

M.RAISOV
X.Q.QARSHIBOYEV

CHIZIQLI OPERATORLAR

SAMARQAND -2015

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

OLIV MATEMATIKA KAFEDRASI

M.RAISOV
X. Q.QARSHIBOYEV

CHIZIQLI OPERATORLAR

Uslubiy qo‘llanma

Samarqand-2015

Raisov M., Qarshiboyev X.Q. “Chiziqli operatorlar” Uslubiy qo‘llanma. Samarqand. SamISI. 2015.

Taqrizchilar: Samatov S. – SamDU “Matematik fizika va funksional analiz” kafedrasining dotsenti, f- m. f.n.
Qo‘ldoshev A.Ch – SamISI “Oliy matematika” kafedrası katta o‘qituvchisi, t. f. n.

Uslubiy qo‘llanma “Oliy matematika” kafedrası yig‘ilishida muhokama qilingan va institut o‘quv uslubiy kengashda muhokama etish uchun tavsiya etilgan (5 -sonli bayonnoma, 13.04.2015 yil)

Uslubiy qo‘llanma institut o‘quv- uslubiy kengashida tasdiqlangan va chop etish uchun tavsiya etilgan (bayonnoma № 2015 yil)

Samarqand iqtisodiyot va servis instituti, 2015

Kirish

O'zbekiston oliy o'quv yurtlarida ko'p bosqichli ta'lim tizimi joriy qilinib, bakalavriatda va magistratura mutaxassislarini tayyorlash bo'yicha bu tizim yo'lga qo'yilgan. Bu esa oliy o'quv yurti o'qituvchilaridan jahon andozalariga to'la javob beradigan, mamlakatimiz talab va ehtiyojlariga javob beradigan bakalavr va magistrlar o'quv rejasiga, o'quv rejaga to'la mos keluvchi o'quv dasturlar, o'quv kasbiy ta'limiga davlat standartlari asosida o'quv uslubiy qo'llanma kabi adabiyotlarning yaratilishini taqozo etadi.

Chiziqli operatorlar

§1. Chiziqli operatorning ta'rifi

Biz asosan chiziqli operatorlarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to'plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo'ladi.

Berilgan bo'lsin X va Y vektorlar fazosi. Agar X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning faqat bitta y elementini mos keluvchi

$$Ax = y \quad (x \in X, y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X fazoning hamma yerida aniqlangan bo'lmashligi mumkin. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo'lgan barcha $x \in X$ lar to'plami A operatorni aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan beligilanadi, ya'ni:

$$D(A) = \{x \in X : Ax \in Y\}.$$

Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy α kompleks son uchun quyidagi tengliklar bajarilsa:

$$1. \quad A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

$$2. \quad A(ax) = aA(x)$$

A ga chiziqli operator deyiladi.

Chiziqli operatorlar uchun misollar.

1. Faraz qilaylik $E = E_1$ topologik soha. Operator A bu sohada x ni barcha qiymatlar $x \in E$ uchun quyidagi formula bilan berilgan bo'lsin:

$$AX = X$$

Sohani har bir element o'zini o'ziga aks ettiruvchi chiziqli operatorga chiqish yoki birlik operator deyiladi.

2. Differensiallanuvchi funksiyalar sohasini $D[a, b]$ deb olsak, differensiallanuvchi operator $D[a, b]$ sohada quyidagi formula bilan beriladi:

$$Df(x) = f(x).$$

bu yerda $f(x) \in D[a, b]$, $f(x) \in C[a, b]$.

Bu yerda D operator faqat differensiallanuvchi uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiyalar to'plami $C[a, b]$ sohadan olinadi. Bu operatorni chiziqli ekanligi uzluksiz hosilaga ega ekanligidan ko'rinib turibdi.

3. Uzluksiz va chegaralangan funksiyalar sohasida $C(-\infty, +\infty)$ A operator funksiyani o'zgarmas a ($a = \text{const}$) intilish.

$$Af(x) = f(x + a)$$

A - operator ekanligini tekshirib ko'raylik:

$$1) A(f + g) = (f + g)(x + a) = f(x + a) + g(x + a) = A(f) + A(g)$$

funksiyalarni yig'indisi additiv haqidagi aksiomaga asosan quyidagi bajariladi.

$$2) A(kf(x)) = kf(x + a) = kA(f(x))$$

3) Bir jinsli aksiomasi ekanligi ko'rinadi. Bundan A operatorning chiziqli operator ekanligi kelib chiqadi.

