) kubiklar olingach, xaltachaga qaytarib solinmaydi; b) olingan kubik xaltachaga qaytarib solinadi.

$$\text{Javobi. a) } P = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}; \quad \text{b) } P = 0,001.$$

8-misol. $P(A)$ ehtimolni ushbu ikkita birga ro'y bermas hodisaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkinmi?

$$P(AB) = 0,72, \quad P(\overline{AB}) = 0,18.$$

Yechish. A hodisani ushbu ikkita birga ro'y bermas hodisalarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$A = AB + \overline{AB}.$$

Birga ro'y bermas hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasiga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$P(A) = P(AB + \overline{AB}) = P(AB) + P(\overline{AB}) = 0,72 + 0,18 = 0,9.$$

30. Ikkita mergan bittadan o'q uzishdi. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisniki esa 0,6 ga teng. Merganlardan aqalli bittasi nishonga tekkizganligi ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,88$.

31. Yig'uvchida 1-zavodda tayyorlangan 16 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 4 ta detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olindi. Ulardan aqalli bittasini 1-zavodda tayyorlaganligi ehtimolini toping.

Javobi. $P = \frac{92}{95}$.

2-§. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar erkli bo'lib, ularning ehtimollari $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n$ bo'lsin.

O'zaro erkli bo'lgan $A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat A hodisaning ro'y berish ehtimoli 1 dan $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$ hodisalar ehtimollari ko'paytmasini ayirilganiga teng:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n.$$

Xususiyl holda, barcha n ta hodisa bir xil p ehtimolga ega bo'lsa, u holda bu hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P(A) = 1 - q^n.$$

9-misol. Elektr zanjiriga erkli ishlaydigan 3 ta element ketma-ket ulangan. Birinchi ikkinchi va uchinchi elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda quyidagiga teng:

$$p_1 = 0,1; \quad p_2 = 0,15; \quad p_3 = 0,2.$$

Zanjirda tok bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechish. Elementlar ketma-ket ulanganligi sababli elementlardan kamida bittasi buzilsa, zanjirda tok bo'lmaydi (A hodisa).

Yuqoridagi formulaga asosan:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - (1 - 0,2)(1 - 0,15)(1 - 0,2) = 0,388.$$

10-misol. Ikkita sportchidan har birining mashqni muvaffaqiyatli bajarish ehtimoli 0,5 ga teng. Sportchilar mashqni navbat bilan bajaradilar, bunda har bir sportchi o'z kuchini ikki marta sinab ko'radi. Mashqni birinchi bo'lib bajargan sportchi mukofot oladi. Sportchilarning mukofotini olishlari ehtimolini toping.

Yechish. Mukofot topshirilishi uchun to'rtta sinovdan kamida bittasi muvaffaqiyatli bo'lishi kifoya. Sinovning muvaffaqiyatli o'tish ehtimoli $p = 0,5$, muvaffaqiyatsiz o'tish ehtimoli esa $q = 1 - 0,5 = 0,5$.

Izlanayotgan ehtimol:

$$P = 1 - q^4 = 1 - 0,5^4 = 0,9375.$$

11-misol. Merganning uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Yechish. Uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish (A hodisa) ehtimoli:

$$P(A) = 1 - q^3$$

ga teng, bu yerda q – o'qning xato ketish ehtimoli.

Shartga ko'ra $P(A) = 0,875$. Demak, $0,875 = 1 - q^3$ yoki $q^3 = 1 - 0,875 = 0,125$.

Bu yerdan $q = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$. Izlanayotgan ehtimol:

$$p = 1 - q = 1 - 0,5 = 0,5.$$

32. Qurilma o'zaro erkli ishlaydigan ikkita elementni o'z ichiga oladi. Elementlarning buzilish ehtimollari mos ravishda 0,05 ga va 0,08 ga teng. Qurilmaning buzilish uchun kamida bitta elementning buzilishi yetarli bo'lsa, qurilmaning ishlamay qolish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,126$.

33. Ko'prik yakson bo'lishi uchun bitta aviasion bombaning kelib tushishi kifoya. Agar ko'priikka tushish ehtimollari mos ravishda 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 bo'lgan 4 ta bomba tashlansa, ko'prikn yakson bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,95$.

34. Uch tadqiqotchi bir-biridan erkli ravishda biror kattalikni o'lchamokda. Birinchi tadqiqotchining asbob ko'rsatishini o'qishda xatoga yo'l qo'yish ehtimoli 0,1 ga teng. Ikkinchi va uchinchi tadqiqotchi uchun bu ehtimol mos ravishda 0,15 va 0,2 ga teng. Bir martadan o'lchashda tadqiqotchilardan kamida birining xatoga yo'l qo'yish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,388$.

35. To'rtta o'q uzishda kamida bitta o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,9984 ga teng. Bitta o'q uzishda o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Javobi. $p = 0,8$.

3-§. To'la ehtimol formulasi

Birga ro'y bermas va to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan (gipotezalardan) birortasi ro'y bergandan keyingi A hodisaning ro'y berish ehtimoli quyidagicha:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A).$$

bu yerda $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$.

Bunga "to'la ehtimol formulasi" deyiladi.

12-misol. Zavodning 2 ta sexida bir xil miqdorda mahsulotlar ishlab chiqariladi. 1 va 2- sexlarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sifatli bo'lish

ehtimollari mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Zavodda ishlab chiqarilgan mahsulotlardan tasodifan olingan mahsulotning sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. B_1 – mahsulotni 1 – sexda ishlanganligini bildirsin, B_2 – mahsulotni 2 – sexda ishlanganligini bildirsin. A – mahsulotni sifatli ekanini bildirsin. B_1 va B_2 hodisalar birga ro'y bermas va to'la hodisalar gruppasini tashkil etadi. Shuning uchun bu masalani yechishda to'la ehtimol formulasidan foydalanamiz.

Mahsulotning 1 – sexda ishlanganligi ehtimoli:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Mahsulotning 2 – sexda ishlanganligi ehtimoli:

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

1 – sexda ishlangan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimoli:

$$P_{B_1}(A) = 0,8.$$

2 – sexda ishlangan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimoli:

$$P_{B_2}(A) = 0,9.$$

Demak, tasodifan olingan mahsulotning sifatli bo'lish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga asosan:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,9 = 0,85.$$

13-misol. Birinchi qutida 20 ta radiolampa bo'lib, ulardan 18 tasi standart; ikkinchi qutida esa 10 ta radiolampa bo'lib, ulardan 9 tasi standart. Ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta lampa olinib, birinchi qutiga solingan. Birinchi qutidan tavakkaliga olingan lampaning standart bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A orqali, birinchi qutidan standart lampa olinganlik hodisasini belgilaymiz.

Ikkinchi qutidan yo standart lampa olingan (B_1 hodisa), yoki nostandart lampa olingan (B_2 hodisa) bo'lishi mumkin.

Ikkinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli:

$$P(B_1) = \frac{9}{10}.$$

Ikkinchi qutidan nostandart lampa olinish ehtimoli:

$$P(B_2) = \frac{1}{10}.$$

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga standart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_1}(A) = \frac{19}{21}.$$

Ikkinchi qutidan birinchi qutiga nostandart lampa olib qo'yilganlik shartida birinchi qutidan standart lampa olinishining shartli ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_{B_2}(A) = \frac{18}{21}.$$

Izlanayotgan ehtimol, ya'ni birinchi qutidan standart lampa olinish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga asosan quyidagiga teng:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \\ = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9.$$

14-misol. Ichida 2 ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solinib, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Sharlarning dastlabki tarkibi (rangi bo'yicha) haqida mumkin bo'lgan barcha taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda olingan sharning oq rangli bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. A orqali oq shar olinganlik hodisasini belgilaymiz. Sharlarning dastlabki tarkibi haqida quyidagi taxminlar (gipotezalar) bo'lishi mumkin: B_1 – oq sharlar yo'q, B_2 – bitta oq shar bor, B_3 – ikkita oq shar bor.

Hammasi bo'lib uchta gipoteza mavjud bo'lib, shu bilan birga ular shartga ko'ra teng imkoniyatli va gipotezalar ehtimollari yig'indisi birga teng (chunki ular hodisalarning to'la gruppasini tashkil etadi) bo'lgani uchun gipotezalarning har birining ehtimoli $\frac{1}{3}$ ga teng, ya'ni

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Idishda dastlab oq sharlar bo'lmaganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}.$$

Idishda dastlab bitta oq shar bo'lganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli

$$P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}.$$

Idishda dastlab ikkita oq shar bo'lganligi shartida oq shar olinishining shartli ehtimoli

$$P_{B_3}(A) = \frac{3}{3} = 1.$$

Idishdan oq shar olinishining izlanayotgan ehtimolini to'liq ehtimol formulasidan foydalanib topamiz:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \\ + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

36. Yig'uvchiga 1-zavodda tayyorlangan detallardan 3 yashik, 2-zavodda tayyorlangan detallardan 2 yashik keltirildi. 1-zavoddan keltirilgan detalning standart bo'lish ehtimoli 0,8 ga, 2-zavoddan keltirilgan detalning standart bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Yig'uvchi tavakkaliga bir yashikni tanlab, undan tavakkaliga bitta detal oldi. Olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,84$.

37. Ichida n ta shar bo'lgan idishga bitta oq shar solingan, shundan keyin idishdan tavakkaliga bitta shar olingan. Agar idishdagi sharlarning dastlabki tarkibi (rangi bo'yicha) haqidagi barcha mumkin bo'lgan taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

38. Birinchi yashikda 20 ta detal bo'lib, ulardan 15 tasi standart; ikkinchi yashikda 30 ta detal bo'lib, ulardan 24 tasi standart; uchinchi yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 6 tasi standart. Tavakkaliga tanlangan yashikdan tasodifan olingan detalning standart bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 43/60.$$

39. Ikkita yashikda radiolampalar bor. Birinchi yashikda 12 ta lampa bo'lib, ulardan bittasi nostandart; ikkinchisida 10 ta lampa bo'lib, ulardan bittasi nostandart. Birinchi yashikdan tavakkaliga bitta lampa olinib, ikkinchisiga solingan. Ikkinchi yashikdan tavakkaliga olingan detalning nostandart bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = \frac{13}{132}.$$

40. Hisoblash laboratoriyasida 6 ta klavishli avtomat va 4 ta yarim avtomat bor. Biror hisoblash ishini bajarish davomida avtomatning ishdan chiqmaslik ehtimoli 0,95 ga teng; yarim avtomat uchun bu ehtimol 0,8 ga teng. Student hisoblash ishini tavakkaliga tanlagan mashinada bajaradi. Hisoblash tugaguncha mashinaning ishdan chiqmaslik ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 0,89.$$

41. Piramidada beshta miltiq bo'lib, ularning uchta optik nishon bilan ta'minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,95 ga teng; optik nishon o'rnatilmagan miltiqdan o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga teng. Agar mergan tavakkaliga olingan miltiqdan o'q uzsa, o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 0,85.$$

42. Yashikda 1- zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3 -zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1 -zavodda tayyorlangan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng; 2- zavodda va 3-zavodda tayyorlangan detallar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 0,78.$$

43. Birinchi idishda 10 ta shar bo'lib, ularning 8 tasi oq; ikkinchi idishda 20 ta shar bo'lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaliga bittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi. Oq shar olinganlik ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P = 0,5.$$

44. 28 ta toshli dominodan tavakkaliga bitta tosh olingan. Tavakkaliga olingan ikkinchi toshni birinchi tosh yoniga o'yin qoidasi bo'yicha qo'yish mumkin bo'lgan tosh chiqish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 7/18$.

45. Uchta idishning har birida 6 tadan qora shar va 4 tadan oq shar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, ikkinchi idishga solingan, shundan so'ng ikkinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, uchinchi idishga solindi. Uchinchi idishdan tavakkaliga olingan sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 0,4$.

4-§. Bayes formulasi

Biz birga ro'y bermas va to'la hodisalar gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalardan birorotasi ro'y bergandan keyin A hodisaning ro'y bersh ehtimolini to'la ehtimol formulasi bilan hisobladik. Endi masalani davom ettirib A hodisa ro'y bergandan keyingi B_i ($i = \overline{1, n}$) (gipotezalar) hodisalarni ro'y berish ehtimolini quyidagi Bayes formulasi bilan hisoblaymiz:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

bu yerda

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

15-misol. Zavodni 1 – sexda yalpi mahsulotning 35%, 2 – sexda 40% i va 3 – sexda 25% i ishlab chiqariladi. Sexlarda ishlab chiqarilgan mahsulotni sifatli bo'lish ehtimollari mos holda 0,8, 0,85 va 0,9 ga teng. Tasodifiy olingan mahsulot tekshirilganda sifatsiz chiqdi. Uni 1 – sexda ishlanganligi ehtimoli topilsin.

Yechish. Mahsulotni 1 – sexda ishlab chiqarilganligini B_1 , 2 va 3 – sexlarda ishlab chiqarilganligini mos holda B_2 va B_3 bilan belgilaymiz. A - mahsulotning sifatli bo'lishini bildirsin. Demak,

$$P(B_1) = \frac{35\%}{100\%} = 0,35, \quad P(B_2) = \frac{40\%}{100\%} = 0,4, \quad P(B_3) = \frac{25\%}{100\%} = 0,25.$$

Masalaning shartiga asosan, agar mahsulot 1 – sexda ishlab chiqarilgan bo'lsa, uni sifatli bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(A) = 0,8$ ga teng, sifatsiz bo'lish ehtimoli $P_{B_1}(\bar{A}) = 1 - P_{B_1}(A) = 0,2$.

Xuddi shunday 2 va 3 – sexlarda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sifatli bo'lish ehtimollari mos holda $P_{B_2}(A) = 0,85$, $P_{B_3}(A) = 0,9$. Demak,

$$P_{B_2}(\bar{A}) = 1 - P_{B_2}(A) = 0,15,$$

$$P_{B_3}(\bar{A}) = 1 - P_{B_3}(A) = 0,1.$$

To'la ehtimol formulasiga asosan, tasodifan olingan mahsulotning sifatsiz bo'lish ehtimoli

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A}) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(\bar{A}) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(\bar{A}) = \\ &= 0,35 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,15 + 0,25 \cdot 0,1 = 0,07 + 0,06 + 0,025 = 0,155. \end{aligned}$$

Demak, sifatsiz chiqqan mahsulotning 1 – sexda ishlanganlik ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0,35 \cdot 0,2}{0,155} = \frac{0,07}{0,155} = \frac{70}{155} = \frac{14}{31}.$$

16-misol. Ikkita avtomat bir xil detallar ishlab chiqaradi, bu detallar keyin umumiy konveyerga o'tadi. Birinchi avtomatning unumdorligi ikkinchi avtomatning unumdorligidan ikki marta ortiq. Birinchi avtomat o'rta hisobda detallarning 60% ini, ikkinchi avtomat esa o'rtacha hisobda detallarning 84% ini a'lo sifat bilan ishlab chiqaradi. Konveyerdan tavakkaliga olingan detal a'lo sifatli bo'lib chiqdi. Bu detalni birinchi avtomat ishlab chiqarganligi ehtimolini toping.

Yechish. A orqali – detal a'lo sifatli bo'lishi hodisasini belgilaymiz. Bu yerda ikkita taxmin (gipoteza) bo'lish mumkin: B_1 – detalni birinchi avtomat ishlab chiqarganligini hodisasini bildirsa uni ehtimoli

$$P(B_1) = \frac{2}{3}$$

(chunki birinchi avtomat ikkinchi avtomatga qaraganda ikki marta ko'p detal ishlab chiqaradi);

B_2 – detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqarganligini bildirsa, uni ehtimoli

$$P(B_2) = \frac{1}{3}.$$

Agar detalni birinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lsa, detal a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_1}(A) = 0,6.$$

Agar detalni ikkinchi avtomat ishlab chiqargan bo'lsa, detal a'lo sifatli bo'lishining shartli ehtimoli

$$P_{B_2}(A) = 0,84.$$

Tavakkaliga olingan detalning a'lo sifatli bo'lish ehtimoli to'la ehtimol formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68. \end{aligned}$$

46. Piramidada 10 ta miltiq bo'lib, ularning 4 tasi optik nishon bilan ta'minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,95 ga teng; optik nishon o'rnatilmagan miltiq uchun bu ehtimol 0,8 ga teng. Mergan tavakkaliga olingan miltiqdan otgan o'q nishonga tegdi. Quyidagi ehtimollardan qaysi katta: merganni optik nishonli miltiqdan otgan o'qni nishonga tegishimi yoki optik nishon o'rnatilmagan miltiqdan otgan o'qni nishonga tegishimi?

Javobi. Miltiq optik nishonsiz bo'lganligining ehtimoli katta.

24/43.

47. Benzokolonka joylashgan shossedan o'tadigan yuk mashinalari sonining o'sha shossedan o'tadigan yengil mashinalar soniga nisbati 3:2 kabi. Yuk

mashinaning benzin olish ehtimoli 0,1 ga teng; yengil mashina uchun bu ehtimol 0,2 ga teng. Benzokolonkadan bitta mashina benzin olib ketgan. Uning yuk mashinasi bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P = 3/7$.

48. Ikki perforatorchi ayol turli perforatorlarda bir xil komplekt perfokartalar tayyorlashda. Birinchi perforatorchi ayolning xatoga yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng; ikkinchi perforatorchi ayol uchun bu ehtimol 0,1 ga teng. Perfokartalarni tekshirishda xatoga yo'l qo'yilganligi aniqlandi. Birinchi perforatorchi ayol xato qilganligining ehtimolini toping (ikkala perforator ham buzilmagan deb faraz qilinadi)

Javobi. $P = 1/3$.

49. Zavod 30% mahsulotni 1-sexda, 20% mahsulotni 2-sexda, 50% mahsulotni 3-sexda ishlab chiqaradi. Birinchi sexda ishlab chiqarilgan mahsulotning sifatli bo'lish ehtimoli 0,85 ga, 2-sexda va 3-sexda chiqarilgan mahsulotlar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,7 va 0,9 ga teng. Tasodifiy olingan mahsulot sifatli chiqdi. Uni 3-sexda ishlangan bo'lish ehtimoli topilsin.

50. Ixtisoslashtirilgan kasalxonaga bemorlarning o'rta hisobda 50% i K kasallik bilan, 30% i L kasallik bilan, 20% i M kasallik bilan qabul qilinadi. K kasallikni to'liq davolanish ehtimoli 0,7 ga teng, L va M kasalliklar uchun bu ehtimol mos ravishda 0,8 va 0,9 ga teng. Kasalxonaga qabul qilingan bemor butunlay sog'ayib ketdi. Bu bemor K kasallik bilan og'rikan bo'lishi ehtimolini toping.

Javobi. $P = 5/11$.

51. Buyumning standartga muvofiqligini ikki tovarshunoslardan biri tekshiradi. Buyumning birinchi tovarshunosga kelib tushish ehtimoli 0,55 ga, ikkinchi tovarshunosga kelib tushish ehtimoli esa 0,45 ga teng. Standart buyumni birinchi tovarshunos standartga muvofiq deb qabul qilish ehtimoli 0,9 ga teng; ikkinchi tovarshunos uchun bu ehtimol 0,98 ga teng. Standart buyum tekshirishda standartga muvofiq deb qabul qilindi. Bu buyumni ikkinchi tovarshunos tekshirgan bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P \approx 0,47$.

52. Uch mergan bir yo'la o'q uzishdi, bunda ikki o'q nishonga tegdi. Agar birinchi, ikkinchi va uchinchi merganlarning o'qni nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda 0,6; 0,5 va 0,4 ga teng bo'lsa, o'qni uchinchi mergan nishonga tekkizganligining ehtimolini toping.

Javobi. $P = 10/19$.

53. Zavodning 1-sexida 25 ta, 2-sexida 35 ta, 3- sexida 20 ta mashina ishlab chiqarildi. 1-sexda ishlab chiqarilgan mashinalarning difektsiz bo'lish ehtimoli 0,9 ga, 2 va 3-sexlarda ishlangan mashinalarning difektsiz bo'lish ehtimoli mos holda 0,8 va 0,9 ga teng. Zavoddan chiqqan mashinalar orasida tasodifiy olingan mashina difektsiz chiqdi. Uning 2-sexda ishlanganligi ehtimoli topilsin.

III -bob

TAKROR ERKLI SINASHLAR

1-§. Bernulli formulasi

Agar bir necha marta sinashlar o'tkazilayotgan bo'lib, har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli boshqa sinashlarning natijalariga bog'liq bo'lmasa, bunday sinashlarga *takror erkli sinashlar* deyiladi.

Bernulli formulasi. Har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lsa, n ta erkli sinashda hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

yoki

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

ga teng, bu yerda $q = 1 - p$.

n marta sinashda hodisaning: a) kamida k_1 ; b) k_1 gacha; c) k_1 bilan k_2 oralig'ida ro'y berish ehtimollari mos holda quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_n(k_1 \leq k) &= P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(n); \\ \text{b) } P_n(k < k_1) &= P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k_1 - 1); \\ \text{v) } P_n(k_1 \leq k \leq k_2) &= P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2). \end{aligned}$$

1-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda: to'rt partiyadan ikkitasini yutish ehtimoli kattami yoki olti partiyadan uchtasini yutish ehtimoli kattami (durang natijalar hisobga olinmaydi)?

Yechish. Teng kuchli shaxmatchilar o'ynashmoqda, shu sababli o'yinchining har bir partiyada yutish ehtimoli $p = 1/2$, demak, partiyani yutqazish ehtimoli q ham $1/2$ ga teng. Hamma partiyalarda yutish ehtimoli o'zgarmas va partiyalarni qaysi tartibda yutishning farqi yo'qligi sababli Bernulli formulasini qo'llash mumkin.

O'yinchining to'rt partiyadan ikki partiyada yutish ehtimolini topamiz:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}.$$

Olti partiyadan uch partiyada yutish ehtimolini topamiz:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

$P_4(2) > P_6(3)$ bo'lgani uchun olti partiyadan uchtasida yutishdan ko'ra to'rt partiyada ikki marta yutishning ehtimoli kattaroq.

1. Ikki teng kuchli raqib shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi birining yutish ehtimoli kattaroq: a) ikki partiyadan bir partiyada yutishnimi yoki to'rt partiyadan ikkitasida yutishnimi; b) to'rt partiyadan kamida ikkitasida yutishnimi yoki besh partiyadan kamida uchtasida yutishnimi? Durang natijalar e'tiborga olinmaydi.

