

**PO'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM  
VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Fizika-matematika fakulteti

*“Matematika” kafedrasi*

5460100 – “Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr darajasini olish  
uchun

*Qutliyeva Shalola Saylixonovnaning*

**« Chegirmalar nazariyasi va uning tadbiqlari »  
mavzusida**

**BITIRUV MALAKAVIY ISHI**

“Ish ko’rildi va himoyaga ruxsat  
berildi”

Kafedra mudiri

\_\_\_\_\_ dotsent. R.T. Muxitdinov

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 y.

Ilmiy rahbar \_\_\_\_\_ o’qt. E. B. Dilmurodov

“\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2015 й.

Taqrizchi \_\_\_\_\_ o’qt. Z. Hamroyeva.

“\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2015 y.

«Himoya qilishga ruxsat berildi »

Fakul’tet dekani

prof. Sh.M. Mirzayev

“\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 06 \_\_\_\_\_ 2015 y.

**Buxoro – 2015 y.**

## **Mundarija.**

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| <b>Kirish.....</b>                                   | <b>3-8</b> |
| <b>I . Kompleks o'zgaruvchili funksiya.</b>          |            |
| 1.1 Kompleks o'zgaruvchili funksiya tushunchasi..... | 9-14       |
| 1.2 Kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali.....   | 14-25      |
| 1.3 Loran qatorlari.....                             | 25-30      |
| <b>II. Chegirmalar nazariyasi</b>                    |            |
| 2.1.Chegirmalar nazariyasi va ularni hisoblash.....  | 30-39      |
| 2.2.Chegirmalar nazariyasning ba'zi tadbiqlari ..... | 39-64      |
| Xotima.....                                          | 65         |
| Adabiyotlar.....                                     | 66         |

## **Kirish.**

“Yoshlarga milliy vatanparvarlik ruhida ta’lim-tarbiya berish bugungi kunning jiddiy vazifalaridan hisoblanadi”

I.A.Karimov.

Barkamol avlod tarbiyalash insoniyatning eng yaqin orzusi bo’lib kelgan. Barcha mamlakatlar, millatlar shunga intilgan. Bizning vatanimizda ham bu borada ancha samarali ishlar bajarilmoqda. Bunga yaqqol misol qilib, 1997-yilda qabul qilingan (yangi tahriri) “Ta’lim to’g’risida”gi qonun va “Kadrlar tayyorlash bo’yicha milliy dastur”ini aytish mumkin.

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” haqida hukumat darajasidagi quyidagi fikrni O’zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov Vazirlar Mahkamasi-ning “O’zbekistonning 1996-yildagi ijtimoiy-iqtisodiy tarqqiyoti yakunlari hamda 1997-yildagi iqtisodiy islohotlarning ustuvor yo’nalishlari”ga bag’ishlangan majlisidagi nutqida bayon etdi:

“1997-yilda biz yaxshi, zamonaviy talablarga javob beradigan kadrlar tayyorlash masalasiga alohida e’tibor berishimiz kerak.

Ta’lim tizimini tubdan qayta ko’rib chiqish vaqti yetdi, professional bilimlarni egallash imkoniyatlarini kengaytirish, ma’mur-menejerlarni tayyorlashni yo’lga qo’yish, yangi sharoitlarda ,yangi zamonaviy texnologiyalarda ishlashga qobil ishchi va mutaxassislarni tayyorlashni yo’lga qo’yish lozim”.(“Ma’tifat” gazetasi, 1997-yil 1-mart).

O’zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimov Oliy Majlisning to’qqizinchi sessiyasida kadrlar tayyorlash milliy dasturi va butun ta’lim tizimining islohoti haqida “...hayotimizmi hal etuvchi muhim masalalar qatorida ta’lim-tarbiya tizimini tubdan o’zgartirish, uni yangi zamon talabi darajasiga ko’tarish , barkamol avlodimiz kelajagiga daxldor qonun loyihalari ham bor”,-degan edi.

Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi inson omiliga juda katta ma’no, buyuk ma’no beradi: maqsad va vazifalar strategiyasidan tortib to ta’lim-tarbiya

jarayonini hamma qirralariga oid aniq dasturlar majmuasicha har biri negizida inson asosiy omil hisoblanadi. Kadrlar tayyorlash tizimida shaxs bosh sub'ekt sifatida ko'riladi, u bir vaqtning o'zida ta'limiy xizmatlarning ham iste'molchisi , ham yaratuvchisi deb qaraladi. Jamiyat va davlat, ishlab chiqarish , fan va uzluksiz ta'lim barkamol, ijodkor shaxsning shakllanishida kafolat hisoblanadi.

Barchamizga ayonki,inson qalbiga yo'l avvalo ta'lim- tarbiyadan boshlanadi.Shuning uchun qachonki bu haqda gap ketsa,ajdodlarimiz qoldirgan bebaho me'rosni eslash bilan birga,ota-onalarimiz qatori biz uchun eng yaqin bo'lgan yana bir buyuk zot o'qtuvchi va murabbiylarning olijanob mehnatini hurmat bilan tilga olamiz.

Biz Navoiy, Bobur, Xorazmiy, Beruniy, Imom Buxoriy, Koshg'ariy, Ulug'bek, Umar Xayyom, Ibn Sino avlodlari har tomonlama yetuk, barkamol bo'lib yetishimiz uchun keng imkoniyatlar yaratilib, Prezidentimiz Islom Abdug'anivich Karimov yosh avlod tarbiyasiga juda katta e'tibor berib, kelajakda iqtidorli, kuchli salohiyatli, izlanuvchan, yaratuvchan kadrlar, qobilyatli mutaxassislar tayyorlash borasida ko'plab sayi harakatlar amalga oshirilmoqda.Jumkadan, "Asosiy vazifamiz –vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz faravonligini yanada kuchaytirishdir" nomli 2009 yilning asosiy yakunlari va 2010 yilda O'zbekistonni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirishning eng muhim ustivor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining majlisidagi ma'ruzasida "Biz farzandlarimizning nafaqat jismoniy va ma'naviy sog'lom o'sishi, balki ularning eng zamonaviy intellektual bilimlarga ega bo'lgan uyg'un rivojlangan insonlar bo'lib XXI asr talabalariga to'liq javob beradigan barkamol avlod bo'lib voyaga yetish uchun zarur barcha imkonoyatlarimiznini safarbar etishni ko'zda tutadi"- deganlar.Ta'lim tizimini isloh qilish bilan bir qatorda, ta'lim jarayoning mazmunini uning shakli tuzilmasi va unga qo'yilgan talablar ham ko'rinishga o'tmoqdagi, u endi o'zining oldingi, ya'ni sobiq tizimi davridagi qotib qolgan ma'muriy, pedagogik tizimdan tubdan farq qilishi bilan xarakterlanadi.

“Agar bolalar erkin fikrlashni o`rgamasa berilgan ta`lim samarasi past bo`lishi muqarrar”.Islom Abdug`aniyevich Karimov.

Jamiyatning har bir sohasi kabi ta`limda ham islohotlar amalgam oshirildi. Mustaqillikka erishishimizning birinchi yilida (1992-yil) mustaqil O`zbekistonimizning “Ta`lim to`g`tisida”gi birinchi qonuni qabul qilindi. Mazkur qonun avvalo , O`zbekiston ta`limida ilgari erishilgan muvaffaqiyatlarni saqlab qolishga xizmat qildi. Bu qonun o`sha davr uchun juda zarur edi. Axir jamiyat qonunsiz yashasa , vujudga keladigan bo`shliqni bir tasavur qiling. Ayniqsa ta`lim sohasida bunday hol juda salbiy oqibatlarga olib kelishi tajribalarda ko`p sinalgan. Mazkur qonunning yana bir shunda ediki , u eski tuzum salqitlarini ko`rsatib berishga xizmat qildi. Demak, to`plangan ijobiy jihatlarni saqlab qolgan illatlarni anglab olishimizga xizmat qilgan, aniqrog`i eski tizimdan yangisiga o`tishga ko`prik vazifasini o`tagan qonunning ahamiyati ulkandir.

Shu bilan birga 1992-yilda qabul qilingan “ta`lim to`g`risida”gi qonun yaratgan imkoniyatlar sabab, ta`lim yizimiga qator yangiliklar kirib keldi. Ularning asosiysini izohlab o`tsak arziydi. Oliy va o`rta maxsus o`quv yurtlariga adolat mezoni hisoblangan test tizimi joriy etilgan.

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” – orzuimizga erishishning qonun bilan himoyalangan hujjatidir.

Yurtboshimiz olg`a surgan O`zbekiston ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishining besgta tamoyilini yaxshi bilamiz, albatta.Ularning birida islohotlarni bosqichma-bosqich amalgam oshirish belgilangan.”Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”ni ham mazkur prinspga asosan uch bosqichda amalga oshirish mo`ljallangan. Har bir bosqichning o`z oldiga qoygan aniq vazifalari bor. Ularning sifatli bajarilishi keyingi bosqichning muvaffaqiyatiga sabab bo`ladi.

Umumlashtirilgan holda kadrlar tayyorlash tizimining shakllanishi va faoliyat ko`rsatishining asosiy tamoyillari, mening nazarimda quyidagi vazifalarni o`z ichiga oladi:

- barcha xil va turdagi ta`lim muassalarida yuqori malakali mutaxassislar uchun uzliksiz ta`lim, fan va ishlab chiqarish salohiyatidan samarali foydalanish;

- davlat ta`lim standartlarini joriy etish va ularning faolyat ko`rsatish mexanizmini ishlab chiqish;

- ixtisosliklar, malaka darajasiga ko`ra mutaxasislarga bo`lgan umumdavlat va mintaqaviy talablarning istiqbolini aniqlash;

- ta`lim tizimini tuzilish va mazmun jihatidan isloh qilish uchun o`qtuvchilarni va murabbiylarni qayta tayyorlash;

- davlat va ijtimoiy muassasalarning kasbga yo`naltirish bo`yicha faolyatini takomillashtirish. Bunda kasb tanlashning bozor ehtiyojlari va imkoniyatlarini e`tiborga olish zarur, toki har bir shaxs o`ziga mos kasbni egallay olsin;

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”da ta`kidlaganidek, - Ta`lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o`tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to`la xolos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida yuksak ma`naviy va axloqi talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash milliy tizimini tashkil etadi.

-o`quvchi yoshlarni Vatanga sadoqat, yuksak axloqiy, ma`naviyat va ma`rifat, mehnatga vijdonan munosabatda bo`lish ruhida tarbiyalash;

-ta`lim muassasalarini,birinchi navbatda umumta`lim maktablarini davlat tomonidan moliyaviy va moddiy-texnikaviy to`liq ta`minlash me`yorlarini oshirish va uning mexanizmini takomillashtirish;

-kadrlar tayyorlash va ta`lim sohasiga chet el sarmoyalarini,xalqaro donorlik tashkilotlari va jamg`rmalarining mablag`larini lalb etish;

-qonun doirasida o`quv rejaları,dasturlari va o`qitish yo`riqlarini,ta`limiy xizmatlarni belgilashda ta`lim muassasalariga,birinchi navbatda,oily o`quv yurtlariga mustaqillik berish va o`zini o`zi boshqarish usullarini joriy etish.

Tabiiyki, bunday murakkab vazifalarni amalga oshirishda davlat va jamiyatning mas`uliyati alohida ahamiyat kasb etadi.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzluksiz rivojlantirish va takomillashtirishning kafili bo`lishi zarur. Ular yuqori malakali, raqobatga qodir mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ta'lim muassasalarinig faoliyatini uygunlashtirish lozim.

**Malakaviy bitiruv ishining dolzarbligi.** Ba'zi integrallarning qiymatlarini oddiy usullarda hisoblash birmuncha qiyinchiliklar tug'dirishi mumkin. Ammo, chegirmalardan foydalangan holda bu integrallarning qiymatlarini oson hisoblash mumkin. Shu sababdan ushbu B.M.I. matematik analiz va kompleks analiz kurslarini o'zlashtirayotgan talabalar uchun muhim qo'llanma hisoblanadi.

**Malakaviy bitiruv ishining maqsadi.** Ba'zi hisoblash murakkab bo'lgan integrallarni chegirmalardan foydalangan holda hisoblash.

Integrallarni hisoblashda qulaylik tug'diradigan yo'llarni o'rganish.

**Malakaviy bitiruv ishining vazifasi.** Chegirmalar nazariyasi va uning tadbiqlarini o'rganish. Ulardan amaliyotda foydalana olish.

**Malakaviy bitiruv ishining o'rganilgan darajasi.** Qo'yigan mavzu to'la o'rganilib, chuqur tahlil qilingan. Olingan natija va xulosalar to'liq yoritilgan.

**Malakaviy bitiruv ishining obykti.** Chegirmalar nazariyasi va ularning ba'zi tadbiqlari.

**Malakaviy bitiruv ishining predmeti.** Kompleks va haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar integrallarini hisoblash.

**Malakaviy bitiruv ishining ilmiy yangiligi.** Ishda ilmiy yangilik qilinmagan, u referativ-uslubiy xarakterda bo'lib, unda ba'zi integrallar chegirmalar yordamida hisoblab ko'rsatilgan.

**Malakaviy bitiruv ishining amaliy ahamiyati.** Bitiruv malakaviy ishidan oliy o'quv yurtlari talabalari matematik analiz va kompleks analiz fanini o'rganishda foydalanishlari mumkin.

**Malakaviy bitiruv ishidan olingan asosiy natijalar.** Ushbu bitiruv malakaviy ishi refarativ xarakterga ega bo'lib, unda integral qiymatini hisoblashning ba'zi usullari keltirilgan.

**Malakaviy bitiruv ishining metodologik asosi.** Ushbu bitiruv malakaviy ishi uchun chegirmalar nazariyasi tadbirlarini o'rganish metodologik asos bo'lib xizmat qiladi.

**Malakaviy bitiruv ishining metodlari.** Bitiruv malakaviy ishi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va ularning chegirmalari asosida o'rganilgan.

**Malakaviy bitiruv ishining tuzilishi va hajmi:** Malakaviy bitiruv ishi mundarija, kirish, 2 ta bob, 5 ta paragraf, har bir bob bo'yicha xulosa, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Malakaviy bitiruv ishi 55 betdan tashkil topgan.

## I. Kompleks argumentli funksiya

### 1.1 Kompleks argumentli funksiya tushunchasi

Kompleks sonlar tekisligi  $C$  da biror  $E$  to'plam berilgan bo'lsin:  $E \subset C$ .

**1.1.1-tarif.** Agar  $E$  to'plamdagi har bir  $z$  kompleks songa biror  $f$  qoida yoki qonunga ko'ra bitta  $w$  kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa,  $E$  to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va u

$$f: z \rightarrow w \text{ yoki } w = f(z)$$

kabi belgilanadi. Bunda  $E$  funksiyaning aniqlanish to'plami,  $z$  - erkli o'zgaruvchi yoki  $w = f(z)$  funksiya argumenti,  $f$  esa  $z$  o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

$$z = x + iy \in E$$

kompleks songa bitta

$$w = u + iv \quad (u \in R, v \in R)$$

kompleks son mos qo'yilgan bo'lsin.