4) Faraz qilaylik $E = E_1 = C[0, 1]$ $[0, 1]$ oraliqdagi uzluksiz funksiyalar sohasi va uni aksi $A: E \rightarrow E_1$ da quyidagi formula yordamida berilgan.

$$Af = \int_0^1 f(x) dx$$

Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgani uchun bu funksiya uzluksiz funksiya bo'lib, differensiallanuvchi funksiya bo'ladi. Demak, aniq integral chiziqli funksiya. Bu akslantirish chiziqli operator deyiladi.

§2. Chiziqli operator va uning matritsasi

Chekli chiziqli X fazoda A – chiziqli operator berilgan bo'lsin, $\dim(X) = n$.

Faraz qilaylik X fazoda $l_1, l_2, \dots, l_n$ bazis vektorlar.

Bularga asoslanib, quyidagilarni belgilab olaylik:

$$Al_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})$$

$$Al_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{n2})$$

.....

$$Al_n = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, \dots, a_{nn})$$

bu yerda $Al_1, Al_2, \dots, Al_n$ lar $l_1, l_2, \dots, l_n$ vektorlarning obrazlari.

Chiziqli operatorning $l_1, l_2, \dots, l_n$ bazisdagi matritsasi quyidagicha bo'ladi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bu matrsaning ustunlari $Al_1, Al_2, \dots, Al_n$ obrazlarning koordinatalari hisoblanadi va bunga berilgan bazisdagi chiziqli operatorning matritsasi deyiladi.

Shuni ham aytish kerakki n o'lchovli fazoda berilgan har bir chiziqli operator uchun yagona n -chi tartibli kvadratik matritsa to'g'ri keladi yoki n – chi tartibli kvadratik matritsa uchun n – o'lchovli fazodagi chiziqli operatorni to'g'ri kelishi isbotlangan.

Shu bilan quyidagi tenglikni yozish mumkin.

$$Y = AX; Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Bu tenglik bir tomondan obrazni koordinatalari bilan proobrazni koordinatalari bilan bog'laydi va operatorni A matritsaga ta'sirini ko'rsatadi.

Bazisni o'zgarishi bilan chiziqli fazo matritsa operatorini ham o'zgartiradi. Faraz qilaylik, X fazoda $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ bazisdan $l' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_n)$ bazisga o'tsin. l bazisdagi A_l matritsa A operatori l' bazisdagi $A_{l'}$ matritsa operatori o'zaro bog'lanish formulasi quyidagicha bo'ladi

$$A_{l'} = P_{l+l'}^{-1} A_l P_{l+l'},$$

$$A_l = P_{l+l'} A_{l'} P_{l+l'}^{-1}$$

bu yerda $P_{l+l'}, P_{l+l'}^{-1}$ l bazisdan l' bazisga o'tish matrsasi yoki teskarisicha.

Misol 1. Operator matritsasi yangi bazisda.

X_n chiziqli fazoda harakatdagi A operator o'zini matritsasi bilan berilgan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 11 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vektor obrazini koordinatalarini topamiz

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

X_4 chiziqli fazoga yangi bazisni kiritamiz

$$l'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad l'_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

X vektorning koordinatalarini topamiz, obrazini koordinatlari $Y = AX$ va operator matritsasi yangi bazisdan topiladi.

§3. Chiziqli operatorni obrazlari va yadrosi

Bizga berilgan bo'lsin n o'lchovli chekli X fazoda harakatda bo'lgan chiziqli operator. $\text{Im}(A)$ chiziqli operatorni obrazi ham chiziqli fazo ekanligi isboti bor. Shunga asosan chiziqli operator obrazini o'lchoviga operatorni rangi deyiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$R_g(A) = K = \dim(\text{Im}(A)).$$

Chiziqli operatorning yadrosi deb, n o'lchovli X vektorlar fazosidagi nolli elementlar to'plami obraz deyiladi. Operatorning yadrosini quyidagicha belgilasak $\text{Kek}(A)$:

$$\text{Kek}(A) = \{x \in X : A(x) = 0\}.$$

Chiziqli operatorning yadrosi chiziqli fazo bo'lib, yadro o'lchoviga chiziqli operatorning defekti deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\text{Def}(A) : d = \text{Def}(A) = \dim(\text{Kek}(A))$$

n -o'lchovli X chiziqli fazoda harakatda bo'lgan chiziqli operator uchun quyidagilar o'rinlidir:

Operatorni rangi va defekti yig'indisi operator harakatda bo'lgan fazo o'lchoviga teng:

$$Def(A) + R_g(A) = n$$

bo'lib operatorni rangi uni matritsasini rangiga teng. Operatorni yadrosi esa A matritsaga ega jinsli tenglamalar sistemasi yechimiga to'g'ri keladi. Sistema yechimlar sohasini o'lchovi esa operator defektiga teng bo'lib sistemani fundamental yechimlari operator yadrosini bazisini tashkil qiladi;

Operator matritsasini minorini ustunlari operator obrazidagi bazisini tashkil qiladi.