Javobi. a) Ikki partiyadan bittasini yutish ehtimoli kattaroq: $P_2(1) = 1/2$; $P_4(2) = 3/8$; b) to'rt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimoli kattaroq: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) + P_4(1) = 11/16$;

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 8/16 = 1/2.$$

2. Ikkita teng kuchli o'yinchilar musobaqalashayapti. Quyidagi yutish ehtimollaridan qaysi katta a) to'rtta o'yindan uchta yutishimi yoki sakkiztadan beshtasidami; b) to'rt partiyadan kamida uchta yutishimi yoki sakkiztadan kamida beshtasidami?

3. Tanga 5 marta tashlanadi. «Gerbli» tomon a) ikki martadan kam tushish; b) kamida ikki marta tushish ehtimolini toping.

Javobi. a) $P = P_5(0) + P_5(1) = 3/16$; b) $Q = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 13/16$.

4. Agar bitta sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, u holda to'rt marta erkli sinashlarda A hodisaning kamida uch marta ro'y berish ehtimolini toping.

Javobi. $P_4(3) + P_4(4) = 0,1792$.

5. A hodisa kamida to'rt marta ro'y bergan holda B hodisa ro'y beradi. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lgan 5 ta erkli sinash o'tkaziladigan bo'lsa, B hodisaning ro'y berish ehtimolini toping.

Javobi. $P_5(4) + P_5(5) = 0,74$.

6. Oilada 5 ta farzand bor. Bu bolalar orasida : a) ikkita o'g'il bola b) ko'pi bilan o'g'il bola ikkitadan ortiq g) kamida ikkita va ko'pi bilan uchta o'g'il bolalar bo'lish ehtimolini toping. O'g'il bolalar tug'ilish ehtimolini 0,51 ga teng deb olinadi.

Javobi. a) 0,31; b) 0,48; v) 0,52; g) 0,62.

7. Uzunligi 15 sm bo'lgan AB kesmani C nuqta orqali 2:1 kabi nisbatda bo'lingan. Bu kesmaga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlangan. Bu nuqtalardan ikkitasi C nuqtadan chapga, ikkitasi esa undan o'ngga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Javobi. $P_4(2) = C_4^2 (2/3)^2 (1/3)^2 = 8/27$.

2-§. Laplasning lokal va integral teoremlari

Laplasning lokal teoremasi. Har bir sinashda xodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, n marta erkli sinashlarda hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagi funksiyaga teng:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n p q}} \varphi(x)$$

bu yerda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{n p q}}.$$

x ning musbat qiymatlari uchun $\varphi(x)$ funksiya qiymatlari 1- ilovada keltirilgan; x ning manfiy qiymatlari uchun ham o'sha jadvaldan foydalaniladi ($\varphi(x) -$ juft funksiya, demak, $\varphi(-x) = \varphi(x)$).

Laplasning integral teoremasi. Har bir sinashda xodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, n marta erkli sinashlarda hodisaning k_1 bilan k_2 oralig'ida ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$$

ga teng. Bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$$

- Laplas funksiyasi,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

x ning ($0 \leq x \leq 5$) musbat qiymatlari uchun Laplas funksiyasining qiymatlari 2 – ilovada keltirilgan. $x > 5$ qiymatlar uchun $\Phi(x) = 0,5$ ga teng: x ning manfiy qiymatlari uchun ham Laplas funksiyasining toqligini [$\Phi(-x) = -\Phi(x)$] hisobga olib, o'sha jadvaldan foydalaniladi.

2-misol. Agar A hodisaning har bir sinashda ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 243 marta sinashda rosa 70 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $p=243$; $k=70$; $r=0,25$; $q=0,75$, $p=243$ x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,37.$$

Jadvaldan (1-ilova)

$$\varphi(1,37) = 0,1561$$

ni topamiz.

Izlanayotgan ehtimol:

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,1561 = 0,0231.$$

3-misol. Agar A hodisaning har bir sinashda ro'y berish ehtimoli 0,6 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 2400 marta sinashda 1400 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Yechish. p katta son bo'lgani uchun Laplasning lokal teoremasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

x ni hisoblaymiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0,6}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67.$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ funksiya juft bo'lgani uchun } \varphi(-1,67) = \varphi(1,67).$$

Jadvaldan (1-ilova)

$$\varphi(1,67) = 0,0989$$

ni topamiz. Izlanayotgan ehtimol:

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} \cdot 0,0989 = 0,0041.$$

8. Merganni har bir o'q uzilgandagi nishonga tegizish ehtimoli 0,8 ga teng. Nishonga 100 marta o'q uzilganda rosa 75 ta o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

Javobi. $P_{100}(75) = 0,04565$.

9. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 marta sinashda hodisaning rosa 104 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Javobi. $P_{400}(104) = 0,0006$.

10. O'g'il bola tug'ilish ehtimoli 0,51 ga teng. Tug'ilgan 100 chaqaloqning 50 tasi o'g'il bola bo'lish ehtimolini toping.

Javobi. $P_{100}(50) = 0,0782$.

4-misol. 100 marta erkli sinovning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, $r=0,8$ ga teng. Hodisaning: a) kamida 75 marta va ko'pi bilan 90 marta; b) kamida 75 marta; v) ko'pi bilan 74 marta ro'y berish ehtimollarini toping.

Yechish. Laplasning integral teoremasidan foydalanamiz:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

bu yerda $F(x)$ – Laplas funksiyasi,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

a) Shartga ko'ra $p=100$; $r=0,8$; $q=0,2$; $k_1=75$, $k_2=90$. x' va x'' ni hisoblaymiz:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Laplas funksiyasi toq, ya'ni $F(-x) = -F(x)$ ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_{100}(75; 90) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

Jadvaldan (2-ilova) quyidagini topamiz:

$$F(2,5) = 0,4938; \quad F(1,25) = 0,3944.$$

Izlanayotgan ehtimol:

$$P_{100}(75; 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

b) 100 marta sinashda hodisaning kamida 75 marta ro'y berish ehtimoli $P_{100}(75;100)$ ni hisoblaymiz. Shunday qilib, $k_1 = 75$, $k_2 = 100$. U holda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25;$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5.$$

Jadvaldan (2-ilova) quyidagini topamiz:

$$F(5)=0,5; \quad F(1,25)=0,3944 .$$

Izlanayotgan ehtimol:

$$P_{100}(75; 100) = \Phi(5) - \Phi(-1,25) = \Phi(5) + \Phi(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944 .$$

v) «A kamida 75 marta ro'y berish» va « $\bar{A}$ ko'pi bilan 74 marta ro'y berish» hodisalari qarama-qarshi hodisalar, shuning uchun bu hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng. Demak, izlanayotgan ehtimol:

$$P_{100}(0; 74) = 1 - P_{100}(75; 100) = 1 - 0,8944 = 0,1056 .$$

11. Merganning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli 0,75 ga teng, 100 ta o'q uzilganda nishonga tekkan o'qlar soni a) 70 bilan 80 oralig'ida, b) 70 gacha bo'lish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. a) } P_{100}(70,80) = 2\Phi(1,15) = 0,7498; \quad \text{b) } P_{100}(0; 70) = -0,1251.$$

12. Hodisaning 2100ta erkli sinashning har birida ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Hodisaning: a) kamida 1470 marta va ko'pi bilan 1500marta b) kamida 1470 marta v) ko'pi bilan 1469 marta ro'y berish ehtimollarini toping.

$$\text{Javobi. } P_{2100}(1470; 1500) = 0,4236; \quad \text{b) } P_{2100}(1470; 2100) = 0,5;$$

$$\text{c) } P_{2100}(0; 1469) = 0,5.$$

13. Hodisaning 21 marta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Sinovlarning ko'pchiligida hodisaning ro'y berish ehtimolini toping.

$$\text{Javobi. } P_{21}(11; 21) = 0,95945.$$

14. Merganni har bir otishda nishonga tekkizish ehtimoli 3/4 ga teng. 1200 marta otganda quyidagi hodisalar ehtimolini toping: a) 885 bilan 930 oralig'ida b) kamida 870 marta tegishi.

$$\text{Javobi. a) } 0,8175 \quad \text{b) } 0,9772$$

15. Lampochkani 1000 soatdan ortiq yonish ehtimoli 1/3 ga teng. 1800 ta lampochkadan hyech bo'lmasa 580 tasini 1000 soatdan ortiq yonish ehtimolini baholang.

$$\text{Javobi. } 0,8413$$

5-misol. Hodisaning erkli sinovlarning har birida ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisaning kamida 75 marta ro'y berish ehtimolini 0,9 ehtimol bilan kutish mumkin bulishi uchun nechta sinov o'tkazish lozim?

$$\text{Yechish. Shartga ko'ra } p = 0,8; q = 0,2; k_1 = 75; k_2 = n; P_n(75, n) = 0,9 .$$

Laplasning ushbu integral teoremasidan foydalanamiz:

$$P_n(k_1; n) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi\left[\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Bunga masalada berilgan ma'lumotlarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$0,9 = \Phi\left[\frac{n - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right] - \Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{\sqrt{n \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right]$$

yoki

$$0,9 = \Phi\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] - \Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right].$$

Ravshanki, sinovlar soni $n > 75$, shuning uchun $\frac{\sqrt{n}}{2} > \frac{\sqrt{75}}{2} \cong 4,33$. Laplas funksiyasi o'suvchi va $F(4) \cong 0,5$ bo'lgani uchun $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0,5$ deb olish mumkin. Demak,

$$0,9 = 0,5 - \Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right].$$

Shunday kilib,

$$\Phi\left[\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}}\right] = -0,4. \quad (*)$$

Jadvaldan (2-ilova) $F(1,28)=0,4$ ni topamiz. Bu yerdan va (*) munosabatdan, Laplas funksiyasining toqligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{75 - 0,8n}{0,4\sqrt{n}} = -1,28.$$

Bu tenglamani $\sqrt{n}$ nisbatan kvadrat tenglama sifatida yechib,

$$\sqrt{n} = 10$$

ni hosil qilamiz. Demak, sinashlar soni $p=100$.

14. n ta tajribaning har birida ijobiy natija olinish ehtimoli 0,9 ga teng. Kamida 150 ta tajribada ijobiy natija olinishini 0,98 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun nechta tajriba o'tkazish lozim?

Javobi. $n=177$.

15. Tangani gerbli tomoni tushishi nisbiy chastotasining $p=0,5$ ehtimoldan chetlanishini absolyut qiymati bo'yicha 0,01 dan katta bo'lmasligini 0,6 ehtimol bilan kutish uchun tangani necha marta tashlash kerak?

Javobi. $n=1764$.

3-§. Erkli sinashlarda nisbiy sanoqni o'zgarmas ehtimoldan chetlanishining ehtimoli

Nisbiy sanoqning o'zgarmas ehtimoldan chetlanishini baholash. Har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lsa, n ta erkli sinovda hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ro'y berish ehtimolidan chetlanishini absolyut qiymatini $\varepsilon > 0$ sonidan kichik bo'lish ehtimoli ikkilangan Laplas funksiyasiga teng

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

6-misol. Hodisaning 625 ta erkli sinashning har birida ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisaning ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,04 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $n=625$; $p=0,8$; $q=0,2$; $\varepsilon=0,04$.

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right)$$

ehtimolini topish talab qilinmoqda. Ushbu formuladan foydalanamiz

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) = 2\Phi\left(0,04 \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5).$$

Jadvaldan (2-ilova) foydalanib $F(2,5)=0,4938$ ni topamiz. Demak,
 $2F(2,5)=2 \cdot 0,4938=0,9876$.

Shunday qilib, izlanayotgan ehtimol 0,9876 ga teng.

16. Hodisaning 900 marta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut kattaligi bo'yicha 0,02 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = 2\Phi(1,2) = 0,7698$.

17. Hodisaning 1000 ta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli 0,75 ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,01 dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = 2\Phi(2,31) = 0,979$.

18. Fransuz olimi Byuffon (XVIII asr) tangani 4040 marta tashlagan, shu bilan birga «gerbli» tomon 2048 marta tushgan. Byuffon tajribasini nisbiy chastotasining uning «gerbli» tomoni tushish nisbiy chastotasining uning «gerbli» tomoni tushish ehtimolidan chetlanishi absolyut kattaligi bo'yicha Byuffon tajribasidan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Javobi. $P = 2\Phi(0,877) = 0,6196$.

7-misol. Hodisaning erkli sinovlarning har birida ro'y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut kattaligi bo'yicha 0,02 dan ortiq bo'lmasligini 0,7698 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun o'tkazilishi kerak bo'lgan sinovlar soni p ni toping.

Yechish. Ushbu

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

formuladan foydalanamiz.

Shartga ko'ra $p = 0,5$; $q = 0,5$; $\varepsilon = 0,02$;

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \leq 0,02\right) = 0,7698.$$

Shunga ko'ra

$$2\Phi\left(0,02 \sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,7698$$

yoki

$$\Phi(0,04\sqrt{n}) = 0,3849.$$

Jadvaldan (2-ilova) foydalanib, $F(1,2)=0,3849$ ni topamiz.

Demak,

$$0,04\sqrt{n} = 1,2$$

yoki

$$\sqrt{n} = 30.$$

Shunday qilib, sinashlar soni $p=900$.

8-misol. O'yin kubini necha marta tashlasa ushbu

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| \leq 0,01$$

tengsizlikning ehtimoli qarama– qarshi tengsizlikning ehtimolidan kichik bo'ladi?
Bu yerda t – o'yin kubini p marta tashlashda bir ochko tushish soni?

Yechish. Ushbu

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

formuladan foydalanamiz. Shartga ko'ra $p=1/6$, $q=5/6$, $\varepsilon=0,01$. Berilgan tengsizlikka qarama–qarshi tengsizlikning, ya'ni $\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq 0,01$ tengsizlikning yuz berish ehtimoli

$$1 - 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

ga teng.

Masala shartiga asosan ushbu tengsizlik o'rinli bo'lishi lozim:

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 1 - 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Yoki

$$4\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 1,$$

bu yerdan

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 0,25. \quad (*)$$

Jadvaldan (2-ilova) foydalanib, $F(0,67)=0,2486$; $F(0,68)=0,2517$ ni topamiz.

Bularga chiziqli interpolyasiya usulini qo'llanib,

$$F(0,6745)=0,25$$

ni hosil qilamiz.

(*) munosabatni hisobga olib va $F(x)$ funksiyaning o'suvchiligidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \geq 0,6745$$

yoki

$$0,01\sqrt{\frac{n}{1/5 \cdot 5/6}} \geq 0,6745.$$

O'yin kubining izlangan tashlashlar sonini topamiz: $p \geq 632$.

19.Hodisaning erkli sinovlarning har birida ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng. Hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,04 dan ortiq bo'lmasligini 0,9876 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun zarur bo'lgan sinovlar soni n ni toping.

Javobi. $n = 625$.

20.Idishdagi oq va qora sharlar nisbati 4:1 kabi. Bitta shar olinib, uning rangi qayd etilganidan keyin, shar idishga qaytarib solinadi. Oq shar chiqishi nisbiy chastotasining, uning ehtimolidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,01 dan ortiq, bo'lmasligini 0,9722 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lishi uchun zarur bo'lgan shar olishlar soni n ni toping.

Javobi. $n = 378$.

21.Hodisaning 900 ta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Shunday ε musbat sonni topingki, hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimoli 0,5 dan chetlanishining absolyut qiymati ε dan katta bo'lmasligini 0,7698 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lsin.

Javobi. $\varepsilon = 0,02$.

22.Hodisaning 10000 ta erkli sinovning har birida ro'y berish ehtimoli 0,75 ga teng. Shunday ε musbat sonni topingki, hodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimoli 0,75 dan chetlanishining absolyut kattaligi ε dan katta bo'lmasligini 0,979 ehtimol bilan kutish mumkin bo'lsin.

Javobi. $\varepsilon = 0,01$.

9-misol. Texnik kontrol bo'limi 900 ta detalning standartga muvofiqligini tekshiradi. Detalning standartga muvofiq bo'lish ehtimoli 0,9 ga teng. Tekshirilgan detallar orasidagi standart detallar soni t 0,9544 ehtimol bilan yotadigan chegaralarini aniqlang.

Yechish. Shartga ko'ra $n=900$; $p=0,9$; $q=0,1$ yoki

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,9544,$$

$$F(100\varepsilon) = 0,4772.$$

Jadvaldan foydalanib (2-ilova) $F(2)=0,4772$ ni topamiz. Demak, $100\varepsilon=2$.

Bu yerdan $\varepsilon=0,02$.

Shunday qilib, standart detallar soni nisbiy chastotasining 0,9 ehtimoldan chetlanishi ushbu tengsizlikni 0,9544 ehtimol bilan qanoatlantiradi:

$$\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq 0,02$$

yoki

$$0,88 \leq \frac{m}{900} \leq 0,92.$$

Bu yerdan, tekshirilgan 900 ta detal orasidagi standart detallarning izlanayotgan t soni 0,9544 ehtimol bilan quyidagi oraliqda yotadi: $92 \leq t \leq 828$.

23. Texnik kontrol bo'limi 475ta buyumning yaroqliligini tekshiradi. Buyumning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,05 ga teng. Tekshirilgan detallar orasidagi yaroqsiz detallar soni m ning yotadigan chegaralarini 0,9426 ehtimol bilan toping.

Javobi. $14 \leq m \leq 23$.

24. O'yin kubi 80 marta tashlanadi. Olti ochko tushishlar soni m ning yotadigan chegaralarini 0,9973 ehtimol bilan toping.

Javobi. $3 \leq m \leq 23$

4-§. Erkli sinovlarda hodisa ro'y berishining eng ehtimolli soni

Agar har bir sinashda xodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng bo'lib hodisaning k_0 marta ro'y berish ehtimoli boshqa ehtimollaridan ortiq bo'lsa, u holda k_0 son eng katta ehtimolli son deyiladi

$$P_n(k) \leq P_n(k_0).$$

Eng ehtimolli k_0 son ushbu ikkilangan tengsizlikdan aniqlanadi:

$$np - q \leq k_0 < np + p,$$

bunda:

a) agar np butun son bo'lsa, u holda $k_0 = np$ bo'ladi.

b) agar $np - q$ butun son bo'lsa, u holda $np + p$ ham butun bo'lib, eng ehtimolli son ikkita bo'ladi, ya'ni $k_0 = np - q$, $k_0 + 1 = np + p$ bo'ladi;

v) agar $np - q$ kasr son bo'lsa, u holda $np + p$ ham kasr son bo'lib, k_0 shu kasrlar orasidagi butun songa teng bo'ladi.

10-misol. Qurilma 15 ta elementdan iborat bo'lib, uning har biri sinaladi. Har bir elementning sinovga bardosh berish ehtimoli 0,9 ga teng. Sinovga bardosh beradigan elementlarning eng katta ehtimolli sonini toping.

Yechish. Shartga ko'ra, eng katta ehtimolli k_0 sonni ushbu qo'sh tengsizlikdan topamiz:

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Bunda masalada berilgan ma'lumotlarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$15 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 < 15 \cdot 0,9 + 0,9$$

yoki

$$13,4 \leq k_0 < 14,4.$$

13,4 va 14,4 sonlari orasida faqat bitta butun son bor, k_0 shu songa teng, ya'ni $k_0 = 14$.

25. Texnik kontrol bo'limi 10 ta detaldan iborat partiyani tekshirmoqda. Detailning standart bo'lish ehtimoli 0,75 ga teng. Standart deb, tan olinadigan detallarning eng katta ehtimolli sonini toping.

Javobi. $k_0 = 8$.

26. Tovarshunos tovarlardan 24 ta namunasini tekshiradi. Namunalarning har birini sotishga yaroqli deb tan olinish ehtimoli 0,6 ga teng. Tovarshunos sotishga yaroqli deb topadigan namunalarning eng katta ehtimolli sonini toping.

Javobi. $k_0 = 14$, $k_0 + 1 = 15$.

27. Perfokartaning noto'g'ri tayyorlanish ehtimoli 0,1 ga teng. Perforatorchi tayerlagan 19ta perfokarta orasidagi to'g'ri tayyorlangan perfokartalarning eng ehtimolli sonini toping.

Javobi. $k_0 = 17, k_0 + 1 = 18$.

11-misol. Ikki teng kuchli raqib shaxmat o'ynashmoqda. Agar $2N$ ta natijali (durangsiz) partiya o'ynaladigan bo'lsa, u holda istalgan shaxmatchi uchun yutuqlarning eng katta ehtimolli sonini toping.

Yechish. Ma'lumki, sinashlar soni p bilan hodisaning har bir sinashda ro'y berish ehtimoli r ko'paytmasi butun son bo'lsa, u holda eng ehtimolli son $k_0 = pr$ bo'ladi.

Qaralayotgan masalada sinovlar soni p o'ynalgan partiyalar soni $2N$ ga teng, hodisaning ro'y berish ehtimoli bitta partiyada yutish ehtimoliga, ya'ni $r = 1/2$ ga teng (shartga ko'ra raqiblar teng kuchli o'ynashadi).

$np = 2N \cdot 1/2 = N$ ko'paytma butun son bo'lgani uchun istalgan raqib yutgan partiyalarning k_0 eng katta ehtimolli soni N ga teng.

28. Ikki mergan bir vaqtda nishonga o'q uzishmoqda. Bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchi mergan uchun 0,6 ga teng. Agar bir yo'la 15 marta o'q uziladigan bo'lsa, ikkala merganning ham nishonga tekkizishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Javobi. $k_0 = 7$.

12-misol. Hodisaning har bir sinashda ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng. Bu hodisa ro'y berishining eng katta ehtimolli soni 25 ga teng bo'lishi uchun nechta erkli sinash o'tkazilishi kerak?

Yechish. Shartga ko'ra $k_0 = 25; p = 0,4; q = 0,6$. Ushbu ikkilangan tengsizlikdan foydalanamiz:

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Bunga masalada berilgan ma'lumotlarni qo'yib, noma'lum sonni aniqlash uchun ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$0,4p - 0,6 \leq 25, \quad 0,4p + 0,4 > 25.$$

Sistemaning birinchi tengsizligidan quyidagini topamiz:

$$n \leq \frac{25,6}{0,4} = 64.$$

Sistemanig ikkinchi tengsizligidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$n > \frac{24,6}{0,4} = 61,5.$$

Shunday qilib, sinovlar soni ushbu ikkilangan tengsizlikni qanoatlantirishi lozim:

$$62 \leq n \leq 64.$$

29. Erkli sinovlarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,3 ga teng. Bu sinovlarda hodisa ro'y berishining eng katta ehtimolli soni 30 ga teng bo'lishi uchun o'tkazilishi lozim bo'lgan sinashlar soni n ni toping.

Javobi. $100 \leq n \leq 102$.