Demak,

$$w = u + iv = f(x + iy).$$

Keyingi tenglikdan

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,  $E$  to'plamda  $w = f(z)$  funksiyaning berilishi shu to'plamda  $x$  va  $y$  haqiqiy o'zgaruvchilarning

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

funksiyalarning berilishidek ekan.

Odatda,  $u = u(x, y)$  funksiya  $f(z)$  funksiyaning haqiqiy qismi,  $v = v(x, y)$  esa  $f(z)$  ning mavhum qismi deyiladi.

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

**1.1.1- Misol.** Ushbu

$$f(z) = \frac{z+3}{z+5}$$

Funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping. Berilgan funksiyada  $z = x + iy$  ekanini e'tiborga olib, uni  $f(z) = u + iv$  ko'rinishda yozib quyidagi tenglikni topamiz:

$$u + iv =$$

$$= \frac{z+3}{z+5} = \frac{x+iy+3}{x+iy+5} = \frac{[(x+3)+iy][(x+5)-iy]}{(x+5)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 8x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25} + i \frac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}$$

Demak,

$$u = u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 8x + 15}{x^2 + y^2 + 10x + 25}.$$

$$v = v(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 10x + 25}.$$

**Kompleks argumentli funksiya limiti.** Faraz qilaylik,  $w = f(z)$  funksiya  $E$  ( $E \subset C$ ) to'plamda berilgan bo'lib,  $z_0$  nuqta  $E$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**1.1.2-ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  son topilsaki,  $z$  zargumentning  $0 < |z - z_0| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $z \in E$  qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $A$  kompleks son  $f(z)$  funksiyaning  $z \rightarrow z_0$  dagi limiti deb ataladi va

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

kabi belgilaadi.

**1.1.3-ta'rif.** Agar  $\forall M > 0$  son uchun shunday  $\delta = \delta(M) > 0$  son topilsaki,  $z$  argumentning  $0 < |z - z_0| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $z \in E$  qiymatlarida

$$|f(z)| > M$$

tengsizlik bajarilsa,  $z \rightarrow z_0$  dagi  $f(z)$  funksiyaning limiti  $\infty$  deyiladi.

Endi  $z, z_0$  hamda  $A$  kompleks sonlarni

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad A = \alpha + i\beta$$

deb, so'ng

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ekanligini e'tiborga olib,  $z \rightarrow z_0$  da  $f(z)$  funksiyaning  $A$  limitga ega bo'lishi  $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$  da  $u(x, y)$  hamda  $v(x, y)$  funksiyalarni mos ravishda  $\alpha$  va  $\beta$  limitlarga ega bo'lishiga ekvivalent ekanligini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

**1.1.1-teorema.**  $w = f(z)$  funksiyaning  $z \rightarrow z_0$   $A$  limitga,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

ega bo'lishi uchun

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = \beta$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Aytaylik,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan  $\forall \varepsilon > 0$  son topilganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  son topiladiki,  $z$  argumentning  $0 < |z - z_0| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $z \in E$  qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$f(z) - A = [u(x, y) - \alpha] + i[v(x, y) - \beta]$$

bo'lib,

$$|z - z_0| < \delta$$

bo'lishidan

$$|x - x_0| < \delta \quad |y - y_0| < \delta$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan quyidagi

$$|v(x, y) - \beta| = |\operatorname{Im} f(z) - A| \leq |f(z) - A| < \varepsilon \quad |u(x, y) - \alpha| = |\operatorname{Re} f(z) - A| \leq |f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Demak,  $\forall \varepsilon < 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon)$  son topilsaki,

$$|x - x_0| < \delta \quad |y - y_0| < \delta \text{ bo'lganda}$$

$$|u(x, y) - \alpha| < \varepsilon, \quad |v(x, y) - \beta| < \varepsilon.$$

tengsizliklar bajariladi. Bu esa

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha$$

ekanligini bildiradi.

Yetarliligi. Aytaylik,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = \alpha$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga asosan,  $\forall \varepsilon < 0$  olinganda ham,  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  ga ko'ra shunday son

$\delta_0 > 0$  topiladiki,  $|x - x_0| < \delta$ ,  $|y - y_0| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $x$  va  $y$  da

$|u(x, y) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ,  $|v(x, y) - \beta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan

foydalanib topamiz:

$$|f(z) - A| < |u(x, y) + i v(x, y) - (\alpha + i \beta)| =$$

$$= |(u(x, y) - \alpha) + i(v(x, y) - \beta)| = \sqrt{(u(x, y) - \alpha)^2 + (v(x, y) - \beta)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

Demak,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ .

Teorema isbot bo'ldi.

**Kompleks funksiyaning differensiallanuvchanligi.**  $w = f(z)$  funksiya  $E$  to'plamda  $E \subset C$  berilgan bo'lsin. Bu  $E$  to'plamdan  $z_0$  nuqtani tanlab olib unga shunday  $\Delta z$  orttirma beraylikki,  $z_0 + \Delta z \in E$  bo'lsin. Natijada  $f(z)$  funksiya ham  $z_0$  nuqtada

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

**1.1.4-ta'rif.** Agar  $\Delta z \rightarrow 0$  da  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili  $f(z)$  funksiyaning  $z_0$  nuqtadagi hosilasi deb ataladi va  $f'(z)$  kabi belgilanadi.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

**1.1.2-Misol.** Ushbu  $f(z) = z^2$  funksiyaning  $\forall z_0 \in C$  nuqtada hosilasini toping.  $z_0$  nuqtaga  $\Delta z$  orttirma berib, shu nuqtadagi funksiya orttirmasini hisoblaymiz:

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0\Delta z + \Delta z^2.$$

Unda

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = 2z_0 + \Delta z$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = 2z_0$$

$f'(z) = 2z_0$  ga teng bo'ladi.

**1.1.5-ta'rif.** Agar  $f(z)$  funksiyaning  $z_0 \in E$  nuqtada  $f'(z_0)$  hosilaga ega bo'lsa, funksiya  $z_0$  nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar  $f(z)$  funksiya  $E$  to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya  $E$  to'plamda differensiallanuvchi deyiladi. Aytaylik,  $f(z)$  funksiya  $z_0$  nuqtada  $f'(z_0)$  hosilaga ega bo'lsin. Unda, ravshanki,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

bo'lib,

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

bo'ladi. Bu yerda  $\Delta z \rightarrow 0$  da  $\alpha(z_0, \Delta z)$  ham nolga intiladi.  $\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$ .

Faraz qilaylik,  $w = f(z)$  funksiya biror  $D$  sohada ( $D \subset C$ ) berilgan bo'lsin.

**1.1.6-ta'rif.** Agar  $f(z)$  funksiya  $z_0$  ( $z_0 \in D$ ) nuqtaning biror  $U(z_0, \varepsilon)$  atrofida ( $U(z_0, \varepsilon) \subset D$ )  $C$ -differensiallanuvchi bo'lsa,  $f(z)$  nuqta golomorf (yoki analitik) deb ataladi.

**1.1.7-ta'rif.** Agar  $f(z)$  funksiya  $D$  sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya  $D$  sohada golomorf deyiladi.

Odatda,  $D$  sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi  $V(D)$  kabi belgilanadi. Aytaylik,  $R^2$  fazodagi  $E$  sohada ( $E \subset R^2$ )  $F = F(x, y)$  funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga

$$\frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x^2}, \quad \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta y^2}$$

ega bo'lsin.

**1.1.8-ta'rif.** Agar  $E$  sohaning har bir nuqtasida

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 F}{\delta y^2} = 0$$

tenglik bajarilsa,  $F(x, y)$  funksiya  $E$  sohada garmonik deyiladi.

Odatda bu tenglik Laplas tenglamasi deyiladi. Bu tenglama ushbu

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}$$

Laplas operatori yordamida quyidagicha yoziladi.  $\Delta F = 0$

Laplas operatori uchun

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} = \left(\frac{\delta}{\delta x} - i \frac{\delta}{\delta y}\right) \left(\frac{\delta}{\delta x} + i \frac{\delta}{\delta y}\right) = 4 \frac{\delta^2}{\delta z \delta \bar{z}}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda tenglikni quyidagicha

$$\frac{\delta^2 F}{\delta z \delta \bar{z}} = 0$$

yo'zish mumkin.

Quyidagi golomorf funksiya bilan garmonik funksiyalar orasida munosabatni ifolaydigan teoremani keltiramiz.

**1.1.2-teorema.**  $D$  sohada ( $D \subset C$ ) golomorf bo'lgan har qanday  $f(z)$

funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari  $u(x, y)$  va  $v(x, y)$  funksiyalar shu sohada garmonik bo'ladi.

Isbot. Aytaylik,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya  $D$  sohada golomorf bo'lsin. Unda

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}, \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

tengliklar bajariladi.

Bu tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 v}{\delta y \delta x}, \quad \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = -\frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y}$$

Agar

$$\frac{\delta^2 v}{\delta y \delta x} = \frac{\delta^2 v}{\delta x \delta y}$$

bo'lishini etiborga olsak, u holda yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa  $u(x, y)$  funksiyaning garmonik funksiya ekanligini bildiradi.

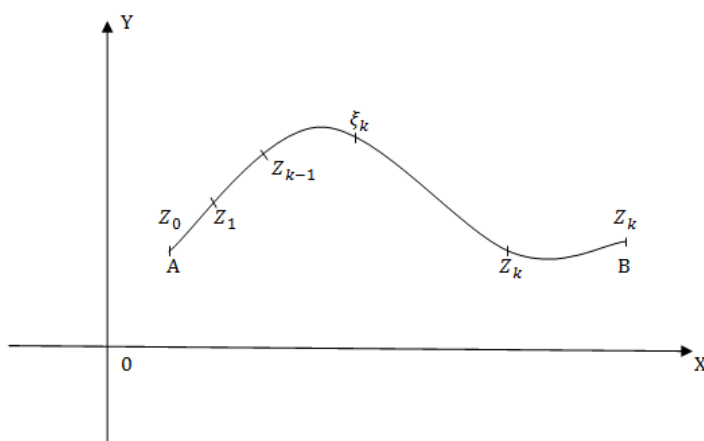
Xuddi shunga o'xshash  $v(x, y)$  funksiyaning garmonik funksiya bo'lishi ko'rsatiladi.

Teorema isbot qilindi.

## 1.2 Kompleks o'zgaruvchli funksiya integrali

### 1.2.1 Integral tushunchasi.

**Integral ta'ri.** Kompleks sonlar tekisligi  $C_z$  da biror silliq (bo'lakli silliq)  $\gamma = AB$  chiziqni olaylik.



#### 1.2.1-chizma $\gamma = AB$ chiziq.

$\gamma = AB$  egri chiziqni A dan B ga qarab  $z_0, z_1, \dots, z_n$  nuqtalar yordamida  $n$  ta  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  bo'laklarga ajratamiz.

$\gamma_k$  lar ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) uzunliklari  $l_k$  larning ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ) eng kattasini  $\lambda$  bilan belgilaymiz:

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} l_k$$

Aytaylik,  $\gamma$  egri chiziqda  $f(z)$  funksiya berilgan bo'lsin. Har bir  $\gamma_k$  da ixtiyoriy  $\xi_k$  nuqta olib, so'ng  $f(z)$  funksiyaning shu nuqtadagi  $f(\xi_k)$  qiymatini  $z_k - z_{k-1}$  ga ko'paytirib, ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

yig'indini tuzib olamiz.

Bu yig'indi  $f(z)$  funksiyaning integral yig'indisi deyiladi.

Ravsanki,  $f(z)$  funksiyaning integral yig'indisi  $\gamma$  egri chiziq bo'lishiga hamda har bir  $\gamma_k$  da olingan  $\xi_k$  nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

**1.2.1-ta'rif.** Agar  $\lambda \rightarrow 0$  da  $f(z)$  funksiyaning integral yig'indisi  $\gamma$  egri chiziqning bo'linishi usuliga hamda  $\gamma_k$  da  $\xi_k$  nuqtaning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan holda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit  $f(z)$  funksiyaning  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrali deb ataladi va u  $\int_{\gamma} f(z)dz$  kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

Bu holda  $f(z)$  funksiya  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi deyiladi.

**1.2.1-misol.**  $f(z)=1$  funksiyaning integralni hisoblang.

Ravshanki,  $f(z)=1$  funksiyaning integral yig'indisi

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 \end{aligned}$$

bo'ladi. Agar

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_{\gamma} dz$$

va  $z_0 = a$  va  $z_n = b$  ekanini e'tiborga olsak,

$$\int_{\gamma} dz = b - a$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Xususan,  $a = b$  bo'lsa, ya'ni  $\gamma$  yopiq egri chiziq bo'lsa,  $\int_{\gamma} dz = 0$  bo'ladi.

**Integral mavjudligi.** Endi kompleks argumentli funksiya integralining mavjudligi masalasini qaraymiz.

Yuqorida keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, integral  $\gamma$  egri chiziqqa hamda unda berilgan  $f(z)$  funksiya bog'liq bo'ladi.

Faraz qilaylik,  $\gamma = AB$  ( $\gamma \subset C_z$ ) egri chiziq

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bunda  $x(t)$ ,  $y(t)$  funksiyalar  $[\alpha, \beta]$  segmentda aniqlangan, uzluksiz hamda uzluksiz  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  hosilalarga ega  $t$  parametr  $\alpha$  dan  $\beta$  ga qarab o'zgarganda  $z = z(t)$  nuqta  $A$  dan  $B$  ga qarab  $\gamma = AB$  ni chiza boradi.  $\gamma$  egri chiziqda

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

$[\alpha, \beta]$  segmentni  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  nuqtalar yordamida  $n$  ta bo'lakka ajratamiz.

$z(t)$  funksiya bu nuqtalarni  $\gamma$  egri chiziq nuqtalariga akslantiradi.  $t_k$

( $k=1, 2, 3, \dots, n$ ) nuqtalarning  $\gamma$  egri chiziqdagi akslarini  $z_0, z_1, \dots, z_n$  ( $z_0 = A, z_n = B$ ) deylik.

Natijada bu nuqtalar yordamida  $\gamma$  egri chiziqli  $\gamma_k$  bo'laklarga ajraladi, har bir  $\gamma_k$  da ixtiyoriy  $\zeta_k$  ( $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ ) nuqtani olamiz. Ravshanki,  $\zeta_k = z(\tau_k)$  bo'ladi. Endi ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

yig'indini qaraymiz. Bu yig'indida

$$f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k).$$

$$z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

bo'lishini e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \end{aligned}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi har bir yig'ndi  $u(x, y)$  va  $v(x, y)$  funksiyalarning egri chiziqli integrallari uchun integral yig'indilardir. Qaralayotgan  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  funksiya  $\gamma$  egri chiziqlida uzluksiz. Binobarin,  $u(x, y)$  va  $v(x, y)$  funksiyalar ham  $\gamma$  da uzluksiz. Demak, bu funksiyalarning  $\gamma$  egri chiziqli bo'yicha integrallari mavjud va

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] &= \int_{\gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] &= \int_{\gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy \end{aligned}$$

bo'ladi.  $\lambda \rightarrow 0$  da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_{\gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

Bundan esa  $\lambda \rightarrow 0$  da  $\sigma$  yig'indi chekli limitga ega va

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada quyidagi teorema kelamiz.