Yuqoridagilarga asoslanib A matritsasi bilan berilgan chiziqni operator obrazi va yadrosini strukturasini berish mumkin. Buning uchun chiziqli tenglamalarning umumiy qoidalaridan va matritsalarini almashtirish formulalaridan foydalanamiz.

Misol 2. Chiziqli operatorini obrazi va yadrosi berilgan.

X_4 chiziqli fazoda harakatdagi chiziqli operator obrazi va yadrosini strukturasini izohlang, ya'ni uni o'lchovini aniqlang va bazisni tuzing.

Yechish

A - operator quyidagi matritsasi bilan berilgan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ va } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektorlarni operatorni yadrosiga tegishli ekanligini,

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{esa uni obraziga tegishli ekanligini}$$

tekshiramiz.

Chiziqli operatorni maxsus qiymatlari va maxsus vektori

Faraz qilaylik n -o'lchovli X chiziqli fazoda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A operator matritsasi bilan berilgan. λ – son maxsus qiymat deyiladi, agarda noldan farqli X vektor chiziqli operatorning maxsus vektori bo'lib, quyidagi tenglik bajarilsa

$$AX = \lambda X.$$

Faraz qilaylik A matritsa operatori birorta bazisda berilgan bo'lsin.

Operatorning maxsus qiymatlari va uning tegishli bo'lgan maxsus vektorlari quyidagi bog'lanishga ega

$$(A - \lambda E)X = 0,$$

bu yerda E - birlik matritsa, 0 - X fazoning nolli elementi. Bu shuni ko'rsatadiki operatorni maxsus vektor chiziqli bir jinsli $(A - \lambda E)X = 0$ tenglamani noldan farqli yechimi bo'ladi, bu yechim mavjud bo'ladi, agarda

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Shunday qilib chiziqli operatorning maxsus qiymatlari $\det(A - \lambda E) = 0$ tenglamaning ildizlari orqali hisoblanishi mumkin, maxsus vektorlar esa bir jinsli chiziqli tenglamalar yechimidan kelib chiqadi.

Quyidagi tenglamaga $\det(A - \lambda E) = 0$ operatorning harakteristik tenglamasi deyiladi.

Ko'phad $\det(A - \lambda E)$ -operatorning harakteristik ko'phadi deyiladi.

Chiziqli operatorning maxsus qiymatlari va maxsus vektorlari uchun quyidagilar o'rinalidir:

- 1) n – o‘lchovli fazoda harakatda bo‘lgan operator chiziqli fazoda λ ga nisbatan n – chi darajali bo‘lib, operatorning harakteristik ko‘phadi deyiladi;
- 2) n – o‘lchovli chiziqli fazoda harakatda bo‘lgan chiziqli operator eng ko‘pi bilan n – ta har xil maxsus qiymatlarga ega bo‘ladi.
- 3) maxsus vektorlarga mos bo‘lgan maxsus qiymatlar o‘zaro chiziqli bog‘liq emas;
- 4) n – o‘lchovli X chiziqli fazoda harakatda bo‘lgan chiziqli operator har xil maxsus qiymatlarga ega, bo‘lsa u holda operatorni maxsus vektorlari X fazoda bazisni tashkil qiladi va bu bazisga operatorni maxsus bazisi deyiladi;
- 5) bazisdagi operator matritsasi maxsus vektorlar diogonal ko‘rinishda bo‘lsa, ularga mos bo‘lgan maxsus qiymatlari ham diogonalda bo‘ladi.

Misol 3. Operatorni maxsus qiymatlari va maxsus vektorlari

Quyidagi operator matritsasi berilganiga asoslanib maxsus qiymatlari va maxsus vektorlarini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bazisdagi operator matritsasini maxsus vektorlariga va maxsus bazisga o‘tish matritsasiga asoslanib yozamiz.

§4. Operatorlar ustida amallar

Bizga berilgan bo‘lsin X va Y n – o‘lchovli vektorlar fazosida harakatda bo‘lgan A operator.

X fazodan fazoga harakatda bo‘lgan barcha operatorlar to‘plamini $L(X, Y)$ deb belgilab olamiz. Bu to‘plamda umumiy holda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bajarsa bo‘ladi.