30. Erkli sinashlarning har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,7 ga teng. Hodisa ro'y berishining eng katta ehtimolli soni 10 ga teng bo'lishi uchun o'tkazilishi lozim bo'lgan sinovlar soni n ni toping.

Javobi. $28 \leq n \leq 29$.

13-misol. Batareya obyektga qarata 6 ta o'q uzdi. Uzilgan bitta o'qning obyektga tegish ehtimoli 0,3 ga teng. a) O'qlarning nishonga tegishining eng katta ehtimolli sonini toping; b) nishonga otilgan o'qlarning eng katta ehtimolli sonining ehtimolini toping; v) obyektning yakson qilinishi uchun kamida ikkita o'qning nishonga tegishi yetarli bo'lsa, uning yakson qilinish ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 6$; $p = 0,3$; $q = 0,7$.

a) Obyektga tekkan o'qlarning eng katta ehtimolli sonini ushbu formuladan topamiz:

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Bunga masalada berilgan ma'lumotlarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$6 \cdot 0,3 - 0,7 \leq k_0 < 6 \cdot 0,3 + 0,3$$

yoki

$$1,1 \leq k_0 < 2,1,$$

bu yerda $k_0 = 2$.

b) Obyektga o'qlar tegishining eng katta ehtimolli sonini Bernulli formulasidan foydalanib topamiz:

$$P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^4 = 0,324.$$

v) O'qlarning nishonga tegishining eng katta ehtimolli sonini marta ro'y berish ehtimolini toping?

$$P(k \geq 1) = 1 - [P_6(0) + P_6(1)] = 1 - 0,42.$$

5-§. Puasson formulasi

Sinashlar soni n katta bo'lib, har bir sinashda hodisaning ro'y berish ehtimoli p kichik bo'lganda $P_n(k) - n$ marta sinashda hodisani k marta ro'y berish ehtimoli quyidagi Puasson formulasi bilan hisoblanadi:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Agar hodisani k marta ro'y berish ehtimoli biror $(0; t)$ vaqt oralig'ida kuzatilsa Puasson formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \lambda = np.$$

14-misol. Zavod ishlab chiqarilgan mahsulotlardan 10000 tasini omborga yubordi. Har bir mahsulotni yo'lda ishdan chiqish ehtimoli 0,0002 ga teng bo'lsa, mahsulotlar omborga yetguncha ikkitasini ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 10000$, $p = 0,0002$, $k = 2$. λ ni topamiz

$$\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2.$$

Puasson formulasiga ko'ra

$$P_{10000}(2) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2 \cdot 0,13534 = 0,27068.$$

15. 1000 ta yashikka mahsulotlar joylashtirilgan. Hamma mahsulotlardan 200 tasi sifatsiz. Ma'lum bitta yashikda kamida uchta yaroqsiz mahsulotlar bo'lish ehtimoli topilsin.

Ko'rsatma $n = 200$, $p = 0,001$.

(3-ilova)

Javob. 0,001

16. Yaroqsiz mahsulot ishlab chiqarish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot sotib olindi. Quyidagi hodisalar ehtimollari topilsin.

a) sotib olingan mahsulotlar orasida sifatsizi yo'q.

b) yaroqsiz mahsulotlar soni ikkidan ortmaydi.

Javob. a) 0,00674 b) 0,19465

17. Ip yigiruvchi 1000 ta kalavani boshqaradi. 1 minut davomida kalava ipini uzilishi ehtimoli 0,002 ga teng. Bir minut ichida kamida 3 ta kalavada ip uzilish ehtimoli topilsin.

Javob. $P = 0,1428$.

IV- bob

DISKRET TASODIFIY MIKDORLAR

1-§. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot konuni.

Binomial va Puasson taqsimotlari

Tasodifiy miqdorlar deb tajriba natijasida qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlardan bitta va faqat bittasini qabul qiladigan va bu qiymatlarni qabul qilishi juda ko'p hisobga olib bo'lmaydigan darajadagi tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan miqdorlarga aytiladi.

Ma'lum ehtimol bilan ayrim aniq qiymatlarni qabul qiluvchi miqdorlarga diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi. Ularning soni chekli yoki cheksiz (sanoqli).

Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning taqsimot qonuni deb, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularga mos ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi

$$X \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n$$

$$P \quad p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n$$

jadval ko'rinishida berilishi mumkin, bu yerda

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

analitik usulda (formula ko'rinishida) yoki integral funksiya yordamida berilishi ham mumkin.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini grafik usulda tasvirlash mumkin, buning uchun to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2; p_2)$, ..., $M_n(x_n; p_n)$ nuqtalar (x_i - X ning mumkin bo'lgan qiymatlari, p_i - mos ehtimollari) yasaladi va ular to'g'ri chiziq kesmalari orqali tutashtiriladi. Hosil qilingan figura *taqsimot ko'pburchagi* deyiladi.

Binomial taqsimot qonuni deb, har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng bo'lgan p ta erkli sinovda bu hodisaning ro'y berishi sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniga aytiladi; mumkin bo'lgan $X=k$ (hodisaning ro'y berishlari soni k) qiymatning ehtimoli $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ Bernulli formulasi bo'yicha hisoblanadi.

Agar sinashlar soni katta bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli r juda kichik bo'lsa, u holda $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ taqribiy formuladan foydalaniladi, bu yerda k -

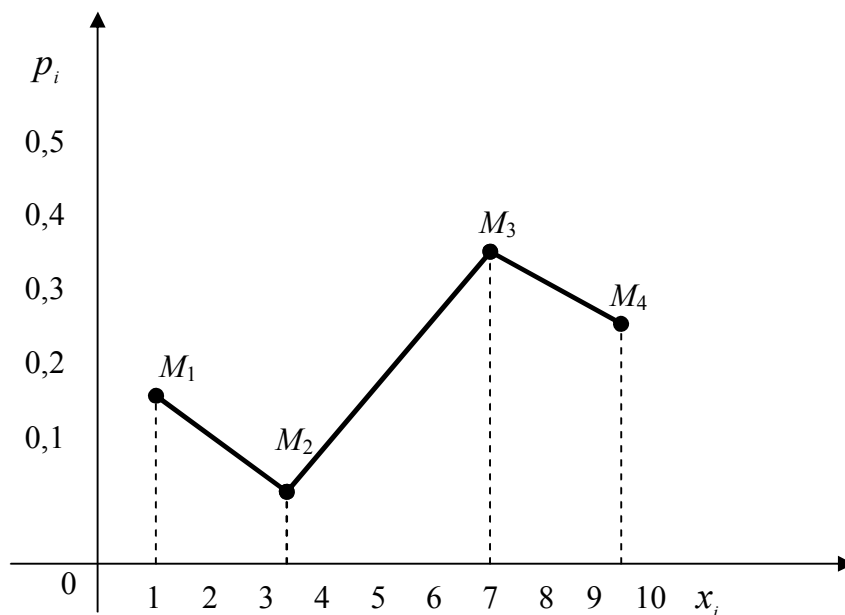
hodisaning p ta erkli sinovda ro'y berish soni, $\lambda = np$ (hodisaning p ta erkli sinovda ro'y berishlari o'rtacha soni). Bu holda tasodifiy miqdor *Puasson qonuni* bo'yicha taqsimlangan deyiladi.

1-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni (qatori) bilan berilgan:

X	1	3	6	8
P	0,2	0,1	0,4	0,3

taqsimot ko'pburchagini yasang.

Yechish. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini yasaymiz, bunda abssissalar o'qi bo'ylab mumkin bo'lgan x_i qiymatlarni, ordinatalar o'qi bo'ylab esa tegishli p_i ehtimollarni qo'yamiz. $M_1(1;0,2)$, $M_2(3;0,1)$, $M_3(7;0,4)$ va $M_4(9;0,3)$ nuqtalarni yasaymiz. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziqli kesmalar bilan tutashtirib, izlanayotgan taqsimot ko'pburchagini hosil qilamiz.



1. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

A) X 2 4 5 6
R 0,3 0,1 0,2 0,6

b) X 10 15 20
R 0,1 0,7 0,2.

Taqsimot ko'pburchagini yasang.

2-misol. Qurilma bir–biridan erikli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X diskret tasodifiy miqdor (bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar soni) ushbu mumkin bo'lgan qiymatlarga ega: $x_1 = 0$ (qurilma elementlarining bittasi ham ishdan chiqmagan), $x_2 = 1$ (bitta element ishdan chiqqan), $x_3 = 2$ (ikkita element ishdan chiqqan), $x_4 = 3$ (uchta element ishdan chiqqan).

Elementlarning ishdan chiqishi bir–biriga bog'liq emas, elementlarning ishdan chiqish ehtimollari o'zaro teng, shuning uchun Bernulli formulasini qo'llash mumkin. Shartga ko'ra $n = 3$; $p = 0,1$ (demak, $q = 1 - 0,1 = 0,9$) ekanligin e'tiborga olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P_3(0) = q^3 = 0,9^3 = 0,729; \quad P_3(1) = C_3^1 p q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243.$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027; \quad P_3(3) = p^3 = 0,1^3 = 0,001.$$

Tekshirish: $0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1$.

X ning izlanayotgan binomial taqsimot qonunini yozamiz:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

2. Partiyada 10% nostandart detal bor. Tavakkaliga 4 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi nostandart detallar sonining taqsimot qonunini yozing va hosil qilingan taqsimotning ko'pburchagini yasang.

Javobi.

X	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

3. X diskret tasodifiy miqdor–tangani ikki marta tashlashda «gerbli» tomon tushish sonining binominal taqsimot qonunini yozing.

Javobi.

X	0	1	2
p	1/4	1/2	1/4

4. Ikkita o'yin kubi bir vaqtda 2 marta tashlanadi. X diskret tasodifiy miqdor – ikkita o'yin kubida juft ochkolar tushish sonining binominal taqsimot qonunini yozing.

Javobi.

X	0	1	2
p	9/16	6/16	1/16

3-misol. 10 ta detal solingan yashikda 8 ta standart detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. Olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. X tasodifiy miqdor–olingan detallar orasidagi standart detallar soni quyidagi mumkin bo'lgan qiymatlarga ega: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Ushbu

$$P(X = k) = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

formulaga ko'ra (N – yashikdagi detallar soni, p – yashikdagi standart detallar soni, t – olingan detallar soni, k – olingan detallar orasidagi standart detallar soni) quyidagilarni topamiz:

$$P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}} = \frac{1}{45};$$

$$P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8 \cdot 2}{45} = \frac{16}{45};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}}{45} = \frac{28}{45}.$$

Izlanayotgan taqsimot qonunini tuzamiz:

X	0	1	2
P	1/45	16/45	28/45

Tekshirish: $1/45 + 16/45 + 28/45 = 1$.

5. Yashikdagi oltita detal orasida 4 ta standart detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olingan. X diskret tasodifiy miqdor – olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Javobi.

X	0	1	2	3
p	0	1/5	3/5	1/5

5-misol. Zavodda ishlab chiqarilgan mahsulotlardan bazaga 500 tasi jo'natildi. Yo'lda buyumning shikastlanish ehtimoli 0,002 ga teng. Yo'lda:

a) rosa 3 ta; b) uchtdan kam; v) uchtdan ortiq; g) kamida bitta mahsulotning shikastlanish ehtimolini toping.

Yechish. $p=500$ soni katta, $r=0,002$ ehtimol kichik va qaralayotgan hodisalar (mahsulotlarning shikastlanish) erkli, shu sababli ushbu

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Puasson formulasini qo'llash mumkin:

a) λ ni topamiz:

$$\lambda = pr = 500 \cdot 0,002 = 1.$$

Rosa 3 ta ($k=3$) mahsulotning shikastlanish ehtimolini topamiz:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{0,36788}{6} = 0,0613.$$

b) Uchtdan kam detalning shikastlanish ehtimolini topamiz:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2} e^{-1} = \frac{5}{2} \cdot 0,36788 = 0,9197.$$

v) Uchtdan ko'p mahsulotning shikastlanish ehtimoli R ni topamiz. «Uchtdan ko'p mahsulot shikastlangan» va «ko'pi bilan uchta mahsulot shikastlangan» (bu hodisaning ehtimolini Q orqali belgilaymiz) hodisalari qarama – qarshi hodisalardir, shu sababli

$$P + Q = 1.$$

Bu yerdan

$$P = 1 - Q = 1 - [P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)].$$

Yuqorida hosil qilingan natijalardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P = 1 - [0,9197 + 0,0613] = 0,019.$$

g) Kamida bitta mahsulotning shikastlanish ehtimoli P_1 ni topamiz. «Kamida bitta mahsulot shikastlangan» va «mahsulotning bittasi ham shikastlanmagan» (bu hodisaning ehtimolini Q_1 orqali belgilaymiz) hodisalari qarama – qarshi hodisalardir, demak,

$$P_1 + Q_1 = 1.$$

Bu yerdan kamida bitta mahsulotning shikastlangan bo'lish ehtimoli quyidagiga teng:

$$P_1 = 1 - Q_1 = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,36788 = 0,632.$$

6. Magazinga 1000 shisha mineral suvi berildi. Tashish vaqtida shishaning sinib qolish ehtimoli 0,003 ga teng. Magazinga: a) rosa ikkita ; b) ikkitadan kam; v) ikkitadan ko'p; g) kamida bitta singan shisha keltirish ehtimolini toping.

Ko'rsatma. $e^{-1} = 0,04979$ deb oling.

Javobi. a) $P_{1000}(2) = 0,224$; b) $P_{1000}(0) + P_{1000}(1) = 0,1992$; v) $P_{1000}(k > 2) = 0,5678$; g) $P = 1 - P_{1000}(0) = 0,95$.

6-misol. Erkli sinashlarda hodisaning ro'y berish sonining Puasson taqsimoti bo'yicha hisoblangan ehtimollari yig'indisi birga teng bo'lishini isbotlang. Sinashlar cheksiz ko'p marta o'tkaziladi deb faraz qilinadi.

Yechish. Puasson taqsimotidagi

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

e^x funksiyaning ushbu Makloren qatoridan foydalanamiz:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Ma'lumki, bu qator x ning istalgan qiymatida yaqinlashadi, shu sababli $x = \lambda$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Izlanayotgan ehtimollar yig'indisi $\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)$ ni topamiz, bunda $e^{-\lambda}$ ifoda k ga bog'liq emasligin va demak, uni yig'indi belgisidan tashqariga chiqarish mumkinligini hisobga olamiz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = e^0 = 1.$$

2-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikallari

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti

$$\begin{array}{ccccccc} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array}$$

jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin, bu yerda $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Diskret tasodifiy miqdorning *matematik kutishi* deb, uning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari bilan shu qiymatlarga mos ehtimollari ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqli to'plam bo'lsa, u holda

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

bunda tenglikning o'ng tomonida turgan qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi va barcha p_i ehtimollar yig'indisi birga teng.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutishi o'zgarmasning o'ziga teng:

$$M(C) = C.$$

2-xossa. O'zgarmas sonni matematik kutish ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$M(CX) = C M(X).$$

3-xossa. Tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutishi qo'shiluvchilarning matematik kutishlari yig'indisiga teng:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

4-xossa. O'zaro erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutishi ko'paytuvchilarining matematik kutishlari ko'paytmasiga teng:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \dots M(X_n).$$

Takror erkli sinashlarda hodisa ro'y berish sonining matematik kutishi sinashlar soni bilan hodisaning ro'y berish ehtimoli ko'paytmasiga teng

$$M(X) = np.$$

Tasodifiy miqdorlarning qiymatlarini matematik kutish atrofida tarqoqligini baholashda dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanish xizmat qiladi.

X tasodifiy mikdorning *dispersiyasi* deb, chetlanishning kvadratidan olingan matematik kutishga aytiladi:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Dispersiyani

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

formula bo'yicha hisoblash qulay.

1-xossa. O'zgarmas sonning dispersiyasi nolga teng:

$$D(C) = 0.$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini, dispersiya belgisidan tashqariga kvadratga ko'tarib chiqariladi:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3-xossa. Erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining (ayirmasining) dispersiyasi tasodifiy miqdorlar dispersiyalari yig'indisiga teng:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

4-xossa. Erkli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining dispersiyasi tasodifiy miqdorlar dispersiyalari ko'paytmasiga teng:

$$D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y).$$

Takror erkli sinashlarda hodisa ro'y berish sonining dispersiyasi, sinashlar soni, hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimolini ko'paytmasiga teng:

$$D(X) = npq.$$

Tasodifiy mikdorning *o'rtacha kvadratik chetlanishi* deb dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

7-misol. Quyidagi taqsimot qonunga ega X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutishini toping:

a)	X	-4	6	10
	p	0,2	0,3	0,5

b)	X	0,21	0,54	0,61
	p	0,1	0,5	0,4

Yechish. a) Matematik kutish X ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ularning ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga teng:

$$M(X) = -4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 6.$$

Javobi. b) $M(X) = 0,535$.

8-misol. Agar X va Y ning matematik kutishi ma'lum bo'lsa, Z tasodifiy miqdorning matematik kutishini toping.

$$a) Z = X + 2Y, \quad M(X) = 5, \quad M(Y) = 3;$$

$$b) Z = 3X + 4Y, \quad M(X) = 2, \quad M(Y) = 6.$$

$$v) Z = 5X - 3Y, \quad M(X) = 4, \quad M(Y) = 3.$$

Yechish. a) Matematik kutishning xossalaridan foydalanib (yig'indining matematik kutishi qo'shiluvchilarning matematik kutishlari yig'indisiga teng; o'zgarmas ko'paytuvchini matematik kutish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin), quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} M(Z) &= M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = \\ &= M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11. \end{aligned}$$

$$\text{Javobi. } b) M(Z) = 30. \quad v) M(Z) = 11$$

7. Matematik kutishning xossalaridan foydalanib:

a) $M(X - Y) = M(X) - M(Y)$ tenglikni; b) $X - M(X)$ chetlanishning matematik kutishi nolga tengligini isbotlang.

8. X diskret tasodifiy miqdor uchta mumkin bo'lgan qiymatni qabul qiladi: $x_1 = 4$ ni $p_1 = 0,5$ ehtimol bilan, $x_2 = 6$ ni $p_2 = 0,3$ ehtimol bilan va x_3 ni p_3 ehtimol bilan. $M(X) = 8$ ni bilgan holda x_3 ni va p_3 ni toping.

$$\text{Javobi. } x_3 = 2; \quad p_3 = 0,2.$$

9. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarining ro'yxati berilgan:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Shuningdek, bu miqdorning va uning kvadratining matematik kutishlari ma'lum:

$$M(X) = 2,3, \quad M(X^2) = 5,9.$$

X ning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollarni toping.

$$\text{Javobi. } p_1 = 0,2; \quad p_2 = 0,3; \quad p_3 = 0,5.$$

9-misol. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar erkli musbat va bir xil taqsimlangan bo'lsa, u holda

$$M\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{n}$$

ekanligin isbotlang.

Yechish. Ushbu tasodifiy miqdorlarni kiritamiz:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, & Y_2 &= \frac{X_2}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}, \quad \dots, \\ Y_n &= \frac{X_n}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}. \end{aligned} \quad (*)$$

Bu kasrlarning maxrajlari nolga teng bo'la olmaydi, chunki X_i ($i = \overline{1, n}$) miqdorlar musbat.

Shunga ko'ra X_i miqdorlar bir xil taqsimlangan, shu sababli Y_i miqdorlar ham bir xil taqsimlangan, demak, ular bir xil sonli xarakteristikalariga, jumladan, bir xil matematik kutishlarga ega:

$$M(Y_1) = M(Y_2) = \dots = M(Y_n). \quad (**)$$

So'ngra

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 1$$

ekanligini ko'rish oson, demak,

$$M(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = M(1) = 1.$$

Yig'indining matematik kutishi qo'shiluvchilarning matematik kutishlari yig'indisiga teng, shuning uchun

$$M(Y_1) + M(Y_2) + \dots + M(Y_n) = 1$$

(**) ga asosan

$$nM(Y_1) = 1.$$

Bundan

$$M(Y_1) = \frac{1}{n}.$$

(*) ni e'tiborga olgan holda, uzil – kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$M\left[\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right] = \frac{1}{n}.$$

10-misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan ushbu X diskret tasodifiy miqdorining matematik kutishini toping:

X	0	1	2	$\dots$	k	$\dots$
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\dots$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\dots$

Yechish. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqli to'plam bo'lgan hol uchun matematik kutishning ta'rifiga binoan:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

$k=0$ bo'lganda yig'indining birinchi hadi nolga teng bo'lishini hisobga olib, k ning eng kichik qiymati sifatida birni qabul qilamiz:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k \cdot (k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

$k-1 = m$ deb olib,

$$M(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}$$

ni hosil qilamiz. $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{\lambda}$ ekanligini e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$M(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Shunday qilib,

$$M(X) = \lambda,$$

ya'ni Puasson taqsimotining matematik kutishi bu taqsimotning λ parametriga teng.

11-misol. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X) = 5$, $D(Y) = 6$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z = 3X + 2Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. X va Y miqdorlar erkli bo'lgani uchun $3X$ va $2Y$ miqdorlar ham erkli. Dispersiyaning xossaligidan foydalanib (erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi qo'shiluvchilarning dispersiyalari yig'indisiga teng;

o'zgaras ko'paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqariga chiqarish mumkin,) , quyidagini hosil qilamiz:

$$D(Z) = D(3X + 2Y) = D(3x) + D(2Y) = \\ = 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69.$$

10. X va Y tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z = 2X + 3Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javobi. $D(Z) = 61$.

11. Ushbu

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javobi. $D(X) = 15,21$; $\sigma(X) = 3,9$.

12. X tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan.

X	5	8	10	15
p	0,2	0,5	0,1	0,4

Shu tasodifiy miqdorni chetlanishining matematik kutishini, dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

12-misol. A hodisaning har bir sinashda ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor- A hodisaning beshta erkli sinashda ro'y berish sonining dispersiyasini toping.

Yechish. Hodisaning erkli sinovlarda ro'y berish sonining dispersiyasi (har bir sinovda hodisaning ehtimoli bir xil bo'lganda) sinashlar sonini hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimollariga ko'paytirilganiga teng:

$$D(X) = npq.$$

Shartga ko'ra $n = 5$; $p = 0,2$; $q = 1 - p = 0,8$.

Demak, dispersiya:

$$D(X) = npq = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,8.$$

12. Biror qurilmadagi elementning har bir tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,9 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor elementning o'nta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasini toping.

Javobi. $D(X) = 0,9$.