**1.2.1-teorema.** Agar  $f(z)$  funksiya  $\gamma$  egri chiziqlida uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning  $\gamma$  egri chiziqli bo'yicha integrali mavjud va

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

bo'ladi.

Bu teorema, bir tomondan uzluksiz funksiya integralining mavjudligini ifodalasa, ikkinchi tomondan kompleks argumentli funksiya integralini egri chiziqli integrallar orqali ifodalanishini ko'rsatadi.

**Integralning xossalari.** Yuqoridan ko'rinadiki, uzluksiz  $f(z)$  kompleks o'zgaruvchili funksiyaning  $\gamma$  egri chiziqli bo'yicha integrali egri chiziqli

integrallarga kelar ekan. Binobarin, kompleks argumentli funksiya integrali ham egri chiziqli integrallar xossalari kabi xossalarga ega bo'ladi.

1.2.1-xossa. Agar  $f(z)$  funksiya  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u holda  $af(z)$  funksiya ham  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi va ushbu

$$\int_{\gamma} af(z)dz = a \int_{\gamma} f(z)dz$$

formula o'rinli bo'ladi.

1.2.2-xossa. Agar  $f(z)$  va  $g(z)$  funksiyalarning har biri  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa; u holda  $f(z) \pm g(z)$  funksiya ham shu  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi va ushbu

$$\int_{\gamma} [f(z) \pm g(z)]dz = \int_{\gamma} f(z)dz \pm \int_{\gamma} g(z)dz$$

formula o'rinli bo'ladi.

1.2.3-xossa. Agar  $f(z)$  funksiya  $\gamma$  egri chiziq bo'yicha integrallanuvchi bo'lib,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad (\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

bo'ladi.

U holda,

$$\int_{\bar{\gamma}} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

bo'ladi, yani  $\gamma$  egri chiziqda yo'nalish o'zgartilsa, integral ishorasini o'zgartiradi.

2.1.5-xossa. Agar  $f(z)$  funksiya  $\gamma$  egri chiziqda uzliksiz bo'lsa, u holda

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\gamma} \|f(z)\| |dz|$$

bo'ladi, bunda

$$|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

2.1.6-xossa. Faraz qilaylik,  $f(z)$  funksiya  $D$  sohada ( $D \subset C_z$ ) uzluksiz bo'lib,  $\gamma$  shu sohaga tegishli bo'lgan bo'lakli silliq egri chiziq bo'lsin. U holda  $\forall \varepsilon > 0$  son topilganda ham  $D$  sohaga tegishli bo'lgan shunday  $P$  siniq chiziq topiladiki,

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

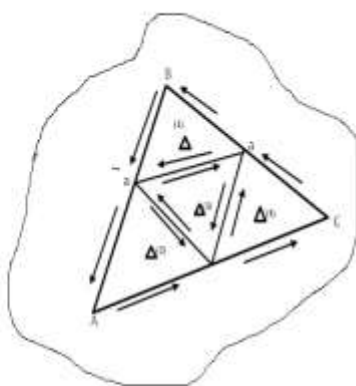
### 1.2.2 Koshi teoremasi.

Koshi teoremasi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining fundamental teoremasi hisoblanadi.

**1.2.2-teorema.** (Koshi teoremasi) Agar  $f(z)$  funksiya bir bog'lamli  $D$  sohada ( $D \subset C$ ) golomorf bo'lsa, u holda  $f(z)$  funksiyaning  $D$  sohada yotuvchi har qanday silliq (bo'lakli silliq)  $\gamma$  yopiq chiziq (yopiq kontor) bo'yicha integrali nolga teng bo'ladi:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Isbot. Teoremaning isbotini bir necha bosqichda keltiramiz.



#### 1.2.2-chizma uchburchak tasviri.

a)  $\gamma$  egri chiziq uchburchak bo'lsin:  $\gamma = \Delta$

Bu uchburchakning perimetri  $l$  ga teng bo'lsin. Bu holda teoremani isbotlash uchun teskarisini faraz qilamiz, ya'ni  $f(z)$  funksiyaning bir bog'lamli  $D$  sohada yotuvchi  $ABC$  uchburchak konturi  $\Delta$  bo'yicha integrali nolga teng bo'lmasin:

$$\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0.$$

Aytaylik,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = M > 0$$

bo'lsin.

$\Delta = ABC$  uchburchakni, uning tomonlari o'rtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmalari yordamida 4 ta  $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$  uchburchaklarga ajratamiz. Ravshanki, bu uchburchak konturlari uchun

$$\Delta^{(1)} = aB + Bc + ca,$$

$$\Delta^{(2)} = cA + Ab + bc,$$

$$\Delta^{(3)} = bC + Ca + ab,$$

$$\Delta^{(4)} = ac + cb + ba$$

bo'lib,

$$\begin{aligned}\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz &= \int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz \\ \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz &= \int_{cA} f(z)dz + \int_{Ab} f(z)dz + \int_{bc} f(z)dz \\ \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz &= \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz + \int_{ab} f(z)dz \\ \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz &= \int_{ac} f(z)dz + \int_{cb} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz\end{aligned}$$

bo'ladi. Keyingi tengliklarni hadlab qo'shib topamiz:

$$\begin{aligned}& \int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz = \\ & \left[ \int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz + \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz \right] + \\ & + \left( \int_{ca} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz \right) + \left( \int_{bc} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz \right) + \left( \int_{ab} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz \right).\end{aligned}$$

Agar 
$$\int_{aB} f(z)dz + \int_{Bc} f(z)dz + \int_{ca} f(z)dz + \int_{Ab} f(z)dz + \int_{bC} f(z)dz + \int_{Ca} f(z)dz = \int_{\Delta} f(z)dz.$$

$$\int_{ca} f(z)dz + \int_{ac} f(z)dz = 0,$$

$$\int_{bc} f(z)dz + \int_{cb} f(z)dz = 0, \quad \int_{ab} f(z)dz + \int_{ba} f(z)dz = 0.$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\int_{\Delta} f(z)dz = \int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz + \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ravshanki,

$$M = \left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| \leq \left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz \right| + \left| \int_{\Delta^{(2)}} f(z)dz \right| + \left| \int_{\Delta^{(3)}} f(z)dz \right| + \left| \int_{\Delta^{(4)}} f(z)dz \right|$$

Bu tengsizlikning o'ng tomondagi qo'shiluvchilardan kamida bittasi  $\frac{M}{4}$  dan

kichik bo'lmaydi (aks holda  $M = \left| \int_{\Delta} f(z)dz \right| < 4 \cdot \frac{M}{4} = M$  bo'lib,  $M < M$  kabi

ma'nosiz tengsizlikka kelib qoladi.)

Aytaylik,

$$\left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

bo'lsin, bunda  $\Delta^{(1)}$  uchburchak  $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$  uchburchaklardan biri va uning perimetri  $\frac{1}{2^n}$  ga teng.

Endi  $\Delta^{(1)}$  uchburchakni yuqoridagi usul bilan 4 ta  $\Delta^{(1)}_1, \Delta^{(2)}_1, \Delta^{(3)}_1, \Delta^{(4)}_1$  uchburchaklarga ajratamiz. Bu uchburchaklar orasida shunday  $\Delta_2$  uchburchak topiladiki,  $\int_{\Delta_2} f(z) dz \geq \frac{M}{4^2}$  bo'ladi,  $\Delta_2$  uchburchakning perimetri  $\frac{1}{2^2}$  ga teng.

Bu jaroyon cheksiz davom ettira boramiz. Natijada  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n \dots$  uchburchaklar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Uchburchaklar ketma-ketligi uchun:

1)  $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$ ,

2)  $\Delta_n$  uchburchaklarning perimetri  $\frac{1}{2^n}$  ga teng va  $n \rightarrow \infty$  da  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ ;

3) har bir  $\Delta_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) uchburchak uchun

$$\left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad \text{bo'ladi.}$$

1) va 2) tasdiqlardan barcha  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n \dots$  uchburchaklarga tegishli bo'lgan yagona  $z_0$  nuqta ( $z_0 \in D$ ) mavjud bo'lishi kelib chiqadi.

2) shartga ko'ra  $f(z)$  funksiya  $z_0$  nuqtada golomorf. Demak,  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon)$  son topiladiki, tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $z$  lar uchun

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z) \right| < \varepsilon,$$

ya'ni

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

bo'ladi.

Endi formulalarga ko'ra  $\int_{\Delta_n} dz = 0$ , va ning yetarlicha katta qiymatlarida

$$\Delta_n \subset \{z \in C_z : |z - z_0| < \delta\}$$

bo'lishini e'tiborga olib:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\Delta_n} f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0) dz \right| \leq \int_{\Delta_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)| dz < \\ &< \varepsilon \cdot \int_{\Delta_n} |z - z_0| dz \leq \varepsilon \frac{l^2}{4^n} \end{aligned}$$

bu munosabatdan

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\Delta_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{l^2}{4^n}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $M < \varepsilon \cdot l^2$ .

Bu tengsizlik  $M > 0$  deb qilingan farazga zid. Ziddiyatlik bo'lmasligi uchun

$M = 0$  bo'lishi kerak. Shunday qilib  $M = 0$ , ya'ni  $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$

b)  $\gamma$  egri chiziq ko'pburchak konturidan iborat bo'lsin:  $\gamma = P$ .

Ravshanki, ko'pburchak chekli sondagi uchburchaklarga ajraladi va  $\int_P f(z) dz$

integral esa bu uchburchaklar bo'yicha olingan integrallar yig'indisiga teng bo'ladi. Uchburchaklar bo'yicha olingan integrallarning har biri a) holga binoan nolga teng bo'ladi. Binobarin,  $f(z)$  funksiyaning ko'pburchak konturi boyicha

olingan integrali ham nolga teng bo'ladi:  $\int_P f(z) dz = 0$

v)  $\gamma$  egri chiziq ixtiyoriy silliq (bo'lakli silliq) yopiq egri chiziq bo'lsin:

integralning 6-xossasiga ko'ra  $D$  sohaga tegishli bo'lgan shunday  $P$  ko'pburchak topiladiki,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| < \varepsilon$$

bo'ladi, bunda  $\varepsilon$  – ixtiyoriy musbat son. b) holga binoan

$$\int_P f(z) dz = 0$$

Demak,

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon$$

Bundan esa

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Teorema to'liq isbotlandi.

### 1.2.3 Koshining integral formulasi.

Kompleks sonlar tekisligi  $C_z$  da chegaralangan  $D$  sohani qaraylik. Uning chegarasi  $\partial D$  silliq (bo'lakli silliq) chiziqdan iborat. Bu yopiq egri chiziq musbat yo'nalishda olingan bo'lsin:

Aytaylik,  $\bar{D} = D \cup \partial D$  to'plamda  $f(z)$  funksiya aniqlangan bo'lsin.

**1.2.3-teorema.** Agar  $f(z)$  funksiya  $D$  sohada golomorf bo'lib,  $\bar{D}$  da uzluksiz bo'lsa, u holda  $\forall z \in D$  nuqta uchun

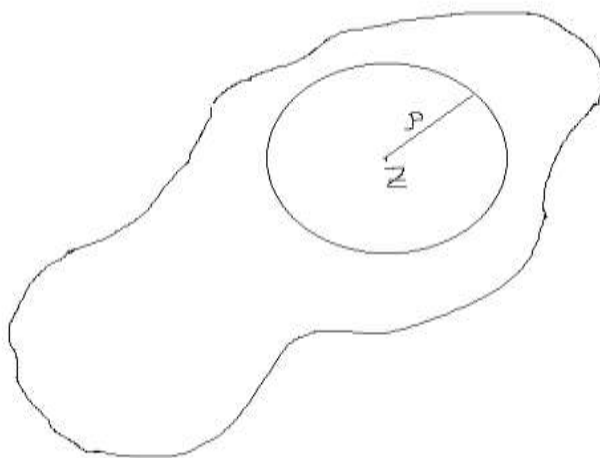
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot.  $D$  sohada ixtiyoriy  $z$  nuqta olib, uning shunday

$$B_p = \{t : |t-z| < p : p > 0\}$$

atrofini qaraymizki,  $\bar{B}_p \subset D$  bo'lsin.



1.2.3-chizma.  $D_p = D \setminus \bar{B}_p$  soha

Bu sohaning chegarasi

$$\partial B_p = \{t : |t-z| = p : p > 0\}$$

bo'ladi.

Endi chegarasi

$$\gamma = \partial D \cup \partial \bar{B}_p$$

bo'lgan ushbu

$$D_p = D \setminus \bar{B}_p$$

sohani qaraymiz.

Ravshanki, bu sohada

$$\frac{f(t)}{t-z}$$

funksiya  $t$  o'zgaruvchining funksiyasi sifatida golomorf bo'lib, uning chegarasida uzluksiz bo'ladi. Unda Koshi teoremasiga binoan

$$\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0$$

ya'ni

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt + \int_{\partial \bar{B}_p} \frac{f(t)}{t-z} dt = 0$$

bo'ladi.

Agar

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = - \int_{\partial \bar{B}_p} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{\partial B_p} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ma'lumki,  $\int_{\partial B_p} \frac{dt}{t-z}$  integralda  $\partial B_p$  aylana uchun  $t = z + p \cdot e^{i\varphi}$

( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) bo'lganligi sababli

$$\int_{\partial B_p} \frac{1}{t-z} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ip \cdot e^{i\varphi}}{p \cdot e^{i\varphi}} d\varphi$$

bo'lib,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_p} \frac{1}{t-z} dt = 1$$

bo'ladi. Bu tenglikning har ikki tomonini  $f(z)$  ga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_p} \frac{f(z)}{t-z} dt = f(z)$$

so'ng, ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt = -f(z)$$

ayirmani qaraymiz. Bu ayirmani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_p} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt$$

Shartga ko'ra  $f(z)$  funksiya  $z$  nuqtada ( $z \in D$ ) golomorf.

Binobarin, funksiya shu nuqtada uzluksiz. Unda  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\exists p > 0$  son topiladiki,  $p < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $B_p$  aylananing ixtiyoriy  $t$  nuqtasi uchun

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuni e'tiborga olib topamiz.

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_p} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\pi p} \int_{\partial B_p} |dt| = \frac{\varepsilon}{2\pi p} \cdot 2\pi p = \varepsilon.$$

Demak,  $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z} dt - f(z) \right| = \varepsilon.$

Shunday qilib,  $p$  nolga intila borganda ayirmaning moduli yetarlicha kichik bo'lar ekan.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt$$

ifoda  $p$  ga bog'liq emas. Unda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt - f(z) = 0$$

ya'ni  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{t-z} dt$

bo'lishi kelb chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi

Odatda bu formula Koshining integral formulasi deyiladi.