$L(X, Y)$ to‘plamda A va B operatorlarning yig‘indisi deb $A + B$ operatorga aytiladi va quyidagi munosabatda bo‘ladi. $\forall x \in X : (A + B)x = Ax + Bx$

$L(X, Y)$ to'plamda $A \in L(X, Y)$ operatorni a songa ko'paytmasi aA operatorga aytiladi va quyidagi munosabatda bo'ladi. $\forall x \in X : (aA)x = a(Ax)$.

Demak, yuqoridagi amallar sonli funksiyalarini qo'shish amallarini umumlashganidir, ko'paytirish amali esa sonli funksiyalarini songa ko'paytirish kabidir.

$A + B$ va aA chiziqli operatorlar quyidagicha tekshiriladi.

$$\begin{aligned} (A + B)(ax + a'x') &= A(ax + a'x') + B(ax + a'x') = \\ &= aAx + a'Ax' + aBx + a'Bx' = a(Ax + Bx) + \\ &+ a'(Ax' + Bx') = a(A + B)x + a'(A + B)x', \\ (BA)(ax + a'x') &= BA(ax + a'x') = BaAx + Ba'Ax = \\ &= a(BAx) + a'(BAx') = a(BA)x + a'(BA)x' \end{aligned}$$

Xususiyl holda, agar $X = Y$ bo'lsa $L(X, Y)$ o'rniga $L(X)$ yozish mumkin va bu to'plam fazosiga X chiziqli fazo deyiladi.

Faraz qilaylik, uchta X, Y, Z vektorlar fazosi berilgan bo'lsin va chiziqli operator $A: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z$. Bu holda BA ko'paytma A va B operatorlarda aniqlangan:

$$\forall x \in X : (BA)x = B(Ax)$$

Boshqacha aytganda BA ko'paytma A va B da aniqlangan murakkab funksiyadir.

BA funksiya chiziqli operator bo'lib X fazodan Z fazoga harakatda. Shu yerdan ko'rinib turibdiki X, X' fazodagi har qanday qiymati va a, b ni

A ychun quyidagi munosabatni yozish mumkin.

$$\begin{aligned} (BA)(ax + bx') &= B(A(ax + bx')) = \\ &= B(aAx + bAx') = aB(Ax) + bB(Ax') = \\ &= a(BA)x + b(BA)x' \end{aligned}$$

Chiziqli operatorlarning ko'paytmalari quyidagi xossalarga ega ekanligini ko'rsatib o'tamiz.

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) \\ a(BA) &= (aB)A = B(aA) \end{aligned}$$

Yuqorida ko'rsatilgan xossalar ko'rsatib turibdiki ularning har biri bir xil isbotlanadi. Bulardan birortasini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik

$$I: X \rightarrow X, C: X \rightarrow Y, B: Y \rightarrow Z \text{ va } A: Z \rightarrow J$$

bu yerda X, Y, Z va

J – har qanday vektorlar fazosi.

Oldin quyidagilarni ko‘rsatib o‘tamiz.

$(AB)C$ va $A(BC)$ J – ga tegishli X fazodagi operator

Har qanday $x \in X$ uchun quyidagilar bajariladi:

$$((AB)C)x = (AB)Cx = A(B(Cx)) = (A(BC))x$$

$$(AB)C = A(BC)$$

aksiomani bajarilishini ko‘rsatadi.

bu yerda shuni ham eslatish kerakki chiziqli operatorlarni ko‘paytirish umuman komuntativ emas.

Haqiqatan ham $A \in (X, Y)$, $B \in (Y, Z)$. bo‘lsa, $BA: X \rightarrow Z$ aniqlangan bo‘lib ko‘paytmada AB yo‘q.

Adabiyotlar

1. Высшая математика для экономистов. Учебник. 2-е изд. / Под. редакция Н.Ш. Крамера М.: ЮНИТИ 2003. – 471с.
2. Sharaxmetov Sh. ,Naimjonov B. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik.-T. 2007. -302 b.
3. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. / Под общей редакции В.И. Ермакова. : ИНФРА – М, 2007. – 656с.
4. Красс М.С., Чуринов В.П. Высшая математика для экономического бакалавриата. Учебник. М.: Дело, 2005. – 576с.

Mundarija

1. Kirish.....	4
2. Chiziqli operatorlarning ta'rifi.....	5
3. Chizili operator va uning matritsasi	6
4. Chiziqli operatorni obrazlari va yadrosi	8
5. Operatorlar ustida amallar.....	11