13. Agar ikkita erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $M(X) = 0,9$ ekanligi ma'lum bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javobi. $P(X) = 0,495$.

14. Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lgan erkli sinovlar o'tkazilmoqda. Agar uchta erkli sinovda A hodisaning ro'y berish sonining dispersiyasi 0,63 ga teng bo'lsa, bu hodisaning ro'y berish ehtimolini toping.

Javobi. $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,7$.

13-misol. X diskret tasodifiy mikdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_2 > x_1$. X ning x_1 qiymatin qabul qilish ehtimoli 0,6 ga teng. Matematik kutish va dispersiya ma'lum: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$. X miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. Diskret tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari yig'indisi birga teng, shuning uchun X ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli $1 - 0,6 = 0,4$ ga teng.

X ning taqsimot qonunini yozamiz:

$$\begin{array}{ccc} X & x_1 & x_2 \\ P & 0,6 & 0,4 \end{array} \quad (*)$$

x_1 va x_2 ni topish uchun bu sonlarni o'zaro bog'laydigan ikkita tenglama tuzish lozim. Shu maqsadda biz ma'lum matematik kutish va dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz.

$M(X)$ ni topamiz:

$$M(X) = 0,6x_1 + 0,4x_2.$$

Shartga ko'ra $M(X) = 1,4$, demak,

$$0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4. \quad (**)$$

x_1 va x_2 ni bog'laydigan bitta tenglamani hosil qildik. Ikkinchi tenglamani hosil qilish uchun bizga ma'lum dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz.

X^2 ning taqsimot qonunini yozamiz:

$$\begin{array}{ccc} X^2 & x_1^2 & x_2^2 \\ P & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

$M(X^2)$ ni topamiz:

$$M(X^2) = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2.$$

Dispersiyani topamiz:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 1,4^2.$$

Bunga $D(X) = 0,24$ ni qo'yib, elementar almashtirishlardan so'ng

$$0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2 \quad (***)$$

ni hosil qilamiz.

(**) va (***) ni birlashtirib, ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4 \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2 \end{cases}$$

bu sistemani yechib, ushbu ikkita yechimni hosil qilamiz:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad \text{va} \quad x_1 = 1,8; \quad x_2 = 0,8.$$

Shartga ko'ra $x_2 > x_1$, shuning uchun masalani faqat birinchi yechim:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2 \quad (****)$$

qanaotlantiradi.

(****) ni (*) ga qo'yib, izlanayotgan taqsimot qonunini hosil qilamiz:

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 2 \\ P & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

15. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega, shu bilan birga, $x_2 > x_1$. X ning x_1 qiymatini qabul qilish ehtimoli $0,2$ ga teng. Matematik kutish va dispersiya ma'lum: $M(X) = 2,6$ ni va o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(X) = 0,8$ ni bilgan holda X ning taqsimot qonunini toping.

Javobi.

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 3 \\ p & 0,2 & 0,8 \end{array}$$

14-misol. Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping:

$$\begin{array}{ccccccc} X & 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ P & e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \dots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{array}$$

Yechish. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ formuladan foydalanamiz $M(X) = \lambda$ bo'lgani uchun
 $D(X) = M(X^2) - \lambda^2$. (*)

X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozamiz, bunda X^2 ning k^2 qiymatni qabul qilish ehtimoli X k qiymatni qabul qilish ehtimoliga tengligini (bu X ning mumkin bulgan qiymatlari manfiy emasligidan kelib chiqadi) hisobga olamiz:

$$\begin{array}{ccccccc} X^2 & 0^2 & 1^2 & 2^2 & \dots & k^2 & \dots \\ P & e^{-\lambda} & \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!} & \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} & \dots & \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{array}$$

X^2 ning matematik kutishini topamiz:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Bundan $k = 0$ da birinchi had nolga teng bo'lishini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1) + 1] \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \right] \end{aligned}$$

$k - 1 = m$ desak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M(X^2) = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right].$$

Endi

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda \quad (207 - \text{masalaga qarang}), \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \quad \text{larni}$$

e'tiborga olib,

$$M(X^2) = \lambda (\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \quad (**)$$

ni hosil qilamiz.

(**) ni (*) ga qo'yamiz:

$$D(X) = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotining dispersiyasi λ parametrga teng.

3-§. Nazariy momentlar

X tasodifiy miqdorning k - tartibli boshlang'ich momenti deb, X^k miqdorning matematik kutishiga aytiladi:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Jumladan, birinchi tartibli boshlang'ich moment matematik kutishga teng:

$$\nu_1 = M(X).$$

X tasodifiy miqdorning k - tartibli markaziy momenti deb,

$[X - M(X)]^k$ miqdorning matematik kutishiga aytiladi:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k.$$

Jumladan, birinchi tartibli markaziy moment nolga teng:

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0.$$

Ikkinchi tartibli markaziy moment dispersiyasiga teng:

$$\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = D(X).$$

Markaziy momentlarni ularni boshlang'ich momentlar bilan bog'laydigan formulalardan foydalanib, hisoblash maqsadga muvofiqdir:

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2;$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3;$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1v_3 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4.$$

16-misol. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X \quad 1 \quad 3$$

$$P \quad 0,4 \quad 0,6$$

Birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli boshlang'ich momentlarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli boshlang'ich momentni topamiz:

$$v_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2.$$

X^2 miqdorning taqsimot qonunini yozamiz:

$$X^2 \quad 1 \quad 9$$

$$P \quad 0,4 \quad 0,6$$

Ikkinchi tartibli boshlang'ich momentni topamiz:

$$v_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8.$$

X^3 miqdorning taqsimot qonunini yozamiz:

$$X^3 \quad 1 \quad 27$$

$$P \quad 0,4 \quad 0,6$$

Uchinchi tartibli boshlang'ich momentni topamiz:

$$v_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 16,6.$$

16. X deskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$X \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

$$p \quad 0,1 \quad 0,4 \quad 0,5$$

Birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli boshlang'ich momentlarini toping.

Javobi. $v_1 = 3,9$; $v_2 = 16,5$; $v_3 = 74,1$.

17-misol. X diskret tasodifiy mikdor

$$X \quad 1 \quad 2 \quad 4$$

$$P \quad 0,1 \quad 0,3 \quad 0,6$$

taqsimot qonunini bilan berilgan. Birinchi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi tartibli markaziy momentlarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli markaziy moment nolga teng:

$$\mu_1 = 0.$$

Markaziy momentlarni hisoblash uchun markaziy momentlarni boshlang'ich momentlar orqali ifodalaydigan formulalardan foydalanish qulay, shuning uchun avval boshlang'ich momentlarni topamiz:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1;$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,6 = 10,9;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,6 = 40,9;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,6 = 158,5.$$

Markaziy momentlarni topamiz:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40,9 - 3 \cdot 3,1 \cdot 10,9 + 2 \cdot 3,1^3 = -0,888;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 158,5 - 4 \cdot 40,9 \cdot 3,1 + 6 \cdot 10,9 \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 3,1^4 = 2,7777.$$

17. X diskret tasodifiy miqdor.

X	3	5
p	0,2	0,8

Taqsimot qonuni bilan berilgan. Birinchi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi tartibli markaziy momentlarni toping.

Javobi. $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0,64$; $\mu_3 = -0,12$; $\mu_4 = 1,33$.

18-misol. Uchinchi tartibli markaziy momentning ta'rifiga ko'ra momentlar bilan

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$$

tenglik bilan bog'langanligini isbot qiling.

Yechish. Markaziy momentning ta'rifiga ko'ra

$$\mu_3 = M[X - M(X)]^3.$$

Matematik kutishning xossalari bilan foydalanib va $M(X)$ o'zgarmas kattalik ekanligini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^2(X) \cdot M(X) - M[M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^3(X) - M^3(X) = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 2M^3(X). \end{aligned} \quad (*)$$

Boshlang'ich momentning ta'rifiga ko'ra

$$\nu_1 = M(X), \quad \nu_2 = M(X^2), \quad \nu_3 = M(X^3). \quad (**)$$

(**) ni (*) ga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

18. To'rtinchi tartibli markaziy moment boshlang'ich momentlar bilan

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2^2\nu_1 - 3\nu_1^4$$

tenglik orqali bog'langanligini isbot qiling.

V-bob

UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR

1-§. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari

Agar tasodifiy miqdorni qiymatlari soni chekli bo'lsa, ularni qiymatlari hamda mos ehtimollari aniqlanib taqsimot qonuni topilar edi.

Agar tasodifiy miqdorlar qiymatlari soni cheksiz bo'lsa ularni ehtimollarning hisoblab bo'lmaydi. Hatto qiymatlarini ham topishni iloji yo'q. Bunday hollarda boshqacha yo'l tutiladi, ya'ni taqsimot funksiyasi tushunchasi kiritiladi.

Faraz qilaylik, X – tasodifiy miqdor, x – haqiqiy son bo'lsin.

1-ta'rif. X tasodifiy miqdorni x – haqiqiy sondan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga taqsimot funksiyasi deyiladi

$$F(x) = P(X < x)$$

1- xossa. Taqsimot funksiyasi qiymatlari $[0, 1]$ segmentda yotadi:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2- xossa. Taqsimot funksiyasi kamaymovchi funksiya, ya'ni

$$F(x_1) \leq F(x_2) \text{ agar } x_1 < x_2 \text{ bo'lsa.}$$

3 -xossa. Agar tasodifiy miqdorni qiymatlari (a, b) oraliqda bo'lsa,

$$1) F(x) = 0 \text{ agar } x \leq a \text{ bo'lsa; } 2) F(x) = 1 \text{ agar } x \geq b \text{ bo'lsa.}$$

Natija. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi limit munosabatlar o'rinni:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Eslatma. Ayrim adabiyotlarda tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ta'rifi

$$F(x) = F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} \text{ (2) ko'rinishda keltirilgan.}$$

Taqsimot funkviyaning ta'rifi yordamida X tasodifiy miqdorning qiymatlari turli xil $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ko'rinishdagi intervallarga tushish ehtimollari quyidagicha topiladi. Dastlab $a < b$ bo'lsin, u holda $\{X \leq b\} = \{\omega : X(\omega) \leq b\}$ hodisa o'zaro bog'liq bo'lmagan $\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$ hodisalar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi. Bundan esa $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$ kelib chiqadi, (2) munosabatdan esa

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (3)$$

tenglik kelib chiqadi. Ma'lumki, $\{X < b\}$ hodisani sanoqlita o'zaro bog'liq bo'lmagan

$$\{b - \frac{1}{n-1} < X \leq b - \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, \dots \text{ hodisalar birlashmasi } \bigcup_{n=1}^{\infty} \{b - \frac{1}{n-1} < X \leq b - \frac{1}{n}\},$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin. Bundan va (4) tenglikdan foydalanib

$$P(X < x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(b - \frac{1}{n-1} < X \leq b - \frac{1}{n}) = F(b - 1) + \\ + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \left(F(b - \frac{1}{n}) - F(b - \frac{1}{n-1}) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(b - \frac{1}{N}) = F(b - 0). \quad (4)$$

Bu yerda va bundan keyin biz quyidagi belgilashlardan foydalanamiz.

$$F(x - 0) = \lim_{y \uparrow x} F(y), \quad F(x + 0) = \lim_{y \downarrow x} F(y),$$

$$F(+\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y), \quad F(-\infty) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y).$$

(3) va (4) tengliklardan foydalanib, quyidagi tengliklarni ham osongina hosil qilishimiz mumkin.

$$P(X = b) = F(b) - F(b - 0),$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0),$$

$$P(a < X < b) = F(b - 0) - F(a),$$

$$P(a \leq X < b) = F(b - 0) - F(a - 0).$$

(5)

Teorema. Tasodifiy miqdorning taqsimot fuksiyasi $F(x)$ quyidagi xossalarga ega:

$F(x)$ - kamaymaydigan funksiya;

$F(x)$ - o'ngdan uzluksiz;

(6)

$$F(+\infty) = 1;$$

$$F(-\infty) = 0.$$

Natija. 1) Taqsimot funksiyani qiyamatlari $[0, 1]$ kesmaga tegishli:
 $0 \leq F(x) \leq 1.$

2) Uzlüksiz tasodifiy miqdorning bitta tayin qiymatni, masalan, b qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng:

$$P(X = b) = 0.$$

1-misol. X -tasodifiy miqdor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \quad \text{bo'lganda}, \\ 0,5x - 1, & 2 < x \leq 4 \quad \text{bo'lganda}, \\ 1, & x > 4 \quad \text{bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning a) 0,2 dan kichik qiymat; b) uchdan kichik qiymat; c) uchdan kichik bo'lmagan qiymat; d) beshdan kichik bo'lmagan qiymat qabul qilish ehtimollarini toping.

Yechish. a) $x \leq 2$ bo'lganda $F(x) = 0$ bo'lgani uchun $F(0,2) = 0$, ya'ni $P(X < 0,2) = 0$;

b) taqsimot funksiyani uzluksizligidan va (4) tenglikdan foydalanib

$$P(X < 3) = F(3 - 0) = F(3) = [0,5x - 1]_{x=3} = 1,5 - 1 = 0,5;$$

c) $\{X \geq 3\}$ va $\{X < 3\}$ hodisalar qarama-qarshi hodisalardir, shuning uchun

$$P(X \geq 3) + P(X < 3) = 1.$$

Bu yerda $P(X < 3) = 0,5$ ni hisobga olib quyidagini hosil qilamiz:

$$P(X \geq 3) = 1 - 0,5 = 0,5;$$

d) qarama-qarshi hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng, shuning uchun

$$P(X \geq 5) + P(X < 5) = 1.$$

Bu yerdan, masala shartiga ko'ra $x > 4$ bo'lganda $F(x) = 1$ bo'lishini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - 1 = 0.$$

1. X -tasodifiy miqdor

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \quad \text{bo'lganda}, \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \quad \text{bo'lganda}, \\ 1, & x > 1 \quad \text{bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiya bilan berilgan. Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning rosa uch marta $(0,25; 0,75)$ intervalda yotadigan qiymatni qabul qilish ehtimolini.

$$\text{Javobi. } p = P(0,25 < X < 0,75) = 0,5; \quad P_4^3 = C_4^3 p^3 q = 0,25.$$

2. X tasodifiy miqdor butun Ox o'qda

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x \frac{x}{2}$$

integral funksiya bilan berilgan. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan x_1 qiymatni toping: sinov natijasida X miqdor x_1 dan katta qiymatni $1/6$ ehtimol bilan qabul qiladi.

3. X tasodifiy miqdor butun Ox o'qda

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x \frac{x}{2}$$

integral funksiya bilan berilgan. Ushbu shartni qanoatlantiruvchi mumkin bo'lgan x_1 qiymatni toping: sinov natijasida X miqdor x_1 dan katta qiymatni $1/4$ ehtimol bilan qabul qiladi.

2-misol. X -tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	2	4	7
P	0,5	0,2	0,3

$F(x)$ -taqsimot funksiyani toping.

- Yechish.* 1. Agar $x < 2$ bo'lsa, $F(x) = 0$. Haqiqatan, X miqdor 2 dan kichik qiymatlarni qabul qilmaydi. Demak, $x < 2$ bo'lganda $F(x) = P(X \leq x) = 0$.
2. Agar $2 \leq x < 4$ bo'lsa, $F(x) = 0,5$. Haqiqatan, X miqdor 2 qiymatni 0,5 ehtimol bilan qabul qilishi mumkin.
3. Agar $4 \leq x < 7$ bo'lsa, $F(x) = 0,7$. Haqiqatan, X miqdorning 2 qiymatni 0,5 ehtimol bilan va 4 qiymatni 0,2 ehtimol bilan qabul qilish mumkin; demak, X bu qiymatlarni qaysi biri bo'lishdan qat'iy nazar birini (birga ro'y bermas hodisalarning ehtimollarini qo'shish teoremasiga ko'ra) $0,5+0,2=0,7$ ehtimol bilan qabul qiladi.
4. Agar $x \geq 7$ bo'lsa $F(x) = 1$. Haqiqatan, $X > 7$ hodisasi ishonchli hodisa va uning ehtimoli birga teng.

Shunday qilib, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,5 & 2 \leq x < 4 \text{ bo'lganda,} \\ 0,7 & 4 \leq x < 7 \text{ bo'lganda,} \\ 1 & x \geq 7 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

4. X -tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3.

Integral funksiyaning toping va uning grafigini yasang.

2-§. Taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari

Faraz qilaylik, $F(x)$ taqsimot funksiyasi bo'lsin.

1-Ta'rif. X tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi uzluksiz bo'lsa.

$F(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, 1-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin.

2-Ta'rif. Taqsimot funksiyasidan olingan 1-tartibli hosilaga taqsimot zichligi funksiyasi deyiladi:

$$f(x) = F'(x).$$

1-xossa. Taqsimot zichligi funksiyasi manfiy emas:

$$f(x) \geq 0.$$

Haqiqatdan, taqsimot zichligi funksiyasi kamaymovchi funksiyaning hosilasi, shuning uchun uning qiymatlari manfiy bo'lmaydi.

2-xossa. Taqsimot zichligi funksiyasidan $-\infty$ dan ∞ gacha olingan xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Bu integral tasodifiy miqdorni son o'qiga tushish ehtimolini bildiradi. Bu hodisa ishonchli, shuning uchun uni ehtimoli 1 ga teng.

Teorema. Uzlüksiz tasodifiy miqdorni berilgan (a, b) oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli zichlik funksiyadan shu oraliq bo'yicha olingan aniq integralga teng:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3-misol. X tasodifiy miqdor taqsimot zichligi funksiyasi bilan berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq -\pi/2 \text{ bo'lsa} \\ \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & \text{agar } -\pi/2 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x > \pi/2 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Tajriba natijasida tasodifiy miqdorni $(0; \pi/4)$ intervaldagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli topilsin.

Yechish.

$$\begin{aligned} P(0 < x < \pi/4) &= \int_0^{\pi/4} \frac{2}{\pi} \cos^2 x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi + 2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Agar taqsimot zichligi funksiyasi aniq bo'lsa, taqsimot funksiyasi quyidagi formula bilan topiladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

Absolyut uzluksiz X tasodifiy miqdorning (a, b) intervalga tegishli qiymatni qabul qilish ehtimoli

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

tenglik bilan aniqlanadi.

4-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda,} \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

Yechish. Zichlik funksiya ta'rifiga asosan deyarli barcha x lar uchun $f(x) = F'(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda}, \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

$x = 0$ da $F'(x)$ birinchi tartibli hosilaga ega emasligini eslatib o'tamiz.

5-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(0, \pi/3)$ intervalda $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$ zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning $(\pi/6, \pi/4)$ intervalga tegishli qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Shartga ko'ra $a = \frac{\pi}{6}$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \frac{2}{3} \sin 3x$. Demak, izlanayotgan ehtimol

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = \frac{\sqrt{2}}{9}.$$

6-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda}, \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

bo'lsa $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

Yechish. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Agar $x \leq 0$ bo'lsa, $f(x) = 0$ demak,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Agar $0 < x \leq \pi/2$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \cos x dx = \sin x.$$

Agar $x > \pi/2$ bo'lsa,

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^x 0 dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Shunday qilib, izlanayotgan taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda}, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda}, \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

7-misol. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi sonlar o'qida

$$f(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}$$

tenglik bilan berilgan bo'lsa, C o'zgarmas parametrni toping.

Yechish. $f(x)$ zichlik funksiya

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

shartni qanoatlantirishi lozim. Bu shartning berilgan funksiya uchun bajarilishini talab qilamiz:

$$4C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = 1.$$

Bu yerdan $C = \frac{1}{4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}}$. Dastlab ushbu aniqmas integralni hisoblaymiz:

$$4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}$$

$$\int \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \operatorname{arctg} e^x.$$

So'ngra, xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^{-x} + e^x} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Shunday qilib, } C = \frac{1}{2\pi}.$$

5. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda}, \\ \sin 2x, & 0 < x \leq \pi/4 \text{ bo'lganda}, \\ 1, & x > \pi/4 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

taqsimot funksiyasi berilgan. $f(x)$ zichlik funksiyani toping.

Javobi. $(0, \pi/4)$ intervalda $f(x) = 2 \cos 2x$; bundan intervaldan tashqarida $f(x) = 0$.

6. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(0, \infty)$ intervalda

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad (\alpha > 0)$$

zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning $(1, 2)$ intervalga tegishli qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

Javobi. $P(1 < X < 2) = (e^\alpha - 1)/e^{2\alpha}$.

7. X uzluksiz tasodifiy miqdorning $(-\pi/2, \pi/2)$ intervalda

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \cos^2 x$$

zichlik funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning uchta erkli sinovda rosa ikki marta $(0, \pi/4)$ intervalda yotadigan qiymatini qabul qilish ehtimolini toping.

8. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda}, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

bo'lsa, $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

$$\text{Javobi. } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \pi/2 \text{ bo'lganda}, \\ 1, & x > \pi/2 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

9. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda}, \\ x - 1/2, & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

bo'lsa, $F(x)$ taqsimot funksiyani toping.

$$\text{Javobi. } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda}, \\ 1/2(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

10. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi sonlar o'qida

$$f(x) = \frac{2C}{1+x^2}$$

tenglik bilan berilgan bo'lsa, C o'zgarmas parametrni toping.

Javobi. $C = 1/2\pi$.

11. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $(0, \pi/2)$ intervalda $f(x) = C \sin 2x$ bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. C o'zgarmas parametrni toping.

Javobi. $C = 1$.

12. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $(0, 1)$ intervalda $f(x) = C \arctg x$ bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. C o'zgarmas parametrni toping.

Javobi. $C = (\pi - \ln 4)/4$.

3-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorning son xarakteristikallari

Faraz qilaylik, X tasodifiy miqdor bo'lib, $f(x)$ uning taqsimot zichligi funksiyasi bo'lsin.

Mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qqa tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutishi

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

tenglik bilan aniqlanadi. Integral absolyut yaqinlashadi, deb faraz qilinadi.

X tasodifiy miqdorning qiymatlari $[a, b]$ segmentda bo'lsin.

1-ta'rif. Qiymatlari (a, b) oraliqda bo'lgan tasodifiy miqdor X ning matematik kutishi deb, quyidagi aniq integralga aytiladi:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx \quad (1)$$

Agar taqsimot egri chizig'i $x = c$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lsa, u holda $M(X) = c$.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning $M_0(X)$ modasi deb, uning shunday mumkin bo'lgan qiymatiga aytiladiki, bu qiymatga taqsimot zichlik funksiyasining maksimumi mos keladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning $M_e(X)$ medianasi deb, uning

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X))$$

teng bilan aniqlanadigan mumkin bo'lgan qiymatiga aytiladi.