Koshining integral formulasi  $f(z)$  golomorf funksiyaning  $D$  sohadagi qiymatlarini, uning chegarasidagi qiymatlari orqali ifodalaydi.

**1.2.2- misol.** Ushbu

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$$

integralni hisoblang, bunda

$$\gamma = \{z = x + iy \in C_z : x^2 + y^2 + 6y = 0\}$$

yopiq chiziqdan iborat.

Ravshanki,

$$x^2 + y^2 + 6y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \Rightarrow |z + 3i| = 3$$

Demak,  $\gamma = \{z \in C_z : |z + 3i| < 3\}$

Bu aylana bilan chegaralangan sohani - doirani  $D$  deylik:

Agar

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - 2i}$$

deyilsa, unda berilgan integral quyidagicha

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + 2i} dz$$

bo'ladi.  $f(z)$  funksiya  $\bar{D}$  da golomorf bo'lgani uchun Koshining integral formulasiga muvofiq

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz = f(-2i).$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z+2i} dz = -2\pi i \cdot f(-2i) = 2\pi i \cdot \frac{\sin(-2i)}{-2i-2i} = \frac{\pi}{2} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} i \cdot \operatorname{sh} 2$$

Demak, 
$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2+4} dz = \frac{\pi}{2} i \cdot \operatorname{sh} 2.$$

### 1.3 Loran qatorlari.

Aytaylik,  $f(z)$  funksiya ushbu

$$K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

sohada golomorf bo'lsin, bunda  $r \geq 0$ ,  $R \leq \infty$ .

$K$  sohada ixtiyoriy  $z$  nuqta olib, uni tayinlangan deb qaraymiz. so'ng shunday

$$K_1 = \{t \in C_z : r_1 < |z-a| < R_1\}$$

sohani (halqani) olamizki, bunda

$$r < r_1 < R_1 < R$$

bo'lib,  $z \in K_1$  bo'lsin. Ravshanki, bu holda  $K_1 \subset K$  bo'ladi.

Ushbu

$$\{t \in C_z : |z-a| = r_1\}, \quad \{t \in C_z : |z-a| = R_1\}$$

aylanalarni mos ravishda  $\gamma_1, \Gamma_1$  orqali belgilaymiz:

$$\gamma_1 = \{t \in C_z : |z-a| = r_1\},$$

$$\Gamma_1 = \{t \in C_z : |z-a| = R_1\}$$

Unda  $K_1$  sohaning chegarasi

$$\partial K_1 = \bar{\gamma}_1 \cup \Gamma_1$$

bo'ladi. Bu yerda  $\gamma_1$  va  $\Gamma_1$  aylanalarda yo'nalish soat stereklasi yo'nalishiga qarshi qilib olingan.

Qaralayotgan  $f(z)$  funksiya  $K$  sohada golomorf bo'lgani sababli Koshining integral formulasiga ko'ra  $\forall z \in K_1$  uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{K}_1} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{K}_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Demak,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (1.3.1)$$

$\forall t \in \Gamma_1$  uchun tekis yaqinlashuvchi  $\left(\left|\frac{z-a}{t-a}\right| < 1\right)$  ushbu

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-a)\left(t-\frac{z-a}{t-a}\right)} = \frac{1}{t-a} + \frac{z-a}{(t-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}} + \dots$$

qatorni  $\frac{1}{2\pi i} f(t)$  ga ko'paytirib, so'ng  $\Gamma_1$  bo'yicha hadlab integrallasak,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (1.3.2)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (1.3.3)$$

Endi (1.3.1) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi integral ostidagi  $\frac{1}{t-z}$  funksiyani  $\forall t \in \gamma_1$ , uchun quyidagicha

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{t-a}} = -\frac{1}{z-a} + \frac{t-a}{(z-a)^2} - \dots - \frac{(z-a)^n}{(t-a)^{n+1}} - \dots \quad (1.3.4)$$

yozib olamiz.  $\forall t \in \gamma_1$  da

$$\left|\frac{t-a}{z-a}\right| = \frac{r_1}{|z-a|} = q < 1$$

bo'lgani sababli (1.3.3) qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagidek, (1.3.4) tenglikning har ikki tomonini  $\frac{1}{2\pi i} \cdot f(t)$  ga ko'paytirib, so'ng  $\gamma_1$  bo'yicha hadlab integrallab

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^{-n} \quad (1.3.5)$$

bo'lishini topamiz, bunda

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(t) (t-a)^{n-1} dt \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (1.3.6)$$

bo'ladi. Natijada (1.3.1), (1.3.2), (1.3.5) munosabatlardan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n} \quad (1.3.7)$$

(1.3.3) va (1.3.6) formulalardagi 1,2,3,.. qiymatlarni qabul qiladigan  $n$  indeksni, -1,-2,-3,... qiymatlarni qabul qiladigan  $-n$  indeks bilan almashtirsak, unda (1.3.6) formula ushbu

$$d_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(t) \cdot (t-a)^{-n-1} dt \quad (1.3.8)$$

ko'rinishga keladi.

Agar  $z$  nuqta  $K$  sohadagi ixtiyoriy nuqta ekanini,  $f(z)$  funksiya shu sohada golomorf bo'lishini hamda  $\gamma_1$  va  $\Gamma_1$  chiziqlar  $K$  sohaga tegishliligini e'tiborga olsak, Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt = \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

umuman,

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt = \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt = \int_{K_p} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt$$

bo'lishini topamiz. Bu yerda

$$K_p = \{t \in C_z : |t-a| = p; r_1 < p < R_1\}.$$

Endi (1.3.3) va (1.3.8) tengliklarni solishtirib

$$d_{-n} = c_n \quad (n=1,2,3,\dots)$$

ya'ni

$$d_n = c_{-n}$$

bo'lishini topamiz. bu hol

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}$$

yig'indilarni birlashtirib, ushbu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

ko'rinishda yozish imkonini beradi:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z-a)^{-n}.$$

Demak,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

bo'lib, bunda

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

bo'ladi.

Shunday qilib quyidagi teoremaga kelimiz:

**1.3.1-teorema.** Ushbu

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

sohada (halqada) golomorf bo'lgan ixtiyoriy  $f(z)$  funksiya shu sohada yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

qatorning yig'indisi sifatida ifodalanadi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Bu yerda qatorning koeffitsiyentlari

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_p} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

bo'lib,  $r < p < R$  bo'ladi. Odatda bu teorema Loran teoremasi deyiladi.

**1.3.1-ta'rif.** Koeffitsiyentlari

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=p} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

formulalar yordamida aniqlanadigan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

qator  $f(z)$  funksiyaning  $K$  sohadagi Loran qatori deyiladi.

$f(z)$  funksiya  $K$  sohada golomorf bo'lsa, teoremaga binoan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

bo'lishini e'tiborga olib, bu holda  $f(z)$  funksiya  $K$  sohada Loran qatoriga yoyiladi deb ataymiz.

Demak,  $f(z)$  funksiyaning Loran qatori  $z-a$  ning musbat va manfiy butun darajalari bo'yicha yoyilgan qatorni ifodalar ekan.

Yuqorida aytilganlardan hamda darajali qatorlar haqidagi ma'lumotlardan foydalanib, quyidagi xulosalarga kelamiz.

1) Loran qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$\text{ni ikkita} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (3.1.9) \quad \text{va} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n \quad (1.3.10)$$

qatorlarning yig'indisidan iborat deb qarash mumkin. Odatda (1.3.9) qator Loran qatorining to'g'ri qismi, (1.3.10) Loran qatorining bosh qismi deyiladi.

2) Loran qatorining to'g'ri qismi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

darajali qatordir. Uning yaqinlashish sohasi Abel teoremasiga ko'ra

$|z-a| < R$  doiradan iborat bo'lib, yaqinlashish radiusi Koshi –Adamar formulasi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

ga ko'ra topiladi. (1.3.9) qator  $|z-a| < R_1$  ( $R_1 < R$ ) da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

3) Loran qatorining bosh qismi

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

da  $w = \frac{1}{z-a}$  deyilsa, unda bu qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w_n$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu qator Abel teoremasiga ko'ra

$$|w| = \frac{1}{r}$$

da yaqinlashuvchi bo'lib, yaqinlashish radiusi Koshi-Adamar formulasiga ko'ra

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$$

bo'ladi. Demak,

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n$$

qator doiraning tashqi qismi bo'lgan

$$|z-a| > r$$

sohada yaqinlashuvchi bo'ladi.

4) Agar  $r \geq R$  bo'lsa, Loran qatori

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

ning yaqinlashish sohasi

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

halqadan iborat bo'ladi.

5) Agar  $f(z)$  funksiyaning Loran qatori

$$K = \{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

$K = \{z \in C_z : r_1 < |z-a| < R_1\}$  yopiq sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Veyershtass teoremasiga ko'ra Loran qatorining yig'indisi  $f(z)$  funksiya

$$\{z \in C_z : r < |z-a| < R\}$$

sohada golomorf bo'ladi.

**1.3.1-misol.** Ushbu

$$f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

funksiyani  $V = \{0 < |z| < \infty\}$  halqada  $z$  ning darajalari bo'yicha Loran qatoriga

yoying. Avval  $e^{\frac{1}{z}}$  funksiyaning qatoriga yoyamiz.

Bu qator  $\{z \neq 0\}$  da yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, bu funksiyaning topamiz.

$$f(z) = z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^3 \left( 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} + \dots \right) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n+3)!}$$

Bu berilgan funksiya  $z$  ning darajalari bo'yicha yoyilmasidir.

### **Xulosa.**

Ushbu bob 3 qismdan iborat. Ular, kompleks o'zgaruvchili funksiya, kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali va Loran qatorlari.

Bu bobda asosan kompleks o'zgaruvchili funksiyalar va Loran qatorlari haqida so'z borgan. Kompleks argumentli funksiya ta'rifi, integral ta'rifi, integralning mavjudligi, integralning xossalari, Koshi teoremasi, Koshi integrali va Loran qatorining xossalari hamda ularga doir misollar keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishim uchun zarur bo'lgan asosiy, boshlang'ich tushunchalar kiritilgan.

## **II-bob. Chegirmalar nazariyasi va uning ba'zi tadbiqlari**

### **2.1 Chegirmalar nazariyasi**

**Maxsus nuqtalar va ularning turlari.** Agar  $a \in C$  nuqtada  $f(z)$  funksiyaning golomorf bo'lishi sharti bajarilmasa, u holda funksiya shu nuqta atrofida o'rganiladi.

Odatda, bunday nuqta  $f(z)$  funksiyaning maxsus nuqtasi deb qaraladi.

**2.1.1-tarif.** Agar  $f(z)$  funksiya ushbu

$$\{z \in C : 0 < |z - a| < r\}$$

sohada ( $a$  nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf bo'lsa, u holda  $a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning yakkaalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

**2.1.1-misol.** Ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z+i}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki bu funksiya

$$\{z \in C : 0 < |z+i| < r\}$$

sohada (halqada) golomorf. Binobarin,  $a = -i$  nuqta berilgan funksiyaning yakkaalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

**2.1.2-ta'rif.** Agar  $f(z)$  funksiya ushbu

$$\{z \in C : R < |z| < \infty\}$$

sohada golomorf bo'lsa, u holda  $a = \infty$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning yakkaalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

**2.1.2-misol.** Ushbu

$$f(z) = e^z$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya

$$\{z \in C : R < |z| < \infty\}$$

sohada golomorf. Demak,  $a = +\infty$  nuqta berilgan  $f(z) = e^z$  funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Funksiyaning yakkalanmagan maxsus nuqtalari ham bo'ladi.

Masalan, ushbu

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki,  $a = 0$  hamda  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

nuqtalar funksiyaning maxsus nuqtalari bo'ladi. Bunda  $a = 0$  maxsus nuqta berilgan funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lmaydi.

Aytaylik,  $a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin. Unda  $f(z)$  funksiya

$$\{z \in C : 0 < |z - a| < r\}$$

sohada ( $a$  nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf.

$f(z)$  funksiyaning  $z \rightarrow a$  dagi limitning xarakteriga qarab yakkalangan maxsus nuqtalar turlarga ajraladi.

**2.1.3-ta'rif.** Agar  $z \rightarrow a$  da  $f(z)$  funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

bo'lsa, u holda  $a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning qutb nuqtasi deyiladi.

**2.1.3-misol.** Ushbu

$$f(z) = \frac{z}{z+1}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya  $C/\{z = -1\}$  da golomorf bo'lib,  $a = -1$  nuqta uning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi. Bu funksiya uchun

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z}{z+1} = \infty$$

bo'lganligi sababli  $a = -1$  berilgan funksiyaning qutb nuqtasi bo'ladi.

**2.1.1-teorema.**  $f(z)$  funksiyaning yakkalangan maxsus  $a \in C$  nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasida  $z - a$  ayirmaning manfiy darajali hadlaridan chekli sondagisining bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi.  $a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning qutb nuqtasi bo'lsin. Unda  $z \rightarrow 0$  da  $f(z)$  funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

bo'ladi.

Bu holda  $a$  nuqtaning o'yilgan  $U = \{z \in C : 0 < |z - a| < r\}$  atrofi topiladiki, bu atrofda  $f(z)$  golomorf funksiya bo'lib,  $f(z) \neq 0$   $z \in U$  bo'ladi.

U da ushbu

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya  $U$  da golomorf bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0$$

bo'ladi. Demak,  $z = a$  nuqtada  $\varphi(z)$  funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi ekan.

Agar

$$\lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = 0 = \varphi(a)$$

deyilsa, unda  $\varphi(z)$  funksiya  $\{z \in C : |z - a| < r\}$  doirada golomorf bo'lib qoladi.  $z = a$  nuqta  $\varphi(z)$  funksiyaning noli bo'lgani uchun uni

$$\varphi(z) = (z - a)^n \cdot \psi(z)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda  $\psi(z)$   $a$  nuqtada golomorf funksiya bo'lib,  $\psi(z) \neq 0$  bo'ladi.

Shunday qilib, qaralayotgan  $U$  atrofda

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z - a)^n} \cdot \frac{1}{\psi(z)}$$

bo'lishini topamiz.

Endi  $\frac{1}{\psi(z)}$  funksiyaning  $a$  nuqta atrofi  $\{z \in C : |z - a| < r\}$  da Teylor qatoriga yoyamiz:

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1}(z - a) + \dots + c_0(z - a)^n + \dots$$

Bunda

$$c_{-n} = \frac{1}{\psi(a)} \neq 0.$$

Bu munosabatlardan

$$f(z) = c_{-n}(z - a)^n + c_{-n+1}(z - a)^{n+1} + \dots + c_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,  $a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning qutb nuqtasi bo'lganda, uning Loran qatori bosh qismi hadlarining soni chekli bo'lar ekan.

Yetarliligi. Aytaylik,  $a$  nuqtaning biror o'yilgan atrofi

$$\{z \in C : 0 < |z - a| < r\}$$

da  $f(z)$  funksiyaning Loran qatoridagi  $z - a$  ayirmaning manfiy darajali hadlarining soni chekli bo'lsin:

$$f(z) = c_{-n}(z - a)^{-n} + c_{-n+1}(z - a)^{-n+1} + \dots + c_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n, \quad (c_{-n} \neq 0)$$

Ravshanki,  $f(z)$  va  $(z-a)^n \cdot f(z) = \psi(z)$  funksiyalar  $\{z \in C : 0 < |z-a| < r\}$  da golomorf bo'ladi.

Yuqoridagi munosabatdan foydalanib

$$\psi(z) = (z-a)^n \cdot f(z) = c_{-n} + c_{-n-1}(z-a) + c_{-n+2}(z-a)^2 + \dots$$

bundan esa

$$\lim_{z \rightarrow a} \psi(z) = c_{-n} \neq 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Natijada

$$\lim_{z \rightarrow a} \psi(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\psi(z)}{(z-a)^n} = \infty$$

bo'lishini topamiz. Bu esa  $a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning qutb nuqtasi ekanini bildiradi.

Teorema isbot bo'ldi.

## 2.1.4-ta'rif. Ushbu

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

Funksiyaning  $a$  nuqtadagi nolining tartibi  $f(z)$  funksiyaning  $a$  nuqtadagi qutb nuqtasi tartibi deyiladi.

**Chegirmalar va ularni hisoblash:** Faraz qilaylik,  $f(z)$  funksiya

$$K = \{z \in C : 0 < |z-a| < R\}$$

sohada golomorf bo'lib,  $a$  nuqta bu funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin.  $f(z)$  funksiya  $K$  da ushbu Loran qatoriga yoyaylik.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \dots + c_{-n}(z-a)^{-n} + \dots \quad (2.1.1)$$

Ravshanki, bu qator  $K$  sohada yaqinlashuvchi, jumladan  $K$  sohaga tegishli bo'ladi.

$$\gamma_p = \{z \in C : |z-a| = p : 0 < p < R\}$$

aylana ham tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Binobarin, (2.1.1) qatorni  $\gamma_p$  aylana bo'yicha hadlab integrallash mumkin:

$$\int_{\gamma_p} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\gamma_p} (z-a)^n dz + c_{-1} \int_{\gamma_p} (z-a)^{-1} dz + c_{-2} \int_{\gamma_p} (z-a)^{-2} dz + \dots + c_{-n} \int_{\gamma_p} (z-a)^{-n} dz + \dots$$

Bu yerda  $\gamma_p$  da musbat yo'nalish olingan.

Ma'lumki,

$$\int_{\gamma_p} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, m \neq -1 \\ 2\pi i, m = -1 \end{cases}$$

bo'ladi, ya'ni,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} f(z) dz = c_{-1}$$

bo'lishini topamiz.

**2.1.5-ta'rif.** Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} f(z) dz$$

miqdor, ya'ni  $f(z)$  funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasidagi  $c_{-1}$  koeffisient  $f(z)$  funksiyaning yakkalangan maxsus  $a$  nuqtasidagi chegirmasi deyiladi va  $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$  kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_p} f(z) dz \quad (2.1.2)$$

Bu ta'rifdan quyidagi natija kelib chiqadi.

**Natija.** Agar  $z=a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning bartaraf etiladigan maxsus nuqtasi bo'lsa, funksiyaning shu nuqtadagi chegirmasi nolga teng bo'ladi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0$$

Chegirmalarni hisoblash uchun quyidagi formulalardan foydalanamiz:

1) Agar  $z=a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning birinchli tartibli qutb nuqtasi bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z)$$

bo'ladi.

2) Agar  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  uchun  $\varphi(z)$  va  $\psi(z)$  funksiyalar  $a$  nuqtada golomorf bo'lib,

$\psi(z) \neq 0$ ,  $\psi'(a) \neq 0$  bo'lsa, u holda

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

bo'ladi.

3) Agar  $z=a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning  $n$ -tartibli qutb nuqtasi bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}$$

bo'ladi.

4) Agar  $z=\infty$  nuqtada  $f(z)$  funksiya golomorf bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)]$$

bo'ladi.

5) Agar  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z}$  bo'lib,  $\varphi(z)$  funksiya  $z=a$  nuqtada golomorf bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\phi'(0)$$

bo'ladi.

### **Chegirmalar haqidagi teoremlar.**

**2.1.2-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(z)$  funksiya bir bog'lamli  $D$  sohada berilgan bo'lib, shu sohaga tegishli chekli sondagi maxsus  $z_1, z_2, \dots, z_n$  nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda golomorf bo'lsin. Bu yakkallangan maxsus  $z_1, z_2, \dots, z_n$  nuqtalar  $D$  sohada yotuvchi silliq yopiq  $\gamma$  chiziq ichida joylashsin. U holda

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

bo'ladi. Bunda  $\gamma$  yopiq chiziq musbat yo'nalishda olingan.

**I s b o t .** Markazlari  $z_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) nuqtalarda, yetarlicha kichik radiusli  $\gamma_k$

( $k=1, 2, \dots, n$ ) aylanalarni olamizki, bu aylanalar  $\gamma$  yopiq chiziq ichida yotsin va  $\gamma_k \cap \gamma_i = \emptyset$  ( $k \neq i, i=1, 2, \dots, n$ ) bo'lsin. U holda Koshining ko'p bog'lamli sohalar haqidagi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz \quad (2.1.3)$$

bo'ladi, bunda  $\gamma_k$  aylanalarda soat strelkasi yo'nalishiga qarshi yo'nalish olingan.

Agar

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda (2.1.3) tenglikdan

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Bu teoremadan funksiyalarning integrallarini hisoblashda foydalaniladi.

**2.1.3-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(z)$  funksiya kengaytirilgan kompleks tekislikning chekli sondagi maxsus  $z_1, z_2, \dots, z_n$  nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarda golomorf bo'lsin. U holda bu funksiyaning  $z_1, z_2, \dots, z_n$  nuqtalardagi hamda  $z = \infty$  nuqtadagi chegirmalar yig'indisi nolga teng bo'ladi:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

**I s b o t.** Tekislikda  $R$  radiusli shunday

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$$

aylanani olamizki,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  yakkallangan maxsus nuqtalar shu aylana ichida joylashsin. Bu aylanada yo'nalishni musbat qilib olamiz.

Yuqorida isbot etilgan 2.1.2-teoremaga ko'ra

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z) \quad (2.1.4)$$

Ikkinchi tomondan,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \quad (2.1.5)$$

bo'ladi.

(2.1.4) tenglikdan (2.1.5) tenglikni hadlab ayirib, topamiz:

$$0 = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$$

Demak,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Teorema isbot bo'ldi.

### 2.1.4-misol.

Ushbu

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$$

funksiyaning  $z=1$  nuqtadagi chegirmasini toping.

Berilgan funktsiyani  $z=1$  nuqtaning teshik atrofi  $0 < |z-1| < \varepsilon$  da  $(z-1)$  ning daraajalari bo'yicha Loran qatoriga yoyamiz:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} \cdot e^{z-1} = \frac{e}{(z-1)^2} \left[ 1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \dots \right] = \\ &= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2} + \frac{e(z-1)}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Bu yoyilmadan  $c_{-1} = e$  bo'lishi kelib chiqadi.

2.1.2-teoremadan foydalanib, berilgan funktsiyaning  $z=1$  nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \operatorname{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = e$$

ga teng bo'ladi.

**2.1.5-misol.** Ushbu  $f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$  funktsiyaning  $z=\infty$  nuqtadagi chegirmasini toping.

Berilgan funktsiyani  $z$  ning darajalari bo'yicha Loran qatoriga yoyamiz:

$$f(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z} = z^2 \left[ \frac{\pi}{z} - \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^5}{5!} - \dots \right] = \pi z - \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\pi^5}{5!} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots$$

Demak,

$$c_{-1} = -\frac{\pi^3}{6}$$

va bir funksiyaning  $z = \infty$  nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{\pi}{z} = \frac{\pi^3}{6}$$

ga teng bo'ladi.

**2.1.6-misol.** Ushbu  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2}$  funksiyaning barcha maxsus nuqtalardaagi chegirmalarini hisoblang.

Berilgan funksiyaning yozib olamiz:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)(z - 1)^2}$$

Demak,  $a_1 = i, a_2 = -i$  nuqtalar funksiyaning birinchi tartibli  $a_3 = 1$  nuqta esa 2-tartibli qutb nuqta bo'ladi.

(1), (3) va (4) formulalardan foydalanib, funksiyaning chegirmalarini topamiz.

$$\operatorname{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z + i)(z - 1)^2} = \frac{1}{2i(i - 1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} [(z - 1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow -i} \left[ \frac{1}{z^2 + 1} \right]' = -\lim_{z \rightarrow -i} \frac{2z}{(z^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{(z^2 + 1)(z - 1)^2} = 0$$

**2.1.7-misol.** Ushbu  $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$  funksiyaning barcha chekli maxsus nuqtalardagi chegirmalarini toping.

Ravshanki,

$$f(z) = \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

bo'lib,  $a = n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) nuqtalar uning  $C$  dagi maxsus nuqtalari bo'ladi.

Berilgan funksiyaning bu nuqtalardagi chegirmalarni (2) formuladan foydalanib topamiz:

Agar  $\varphi(z) = \cos \pi z$ ,  $\psi(z) = \sin \pi z$  deyilsa, unda  $\psi(n) = \sin \pi n = 0$

$\psi'(n) = \pi \cos \pi n \neq 0$  bo'ladi.

Demak,

$$\operatorname{res}_{z=n} \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\varphi(n)}{\psi'(n)} = \frac{\cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = \frac{1}{\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

**2.1.8-misol.** Ushbu

$$f(z) = \cos \pi \frac{z + 2}{2z}$$

funksiyaning  $z = \infty$  nuqtadagi chegirmasini hisoblang.

Berilgan funksiyaning  $z = \infty$  nuqtadagi chegirmasini (5) formuladan foydalanib hisoblaymiz.

$$\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \cos \frac{1+2z}{2} \pi$$

deyilsa, bu funksiya  $z = 0$  nuqtada golomorf

Demak,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi(0) = -\left[\cos \frac{1+2z}{2} \pi\right]_{z=0} = -\left[-\sin\left(\frac{1+2z}{2} \pi\right)\right]_{z=0} = \pi \sin \frac{\pi}{2} = \pi$$

ga teng bo'ladi.

**2.1.9-misol.** Ushbu  $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$  funksiyaning barcha chekli maxsus hamda

$z = \infty$  nuqtadagi chegirmalarini hisoblang.

Berilgan funksiyaning

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)} = \frac{e^z}{z^2(z-3i)(z+3i)}$$

ko'rinishda yozib, uning maxsus nuqtalari  $a_1 = 3i$ ,  $a_2 = -3i$  birinchi tartibli qutb nuqtalar,  $a_3 = 0$  ikkinchi tartibli qutb nuqta va  $z = \infty$ , o'ta maxsus nuqta bo'lishini aniqlaymiz.

$\operatorname{res} f(z)$ ,  $\operatorname{res} f(z)$  larni hisoblash  $z = a_1$ ,  $z = a_2$  da (1) formuladan foydalanamiz:

$$\operatorname{res}_{z=a_2} f(z) = \operatorname{res}_{z=3i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{e^z}{z^2(z+3i)} = e^{3i} \frac{1}{-9 \cdot 6i} = -\frac{1}{54} (\sin 3 - i \cos 3).$$

$$\operatorname{res}_{z=a_2} f(z) = \operatorname{res}_{z=-3i} f(z) = -\frac{1}{54} (\sin 3 + i \cos 3)$$

3) formulaga ko'ra  $\operatorname{res}_{z=a_3} f(z)$  ni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=a_3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{e^z}{z^2+9} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^3 \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = \frac{1}{27} (\sin 3 - 3) \text{ ga teng bo'ladi.}$$

**2.1.10-misol.** Agar  $z = a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning  $n$ -tartibli noli bo'lsa,

$$\operatorname{res}_{z=a} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)} \right] \text{ ni toping.}$$

Ma'lumki  $z = a$  nuqta  $f(z)$  funksiyaning  $n$ -tartibli noli bo'lsa funksiyaning ushbu  $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ , ko'rinishida ifodalash mumkin. Bunda  $\varphi(z)$  funksiya  $z = a$  nuqtada hosilasi golomorf va  $\varphi(a) \neq 0$

Bundan  $f(z)$  funksiyaning hosilasi  $f'(z) = (z-a)^{n-1} [n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)]$  bo'lib,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^{n-1} [n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)]}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{(z-a)\varphi(z)}$$

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \left[ \frac{f'(z)}{f(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{n\varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)}{(z-a)\varphi(z)} = \frac{n\varphi(a)}{\varphi(a)} = n$$

bo'ladi.

## 2.2 Chegirmalar nazaryasining ba'zi tadbiqlari

Funksiyaning chegirmalari haqidagi ma'lumotlar va tasdiqlardan foydalanib, funksiyalarning yopiq egri chiziq (yopiq kotur) bo'yicha olingan integrallarini hamda ma'lum sinf aniq integrallarini hisoblaymiz.

### Funksiyaning yopiq egri chiziq bo'yicha integrallarini hisoblash.

Funksiya chegirmasi ta'rifi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\delta} f(z) dz$$

yopiq egri chiziq bo'yicha olingan

$$\int_{|z|=1} f(z) dz$$

integralni hisoblash imkonini beradi.

Masalan, ushbu

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$$

integralni qaraylik. Integral ostidagi,  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  funksiyaning  $z=0$  nuqtaning o'yilgan atrofi  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$  dagi Loran qatori

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots$$

bo'lib bunda  $c_{-1} = 1$  bo'ladi. Demak,

$$\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 2\pi i$$

bo'ladi.

Ma'lumki chegirmalar haqidagi 2.1.2-teoremaga asosan,  $f(z)$  funksiyaning yopiq egri chiziq,  $\gamma$  bo'yicha olingan integrali shu funksiyaning  $\gamma$  ichida yotgan maxsus nuqtalardagi chegirmalari orqali ifodalanar edi. Binobarin, bunday integrallar chegirmalarni hisoblash bilan bog'liq.

Masalan, ushbu

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1}$$

integralni qaraylik. Integral ostidagi

$$\int_{|z|=2} f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1}$$

funksiyaning 4ta maxsus  $z_1, z_2, z_3, z_4$  nuqtalari (qutb nuqtalari) bo'lib barchasi  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  aylana ichida joylashganligi sababli 2.1.2-teorema ko'ra

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4 - 1}$$

bo'ladi.

Ma'lumki, 2.1.3-teorema muvofiq

$$\sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4 - 1} + \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{z^4 - 1} = 0 \quad (2.2.1)$$

bo'ladi. Agar

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z^4} + \dots \right)$$

bo'lishidan

$$-c_{-1} = \operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^3}{z^4 - 1} = -1$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda (2.2.1) munosabatdan

$$\sum_{k=1}^4 \operatorname{res}_{z=z_k} \frac{z^3}{z^4 - 1} = 1 \quad (2.2.2)$$

bo'lishi kelib chiqishini topamiz.