Geometrik nuqtai nazardan medianani quyidagi nuqta sifatida talqin qilish mumkin: bu nuqtadagi $f(x)$ ordinata taqsimot egri chizig'i bilan chegaralangan yuzni teng ikkiga bo'ladi.

Mumkin bo'lgan qiymatlari butun Ox o'qqa tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

teng bilan aniqlanadi.

2-ta'rif. Qiymatlari (a, b) oraliqda bo'lgan X tasodifiy miqdorni dispersiyasi deb, chetlanishni kvadratidan olingan matematik kutishga aytiladi.

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

yoki

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

O'rtacha kvadratik chetlanish

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

8-misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor X taqsimot funksiyasi bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \\ \frac{x^2}{9}, & \text{agar } 0 < x \leq 3 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > 3 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

X ni matematik kutishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.
Yechish. Oldin zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \\ \frac{2x}{9}, & \text{agar } 0 < x < 3 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x > 3 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Endi $M(X)$ ni topamiz:

$$M(X) = \int_0^3 x \frac{2x}{9} dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{9} \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot \frac{3^3}{3} - \frac{2}{9} \cdot \frac{0^3}{3} = 2.$$

Demak, $x = 2$ chiziq yuzani teng ikkiga bo'ladi.

Endi dispersiyani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^3 x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{2x}{9} dx - 2^2 = \frac{2}{9} \int_0^3 x^3 dx - 4 = \\ &= \frac{2}{9} \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 - 4 = \frac{3^4}{9 \cdot 2} - \frac{0^4}{9 \cdot 4} - 4 = \frac{9}{2} - 4 = 4,5 - 4 = 0,5 \end{aligned}$$

O'rta kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X) = \sqrt{0,5} \approx 0,7.$$

13. X uzluksiz tasodifiy mikdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda} \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

differensial funksiyasi berilgan. $F(x)$ integral funksiyani toping.

$$\text{Javobi. } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ bo'lganda} \\ 1 - \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

14. X uzluksiz tasodifiy mikdorning

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda} \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda} \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

differensial funksiyasi berilgan. $F(x)$ integral funksiyani toping.

$$\text{Javobi: } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ bo'lganda} \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2 \text{ bo'lganda} \\ 0, & x > 2 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

16. X tasodifiy miqdor $(0,2)$ intervalda $f(x) = \frac{1}{2}x$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X miqdorning matematik kutishini toping.

Javobi. $4/3$

17. X tasodifiy miqdor $(0,1)$ intervalda $f(x) = c(x^2 + 2x)$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. a) S parametrini toping; b) X miqdorning matematik kutishini toping.

Javobi. $C = 3/4$. $M(X) = 11/16$.

18. X tasodifiy miqdor $(0,1)$ intervalda $f(x) = x + 0,5$ differensial funksiya bilan berilgan, bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. $Y = X^3$ funksiyaning matematik kutishini (dastlab Y ning differensial funksiya topmasdan) toping.

Javobi. $13/40$.

19. X tasodifiy miqdor $(0,5)$ intervalda $f(x) = 2/25x$ differensial funksiya bilan berilgan; bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$. X ning dispersiyasini toping.

Javobi. $25/18$.

4-§. Normal taqsimot qonuni

1-ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa, bunday taqsimotga normal taqsimot deyiladi.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

bu yerda a va σ lar normal taqsimotni parametrlari, a - matematik kutishi, σ - o'rtacha kvadratik chetlanishi.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni matematik kutishini topamiz.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1)$$

buni integrallash uchun o'zgaruvchilarni almashtiramiz.

$$z = \frac{x-a}{\sigma} \quad \text{bundan} \quad x = \sigma z + a$$

$$dx = \sigma dz, \quad x = -\infty, z = -\infty, \quad x = +\infty, z = +\infty$$

integralni chegaralari o'zgarmaydi. Topilganlarni (1) qo'ysak,

$$M(X) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Birinchi integral nolga teng, ikkinchi integral Puasson integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi},$$

shuning uchun $M(X) = a$ kelib chiqadi.

Xuddi shunday $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$, agar normal taqsimotda $a = 0$, $\sigma = 1$ bo'lsa,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ga normallashtirilgan normal taqsimot deyiladi. Normal taqsimotni taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$

bo'lgani uchun normallashtirilgan normal taqsimotni taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

bo'ladi.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad - \text{Laplas funksiyasi ekanini eslab, } X \text{ tasodifiy miqdorni berilgan}$$

oraliqqa tushish ehtimolidan

$$P(0 < X < x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x).$$

Normal taqsimotda a - o'rta qiymatni ko'rsatadi. σ esa o'rtacha kvadratik chetlanishini, σ ning o'sishi bilan normal taqsimot grafigining cho'qqisi pasayib boradi, ya'ni tarqoqlik ko'payadi.

a) Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni berilgan oraliqqa tushish ehtimoli.

Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lsa hamda $f(x)$ uni taqsimot zichligi funksiyasi bo'lsa, X ni (α, β) oraliqqa qiymat qabul qilish ehtimoli

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

9-misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ni matematik kutishi 20 ga, o'rtacha kvadratik chetlanishi 5 ga teng. Tajriba natijasida shu tasodifiy miqdorlarni (15;25) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $a = 20$, $\sigma = 5$, $\alpha = 15$, $\beta = 25$

$$\begin{aligned} P(15 \leq X \leq 25) &= \Phi\left(\frac{25 - 20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15 - 20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(1) = 0,3413 + 0,3413 = 0,6826. \end{aligned}$$

b) Chetlanishni ehtimoli.

Ko'p hollarda normal taqsimlangan tasodifiy miqdorni chetlanishini $X - a$ ni absolyut qiymati bo'yicha biror $\delta > 0$ sonidan kichik qiymat qabul qilishini baholashga to'g'ri keladi, ya'ni

$$|x - a| < \delta$$

tengsizlikning ro'y berish ehtimolini topish talab qilinadi. Bu tengsizlikni quyidagi ikkilangan tengsizlik bilan almashtiramiz:

$$-\delta < x - a < \delta$$

bu tengsizlikning hamma tomoniga a ni qo'shsak,

$$a - \delta < x < \delta + a$$

qo'sh tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak,

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

(Bu yerda $\Phi(x)$ funksiyani juftligi hisobga olindi).

Shunday qilib,

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Agar $a = 0$ bo'lsa,

$$P(|x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Bu ehtimol a ga bog'liq bo'lmasdan oraliqni uzunligiga, to'g'ri proporsional va o'rtacha kvadratik chetlanish σ ga teskari proporsionaldir.

10-misol. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdor X ni matematik kutishi 10 ga o'rtacha kvadratik chetlanishi 3 ga teng. Chetlanishni absolyut qiymati bo'yicha 4 dan kichik bo'lish ehtimoli topilsin.

$$Yechish. P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanamiz. Shartga ko'ra $a = 10$, $\delta = 4$, $\sigma = 3$ bo'lgani uchun

$$P(|x - 10| < 4) = 2\Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 2\Phi(1,5).$$

$\Phi(1,5)$ ni kitobni oxiridagi 2-ilovadan topamiz. $\Phi(1,5) = 0,4332$.

$$P(|x - 10| < 4) = 2 \cdot 0,4332 = 0,8664.$$

5-§. Ko'rsatkichli taqsimot

1-ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'lsa, bunday taqsimotga ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot deyiladi.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bu yerda λ - musbat o'zgarmas son. Taqsimot funksiyasini topamiz:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Demak,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Bularni grafiklari mos holda pastdagi shakllarda ko'rsatiladi:

Ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorni berilgan (a, b) oraliqqa tushishi ehtimoli:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

$F(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, $F(b) = 1 - e^{-\lambda b}$ bularni e'tiborga olsak, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

11-misol. Ko'rsatkichli taqsimotni matematik kutishi, dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Yechish. Ko'rsatkichli taqsimotni matematik kutishini topamiz

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx.$$

Bu integralni bo'laklab integrallash usuli bo'yicha integrallaymiz:

$$u = x, \quad e^{-\lambda x} dx = dv,$$

$$dx = du, \quad v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_0^{\infty} x f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \\ &= -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \infty} + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda \cdot 0} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (*)$$

Ko'rsatkichli taqsimotni dispersiyasini topamiz:

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bu integralni ham bo'laklab integrallash usuli bo'yicha integrallaymiz:

$$\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Buni yuqoridagi formulaga qo'ysak,

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (**).$$

(*) va (**) ni taqqoslab, quyidagi xulosaga kelamiz:

$$M(X) = \sigma(X) = 1/\lambda,$$

ya'ni ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutishi va o'rtacha kvadratik chetlanishi o'zaro teng.

12-misol. Uzlüksiz X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimotga ega bo'lib,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ 3e^{-3x}, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lsin. Shu tasodifiy miqdorni a) $(0,13;0,7)$ oraliqqa tushish ehtimoli

b) matematik kutishi va dispersiyasi topilsin.

Yechish: Shartga ko'ra $\lambda = 3$. Demak,

$$a) P(0,13 < X < 0,7) = e^{-(3 \cdot 0,13)} - e^{-(3 \cdot 0,7)} = e^{-0,39} - e^{-2,1} = 0,677 - 0,122 = 0,555.$$

$$b) \lambda = 3. M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{9}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{3}.$$

20. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning differensial funksiyasini $M(X) = 3$, $D(X) = 16$ ni bilgan holda yozing.

$$\text{Javobi. } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$$

21. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor

$$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/50}$$

differensial funksiya bilan berilgan. X ning matematik kutishini va dispersiyasini toping.

Javobi. $M(X)=1, D(X)=25$.

22. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutishi va dispersiyasi mos ravishda 10 va 2 ga teng. Sinash natijasida X ning (12,14) da yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Javobi. 0,1359.

23. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutishi va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 20 va 5 ga teng. Sinov natijasida X ning (15,25) da yotadigan qiymat qabul qilish ehtimolini toping.

Javobi. 0,6826.

24. Biror moddani tarozida tortish sistemati xatolarsiz o'tkaziladi. Tarozida tortishning tasodifiy xatolari o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=20g$ bo'lgan normal qonunga bo'ysunadi, Tarozida tortish absolyut qiymati bo'yicha 10 g dan oshmaydigan xato bilan o'tkazilishining ehtimolini toping.

Javobi. 0,383.

25. O'lchashning tasodifiy xatolari o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma=20mm$ va matematik kutishi $\alpha=0$ bo'lgan normal qonunga bo'ysunadi. Uchta erkli o'lchashdan kamida bittasining xatosi absolyut qiymat bo'yicha 4mm dan ortiq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Javobi.: 0,41

26. X tasodifiy miqdor $a=25$ matematik kutish bilan normal taqsimlangan. X ning (10,15) intervalga tushish ehtimoli 0,2 ga teng. X ning (35,40) intervalga tushish ehtimoli nimaga teng?

Javobi. 0,2

27. Quyidagi «uch sigma» qoidasini isbotlang: normal taqsimlangan tasodifiy miqdor chetlanishining absolyut qiymat bo'yicha o'rtacha kvadratik chetlanishning uchlanganidan kichik bo'lish ehtimoli 0,9973 ga teng.

28. X tasodifiy miqdor $a=10$ matematik kutish va $\sigma=5$ o'rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan. Sinov natijasida X ning 0,9973 ehtimol bilan tushadigan intervalini toping.

Javobi. (-5,25)

29. X tasodifiy miqdor $\sigma=5mm$ o'rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan. Sinov natijasida X ning 0,9973 ehtimol bilan tushadigan intervalining uzunligini toping.

Javobi. 30mm.

30. Stanok-avtomat valchalar tayyorlaydi, bunda valchanning diametri X kontrol qilinadi. X ni $a=10$ mm matematik kutish va $\sigma=0,1$ mm o'rtacha kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblab, tayyorlangan valchalarning diametrlari 0,9973 ehtimol bilan yotadigan intervalni toping.

Javobi. (9,7; 10,3).

31. Agar ko'rsatkichli taqsimotning parametri $\lambda=6$ bo'lsa, uning differensial va integral funksiyasini toping.

Javobi. $(0, \infty)$ intervalda $f(x) = 6e^{-6x}$, bu intervaldan tashqarida $f(x) = 0$.
 $(0, \infty)$ intervalda $F(x) = 1 - e^{-6x}$, bu intervaldan tashqarida $F(x) = 0$.

32. Agar X uzluksiz tasodifiy miqdor ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, X ning (α, b) intervalga tushish ehtimoli $e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ ga teng bo'lishini ko'rsating.

Javobi.

33. X uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda

$$f(x) = 0,004e^{-0,004x}$$

differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan; $x < 0$ bo'lganda $f(x) = 0$. Sinov natijasida X ning $(1, 2)$ intervalga tushish ehtimolini toping.

Javobi. 0,038.

34. Uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $F(x) = 1 - e^{-0,6x}$ integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan; $x < 0$ bo'lganda $F(x) = 0$, X ning sinov natijasida $(2, 5)$ intervalga tushish ehtimolini toping.

Javobi. 0,252

35. $f(x) = 5e^{-5x}$ ($x \geq 0$) differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutishini toping.

Javobi. 0,2

36. $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$ ($x \geq 0$) integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutishini toping.

Javobi. 10.

37. $f(x) = 10e^{-10x}$ ($x \geq 0$) differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javobi. $D(X) = 0,01$; $\sigma(X) = 0,1$.

38. $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$ ($x \geq 0$) integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javobi. $D(X) = 6,25$; $\sigma(X) = 2,5$.

VI-bob

BIR VA IKKI TASODIFIY ARGUMENT FUNKSIYASINING TAQSIMOTI

1-§. Bir va ikki tasodifiy argument funksiyasining taqsimoti

Agar X tasodifiy argumentning har bir qabul qilishi qiymatiga Y tasodifiy funksiya bitta qabul qilishi qiymati mos kelsa, u holda Y ni X tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi:

$$Y = \varphi(X).$$

Agar X diskret tasodifiy miqdor va $Y = \varphi(X)$ funksiya monoton bo'lsa, u holda X ning turli qiymatlariga Y ning turli qiymatlari mos keladi, shu bilan birga X va Y ning mos qiymatlarining ehtimollari bir xil bo'ladi. Boshqacha aytganda, Y ning mumkin bo'lgan qiymatlari

$$y_i = \varphi(x_i)$$

tenglikdan topiladi, x_i – argument X ning mumkin bo'lgan qiymatlari; Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$ tenglikdan topiladi.

Agar $Y = \varphi(X)$ monoton funksiya bo'lmasa, u holda, umuman aytganda, X ning turli qiymatlariga Y ning bir xil qiymatlari mos kelishi mumkin (X ning mumkin bo'lgan qiymatlari $\varphi(x)$ funksiya monoton bo'lmaydigan intervalga tushganda shunday bo'ladi). Bunday holda Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini topish uchun X ning Y bir xil qiymat qabul qiladigan qiymatlarining ehtimollarini qo'shish lozim. Boshqacha aytganda, Y ning takrorlanadigan qiymatining ehtimoli X ning Y bir xil qiymat qabul qiladigan mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari yig'indisiga teng.

1. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{cccc} X & 3 & 6 & 10 \\ p & 0,2 & 0,1 & 0,7. \end{array}$$

$Y = 2X + 1$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javobi.
$$\begin{array}{cccc} X & 7 & 13 & 21 \\ p & 0,2 & 0,1 & 0,7. \end{array}$$

2. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{cccccc} X & -1 & -2 & 1 & 2 \\ p & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{array}$$

$Y = X^2$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Javobi.
$$\begin{array}{ccc} Y & 1 & 4 \\ p & 0,5 & 0,5. \end{array}$$

3. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

$$\begin{array}{cccc} X & \pi/4 & \pi/2 & 3\pi/4 \\ p & 0,2 & 0,7 & 0,1 \end{array}$$

$Y = \sin X$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

$$\text{Javobi. } \begin{array}{ccc} Y & \sqrt{2}/2 & 1 \\ p & 0,3 & 0,7. \end{array}$$

2-§. Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi

Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning qabul qilishi qiymatlarining har bir juftiga Z tasodifiy miqdorning bitta mumkin bo'lgan qiymati mos kelsa, u holda Z ni ikkita X va Y tasodifiy argumentning funksiyasi deyiladi va bunday yoziladi:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

Agar X va Y diskret erkli tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $Z = X + Y$ funksiyaning taqsimotini topish uchun Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini topish lozim, buning uchun X ning mumkin bo'lgan har bir qiymatini Y ning mumkin bo'lgan qiymatlarining hammasi bilan qo'shib chiqish lozim. Z ning ana shu mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollari esa X va Y ning qo'shilayotgan qiymatlarining ehtimollari ko'paytmalariga teng.

Agar X va Y erkli uzluksiz tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $Z = X + Y$ yig'indining $g(z)$ differensial funksiyasi (argumentlardan kamida bittasining differensial funksiyasi $(-\infty, \infty)$ intervalda bitta formula bilan beriladi degan shartda)

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x) dx$$

formula bo'yicha yoki bunga teng kuchli

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y) dy$$

formula bo'yicha topilishi mumkin, bu yerda f_1 va f_2 – argumentlarning differensial funksiyalari; agar argumentlarning mumkin bo'lgan qiymatlari manfiy bo'lmasa, u holda $Z = X + Y$ miqdorning $g(z)$ differensial funksiyasini

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx$$

formula bo'yicha yoki bunga teng kuchli

$$g(z) = \int_0^z f_1(z-y) f_2(y) dy$$

formula bo'yicha topiladi.

2-misol. X va Y diskret erkli tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimotlar bilan berilgan:

$$\begin{array}{ccc} X & 1 & 3; \\ p & 0,3 & 0,7 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & 2 & 4 \\ P & 0,6 & 0,4 \end{array}$$

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

Yechish. $Z = X + Y$ miqdorning taqsimotini tuzish uchun Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini va ularning ehtimollarini topish lozim.

Z ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari X ning har bir mumkin bo'lgan qiymati bilan Y ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari yig'indilaridan iborat:

$$z_1 = 1 + 2 = 3; \quad z_2 = 1 + 4 = 5;$$

$$z_3 = 3 + 2 = 5; \quad z_4 = 3 + 4 = 7.$$

Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollarini topamiz. $Z = 3$ bo'lishi uchun X miqdor $x_1 = 1$ qiymatni va Y miqdor $y_1 = 2$ qiymatni qabul qilishi yetarli. Bu mumkin bo'lgan qiymatlarning ehtimollari berilgan taqsimot qonunlariga ko'ra mos ravishda 0,3 va 0,6 ga teng. X va Y argumentlar erkli bo'lgani uchun $X = 1$ va $Y = 2$ hodisalar erkli va demak, ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli (ya'ni $Z = 3$ hodisaning ehtimoli) ko'paytirish teoremasi ko'ra $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$ ga teng. Shunga o'xshash quyidagilarni topamiz:

$$P(Z = 1 + 4 = 5) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12;$$

$$P(Z = 3 + 2 = 5) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42;$$

$$P(Z = 3 + 4 = 7) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

Avval birga ro'y bermas $Z = z_2 = 5$, $Z = z_3 = 5$ hodisalarning ehtimollarini qo'shib ($0,12 + 0,42 = 0,54$) izlanayotgan taqsimotni yozamiz:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

Tekshirish: $0,18 + 0,54 + 0,28 = 1$.

4. X va Y diskret erkli tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimotlar bilan berilgan:

a)	X	10	12	16;	Y	1	2
	p	0,4	0,1	0,5	P	0,2	0,8;

b)	X	4	10	Y	1	7
	p	0,7	0,3	p	0,8	0,2.

$Z = X + Y$ tasodifiy miqdorning taqsimotini toping.

Javobi.

a)	Z	11	12	13	14	17	18
	p	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40;

b)	Z	5	11	17
	p	0,56	0,38	0,06.

VII-bob

IKKI O'LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR SISTEMASI

1-§. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, mumkin bo'lgan qiymatlari (x, y) sonlar jufti bo'lgan (X, Y) tasodifiy miqdorga aytiladi. Bir vaqtda qaralayotgan X va Y tashkil etuvchilar ikki tasodifiy miqdor sistemasini tashkil etadi.

Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari diskret bo'lgan miqdorga aytiladi.

Uzluksiz ikki o'lchovli tasodifiy miqdor deb, tashkil etuvchilari uzluksiz bo'lgan miqdorga aytiladi.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimoti qonuni deb, mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Ikki o'lchovli tasodifiy (X, Y) ni qaraymiz. Faraz qilaylik x va y haqiqiy sonlar jufti bulsin.

1-ta'rif. X tasodifiy miqdorni x hakikiy son dan kichik qiymat qabul qilganda Y tasodifiy miqdorni ham y hakikiy son dan kichik qiymat qabul qilishdan iborat hodisa ehtimoliga (X, Y) ning taqsimot funksiyasi deyiladi, ya'ni

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

1-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

2-xossa. $F(x, y)$ ikkala argument bo'yicha ham kamaymovchi funksiyadir, ya'ni

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y), \text{ agar } x_1 < x_2 \text{ bo'lsa,}$$

$$F(x, y_1) \leq F(x, y_2), \text{ agar } y_1 < y_2 \text{ bo'lsa.}$$

3-xossa. $F(x, y)$ uchun quyidagi limit munosabatlar o'rinli;

$$1. F(-\infty, y) = 0, \quad 2. F(x, -\infty) = 0,$$

$$3. F(-\infty, -\infty) = 0, \quad 4. F(\infty, \infty) = 1.$$

Ko'rinib turibdiki, agar $F(x, y)$ funksiyaning argumentlaridan birortasi $-\infty$ bo'lsa, funksiya qiymati nolga teng bo'ladi.

Demak, X va Y tashkil etuvchilari $-\infty$ dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli nolga teng.

Agar $x = \infty, y = \infty$ bo'lsa, (X, Y) ni butun tekislikdagi qiymatlarini qabul qilish ehtimoli 1 ga teng.

4-xossa. Agar $F(x, y)$ funksiyani argumentlaridan birortasi ∞ ga teng bo'lsa, u 2-argumentni funksiyasiga aylanadi:

$$F(x, \infty) = F_1(x), \quad F(\infty, y) = F_2(y).$$

Tasodifiy tashlangan nuqtani to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$P(x_1 \leq X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - \\ - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Faraz qilaylik, $F(x, y)$ ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni taqsimot funksiyasi hamma joyda uzluksiz bo'lib, 2-tartibli aralash xususiy hosilaga ega bo'lsin.