(2.2.1) va (2.2.2) munosabatlardan topamiz:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4 - 1} dz = 2\pi i.$$

Masalan, ushbu

$$\int_{|z|=1} \frac{z dz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z}$$

integralni hisoblang.

Integral ostidagi

$$f(z) = \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{z}{\left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z \right)}$$

funksiyaning  $z_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $z_2 = -\frac{\pi}{4}$  maxsus nuqtalari (qutb nuqtalari)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  aylana ichida yotadi. Unda

$$\int_{|z|=1} \frac{zdz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = 2\pi i \left[ \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} + \operatorname{res}_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} \right]$$

bo'ladi.

Endi (4) formuladan foydalanib, chegirmalarni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\left(\frac{1}{2} - \sin^2 z\right)_{z=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{(-\sin 2z)_{z=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{z=-\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{4}$$

Demak,

$$\int_{|z|=1} \frac{zdz}{\frac{1}{2} - \sin^2 z} = 2\pi i \left( -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = -\pi^2 i$$

bo'ladi.

$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$  **ko'rinishdagi integralni hisoblash.**

Chegirmalar teoremasining ishlatilishiga asoslangan integrallarni hisoblash usullari mavjudligi quyidagilardan tuzilgan.  $x$  o'qining biror-bir  $(a, b)$  kesmadagi  $f(x)$  haqiqiy funksiyaning integralini hisoblash talab qilingan bo'lsin. Biz  $(a, b)$  ni  $C'$  egri chiziq bilan to'ldirib,  $(a, b)$   $D$  soha bilan chegaralangan va  $f(x)$  ni  $\bar{D}$  gacha davom ettiraylik. Biz analitik ravishda davom ettirib qurgan  $f(z)$  funksiyaga chegirmalar teoremasini qo'llab, quyidagini topamiz:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{C'} f(z) dz = 2\pi i \cdot R \quad (2.2.4)$$

bu yerda  $R-D$  sohadagi  $f(z)$  ning chegirmalari summasidir. Agar  $C'$  dan olingan integralni hisoblash mumkin bo'lsa yoki uni izlanayotgan  $\int_a^b f(x)dx$  integral orqali ifodalash mumkin bo'lsa, unda  $\int_a^b f(x)dx$  ni hisoblash masalasi yechiladi.

Ba'zi bir hollarda  $f(z)$  funksiyani  $(a, b)$  kesmada berilgan funksiya  $f(z)$  ning haqiqiy yoki mavhum qismi sifatida tanlab olinadi. Unda qidirilayotgan integral mos ravishda (2.2.4) ni haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib hisoblab topiladi.

Bu tasvirlangan usul maxsus nuqtalarida  $f(z)$  chegirmalarning differensial kattaliklarini hisoblashni kontur bo'yicha integral kattaliklarni hisoblashga olib keladigan Koshining chegirmalar teoremasini yaqqol ko'rsatib turibdi.  $(a, b)$  qilib quriladigan chegaralanmagan kengaytirilgan konturdagi integrallar oilasi ko'rib o'tiladi. Bu holda  $C'$  dan olinadigan (2.2.4) integralni hisoblash kerak bo'lmay qoladi. Faqat uning limitini toppish kerak bo'ladi. Xususiy holda oxirgisi nolga tengligi kelib chiqadi.

Ba'zi misollarda  $C'$  bo'yicha integralni baholashni quyidagi lemma orqali amalgam oshirish mumkin.

**Lemma (K. Jordan).** Agar aylana yoylarining biror ketma-ketligi

$C_{R_n} : |z| = R_n, \operatorname{Im} z > -a, (R_n \rightarrow \infty, a - \text{tayinlangan})$  da  $g(z)$  funksiya  $\arg z$  ga bog'liq ravishda nolga tekis yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy musbat  $\lambda$  son uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (2.2.5)$$

bo'ladi.

$z = x + iy = re^{i\varphi}, M_n = \max_{C_{R_n}} |g(z)|$  va  $\alpha_n = \arcsin \frac{a}{R_n}$  deb belgilaylik. Lemma

shartlariga asosan  $n \rightarrow \infty$  da  $M_n \rightarrow 0$  ga,  $\alpha_n$  ham 0 ga intiladi,  $\alpha_n R_n \rightarrow a$  bo'lgani

sababli.  $a > 0$  bo'lsin;  $AB$  va  $CD$  yoylarda (2.2.1-chizma) biz  $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda y} \leq e^{a\lambda}$  ga ega bo'lamiz, shunday qilib

$$\left| \int_{AB, CD} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M_n e^{a\lambda} a_n R_n$$

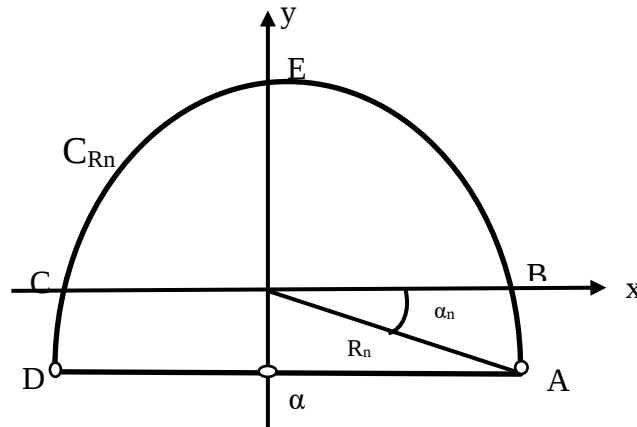
va bu yoylardagi integrallar  $n \rightarrow \infty$  bo'lganda 0 ga intiladi.

$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$  tengsizlikning aniqligi asosida,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  da biz  $BE$  yoyda (1-chizma)

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R_n \sin \varphi} \leq e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi}$$

degan qarorga kelimiz, shunday qilib

$$\left| \int_{BE} g(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M_0 R_n \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\lambda R_n}{\pi} \varphi} d\varphi = M_n \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R_n})$$



### 2.2.1- chizma yarim aylana konturi

va  $\int_{BE}$  ham  $n \rightarrow \infty$  bo'lganda 0 ga intiladi. Agar  $CE$  vatardan soat strelkasi bo'ylab

manfiy o'qdan qutb burchagini hisoblasak, unda  $\int_{CE} g(z) e^{i\lambda z}$  uchun ham xuddi

shunday bah ova lemmaning tasdig'i isbot bo'ladi.  $a \leq 0$  bo'lgan holda isbot soddalashadi. Lemma to'liq isbotlandi.

Lemmadagi  $C_{R_n}$  aylanalarning yoylari ketma-ketligini

$C_R : |z| = R, \operatorname{Im} z > -a (R_0 < R < \infty)$  yoylari oilasiga almashtirish mumkin. Agar  $g(z)$  funksiya  $R \rightarrow \infty$  da  $C_R$  nolga intilsa, unda ixtiyoriy musbat  $\lambda$  son uchun

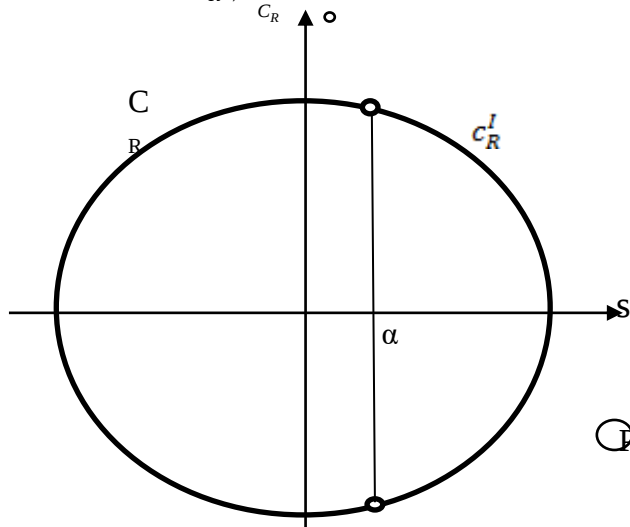
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (2.2.6)$$

o'rinli bo'ladi. Bu hol uchun ham yuqorida islotlaganimiz o'rinli bo'ladi.

O'zgaruvchini  $iz = p$  bilan almashtirsak, unda lemmadagi aylana yoyi

$C_R : |p| = R, \operatorname{Re} p < a$  (2-chizma) yoy bilan almashadi va biz ixtiyoriy  $R \rightarrow \infty$  da  $C_R$  0 ga intiladigan  $F(p)$  funksiya uchun va ixtiyoriy musbat  $t$  uchun

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0 \quad (2.2.7)$$



2.2.2-chizma aylana konturi

o'rinli bo'ladi.

(2.2.9) dagi  $p$  ni  $-p$  ga almashtirib, yana shu shartlar asosida, ixtiyoriy manfiy  $t$  uchun

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} F(p) e^{pt} dp = 0 \quad (2.2.8)$$

ni olamiz. Bu yerda  $C'_R : |p| = R, \operatorname{Re} p > a$  (2.2.2-chizma) aylanadagi yoy.

Biz chegirmalar nazariyasi yordamida hisoblanadigan integrallarni hisoblashning umumiy usulini aniq bir misollarda yaqqol ko'rsatib o'tamiz. Biz

ishni sinusli yoki kosinusli kasr-ratsional funksiyalarning hosilasi integralarini hisoblashdan boshlaymiz.

Ratsional funksiya  $R(\cos \varphi, \sin \varphi)$  ning  $[0, 2\pi]$  oraliq bo'yicha aniq integrali

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi \quad (2.2.9)$$

ushbu

$$z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

almashtirish yordamida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning yopiq egri chiziq bo'yicha olingan integraliga keladi.

Avvalo shuni aytish kerakki, (2.2.9) almashtirishda  $\varphi$  o'zgaruvchi 0 dan  $2\pi$  gacha o'zgarganda  $z$  o'zgaruvchi musbat yo'nalishda olingan birlik aylana  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ni hosil qiladi

Ravshanki,

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \quad (2.2.10)$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

bo'lib,  $dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi,$

ya'ni

$$d\varphi = \frac{dz}{zi} \quad (2.2.11)$$

bo'ladi. Natijada

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = R \left[ \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{zi} = R_1(z) dz$$

bo'lib, qaralayotgan aniq integral  $R_1(z)$  ratsional funksiyaning  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  aylana bo'yicha olingan integraliga keladi:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = \int_{|z|=1} R_1(z) dz.$$

Bu tenglikdagi

$$\int_{|z|=1} R_1(z) dz$$

integral uchun, chegirmalar haqidagi teorema muvofiq

$$\int_{|z|=1} R_1(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} R_1(z)$$

bo'ladi. Bu yerda  $z_1, z_2, \dots, z_n$  lar  $R_1(z)$  funksiyaning birlik aylana ichida joylashgan maxsus nuqtalari.

**2.2.1-misol.** Ushbu

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} \quad a \geq 1$$

integralni hisoblang

Bu integralda  $z = e^{i\varphi}$  almashtirish bajarib, (2.2.9) va (2.2.10) munosabatlardan foydalanib

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z} dz}{a + \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \quad (2.2.11)$$

bo'lishini topamiz. Integral ostidagi

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} \quad (a \geq 1)$$

funksiyaning ikkita

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

Maxsus nuqtalari bo'lib, ulardan  $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$  birlik aylana  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ning ichida joylashgandir. Demak,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} + 1 \quad (2.2.12)$$

bo'ladi.

Endi (2.2.6) formuladan foydalanib, chegirmani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 + 2az + 1} &= \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{z^2 + 2az + 1} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -a + \sqrt{a^2 - 1}} \frac{z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})}{[z - (-a - \sqrt{a^2 - 1})][z - (-a + \sqrt{a^2 - 1})]} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}
\end{aligned} \quad (2.2.13)$$

(2.2.13),(2.2.14)va(2.2.15) tengliklardan

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (a \geq 1)$$

bo'lishini topamiz.

**2.2.2-misol.** Ushbu

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi$$

integralni hisoblang.

Bu integralda  $z = e^{i\varphi}$  almashtirish bajarib, (2.2.9) va (2.2.10) munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi = \int_{|z|=1} \frac{2 + \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)}{2 - \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{i} = - \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} dz \quad (2.2.14)$$

integral ostidagi

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)}$$

funksiyaning 3 ta

$$z_1 = 0, z_2 = 2i + i\sqrt{3}, z_3 = 2i - i\sqrt{3}$$

maxsus nuqtalari bo'lib, ulardan

$z_1 = 0, z_3 = (2 - \sqrt{3})i$  lar  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  aylana ichida joylashgan.

Demak,

$$\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz + 1)} dz =$$

$$= 2\pi i \left[ \operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} + \operatorname{res}_{z=(2-\sqrt{3})i} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} \right] \quad (2.2.15)$$

Endi (3) formuladan foydalanib, chegirmalarni hisoblaymiz:

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} \right] = -1,$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{res}_{z=(2-\sqrt{3})i} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} = \\ & = \lim_{z \rightarrow (2-\sqrt{3})i} \left\{ \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z^2 - 4iz - 1)} \cdot [z - (2 - \sqrt{3})i] \right\} = \lim_{z \rightarrow (2-\sqrt{3})i} \frac{z^2 + 4z + 1}{z(z - (2i + i\sqrt{3}))} = 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

(2.2.11), (2.2.12) va (2.2.13) tengliklardan

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos \varphi}{2 - \sin \varphi} d\varphi = -2\pi i \left[ -1 + \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{4\pi}{3}$$

bo'lishi kelib chiqadi

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$  **ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.** Aytaylik,  $x$  o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lgan  $R(x)$

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

bo'lib, bunda  $P(x)$  va  $Q(x)$  lar mos ravishda  $n$  va  $m$  darajali ko'phadlar, va  $m - n \geq 2$  bo'lsin.  $R(x)$  funksiya haqiqiy o'qda qutb nuqtaga ega bo'lmasin.

Markazi kordinanatalar boshida radiusi  $R$  bo'lgan aylananing yuqori yarim tekislikdagi qismi  $C$  hamda haqiqiy o'qning  $[-R, R]$  kesmasidan tashkil topgan  $\gamma_R$  yopiq egri chiziqni olamiz

Ravshanki,

$$\gamma_R = [-R, R] \cup C$$

So'ng

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ratsional funksiyani qaraymiz.

Endi  $R$  radiusni shunday katta qilib olamizki,  $R(z)$  funksiyaning barcha yuqori yarim tekislikdagi maxsus nuqtalari shu  $\gamma_R$  yopiq egri chiziq ichida joylashsin.

Chegirmalar haqidagi teorema ko'ra

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) \quad (2.2.17)$$

bo'ladi. Bu yerda  $z_1, z_2, \dots, z_p$  lar  $R(z)$  funksiyaning  $\gamma_R$  yopiq egri chiziq ichidagi maxsus nuqtalari (qutb nuqtalari).