2-ta'rif. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdor (X, Y) ni taqsimot funksiyasidan olingan 2-tartibli aralash xususiy hosilaga, shu tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasi deyiladi

$$f(x; y) = \frac{\partial^2 F(x; y)}{\partial x \partial y}.$$

1-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorni zichlik funksiyasi manfiy emas:

$$f(x; y) \geq 0.$$

2-xossa. Ikki o'lchovli uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot zichligi funksiyasidan olingan chegaralari cheksiz ikki karrali xosmas integral 1 ga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; y) dx dy = 1.$$

Agar $f(x; y)$ ma'lum bo'lsa, $F(x; y)$ ni topishda quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$F(x; y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x; y) dx dy.$$

1-misol. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

Y\X	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

X va Y tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

Yechish. Ehtimollarni "ustunlar bo'yicha" qo'shib, X ning mumkin bo'lgan qiymatlarining ehtimollarini hosil qilamiz:

$$p(3) = 0,17 + 0,10 = 0,27; \quad p(10) = 0,13 + 0,30 = 0,43;$$

$$p(12) = 0,25 + 0,05 = 0,30.$$

X tashkil etuvchining taqsimot qonunini yozamiz:

X	3	10	12
p	0,27	0,43	0,30

Tekshirish: $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1.$

Shunga o'xshash ehtimollarni "satrlar bo'yicha" qo'shib Y tashkil etuvchining taqsimot qonunini topamiz:

Y	4	5
p	0,55	0,45

Tekshirish: $0,55 + 0,45 = 1.$

1. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

Y\X	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

X va Y tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

X	26	30	41	50
p	0,14	0,42	0,19	0,25

Y	1,3	2,7
p	0,29	0,71

2. Diskret ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning ehtimollari taqsimoti berilgan:

Y\X	2	3	4
5	0,10	0,30	0,20
7	0,06	0,18	0,16

X va Y tashkil etuvchilarning taqsimot qonunlarini toping.

Javobi. X 2 3 4 Y 5 7
 p 0,16 0,48 0,36 p 0,6 0,4

2-misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

integral funksiya bilan berilgan. (X, Y) tasodifiy nuqtaning $x=0, x=\pi/4, y=\pi/6, y=\pi/3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimolini toping.

Yechish. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 \leq Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Bunda $x_1=0, x_2=\pi/4, y_1=\pi/6, y_2=\pi/3$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$P = \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} - \sin 0 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right] - \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right] = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0,26.$$

3. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x < 0 \text{ yoki } y < 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

integral funksiya bilan berilgan. (X, Y) tasodifiy nuqtaning $x=1, x=2, y=3, y=5$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka tushish ehtimolini toping.

Javobi. $P=3/128$.

2-§. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilari ehtimollarining shartli taqsimot qonunlari

X va Y tashkil etuvchilar diskret va ularning mumkin bo'lgan qiymatlari $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ bo'lsin. X tashkil etuvchining $Y=y_j$ bo'lgandagi shartli taqsimoti deb, Ushbu shartli ehtimollar to'plamiga aytiladi:

$$p(x_1 | y_j), p(x_2 | y_j), \dots, p(x_n | y_j).$$

Y tashkil etuvchining shartli taqsimoti shunga o'xshash aniqlanadi.

Tashkil etuvchilarning shartli ehtimollari mos ravishda quyidagi formulalar bo'yicha hisoblanadi:

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

4-misol. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

Y\X	$x_1 = 2$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$
$y_1 = 0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2 = 0,8$	0,05	0,12	0,03

a) Tashkil etuvchilarning shartsiz taqsimot qonunlarini toping; b) X tashkil etuvchining Y tashkil etuvchi $y_1 = 0,4$ qiymat qabul qiladi, degan shartda shartli taqsimot qonunini toping; v) $X = x_2 = 5$ shartda Y ning shartli taqsimot qonunini toping.

Yechish. a) "Ustunlar bo'yicha" ehtimollarni jamlab, X ning taqsimot qonunini topamiz:

$$\begin{array}{c} X \quad 2 \quad 5 \quad 8 \\ p \quad 0,20 \quad 0,42 \quad 0,38 \end{array}$$

Ehtimollarni "satrlar bo'yicha" jamlab, Y ning taqsimot qonunini topamiz:

$$\begin{array}{c} Y \quad 0,4 \quad 0,8 \\ p \quad 0,80 \quad 0,20 \end{array}$$

b) Y tashkil etuvchi $y_1 = 0,4$ qiymat qabul qiladi degan shartda X ning mumkin bo'lgan qiymatlarining shartli ehtimollarini topamiz:

$$\begin{aligned} p(x_1 | y_1) &= \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,80} = \frac{3}{16}; \\ p(x_2 | y_1) &= \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,30}{0,80} = \frac{3}{8}; \\ p(x_3 | y_1) &= \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,35}{0,80} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

X ning izlanayotgan shartli taqsimot qonunini yozamiz:

$$\begin{array}{c} X \quad 2 \quad 5 \quad 8 \\ p(X | y_1) \quad 3/16 \quad 3/8 \quad 7/16 \end{array}$$

Tekshirish. $3/16 + 3/8 + 7/16 = 1$.

v) Shunga o'xshash Y ning shartli taqsimot qonunini topamiz:

$$\begin{array}{c} Y \quad 0,4 \quad 0,8 \\ p(Y | x_2) \quad 5/7 \quad 2/7 \end{array}$$

Tekshirish $5/7 + 2/7 = 1$.

4. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

Y\X	3	6
10	0,25	0,10

14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

a) $Y = 10$ shartda X ning shartli taqsimot qonunini toping; b) $X = 6$ shartda Y ning shartli taqsimot qonunini toping.

X	3	6	$\bar{c})$	Y	10	14	18
Javobi. a)	$p(X 10)$	5/7	2/7	$p(Y 6)$	5/14	5/28	13/28

5. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor berilgan:

$Y \backslash X$	3	6	8
12	0,10	0,30	0,20
14	0,06	0,18	0,16

a) $Y = 12$ shartda X ning shartli taqsimot qonunini toping;

	X	3	6	8
Javobi. a)	$p(X 12)$	1/6	1/2	1/3.

VIII-bob

MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

1-§. Tanlab kuzatish myetodi. Tanlanmaning statistik taqsimoti

Biror bir jinsli to'plamni son yoki sifat jihatdan o'rganish talab qilingan bo'lsin. Agar bu to'plamni hamma elyemyentlarini o'rgansak, bunday o'rganishga yalpi kuzatish dyeyiladi. Yalpi kuzatish samolyotsozlik, mashinasozlik, kyemasozlik, parashyutsozlik va hokazolarda qo'llaniladi. Ko'p hollarda to'plamni elyemyentlari juda ko'p bo'lsa uni yalpi kuzatish imkoniyati bo'lmaydi.

Agar ishlab chiqarilgan mahsulotlarni yalpi kuzatish natijasida sifati buzilsa yoki kuzatish katta xarajatlar, ko'p vaqt, ishchi kuchi talab qilsa bunday vaqtlarda xam yalpi kuzatish o'tkazib bo'lmaydi. Masalan: Zavod bir kunda 10000 dona lampochka ishlab chiqarsa buni xammasini tyekshirish natijasida ularni sifati buziladi, juda ko'p elyektroenyergiya sarf bo'ladi, bundan tashqari ishchi kuchi, vaqti sarflanadi. Ana shunday xollarda tyekshirilishi lozim bo'lgan asosiy to'plamning bir qismi olib tyekshiriladi va natija asosiy to'plamga yoyiladi. Tyekshirishni bunday usuliga tanlab kuzatish myetodi dyeyiladi.

1-Ta'rif. Asosiy to'plamdan tyekshirish uchun olingan qism to'plamga *tanlanma to'plam* dyeyiladi. Tanlanmadagi elyemyentlar soniga tanlanmaning hajmi dyeyiladi.

2-Ta'rif. Tanlanma to'plam olingan asosiy to'plamga bosh to'plam dyeyiladi. Bosh to'plamdagi elyemyentlar soniga uning quvvati dyeyiladi.

Masalan: Agar 10000 maxsulotdan 1000 tasi tyekshirilgan bo'lsa, $N=10000$ bosh to'plamni quvvati $n=1000$ tanlanma to'plamni quvvatini bildiradi. Tanlab kuzatish paytida bosh to'plamdan tyekshirish uchun olingan elyemyent tyekshirilgandan kyeyin bosh to'plamga qaytariladi yoki qaytarilmasligi ham mumkin.

Shularga qarab tanlanma takror va takrorsiz tanlanmalarga bo'linadi.

3-Ta'rif. Bosh to'plamdan olingan har bir eleyment tyekshirilgandan kyeyin yana bosh to'plamga qaytarilsa bunday tanlanmaga *takror tanlanma* dyeyiladi.

4-Ta'rif. Bosh to'plamdan olingan har bir eleyment kuzatilgandan kyeyin bosh to'plamga qaytarilmasa bunday tanlanmaga *takrorsiz tanlanma* dyeyiladi.

Faraz qilaylik, bosh to'plamdan hajmi n ga tyeng tanlanma to'plam ajratilgan bo'lib, bunda x_1 byelgi n_1 marta, $x_2 - n_2$ marta va hokazo $x_k - n_k$ marta takrorlangan bo'lsin. Bu yerda $\sum n_i = n$ - tanlanmani hajmi, x_i - variantalar, n_i - chastotalar, $\frac{n_i}{n} = W_i$ - nisbiy chastotalar.

1-Ta'rif. Variantalarni o'sib borish tartibida joylashishiga *variasion qator* dyeyiladi.

2-Ta'rif. *Tanlanmaning statistik taqsimoti* dyeb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar orasidagi moslikka aytiladi. Bu moslik quyidagi jadvallar byeriladi:

$$\begin{array}{cccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots x_k \\ n_i & n_1 & n_2 & \dots n_k \end{array}$$

bu yerda $\sum n_i = n$,

$$\begin{array}{cccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots x_k \\ W_i & \frac{n_1}{n} & \frac{n_2}{n} & \dots \frac{n_k}{n} \end{array}$$

bu yerda $\sum W_i = 1$.

Amalda tajriba o'tkazilib tanlanmani chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti topiladi, kyeyin nisbiy chastotalarga nisbatan statistik taqsimoti topiladi.

1-misol. 10 marta tajriba o'tkazish natijasida tanlanmaning statistik taqsimoti ma'lum

$$\begin{array}{cccc} x_i & 2 & 5 & 7 \\ n_i & 3 & 5 & 2 \end{array}$$

Tanlanmani nisbiy chastotalarga nisbatan taqsimoti topilsin.

Yechish. Tanlanmaning hajmini topamiz:

$$n = 3 + 5 + 2 = 10.$$

Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad W_2 = \frac{5}{10} = 0,5, \quad W_3 = \frac{2}{10} = 0,2.$$

Nisbiy sanoqqa nisbatan statistik taqsimot:

$$\begin{array}{cccc} x_i & 5 & 8 & 10 \\ W_i & 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{array}$$

$$\text{Tyekshirish: } 0,3+0,5+0,2=1.$$

1. Tanlama

x_i	4	7	8	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishida byerilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping:

Javobi.	x_i	4	7	8	12
	W_i	0,25	0,10	0,15	0,50

2. Tanlama

x_i	4	6	12
n_i	3	10	7

chastotalar taqsimoti ko'rinishida byerilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping:

Javobi.	x_i	4	6	12
	W_i	0,15	0,50	0,35

3. Tanlama

x_i	3	5	8	12
n_i	2	8	4	6

chastotalar taqsimoti ko'rinishida byerilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping:

Javobi.	x_i	3	5	8	12
	W_i	0,1	0,4	0,2	0,3

2-§. Empirik taqsimot funksiyasi

Faraz qilaylik, n marta tajriba o'tkazish natijasida X ni byelgilari bo'yicha statistik taqsimot tuzilgan bo'lsin hamda x – haqiqiy son bo'lsin.

X ni x xaqiqiy sondan kichik qiymatlari sonini n_x bilan byelgilaymiz.

1-ta'rif. X byelgini x haqiqiy sondan kichik ($X < x$) qiymatlar qabul qilish nisbiy sanog'iga *empirik taqsimot funksiya* dyeyiladi. Uni taqsimot funksiyasidan farq qilishi uchun $F^*(x)$ bilan byelgilaymiz, ta'rifga ko'ra

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bu yerda n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanmaning hajmi.

Empirik taqsimot funksiya $F^*(x)$ – X tasodifiy mikdorning tajriba natijasida olingan ma'lumotlarni ($X < x$ larni) nisbiy sanog'idan iborat, $F(x)$ taqsimot funksiya esa $X < x$ hodisasini ro'y byerish ehtimoli, ya'ni nazariy taqsimot.

Byernulli tyeoryemasiga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1$$

Dyemak, $F^*(x)$ empirik taqsimot funksiyasi sinashlar soni ortishi bilan nazariy taqsimot $F(x)$ ga yaqinlashadi. Shuning uchun $F(x)$ ni xossalari $F^*(x)$ uchun ham o'rinli bo'ladi. $F^*(x)$ – funksiyaning xossalari:

1. *Empirik taqsimot funksiyaning qiymatlari* $[0, 1]$ syegmyentda yotadi:

$$0 \leq F^*(x) \leq 1.$$

2. Empirik taqsimot funksiya kamaymovchi:

$$F^*(x_1) \leq F^*(x_2), \text{ azap } x_1 < x_2$$

3. x_1 – eng kichik varianta bo'lsa, u holda

$$F^*(x_1) = 0, \text{ azap } x_1 \leq x_2$$

x_k - eng katta varianta bo'lsa, u holda

$$F^*(x) = 1, \text{ azap } x > x_k.$$

Shunday qilib, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasi bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

2-misol. Quyidagi tanlanmaning statistik taqsimoti asosida empirik taqsimot funksiyasi tuzilsin.

x_i	2	7	9
n_i	10	15	25

Yechish: Tanlanma hajmini topamiz: $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Eng kichik varianta 2 ga teng, 2 dan kichik x_i yo'q, shuning uchun

$$F^*(x) = 0, \text{ azap } x \leq 2 \text{ bo'lsa}$$

$X < 7$ qiymat, $x_1 = 2$ qiymat 7 marta kuzatilgan, dyemak,

$$F^*(x) = \frac{10}{50} = 0,2, \text{ azap } 2 < x \leq 7$$

9 dan kichik variantalar soni 2 va 7. Ularning chastotalari $10 + 15 = 25$, shuning uchun

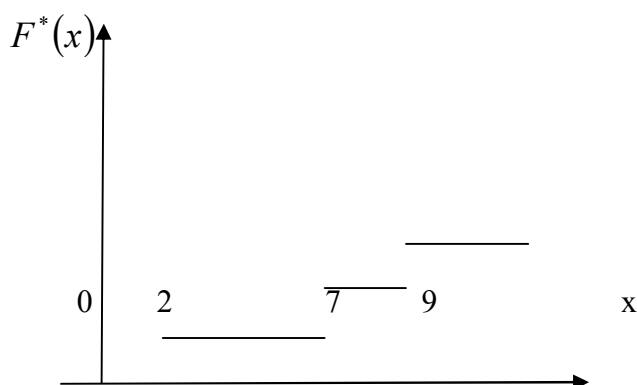
$$F^*(x) = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ azap } 7 < x \leq 9.$$

$x = 9$ eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 9$ bo'lganda

$$F^*(x) = 1..$$

Topilganlarni umumlashtirsak,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{azap } x \leq 2, \\ 0,2, & \text{azap } 2 < x \leq 7, \\ 0,5, & \text{azap } 7 < x \leq 9, \\ 1, & \text{azap } x > 9. \end{cases}$$



4. Tanlanmaning quyida byerilgan ushbu taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping:

$$\begin{array}{ccccc} a) & x_i & 2 & 5 & 7 & 8 \\ & n_i & 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} b) & x_i & 4 & 7 & 8 \\ & n_i & 5 & 2 & 3. \end{array}$$

Javobi: a)
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \text{ bo'lganda,} \\ 0,1, & 2 < x \leq 5 \text{ bo'lganda,} \\ 0,4, & 5 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 0,6, & 7 < x \leq 8 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 8 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

v)
$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 \text{ bo'lganda,} \\ 0,4, & 4 < x \leq 7 \text{ bo'lganda,} \\ 0,7, & 7 < x \leq 8 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x > 8 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

3-§. Poligon va gistogramma

Tanlanmaning statistik taqsimotini grafik usulda ham byerish mumkin. Shu maqsadda poligon va gistogrammalar o'rganiladi.

1-ta'rif. $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni birlashtiruvchi sinq chiziqqa chastotalar poligoni deyiladi.

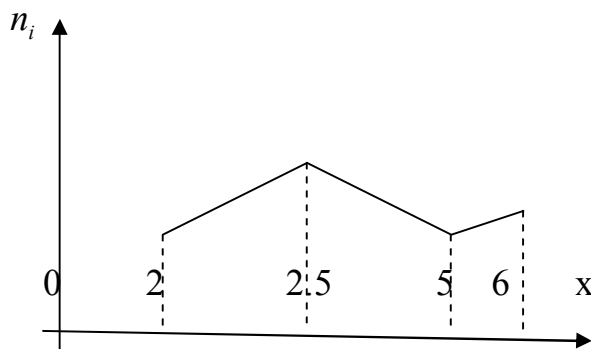
Uni grafigini chizish uchun x_i larni koordinatalar sistyemasida Ox o'qqa, n_i - larni Oy o'qqa joylashtirib, (x_i, n_i) nuqtalar kyesmalar bilan birlashtiriladi.

2-ta'rif. (x_i, W_i) , $(i = \overline{1, k})$ nuqtalarni birlashtiruvchi sinq chiziqqlarga nisbiy chastotalar poligoni deyiladi.

3-misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti asosida chastotalar poligoni tuzilsin

$$\begin{array}{ccccc} x_i & 2 & 2,5 & 5 & 6 \\ n_i & 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,3 \end{array}$$

Yechish. Absissalar o'qida x_i variantalarni, ordinatalar o'qida esa ularga mos n_i -chastotalarni qo'yamiz. (x_i, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kyesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan chastotalar poligonini hosil qilamiz (4-shakl).

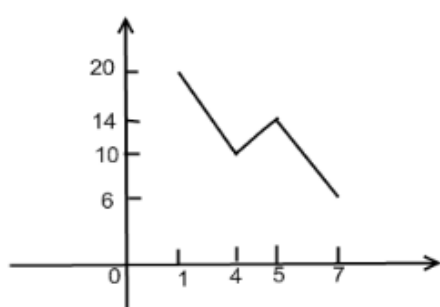


4-shakl

3- ta'rif. Asoslari h bo'lib balandligi $\frac{n_i}{h}$ - chastotalar zichligidan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat figura gistogramma dyeyiladi. Tyekislikda gistogramma abssissa o'qi h uzunlikdagi intyervallar, ordinata o'qiga $\frac{n_i}{h}$ qo'yiladi.

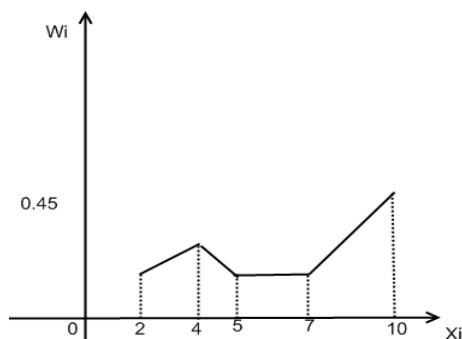
4-misol. Tanlamaning quyida byerilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6



Yechish. Abssissalar o'qida x_i variantlarni, ordinatalar o'qida esa ularga mos n_i chastotalarni qo'yamiz. (x_i, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kyesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan chastotalar poligonini hosil qilamiz (5-shakl).

5-shakl



5. Tanlamaning quyida byerilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang:

a)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

b)

x_i	15	20	30	10
n_i	10	15	20	25

6-shakl.

5-misol. Tanlamaning quyida byerilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

$$\begin{array}{l} a) \quad x_i \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 10 \\ \quad \quad W_i \quad 0,15 \quad 0,2 \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,45 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b) \quad x_i \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 9 \\ \quad \quad W_i \quad 0,15 \quad 0,25 \quad 0,3 \quad 0,2 \quad 0,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d) \quad x_i \quad 20 \quad 40 \quad 65 \quad 80 \\ \quad \quad W_i \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4. \end{array}$$

Yechish. a) abssissalar o'qida x_i variantlarni, ordinatalar o'qida esa mos kyeluvchi W_i nisbiy chastotalarni quyamiz; (x_i, W_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kyesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan nisbiy chastotalar poligonini hosil ilamiz (6-shakl).

4-ta'rif. Asoslari h bo'lib balandligi $\frac{n_1}{h}$ - chastotalar zichligidan iborat bo'lgan to'rtburchaklardan iborat figura gistogramma dyeyiladi. Tyekislikda gistogramma abssissa o'qi h uzunlikdagi intyervallar, ordinata o'qiga $\frac{n_1}{h}$ qo'yiladi. Quyida byerilgan jadval asosida gistogramma tuzilsin.

6-misol. $n=100$ hajmli tanlamaning quyida byerilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

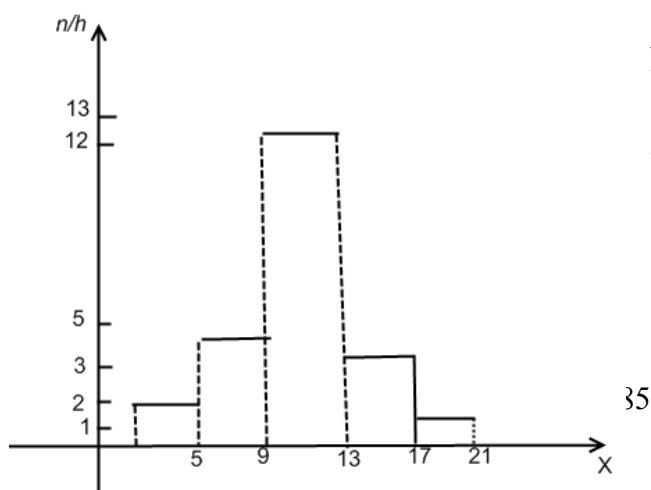
Intyegral nomyeri	Qismaniy intyegral	Intyegraldagi variantalar chastotasi yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	1-5	10	2.5
2	5-9	20	5
3	9-13	50	12.5
4	13-17	12	3
5	17-21	8	2

Yechish. Abssissalar o'qida $h = 4$ uzunlikdagi byerilgan intyervallarni yasaymiz. Bu intyervallarning ustida abssissalar o'qida parallyel va undan tyegishli chastota zichliklari n_i / h ga tyeng masofada bo'lgan kyesmalar o'tkazamiz.