Ravshanki,

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_C R(z) dz \quad (2.2.18)$$

bo'ladi. (2.2.12) va (2.2.13) munosabatlardan

$$\int_{-R}^R R(x) dx + \int_C R(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{res}_{z=z_k} R(z) \quad (2.2.19)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglikdagi

$$\int_C R(z) dz$$

Integralni baholaymiz.

Agar

$$\begin{aligned} |R(z)| &= \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \right| = \\ &= \left| \frac{a_n z^n}{b_m z^m} \left[ \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \dots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m}} \right] \right| = \left| \frac{a_n}{b_m z^{m-n}} \right| \cdot \left| \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m z} + \dots + \frac{b_1}{b_m z^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m z^m}} \right| \end{aligned}$$

hamda  $m - n \geq 2$  bo'lishini e'tiborga olsak, unda  $R$  ning yetarlicha katta qiymatlarda

$$|R(z)| < \frac{K}{R^2} \quad (K = \text{const})$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$\int_C |R(z)dz| < \frac{K}{R^2} \pi R = \frac{K\pi}{R}$$

bo'ladi. Keyingi (2.2.19) munosabatdan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C R(z)dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqoridagi tenglikdan  $R \rightarrow \infty$  da limitga o'tib topamiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{res}_{z=z_k} R(z). \quad (2.2.20)$$

Demak,  $R(z)$  funksiya yuqorida aytilgan shartlarni qanoatlantirsa, unda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

Integral  $R(z)$  funksiyaning yuqori yarim tekislikdagi barcha maxsus nuqtalaridagi chegirmalar yig'indisini  $2\pi i$  ga ko'paytirilganiga teng bo'lar ekan.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\lim z_k \geq 0} \operatorname{res}_{z=z_k} R(z).$$

ham yoziladi.

**2.2.3-misol.** Ushbu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

integralni hisoblang. Ravshanki,

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

Funksiya uchun  $z=i$  nuqta yuqori yarim tekislikda joylashgan ikkinchi tartibli qutb nuqta bo'ladi. Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

Endi(6) formuladan foydalanib, funksiyaning chegirmasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{(z-i)^2}{(z^2 + 1)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \left( -\frac{1}{4}i \right) = \frac{\pi}{2}$$

bo'ladi.

**2.2.4-misol.**  $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}$  (Laplas) integralini hisoblash uchun biz

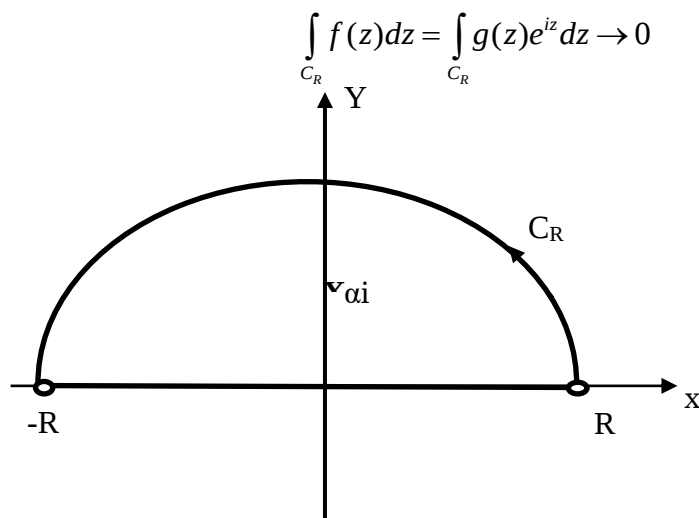
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

yordamchi funksiya dan va 2.2.3-chizmadagi konturni tanlab olamiz.  $C_R$

$$\text{da } g(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$$

funksiya  $|g(z)| < \frac{1}{R^2 - a^2}$  tengsizlikni qanoatlantiradi va (u Jordan lemmasi bo'yicha)

$R \rightarrow \infty$  da 0 ga tekis intiladi. U holda Jordan lemmasiga ko'ra



2.2.3- chizma yarim aylana konturi

Ixtiyoriy  $R > 0$  uchun chegirmalar haqidagi teorema ga asosan

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}$$

ga ega bo'lamiz. Bu tenglikda  $R \rightarrow \infty$  da limitga o'tsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Integral ostidagi funksiyaning haqiqiy qismini ajratib, uning juftligidan foydalansak

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

**2.2.5-misol.**  $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = si\infty$  (2.2.21)

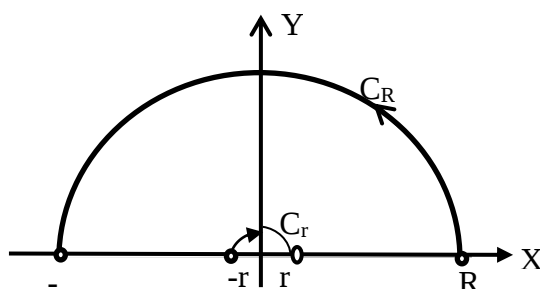
(Eyler) integralini hisoblash uchun biz

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

yordamchi funksiyani olamiz. Integrallash konturini 2.2.4-chizmadagi ko'rsatilganidek tanlab olamiz.  $z=0$  nuqta  $c_r$  kichkina yarim aylanani aylanib chiqadi yoki bu  $f(z)$  ning maxsus nuqtasidir.

Koshi teoremasiga asosan

$$\int_R^{-r} f(z) dz + \int_{c_r} f(z) dz + \int_r^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$



2.2.4-chizmayarim aylana konturi

bo'ladi.

Jordan lemmasidan ko'rinib turibdiki

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

$\int_{c_r} f(z) dz$  ni baholash uchun biz  $z=0$  atrofida  $f(z)$  ning Loran ajralishini ko'rib

o'tamiz: bu ajralish quyidagi ko'rinishda

$$f(z) = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2} + \dots}{z} = \frac{1}{z} + P(z)$$

bo'ladi. Bu yerda  $P(z)$  -  $z=0$  da uzluksiz bo'lgan funksiya. Bu yerdan ko'rinib turibdiki

$$\int_{c_r} f(z) dz = \int_{c_r} \frac{dz}{z} + \int_{c_r} P(r) dz = \int_{\pi}^0 \frac{re^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -\pi + O(r)$$

Bunday holda Koshi teoremasini

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_r^R \frac{e^{ix} dx}{x} = i\pi + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Birinchi integraldagi  $x$  ni  $-x$  ga aylantirganda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

ga tengligi va buni ikkinchi integral bilan birlashtirsak, biz

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = i\pi + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

ga ega bo'lamiz.  $r \rightarrow 0$  va  $R \rightarrow \infty$  da limit

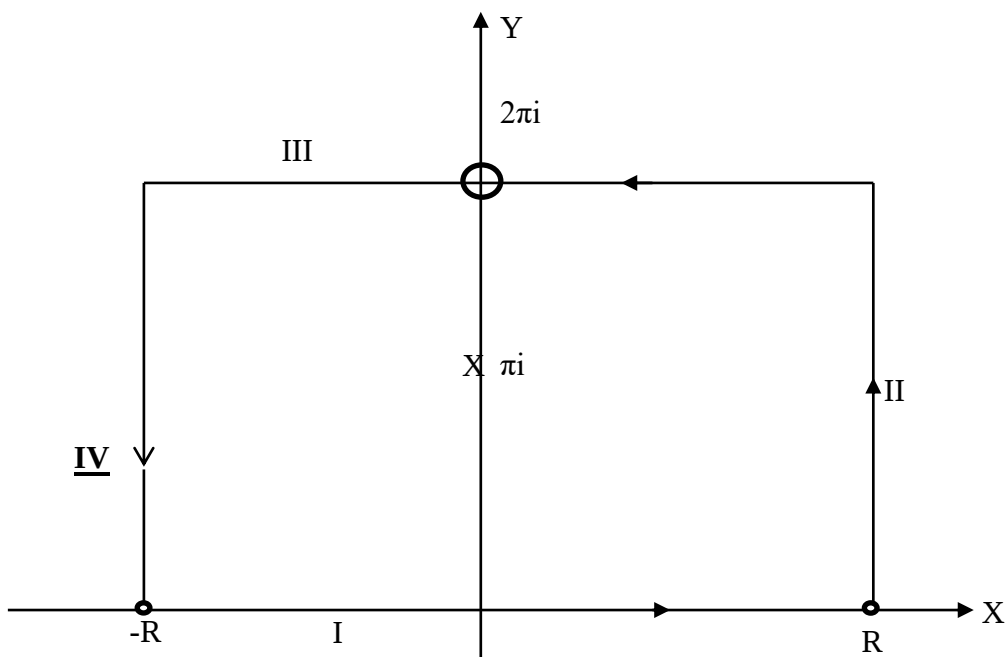
$$\text{si}\infty = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (2.2.22)$$

ligini olamiz.

Keyingi misollarimizda ko'rsatgichli funksiyalarni o'zida mujassam etgan integralni hisoblashni keltirib o'tamiz.

**2.2.6-misol.**  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x}$  (Eylar) integralini hisoblash uchun biz

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$



2.2.5-chizma to'rtburchak kontur

funksiyani qaraylik.  $z = 2\pi i$  mavhum aylanishga ega bo'lgan xossasidan u  $e^{2\pi i a}$  o'zgarmas ko'phadga ko'payadi. 2.2.5-chizmada ko'rsatib qo'yilgan to'g'ri burchak konturi bo'yicha  $f(z)$  ni shunga mos integrallaymiz. Buni ichida  $f(z)$   $c_{-1} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}$  chegirma bilan birinchi tartibli  $z = \pi i$  qutbga ega bo'ladi. Demak, chegirmalar haqidagi teorema bo'yicha

$$\int_I \frac{e^{az} dz}{1+e^z} + \int_{II} \frac{e^{az} dz}{1+e^z} + \int_{III} \frac{e^{az} dz}{1+e^z} + \int_{IV} \frac{e^{az} dz}{1+e^z} = -2\pi i e^{a\pi i}$$

bo'ladi.

$$\int_I \frac{e^{az} dz}{1+e^z} = \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}, \quad \int_{III} \frac{e^{az} dz}{1+e^z} = \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2a\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1+e^x}$$

larga egamiz.

II va IV kesmalarga mos

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1} = \frac{e^{(a-1)R}}{1 - e^{-R}},$$

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} \right| \leq \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}};$$

Demak,  $0 < a < 1$  bo'lsa unda  $R \rightarrow \infty$  da ikkala  $\int_{II} \frac{e^{az} dz}{1+e^z}$  va  $\int_{IV} \frac{e^{az} dz}{1+e^z}$  integral ham 0 ga intiladi.

Shunday qilib,  $0 < a < 1$  da

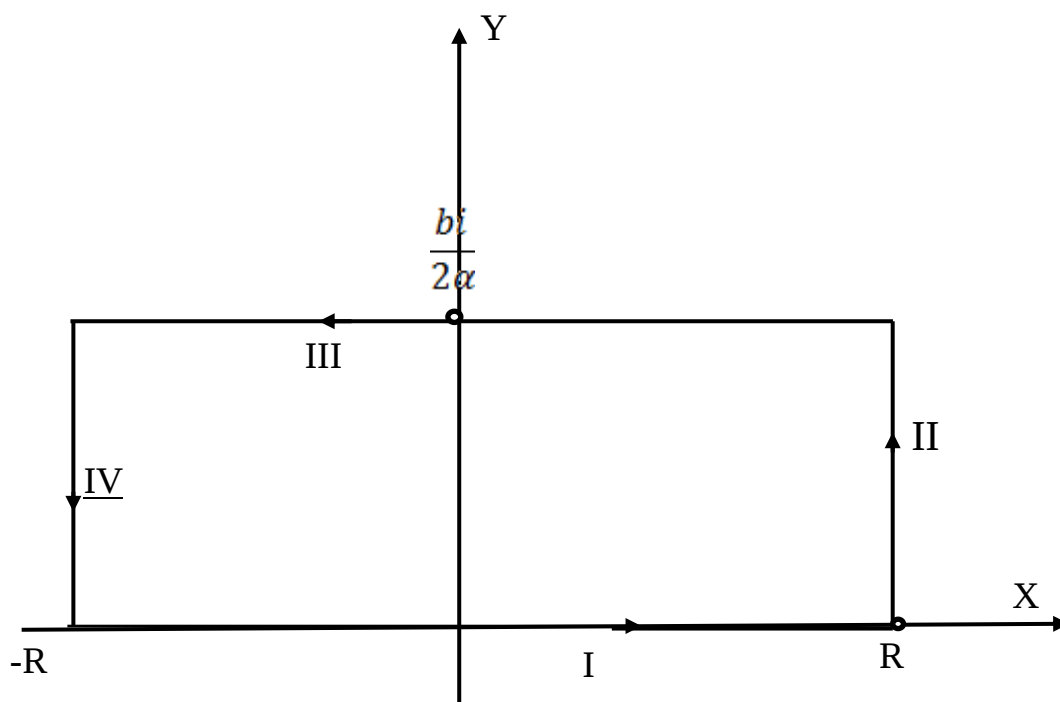
$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1+e^x} + O\left(\frac{1}{R}\right) = -2\pi i e^{a\pi i}$$

bo'ladi va  $R \rightarrow \infty$  dagi limitdan izlanayotgan integralimizga ega bo'lamiz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1) \quad (2.2.23)$$

**2.2.7-misol.**  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$  (Puasson) integralini hisoblash uchun  $f(z) = e^{-az^2}$

funksiyani qaraymiz va uning haqiqiy o'qdagi integrali mashhur natija ( $\operatorname{erf} \infty = 1$ ) asosida hisoblanadi,  $y = h$  to'g'ri chiziqda esa u



2.2.6-chizma to'rtburchak konturi

$e^{-a(x+ih)^2} = e^{ah^2} \cdot e^{-ax^2} (\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$  funksiyaga aylanadi,  $h = \frac{b}{2a}$  bo'lgan holda

haqiqiy qismi o'zgarmas ko'phadli integral osti funksiyadan farq qiladi. Bunga mos holda biz 2.2.6-chizmada ko'rsatilganidek integrallash konturini tanlab olamiz. Koshi teoremasiga asosan

$$\int_I e^{-ax^2} dx + \int_{II} e^{-ax^2} dx + \int_{III} e^{-ax^2} dx + \int_{IV} e^{-ax^2} dx = 0 \quad (2.2.24)$$

bo'ladi. Bu yerda

$$\int_I = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2} dt, \quad \int_{III} = -e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-R}^R e^{-ax^2} e^{-ibx} dx$$

II va IV kesmalarda  $x = \pm R$  bo'lganda

$$\left| e^{-ax^2} \right| = e^{-a(R^2-y^2)} \leq e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2};$$

bo'ladi. Demak, agar  $a > 0$  bo'lsa,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{III} = 0$  ni qo'llab