Masalan, (1, 5) intyervalning ustida abssissalar o'qiga parallyel qilib,

$$n_i / h = 10 / 4 = 2,5 \text{ masofada kyesma}$$

yasaymiz. Qolgan kyesmalar ham shunga o'hshash yasaladi. Chastotalar gistogrammasi rasmda tasvirlangan.



6. Tanlamaning quyida byerilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

a)

Intyegral nomyeri	Qismaniy intyegral	Intyegraldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	2-7	5	
2	7-12	10	
3	12-17	25	
4	17-22	6	
5	22-27	4	

b)

Intyegral nomyeri	Qismaniy intyegral	Intyegraldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	
4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

Ko'rsatma. Avval har bir intyegral uchun n_i / h chastota zichligini toping va jadvalning so'nggi ustunini to'ldiring.

7. Tanlanmaning quyida byerilgan ushbu taqsimoti bo'yicha uning empyerik funksiyasini toping:

a)	x_i	2	5	7	8
	n_i	1	3	2	4
b)	x_i	4	7	8	
	n_i	5	2	3	

8-misol. Tanlanmaning quyida byerilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

Intyegral nomyeri	Qismaniy intyegral	Qismaniy intyegraldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz:

$$W_1 = 20/100 = 0,2; \quad W_2 = 30/100 = 0,3; \quad W_3 = 50/100 = 0,5.$$

Intyervalning uzunligi $h = 2$ ekanligini hisobga olib, nisbiy chastotalar zichligini topamiz:

$$W_1 / h = 0,2 / 2 = 0,1; \quad W_2 / h = 0,3 / 2 = 0,15; \quad W_3 / h = 0,5 / 2 = 0,25.$$

Abssissalar o'qida byerilgan qismaniy intyervalni byelgilaymiz. Bu intyervallarning ustida abssissalar o'qiga parallyel va undan tyegishli nisbiy chastota zichliklariga tyeng masofa kyesmalar o'tkazamiz. Masalan, (0,2) intyervalning ustida abssissalar o'qiga parallyel va undan 0,1 masofada yotadigan kyesma o'tkazamiz; qolgan kyesmalar ham shunga o'xshash yasaladi.

8. Tanlanmaning quyidagi byerilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

a)

Intyegral nomyeri	Qismaniy intyegral	Qismaniy intyegraldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$n = \sum n_i = 20$

b)

Intyegral nomyeri	Qismaniy intyegral	Qismaniy intyegraldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
		$n = \sum n_i = 25$

Ko'rsatma. Avval har bir intyegralning nisbiy chastota zichligiga mos nisbiy chastotalarni toping.

IX-bob

TAQSIMOT PARAMETRLARINING STATISTIK BAHOLARI

1-§. Nuqtaviy baholar

1-ta'rif. Nazariy taqsimotni noaniq paramyetrini baholash uchun tajriba natijasida olingan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga statistik baho dyeyiladi.

θ baholanayotgan paramyetr va θ^* - statistik baho bo'lsin.

2-ta’rif. Statistik baho θ^* qo’zg’almagan dyeyiladi, agar uni matyematik kutishi baholanayotgan paramyetrga tyeng bo’lsa:

$$M[\theta^*] = \theta.$$

3-ta’rif. Statistik baho θ^* qo’zg’algan dyeyiladi, agar uni matyematik kutishi baholanayotgan paramyetrga tyeng bo’lmasa:

$$M[\theta^*] \neq \theta.$$

4-ta’rif. Statistik baho θ^* effyektiv dyeyiladi, (tanlanmaning hajmi n byerilganda) agar uni dispyersiyasi minimal bo’lsa:

$$\min\{D(\theta^*) = M[\theta^* - M(\theta^*)]^2\}.$$

5-ta’rif. Statistik baho θ^* asosli dyeyiladi agarda sinashlar soni ortishi bilan kichik musbat $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi munosabat bajarilsa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n^* - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

Faraz qilaylik, hajmi N ga tyeng bo’lgan bosh to’plamni o’rganish talab qilingan bo’lsin.

6-ta’rif. Bosh to’plam byelgisining o’rta arifmyetik qiymatiga bosh o’rta dyeyiladi.

Agar bosh to’plam elyemyentlari byelgisi $x_1, x_2, \dots, x_N$ – har xil bo’lsa,

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Agar byelgining $x_1, x_2, \dots, x_k$ qiymatlari mos ravishda $N_1, N_2, \dots, N_k$ chastotalarga ega, shu bilan birga $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N$ bo’lsa, u holda

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^k N_i x_i}{N}.$$

Faraz qilaylik, bosh to’plamni o’rganish uchun hajmi n ga tyeng bo’lgan tanlanma to’plam ajratilgan bo’lsin.

7-ta’rif. Tanlanma to’plam byelgisining o’rta arifmyetik qiymatiga tanlanma o’rta dyeyiladi.

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n},$$

agar tanlanmani byelgisining elyemyentlari har xil bo’lsa, u holda

$$\bar{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Tanlanma o’rta $\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ bosh to’plamni o’rta qiymati matyematik kutishni qo’zg’almagan bahosi bo’ladi, ya’ni

$$M(\bar{x}_T) = M\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n)}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a.$$

8-ta’rif. Bosh to’plam eleymentlari byelgisining chyetlanishlari kvadratidan olingan o’rta arifmyetik qiymatga bosh dispyersiya dyeyiladi va quyidagi formula bilan ifodalaniladi:

$$\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{N}$$

bu yerda $\sum_{i=1}^k N_i = N$.

Agar $x_1, x_2, \dots, x_N$ variantalar har xil bo’lsa, u holda

$$\overline{D}_B = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_B)^2}{N}.$$

9-ta’rif. Tanlanma to’plam eleymentlari byelgisining chyetlanishlari kvadratidan olingan o’rta arifmyetik qiymatga tanlanma dispyersiya dyeyiladi.

$$\overline{D}_T = \frac{\sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n} \quad (3)$$

Agar $x_1, x_2, \dots, x_k$ lar har xil bo’lsa, u holda

$$\overline{D}_T = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2}{n}.$$

(3) formulani ko’rinishini o’zgartiramiz:

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i [x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + (\bar{x})^2]}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n} + [\bar{x}]^2 \frac{\sum_{i=1}^k n_i}{n} = \overline{x^2} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2. \end{aligned}$$

Dyemak,

$$D = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2, \quad (4)$$

bu yerda $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{n}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n}$.

(4) formulaga dispyersiyani hisoblash formulasi dyeyiladi.

Tuzatilgan tanlanma dispyersiya quyidagi formula asosida hisoblanadi

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n-1}.$$

1-misol. Bosh to’plamdan $n = 50$ hajmli tanlanma olingan

varianta	x_i	2	5	7	10
chastota	n_i	16	12	8	14

Bosh o’rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

Yechish. Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosi o'rtacha tanlanma qiymat bo'ladi:

$$\bar{x}_t = \frac{\sum n_i x_i}{n} = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76$$

1. Bosh tuplamdan $n=60$ hajmli tanlanma olingan;

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Bosh urtacha kiymatning siljimagan baxosini toping.

Javobi. 4.

2-misol. $n=10$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha o'rtacha tanlanma qiymati toping:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Yechish. Dastlabki variantalar katta sonlar, shuning uchun shartli variantalarga o'tamiz: $u_i = x_i - 1270$. Natijada shartli variantalar taqsimotini hosil qilamiz:

u_i	-20	0	10
n_i	2	5	3

Izlanayotgan o'rtacha tanlama qiymatni topamiz:

$$\bar{x}_t = C + \frac{\sum n_i x_i}{n} = 1270 + \frac{-(20) \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269.$$

3-misol. $n=41$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh dispyersiyaning $D_t = 3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispyersiyasining siljimagan bahosini toping.

Yechish. Izlanayotgan siljimagan baho tuzatilgan dispyersiyaga tyeng:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_t = \frac{41}{40} \cdot 3 = 3,075.$$

4-misol. $n=10$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispyersiyasini toping:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Yechish. Variantalar – nisbatan katta sonlar, shuning uchun $u_i = x_i - 191$ shartli variantalarga o'tamiz (biz variantalardan o'rtacha tanlanma qiymatga eng yaqin son $C=19$ ni ayirdik). Natijada shartli variantalar taqsimotini hosil qilamiz:

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Izlanayotgan tanlanma dispyersiyani topamiz:

$$D_t = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum m u_i}{n} \right]^2 = \frac{2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2}{10} - \left[\frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{10} \right]^2 = 8,2 - 0,16 = 8,04.$$

2. $n = 100$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispyersiyani toping:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12.

Javobi. 167,29

3. $n = 100$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispyersiyani toping:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Javobi. 12603.

4. $n = 50$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispyersiyani toping:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

Javobi. 0,32

5. $n = 50$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispyersiyani toping:

x_i	18,4	18,9	19,3	19,6
n_i	5	10	20	15

Javobi. 0,5916.

6-misol. $n = 10$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispyersiyasini toping:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Yechish. $u_i = x_i - 104$ shartli variantalarga o'tamiz. Natijada ushbu taqsimotni hosil qilamiz:

n_i	-2	0	4
x_i	2	3	5

Shartli variantalarning tuzatilgan tanlanma dispyersiyasini ushbu formuladan foydalanib topamiz:

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n - 1}$$

Bu formulaga shartli variantalarni, ularning chastotalarini va tanlanma hajmini qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$S_u^2 = 9,49.$$

Dastlabki hamma variantalar bir xil $C = 104$ songa kamaytirilgan edi, shuning uchun dispyersiya kamaymadi, ya'ni izlanayotgan dispyersiya shartli variantalar dispyersiyasiga teng:

$$S_X^2 = S_u^2 = 9,49.$$

6. $n = 100$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispyersiyasini toping:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

Javobi. 170,42

7-misol. $n = 10$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispyersiyani toping:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Yechish. Kasrlar ustida amallar bajarishdan qutulish uchun $u_i = 100x_i$ shartli variantalarga o'tamiz. Natijada ushbu taqsimotni hosil qilamiz:

u_i	1	5	9
n_i	2	2	5

Shartli variantalarning tuzatilgan tanlanma dispyersiyasini ushbu formula bo'yicha topamiz:

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \frac{[\sum n_i u_i]^2}{n}}{n - 1}$$

Bu formulaga masaladagi byerilganlarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$S_u^2 = 85,28$$

Dastlabki variantalarning tuzatilgan tanlanma dispyersiyasini topamiz:

$$S_X^2 = \frac{S_u^2}{100^2} = 85,28 / 10000 = 0,0085.$$

8. $n = 20$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispyersiyani toping:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Javobi. 0,0525.

9. $n = 10$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispyersiyasini toping:

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Javobi. 4,89.

2 -§. Iityervalli baholar

1-ta'rif. Bitta son bilan aniqlangan bahoga nuqtaviy baho deyiladi.

Biz yuqorida ko'rgan baholar nuqtaviy baholar. Nuqtaviy baho tanlanma to'plamni hajmi kichik bo'lganda xatolarga olib kyeladi. Shuning uchun bunday hollarda intyervalli baholar ishlatiladi.

2-ta’rif. Ikkita nuqta ya’ni intervalni uchlari bilan aniqlangan baholarga intervalli baholar deyiladi.

Intervalli baholar baholarni aniqligini va ishonchligini ta’minlaydi.

Faraz qilaylik, θ^* statistik baho bosh to’plamni noma’lum paramyetri θ ni baholash uchun xizmat qilsin. $|\theta - \theta^*| < \delta$ tyengsizlikni qaraymiz, δ qancha kichik bo’lsa θ^* statistik baho, θ paramyetr uchun shuncha aniq baho bo’ladi. Quyidagi tyengsizlikni baholaymiz:

$$|\theta - \theta^*| < \delta.$$

Umuman olganda tyengsizlikni aniq bajarilishini aytish qiyin. Lyekin uni bajarilish ehtimoli mavjud. Shu ehtimolni γ bilan byelgilaymiz.

3-ta’rif. θ paramyetrni baholash uchun θ^* bahoni ishonchliligi dyeb, $|\theta - \theta^*| < \delta$ tyengsizlikni bajarilish ehtimoli γ ga aytiladi. Odatda bahoni ishonchliligi katta ehtimol bilan kutiladi va quyidagi qiymatlarni qabul qiladi: 0, 95; 0,99 va 0,999.

$|\theta - \theta^*| < \delta$ tyengsizlikni bajarilish ehtimoli, γ ga tyeng bo’lsin, ya’ni

$$P[|\theta - \theta^*| < \delta] = \gamma.$$

$|\theta - \theta^*| < \delta$ tyengsizlikni unga tyeng kuchli

$$-\delta < \theta - \theta^* < \delta \quad \text{yoki} \quad \theta^* - \delta < \theta < \delta + \theta^*$$

qo’sh tyengsizlik bilan almashtirib, quyidagiga ega bo’lamiz:

$$P[\theta^* - \delta < \theta < \delta + \theta^*] = \gamma.$$

Dyemak, $(\theta^* - \delta; \delta + \theta^*)$ oraliq θ noma’lum paramyetrni o’z ichiga oladi.

4-ta’rif. Noma’lum paramyetr θ ni, γ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ oraliqqa ishonchli interval deyiladi.

3-§. Normal taqsimotda σ aniq bo'lganda matyematik kutishni baholashda ishonchli intyervallar

Faraz qilaylik, bosh to'plamni byelgisi X normal taqsimotga ega bo'lsin hamda o'rtacha kvadratik chyetlanishi σ ma'lum bo'lsin.

Maqsadimiz σ aniq bo'lganda bosh to'plamni matyematik kutishini baholash. Buning uchun bosh to'plamdan hajmi n ga tyeng tanlanma to'plam ajratilgan bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ tanlanma qiymatlarini bir xil taqsimlangan erkli $X_1, X_2, \dots, X_n$ tasodifiy miqdorlar dyeb qaraymiz va o'rta qiymatini topamiz:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

$$\bar{X} \text{ ni matyematik kutishi } M(\bar{X}) = a, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Endi $P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$ munosabatni bajarilishini tyekshiramiz.

Chyetlanishni ehtimolini kyeltiramiz:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

va buni $\bar{X}$ tasodifiy miqdorga qo'llab, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) \quad (1)$$

bu yerda $t = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sigma}$, bu tyenglikdan δ ni topib, $\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ buni (1) qo'ysak:

$$P(|\bar{X} - a| < \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t). \quad (2)$$

(2) tyenglikda qavs ichidagi tyengsizlikni qo'sh tyengsizlik bilan almashtirsak:

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Bu yerda $\Phi(t)$ - Laplas funksiyasi uning qiymatlari ilovadan topiladi.

Agar

$$t = 1 \text{ bo'lsa, } \gamma = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$$

$$t = 2 \text{ bo'lsa, } \gamma = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$$

$$t = 3 \text{ bo'lsa, } \gamma = 2\Phi(3) = 0,9973$$

(2) tyenglikni ma'nosi γ ishonchlilik bilan $(\bar{x} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}})$ intyerval

noma'lum a paramyetrni qoplaydi. Bu yerda $\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bahoning aniqligi,

$n = \frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2}$ esa oldindan aniqlanishi mumkin bo'lgan tajribalar soni.

8-misol. X tasodifiy miqdor o'rtacha kvadratik chyetlanishi $\sigma = 5$ ma'lum bo'lgan normal taqsimotga ega. Tanlanma hajmi $n = 25$ va bahoning ishonchliligi $\gamma = 0,95$ byerilgan. Noma'lum a matyematik kutishini $\bar{x} = 14$ tanlanma o'rtacha qiymatlar bo'yicha baholash uchun ishonchli intyervallarni toping.

Yechish. $\gamma = 2\Phi(t) = 0,95$ munosabatdan t ni topib, $\Phi(t) = 0,475$ ni hosil qilamiz. Jadvaldan (2- ilova) $t = 1,96$ ni topamiz. Bahoning aniqligini topamiz:

$$\delta = \frac{\sigma \cdot t}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 5}{\sqrt{25}} = \frac{1,96 \cdot 5}{5} = 1,96.$$

Ushbu

$$x - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < x + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'ysak:

$$14 - 1,96 < a < 14 + 1,96$$

$$12,04 < a < 15,96.$$

9-misol. Tanlanmaning shunday minimal hajmini topingki, bosh to'plamni a matyematik kutishining tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha bahosining aniqligi $0,975$ ishonchlilik bilan bahosining aniqligi $\delta = 0,3$ ga tyeng bo'lsin. Normal taqsimlangan bosh to'plamning o'rtacha kvadratik chyetlanishi ma'lum. $\sigma = 1,2$.

Yechish. Bosh to'plam matyematik kutishining tanlanma o'rtacha qiymat bo'yicha bahosining aniqligini ifodalaydigan

$$\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

formuladan foydalanamiz. Bu yerdan

$$n = \frac{\sigma^2 t^2}{\delta^2}. \quad (*)$$

Shartga ko'ra $\gamma = 0,975$ yoki $2\Phi(t) = 0,975$. Dyemak, $\Phi(t) = 0,4875$. Jadvaldan (2- ilova) $t = 2,24$ ni topamiz. $t = 2,24$, $\sigma = 1,2$, $\delta = 0,3$ larni (*) formulaga qo'yib, izlanayotgan tanlanma hajmi $n = 81$ ni hosil qilamiz.

10. O'lchash tasodifiy xatoligining o'tacha kvadratik chyetlanishi $\sigma = 40$ m bo'lgan bitta asbobda to'pdan nishongacha bo'lgan masofalar bir xil aniqlikda 5 marta o'lchangan. O'lchash natijalarining o'rtacha arifmyetik qiymati $x_t = 2000$ m ni bilgan holda to'pdan nishongacha bo'lgan haqiqiy α masofadan $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intyervalini toping.

Javobi. 2039,2

11. Ko'p sondagi elyektr lampalar partiyasidan olingan tanlanmada 100 ta lampa bor. Tanlanmadagi lampaning o'rtacha yonish davomiyligi 1000 soatga bo'lib chiqdi. Lampaning o'rtacha yonish davomiyligining o'rtacha kvadratik chyetlanishi $\sigma = 40$ soat eknligi ma'lum. Jami partiyadagi lampaning o'rtacha yonish davomiyligi a ni $0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intyervalini toping.

Javobi. $992,16 < a < 1007,84$

12. Stanok avtomat valchalar shtampovka qiladi. $n=100$ hajmli tanlanma bo'yicha tayyorlangan valchalar diametrlarining tanlanma o'rtacha qiymati hisoblangan. Diametrlarning o'rtacha kvadratik chyetlanishi ma'lum: $\sigma=2\text{mm}$. Tanlanma o'rtacha qiymatning tayyorlangan valchalar diametrlarining matyematik kutishini 0,95 ishonchlilik bilan baholash aniqligi δ ni toping.

Javobi. 0.392 mm

13. Bosh to'plamdan $n=12$ hajmli tanlanma olingan:

varianta	x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
chastota	n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

bosh to'plamning normal taqsimlangan byelgisining a matyematik kutishini 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli intyerval yordamida baxolang.

Javobi. $-0,04 < a < 0,88$.

14. Biror fizik kattalikni bir xil aniqlikda 16 marta o'lchash ma'lumotlari bo'yicha o'lchash natijalarining o'rtacha arifmyetik qiymati $\bar{x}_T = 42,8$ 8 va tuzatilgan o'rtacha kvadratik chyetlanishi $s=8$ topilsin. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini $\gamma=0,999$ ishonchlilik bilan baholang.

Javobi. $34,66 < a < 50,94$.

X-bob
TANLANMANING YIG'MA XARAKTERISTIKALARINI
HISOBLASH USULLARI

1-§. Shartli variantalar

Matematik statistikaning vazifasi statistik ma'lumotlarni yig'ish va ularni tahlil qilib ilmiy va amaliy xulosalar chiqarishdan iborat [1].

Faraz qilaylik, tanlanmaning variantalari ortib borish tartibida, ya'ni variatsion qator ko'rinishida joylashgan bo'lsin.

Teng uzoqlikdagi variantalar deb h ayirmali arifmetik progressiya tashkil etadigan variantalarga aytiladi.

Shartli variantalar deb

$$u_i = \frac{x_i - C}{h}$$

tenglik bilan aniqlanadigan variantalarga aytiladi, bu yerda S - soxta nol (yangi sanoq boshi), h - qadam, ya'ni istalgan ikkita qo'shni dastlabki varianta orasidagi farq (yangi masshtab birligi).

Tanlanmaning yig'ma xarakteristikalarini hisoblashning soddalashtirilgan usullari dastlabki variantalarni shartli variantalar bilan almashtirishga asoslangan.

Agar variatsion qator teng uzoqlikdagi h qadamli variantalardan iborat bo'lsa, u holda shartli variantalar butun sonlar bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, soxta nol sifatida ixtiyoriy variantani, masalan, x_m ni olaylik, u holda

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = \frac{x_1 + (i-1)h - [x_1 + (m-1)h]}{h} = i - m.$$

i va m butun sonlar bo'lgani uchun ularning ayirmasi $i - m = u_i$ ham butun sonidir.

Oddiy, boshlang'ich va markaziy empirik momentlar

Tanlanmaning yig'ma xarakteristikalarini hisoblashda empirik momentlardan foydalanish qulaydir. Empirik momentlar nazariy momentlardan farqli ravishda kuzatish ma'lumotlari bo'yicha hisoblanadi.

k - chi tartibli oddiy empirik moment deb $x_i - c$ ayirmalar k - darajalarining o'rtacha qiymatiga aytiladi:

$$M'_k = \frac{\sum n_i (x_i - c)^k}{n},$$

bu yerda x_i - kuzatiladigan varianta, n_i - variantaning chastotasi,

$n = \sum n_i$ - tanlanma hajmi, S - ixtiyoriy o'zgarmas son (soxta nol).

k - chi tartibli boshlang'ich empirik moment deb $s=0$ bo'lgandagi k - chi tartibli oddiy momentga aytiladi:

$$M_k = \frac{\sum n_i x_i^k}{n}.$$

2-§. Tanlanma o'rtacha qiymati va tanlanma dispersiyani hisoblashning ko'paytmalar metodi

Tanlanma teng uzoqlashgan variantalar va mos chastotalar taqsimoti o'rinishida berilgan bo'lsin. Bu holda tanlanma o'rtacha qiymatni va tanlanma dispersiyani ushbu formulalar bo'yicha

$$\overline{x_T} = M_1^* h + C_1, \quad D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2$$

ko'paytmalar metodi bilan topish kulaydir, bu yerda h – qadam (ikkita qo'shni varianta orasidagi ayirma); S - soxta nol (eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta);

$$u_1 = \frac{x_i - C}{h} - \text{shartli varianta};$$

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} - \text{birinchi tartibli shartli moment};$$

$$M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \text{ikkinchi tartibli shartli moment}.$$

Ko'paytmalar metodidan amalda qanday foydalanish 1-masalada ko'rsatilgan.

1. $n=100$ hajmli tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani ko'paytmalar metodi bilan toping:

varianta	x_i	12	14	16	18	20	22
chastota	n_i	5	15	50	16	10	4

Yechilishi: 1-hisoblash jadvalini tuzamiz, buning uchun:

1) variantalarni birinchi ustunga yozamiz:

2) chastotalarni ikkinchi ustunga yozamiz; chastotalar yig'indisini

(100 ni) ustunning pastki katagiga yozamiz;

3) S soxta nol sifatida eng katta chastotaga ega bo'lgan varinatani

(16) ni olamiz (S sifatida ustunning taxminan o'rtasida joylashgan istalgan variantani olish mumkin); uchinchi ustunning soxta nol joylashgan satrga tegishli bo'lgan katagiga 0 ni yozamiz; nolning ustiga ketma-ket -1, -2 ni, nolning ostiga esa 1, 2, 3 ni yozamiz;

4) n_i chastotalarning u_i shartli variantalarga ko'paytmalarini to'rtinchi ustunga yozamiz; manfiy sonlar yig'indisini (-25 ni) aloxida, musbat sonlar yig'indisini (48 ni) aloxida topamiz; bu sonlarni qo'shib, ularning yig'indisi (23 ni) to'rtinchi ustunning pastki katagiga yozamiz;

5) chastotalarning shartli variantalar kvadratlarga ko'paytmalarini, ya'ni $n_i u_i^2$ larni beshinchi ustunga yozamiz (uchinchi va to'rtinchi ustunlarning xar bir satridagi sonlarni ko'paytirib chiqish kulayrokdir: $u_i \cdot n_i u_i = n_i u_i^2$), bu ustun sonlari yig'indisini (127) ni beshinchi ustunning pastki katagiga joylashtiramiz;

6) chastotalarning bitta orttirilgan shartli variantalar kvadratlariga ko'paytmalarini, ya'ni $n_i (u_i + 1)^2$ larni oltinchi ustunga yozamiz; bu ustundagi sonlar yig'indisini (273ni) oltinchi ustunning pastki katagiga yozamiz.

Natijada 1-hisoblash jadvalini hosil qilamiz.

j a d v a l

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
12	5	-1	-10	20	5
14	15	-1	-15	15	-
16	50	0	-25	-	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
			48		
$n = 100$			$\sum n_i u_i = 23$	$\sum n_i u_i^2 = 127$	$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 273$

Hisoblashlarni tekshirish uchun

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n$$

ayniyatdan foydalaniladi.

Tekshirish:

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = 273, \sum n_i u_i^2 + 2 \sum n_i u_i + n = 127 + 2 \cdot 23 + 100 = 273.$$

Kontrol yig'indilarning bir xil ekanligi hisoblashlar to'g'ri bajarilganligidan dalolat beradi.

Birinchi va ikkinchi tartibli shartli momentlarni hisoblaymiz:

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{23}{100} = 0,23; \quad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{127}{100} = 1,27.$$

Qadamni (istalgan ikkita qo'shni varianta orasidagi ayirmaning) topamiz:
 $h = 14 - 12 = 2.$

Izlanayotgan tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani topamiz, bunda sohta nol, (eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta) $S=16$ ekanligini hisobga olamiz:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = 0,23 \cdot 2 + 16 = 16,46;$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2 = [1,27 - 0,23^2] \cdot 2^2 = 4,87.$$

3-§. Tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani hisoblashning yig'indilar metodi

Tanlanma teng uzoqlikdagi variantalar va ularga tegishli chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan bo'lsin. Bu holda 1- da ko'rsatilganidek, tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani ushbu formulalar bo'yicha topish mumkin:

$$\bar{x}_1 = M_1^* h + C_1, \quad D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] h^2.$$

Yig'indilar metodidan foydalanishda birinchi va ikkinchi tartibli shartli momentlar ushbu formulalar bo'yicha topiladi.

$$M_1^* = \frac{d_1}{n}, \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n},$$

bu yerda $d_1 = a_1 - b_1$, $s_1 = a_1 + b_1$, $s_2 = a_2 + b_2$. Shunday qilib, pirovardida a_1, a_2, b_1, b_2 sonlarni xisoblash lozim. Bu sonlarni amalda qanday hisoblash 2-masalada ko'rsatilgan.

2. $n=100$ xajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha qiymatni va tanlanma dispersiyani yig'indilar metodi bilan toping:

varianta x_i 48 52 56 60 64 68 72 76 80 84

chastota n_i 2 4 6 8 12 30 18 8 7 5

Yech i l i sh i: 2-hisoblash jadvalini tuzamiz, buning uchun

- 1) variantalarni birinchi ustunga yozamiz;
- 2) chastotalarni ikkinchi ustunga yozamiz; chastotalar yig'indisini (100 ni) ustunning pastki katagiga yozamiz;
- 3) S sohta nol sifatida eng katta chastotaga ega bo'lgan variantani (68 ni) tanlaymiz (S sifatida ustunning taxminan o'rtasida joylashgan istalgan variantani olish mumkin); sohta nolni o'z ichiga olgan satrning kataklariga nollar yozamiz; to'rtinchi ustunda hozirgina yozilgan nolning ustiga va ostiga yana bittadan nol yozamiz.
- 4) Uchinchi ustunning nol ustida qolgan to'ldirilmagan kataklariga (eng tepadagi katakdan boshkalari

1- j a d v a l

1	2	3	4
x_1	n_1	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20
60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
	$n = 100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$

ga) ketma-ket jamlangan chastotalar: 2; 2+4=6; 6+6=12; 12+8=20; 20+12=32 ni ketma –ket yozamiz; barcha jamlangan chastotalarni qo'shib $b_1 = 72$ sonini hosil qilamiz; bu soni uchinchi ustunning yuqoridagi katagiga yozamiz. Uchinchi ustunning noldan pastda to'ldirilmasdan qolgan kataklariga (eng pastki katakdan boshqalariga) jamlangan chastotalar: 5; 5+7=12; 12+8=20; 20+18=38 ni ketma-ket yozamiz; jamlangan chastotalarni qo'shib, $a_1 = 75$ sonini hosil qilamiz; bu sonni uchinchi ustunning pastki katagiga yozamiz;

5) to'rtinchi ustun shunga o'xshash to'ldiriladi, bunda uchinchi ustunning chastotalari jamlanadi; nolning tepasida joylashgan barcha jamlangan chastotalarni qo'shib, $b_2 = 70$ sonini hosil qilamiz, uni to'rtinchi ustunning yuqoridagi katagiga yozamiz; nolning tagida joylashgan jamlangan chastotalar yig'indisi a_2 songa teng, unga to'rtinchi ustunning pastki katagiga yozamiz.

Natijada 2-hisoblash jadvalini hosil qilamiz. d_1, s_1, s_2 ni topamiz:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3;$$

$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147;$$

$$s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129.$$

Birinchi va ikkinchi tartibli shartli momentlarni topamiz:

$$M_1^* = \frac{d_1}{n} = \frac{3}{100} = 0,03; \quad M_2^* = \frac{s_1 + 2s_2}{n} = \frac{147 + 2 \cdot 129}{100} = 4,05.$$

Qadam (ikkita qo'shni varianta orasidagi ayirma) $h = 4$ va soxta nol $S = 68$ ekanligini hisobga olib, izlanayotgan tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispersiyani hisoblaymiz:

$$\bar{x}_T = M_1^* h + C = 0,03 \cdot 4 + 68 = 68,12;$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [4,05 - 0,03^2] \cdot 4^2 \approx 64,78.$$

1. Tyeng uzoqlikda bo'lmagan variantalar taqsimotining dispyersiyasini hisoblashda tanlanma uzunligi $h=12$ bo'lgan 5 ta intyervalga bo'lindi. Tyeng uzoqlikdagi variantalarning (qismaniy intyervallarning o'rtalarining) tanlanma dispyersiyasi $D_T = 52,4$. Tanlanma dispyersiyasini Shyeppard tuzatmasini hisobga olgan holda toping.

Javobi. $D_T = 40,4$.

2. a) $n = 50$ hajmli tanlanmaning tyeng uzoqlikda bo'lmagan variantalari taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispyersiyani ko'paytmalar myetodi bilan toping:

$$\begin{array}{cccccccccc} x_i & 6 & 8 & 11 & 13 & 15,5 & 17,5 & 20 & 23,5 & 24,5 & 26 \\ n_i & 1 & 9 & 6 & 6 & 4 & 6 & 8 & 5 & 4 & 1 \end{array}$$

a) tanlanma dispyersiyani Shyeppard tuzatmasini hisobga olgan holda toping.

Javobi. a) $\bar{y}_T = 15,68$, $D_T = 32$; b) $D_T = 30\frac{1}{3}$.

3. a) $n = 100$ hajmli tanlanmaning tyeng uzoqlikda bo'lmagan variantalari taqsimoti bo'yicha tanlanma o'rtacha qiymat va tanlanma dispyersiyani ko'paytmalar myetodi bilan toping:

x_i 10 13 15 17 19 23 24 26 28 32 34 35

n_i 2 4 6 8 9 6 20 15 10 8 7 5

Javobi. a) $\bar{y}_T = 24,35$, $D_T = 3,83$; b) $D_T = 29,75$.

4. $n = 100$ hajmli tanlanmaning byerilgan taqsimoti bo'yicha asimmetriya va ekssyessni ko'paytmalar myetodi bilan toping:

a) x_i 10,2 10,4 10,6 10,8 11,0 11,2 11,4 11,6 11,8 12,0

n_i 2 3 8 13 25 20 12 10 6 1

b) x_i 12 14 16 18 20 22

n_i 5 15 50 16 10 4

Javobi. a) $a_s = -0,01$, $e_k = -0,24$; b) $a_s = 0,49$, $e_k = 0,36$.

XI-bob
KORRELYASIYA NAZARIYASI ELEMENTLARI
1-§. Funksional, statistik va korrelyasion bog'lanishlar.

Tanlanmaning ryegryessiya tyenglamasi

Juda ko'p hollarda X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishlarni o'rganishga tug'ri kyeladi. Tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanish funksional yoki statistik bo'lishi yoki umuman bog'lanish bo'lmasligi mumkin.

1-Ta'rif. Agar tasodifiy miqdorlardan birining har bir qiymatiga ma'lum qoida asosida ikkinchisining biror qiymati mos kyelsa, bunday bog'lanishga funksional bog'lanish deyiladi va

$$Y = \varphi(x)$$

ko'rinishda yoziladi.

2-Ta'rif. Agar tasodifiy miqdorlardan birining o'zgarishi bilan ikkinchisining taqsimoti o'zgarsa, bunday bog'lanishga statistik bog'lanish deyiladi.

3-Ta'rif. Agar statistik bog'lanishda tasodifiy miqdorlardan birining o'zgarishi bilan ikkinchisining o'rta qiymati o'zgarsa, bunday bog'lanishga korrelyasion bog'lanish deyiladi.

Bizga ma'lumki, shartli matyematik kutishni baholash uchun shartli o'rta qiymat baho vazifasini o'taydi.

4-Ta'rif. Tashkil etuvchi X biror x soni qabul qilganda ($X = x$), Y ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarining o'rta arifmyetik qiymatiga shartli o'rta deyiladi.

1-misol. $X = x_1 = 3$ bo'lganda Y quyidagi qiymatlarni qabul qilsin: $y_1 = 5, y_2 = 7, y_3 = 12$, u holda

$$\bar{y}_{x_1} = \frac{5 + 7 + 12}{3} = 8.$$

Xuddi shunday, X ning $Y=y$ ga mos qiymatlarining o'rta arifmyetik qiymatiga X ni shartli o'rta qiymati deyiladi va $\bar{x}_y$ kabi byelgilanadi. Ehtimollar nazariyasidan bizga ma'lumki,

$$M(Y|x) = f(x),$$

Y ni X ga ryegryessiya tyenglamasi

$$M(X|y) = \varphi(y),$$

X ni Y ga ryegryessiya tyenglamasi.

Shunday qilib, $M(Y|x)$ matyematik kutish x ni funksiyasi. Xuddi shunday $\bar{y}_x$ ham x ni funksiyasi va buni $f^*(x)$ bilan byelgilasak

$$\bar{y}_x = f^*(x)$$

tyenglamaga ega bo'lamiz. Bu Y ni X ga tanlanma ryegryessiya tyenglamasi deyiladi. $f^*(x)$ – Y ni X ga tanlanma ryegryessiya deyiladi.

Xudi shunday

$$\bar{x}_y = \varphi^*(y)$$

X ni Y ga tanlanma ryegryessiya tyenglamasi dyeyiladi. $\varphi^*(y)$ – X ni Y ga tanlanma ryegryessiyasi dyeyiladi.

$f^*(x)$ va $\varphi^*(y)$ funksiyalari parametrlarini topish bilan shug'ullanamiz.

2-§. Gruppalanmagan ma'lumotlar asosida tanlanmani to'g'ri chiziqli ryegryessiya tyenglamasini o'rtacha kvadratik baholash

Faraz qilaylik, (X, Y) tasodifiy miqdorlar sistyemasi tajriba natijasida $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ qiymatlarni qabul qilsin.

Tajribadan olingan ma'lumotlar asosida to'g'ri chiziqli ryegryessiya tyenglamasini parametrlarini aniqlaymiz, aniqrog'i,

$$Y = \rho_{yx}x + b \quad (1)$$

Y ning X ga ryegryessiya tyenglamasini izlaymiz.

Bu yerda ρ_{xy} – Y ni X ga tanlanma to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti Y bosh to'plamni korryelyasiya koeffisiyenti uchun baho bo'ladi. $y = kx + b$ tajribadan olingan ma'lumotlar asosida tuzilgan funksiya bo'lsin. Tajribalarni shunday o'tkazamizki bu $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ nuqtalar (1) to'g'ri chiziqqa yaqin bo'lsin. Dyemak,

$$Y_i - y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

chyetlanishni baholaymiz.

Chyetlanishlar kvadratining minimumi o'rtacha kvadratik baho bo'ladi. Shuning uchun quyidagi funksiyanı tuzamiz:

$$F(\rho; b) = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2.$$

$$Y_i = \rho x + b$$

ekanligini hisobga olsak,

$$F(\rho; b) = \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i)^2.$$

Minimum qiymatni topish uchun xususiy hosilalarni nolga tyenglashtiramiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) x_i = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Bundan elyemyentar almashtirishlar bajarib, ρ va b ga nisbatan ikkita chiziqli tyenglama hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (\sum x^2) \rho + (\sum x) b = \sum xy, \\ (\sum x) \rho + nb = \sum y. \end{cases}$$

Bu sistyemani yechib, izlanayotgan parametrlarni topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum x^2 & \sum x \\ \sum x & n \end{vmatrix} = n \sum x^2 - (\sum x)^2, \quad \Delta_\rho = \begin{vmatrix} \sum xy & \sum x \\ \sum y & n \end{vmatrix} = n \sum xy - \sum x \sum y$$

$$\Delta_b = \left| \begin{array}{cc} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma x & \Sigma y \end{array} \right| = \Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy,$$

$$\rho = \frac{\Delta_\rho}{\Delta} = \frac{n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

Xuddi shunday

$$\bar{x}_y = \rho_{xy} y + C$$

(bu yerda ρ_{xy} – X ni Y ga tanlanma ryegryessiya koeffitsiyenti) X ni Y ga ryegryessiya tyenglamasini topish mumkin.

2-misol. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini $n = 5$ ta kuzatish ma'lumotlari bo'yicha toping.

x_i	1	1,5	3	4,5	5
Y_i	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Yechish. Jadval tuzamiz.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1,00	1,25	1,00	10,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250

$$\sum x_i = 15 \quad \sum y_i = 8,15 \quad \sum x_i^2 = 57,5 \quad \sum x_i y_i = 26,975$$

$$\rho_{yx} = \frac{5 \cdot 26,975 - 15 \cdot 8,15}{5 \cdot 57,5 - (15)^2} = 0,202;;$$

$$b = \frac{57,5 \cdot 8,15 - 15 \cdot 26,975}{62,550} = 1,024.$$

Izlanayotgan ryegryessiya tyenglamasini yozamiz:

$$Y = 0,202x + 1,024.$$

Bu tyenglama bo'yicha hisoblangan Y_i qiymatlar kuzatilgan y_i qiymatlar bilan qanchalik yaxshi mos kyalishi haqida tasavvur hosil qilish uchun $Y_i - y_i$ chyetlanishlarni topamiz.

1. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan kuzatish ma'lumotlari bo'yicha toping.

x	1	2	3	4	5
y	3	4	6	8	10.

2. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan kuzatish ma'lumotlari bo'yicha toping.

x	1	2	3	4	5
y	2	5	10	8	3.

3. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan kuzatish ma'lumotlari bo'yicha toping.

x 1 2 3 4 5

y 1 2 4 8 12.

4. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan kuzatish ma'lumotlari bo'yicha toping.

x 1 2 3 4 5

y 2 3 5 8 10.

5. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan jadvalda kyeltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$Y \setminus X$	14	18	22	26	30	n_y
1,5	3					3
2,0	5	7	3			15
2,5		4	10	7	1	22
3,0			1	4	5	10
n_x	8	11	14	11	6	$n = 50$

6. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan jadvalda kyeltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$Y \setminus X$	4	8	12	16	20	n_y
1,5	5					5
2,0	2	7	3			12
2,5	1	4	10	7	2	24
3,0			1	4	4	9
n_x	8	11	14	11	6	$n = 50$

7. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan jadvalda kyeltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$Y \setminus X$	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	4					6
40							14
50	5		40	2	8		9
60		5	5	10	6		50
70				4	7	3	21
n_x	3	11	46	16	21	3	$n = 100$

8. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan jadvalda kyeltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$Y \setminus X$	14	18	22	26	30	n_y
10	3					9
12	5	7	3			19
14		4	10	7	1	4
16			1	4	5	12
18						6
n_x	8	11	14	11	6	$n = 100$

9. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan jadvalda kyeltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$Y \setminus X$	14	18	22	26	30	n_y
1,5	4	5				13
2,0		9	10			5
2,5			30	7	8	22
3,0				1	7	10
n_x	8	11	14	11	6	$n = 50$

10. Y ning X ga ryegryessiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tyenglamasini quyida byerilgan jadvalda kyeltirilgan ma'lumotlar bo'yicha toping.

$Y \setminus X$	20	25	30	35	40	n_y
10	4	5				3
12		9	10			15
14			30	3	8	22
16			6	12	7	10
18				1	5	
n_x	8	11	14	11	6	$n = 50$

1-илова

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	0,940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0655	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0123	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Adabiyotlar

1. В.А. Колемаев.и др. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высш. школа, 1991г.
- 2.В.Е.Гмурман.Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика.Тошкент,Ўқитувчи, 1978й.
3. С.Х. Сирожидинов, М. Маматов. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, «Ўқитувчи». 1982 й.
4. В.Е.Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент, Ўқитувчи, 1980 й.
5. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.-М.: Высш. школа, 2006 г.
6. В.А.Ватунин, и др. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах.
—М.: Высш школа, 2003г.
7. Л.Н.Фадеева. Математика для экономистов теория вероятностей и математическая статистика. —М.: Высш экономическое образование, 2006г.
8. В.А.Севастьянов. Курс теории вероятностей и математической статистики.
—М.:Наука, 1982г.

Mundarija

I-bob. Tasodifiy hodisalar.....	3
1-§.Sinashlar va hodisalar	3
2-§.Ehtimolning klassik va statistik ta'riflari.....	9
3-§. Ehtimolning geometrik ta'rifi.....	18
I I- bob. Asosiy teoremlar.....	21
1-§. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari. Shartli ehtimol.....	21
2-§. Kamida bitta hodisaning ro'y berish ehtimoli.....	32
3-§. To'la ehtimol formulasi.....	37
4-§. Beyes formulasi.....	39
III –bob.Takror erkli sinashlar.....	43
1-§. Bernulli formulasi.....	43
2-§. Laplasning lokal va integral teoremlari.....	46
5-§. Puasson formulasi.....	58
IV- bob. Diskret tasodifiy miqdorlar.....	59
1-§. Diskret taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot konuni. Binomial va Puasson taqsimotlari.....	59
2-§. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristiklari.....	66
3-§. Nazariy momentlar.....	75
V-bob. Uzlukzis tasodifiy miqdorlar.....	78
1-§. Taqsimot funksiyasi va uning xossalari.....	78
2-§. Taqsimot zichligi funksiyasi va uning xossalari.....	83

3-§. Uzluksiz tasodifiy miqdorning son xarakteristikalarini.....	89
4-§. Normal taqsimot qonuni	92
5-§. Ko'rsatkichli taqsimot.....	95
VI-bob. Bir va ikki tasodifiy argument funksiyasining taqsimoti.....	100
1-§. Bir va ikki tasodifiy argument funksiyasining taqsimoti... ..	100
2-§. Ikki tasodifiy argumentning funksiyasi.....	101
VII-bob. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasi.....	104
1-§. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.....	104
2-§. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdor tashkil etuvchilari ehtimollarining shartli taqsimot qonunlari.....	108
VIII-bob. Matematik statistika elementlari.....	110
1-§. Tanlab kuzatish usuli. Tanlanmaning statistik taqsimoti.....	110
2-§. Empirik taqsimot funksiyasi.....	112
3-§. Poligon va gistogramma.....	115
IX-bob. Taqsimot parametrlarini statistik baholari.....	121
1-§. Nuqtaviy baholar.....	121
2-§. Iityervalli baholar.....	127
3-§. Normal taqsimotda σ aniq bo'lganda matyematik kutishni baholashda ishonchli intyervallar.....	129
X-bob. Tanlanmaning yig'ma xarakteristikalarini hisoblash usullari.....	133
1-§. Shartli variantalar.....	133
XI-bob. Korrelasiya nazariyasi elementlari.....	141
1-§. Funksional, statistik va korryelyasion bog'lanishlar. Tanlanmaning ryegryessiya tyenglamasi.....	141
2-§. Gruppalanmagan ma'lumotlar asosida tanlanmani to'g'ri chiziqli ryegryessiya tyenglamasini o'rtacha kvadratik baholash.....	142
Adabiyotlar.....	147