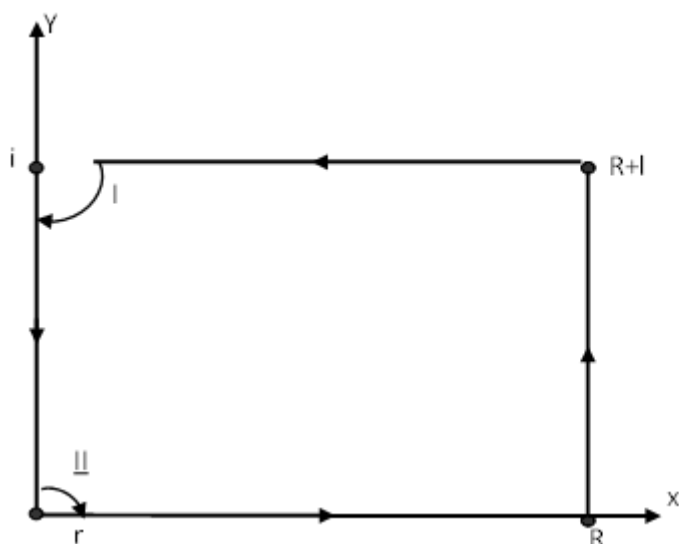
$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ibx} dx = 0$$

ni topamiz. Bu yerdan esa haqiqiy qismlarni taqqoslashdan yakuniy yechimga kelamiz:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a}} (a > 0) \quad (2.2.25)$$

**2.2.8-misol.**  $\int_0^{\infty} e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{sh \pi x} dx$  (Lejandr) integralni hisoblash uchun biz  $f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z} - 1}$

yordamchi funksiyani olamiz va uni 2.2.7-chizmada ko'rsatilgan kontur bo'yicha integrallaymiz.  $f(x+i) = e^{-a} f(x)$  ekanligidan integralning yuqori va quyi chegaralarini bir qilib birlashtirish mumkin;



2.2.7- chizma to`rtburshak konturi

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R f(x) dx,$$

$x = R$  kesma bo'yicha integral  $R \rightarrow \infty$  da 0 ga intiladi (2.2.7-misolga qarang).  $x = 0$  kesmada esa  $z = iy$  deb olamiz. Unda Koshi teoremasiga asosan

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R -i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} dy}{e^{2\pi iy} - 1} + \int_I + \int_{II} + O\left(\frac{1}{R}\right) = 0 \quad (2.2.26)$$

Bu yerda I va II (2.2.7-chizmaga qarang) aylanadagi yoylarni ifodalaydi.  $z = i$  nuqta yaqinida biz

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{e^{2\pi(z-i)} - 1} = \frac{e^{-a} + c_1(z-i) + \dots}{2\pi(z-i) + c_2'(z-i)^2 + \dots} = \frac{e^{-a}}{2\pi} \frac{1}{z-i} + P(z-i)$$

ga egamiz. Bu yerda  $P(z-i) - z = i$  nuqtadagi to'g'ri funksiya;

I yoyda biz  $z = i + re^{i\varphi}$ ;  $dz = rie^{i\varphi} d\varphi$  ga egamiz, unda

$$\int_I = \frac{e^{-a}}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{rie^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + O(r) = -\frac{ie^{-a}}{4} + O(r)$$

bo'ladi.

$$\int_{II} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2}^0 id\varphi + O(r) = -\frac{i}{4} + O(r)$$

ga o'xshab (2.2.26) tenglik

$$(1 - e^{-a}) \int_r^R = i \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy} - 1} dy + \frac{i}{4} (i + e^{-a}) + O(r) + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda mavhum qismni ajratib olib va uni  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  da limitga o'taylik.

$$\operatorname{Re} \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay} dy}{e^{2\pi iy} - 1} = - \int_r^{1-r} \frac{e^{-ay}}{2} dy = \frac{1}{2a} (e^{-a} - 1) + O(r)$$

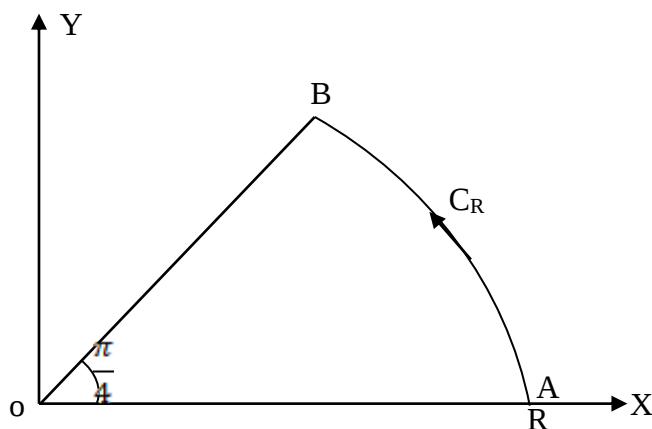
ni hisobga olamiz va yakuniy yechimga

$$\int_0^\infty e^{-\pi x} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-a}}{1 - e^{-a}} - \frac{1}{a}; (a > 0) \quad (2.2.27)$$

ga ega bo'lamiz.

**2.2.9-misol**  $I_1 = \int_I \cos x^2 dx$ ,  $I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 dx$  (Eyler) integralini hisoblash uchun biz

$f(z) = e^{iz^2}$  yordamchi funksiyani tanlab olamiz va 2.2.8-chizmada ko'rsatilgan konturni tanlaymiz.  $z^2 = \zeta$  ni almashtirishdan so'ng  $C_R$  yoyda biz



2.2.8-chizma  $C_R$  yoy

$$\int_{C_R} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{C_{R^2}} \frac{e i \zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda  $C_{R^2}$  -  $R^2$  radiusli aylananing to'rtidan bir qismidir.

Demak, Jordan lemmasiga asosan bu integral  $R \rightarrow \infty$  da 0 ga intiladi. Koshi

teoremasiga asosan, agar OA ga  $z = x$  ni,  $\alpha$  ni esa OB ga qo'ysak:  $z = t\sqrt{i}$  bo'ladi.

Bundan esa biz

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = \sqrt{i} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ga ega bo'lamiz.  $R \rightarrow \infty$  da limitga o'tishda va  $erf \infty = 1$  qiymatdan foydalanib, biz

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \sqrt{i} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ni olamiz. Bu yerda haqiqiy va mavhum qismlarni ajratib olib

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (2.2.28)$$

ni topamiz. Frenel integrali deb nomlanuvchi

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt \quad (2.2.29)$$

maxsus funksiyalar bog'liqdir.

$t = \tau^2$  ligidan

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin \tau^2 d\tau, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos \tau^2 d\tau$$

ga tengligini beradi.

Demak, (2.2.28) formulani

$$S(x) = C(\infty) = \frac{1}{2} \quad (2.2.30)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Ko'pqiyamatli funksiyalarni saqllovchi integrallarni hisoblashni boshlaylik.

**2.2.10-misol.**  $\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(z^2 + 1)^2}$  integralni hisoblash uchun biz  $f(z) = \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2}$

yordamchi funksiyani va integrallash konturini oldingi mavzuning 2.2.6-misoli kabi tanlab olamiz.  $f(z)$  funksiya  $z = i$  nuqtada chegirma bilan ikkinchi tartibli qutbga ega bo'ladi. (2.2.4-chizma)

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \{f(z)(z-i)^2\} = \left[ \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{(z+i)^2} \right]_{z=i} = \frac{\pi + 2i}{8}$$

chegirmalar haqidagi teoremaga asosan

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz + \int_{C_r} \frac{\ln z dz}{(z^2+1)^2} + \int_r^R \frac{\ln z dz}{(z^2+1)^2} + \int_{C_R} \frac{\ln z dz}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2} \quad z = Re^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi$$

da

$|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + \varphi^2} \leq 2 \ln R$  ga ega bo'lamiz. Demak,

$$\left| \int_{C_R} \right| \leq \frac{2 \ln R}{(R^2-1)^2} \pi R \quad \text{va} \quad R \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad \int_{C_R} \rightarrow 0$$

bo'ladi.

$$z = r e^{i\varphi}, 0 < \varphi < \pi \quad \text{da} \quad |\ln z| \leq 2 \ln \frac{1}{r}.$$

Demak  $\left| \int_{C_r} \right| \leq \frac{2 \ln \frac{1}{r}}{(1-r^2)^2} \pi r$  va bu integral ham  $r \rightarrow 0$  da 0 ga intiladi. Birinchi

integralni  $z = -x$  almashtirgandan so'ng

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln x + \pi i}{(x^2+1)^2} dx$$

ga ega bo'lamiz va shunday qilib  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  dagi limitga

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x^2+1)^2} + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} - \frac{\pi}{2}$$

ga egamiz.

Haqiqiy qismlarni taqqoslab biz izlayotgan integral

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{\pi}{4} \quad (2.2.31)$$

kelib chiqadi.

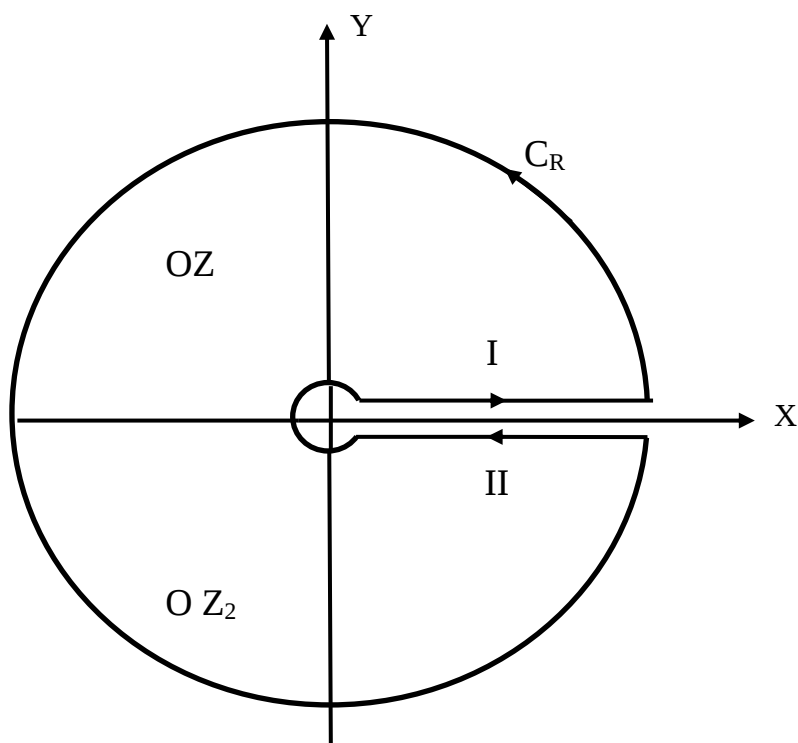
**2.2.11-misol.**  $\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2+b^2}$  integralni hisoblash uchun

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z_1+a)^2+b^2}$$

yordamchi funksiya va 2.2.9-chizmadagi ko'rsatilgan konturni tanlab olamiz. Bu

konturga kiruvchi kesimning yuqori va quyi qirg'oqlarida  $\ln^2 x$  dan olingan

integral o'zaro kamayuvchi va bundan esa izlanayotgan integralni hisoblash



2.2.9- chizma aylana konturi

imkoniyati paydo bo'ladi. Kontur ichida quyida berilgan chegirmalar bilan berilgan  $f(z)$  funksiyaning 2 ta birinchi tartibli  $z_{1,2} = -a \pm bi$  qutblari ota

$$c'_{-1} = \frac{1}{2bi} \{\ln r + i(\pi - \varphi)\}^2, \quad c''_{-1} = -\frac{1}{2bi} \{\ln r + i(\pi + \varphi)\}^2$$

Bu yerda  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  va  $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$  dir.

Chegirmalar haqidagi teoremani qo'llab

$$\int_I \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} + \int_{C_R} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} + \int_{II} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} + \int_{c_r} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2} = \frac{\pi}{b} 4\varphi(\pi - i \ln r)$$

ni olamiz.

Yuqorida aytib o'tilganga mos holda

$$\int_I \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} + \int_{II} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} + = - \int_r^R \frac{4\pi i \ln x - 4\pi^2}{(x+a)^2 + b^2} dx$$

ga egamiz.

Oldingi misoldagiga ko'ra  $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\ln x dx}{(x+a)^2} = 0$  ligini

isbotlaylik. Unda  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  da limitda

$$4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} - 4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i \ln r)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan mavhum qismlarni taqqoslashdan biz izlayotgan integralni topamiz.

$$\int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(x+a)^2 + b^2} = \frac{\varphi \ln r}{b} = \frac{\ln \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

**2.2.12-misol.** Xuddi o'sha kontur orqali  $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx (0 < a < 1)$  Eyler integrali ham hisoblanadi.

Agar yordamchi funksiya sifatida

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1+z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z}$$

olinsa, kesmaning quyi chegarasi  $f(xe^{2\pi i}) = e^{2a\pi i} f(x)$  dir. Zaruriy hisoblashlar va baholashlarni bajargach

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} (0 < a < 1) \quad (2.2.32)$$

ni olamiz.  $x = e^t$  almashtirish bajarilganda bu integral xuddi oldingi 2.2.7-misoldagi integralga olib kelinadi.

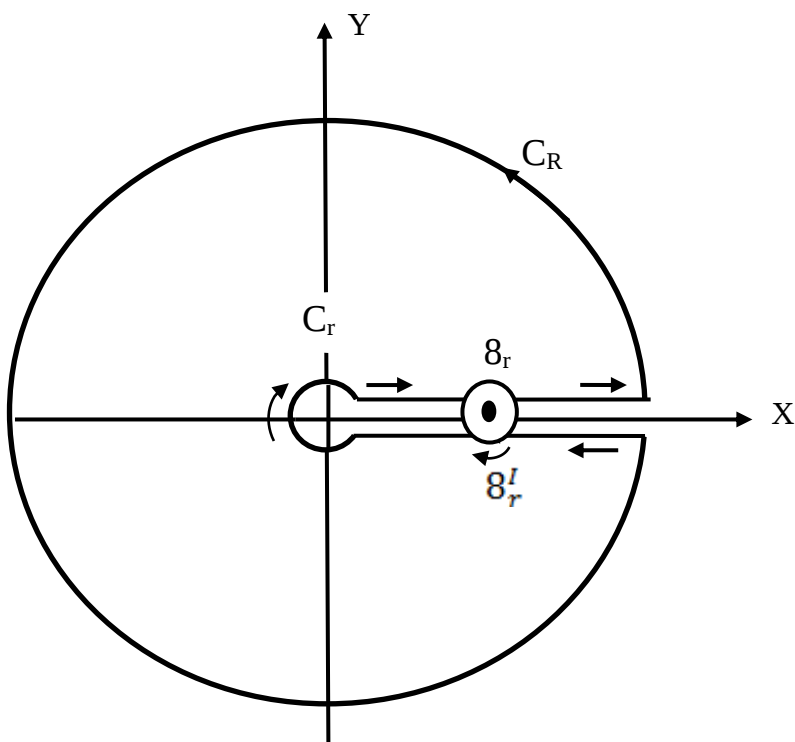
**2.2.13-misol.** Maxsus  $I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x} dx (0 < a < 1)$  integralning asosiy qiymatini

hisoblaylik. Buni hisoblash uchun biz

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z} = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{1-z}$$

yordamchi funksiyaning tanlab olamiz va 2.2.10-chizmada ko'rsatilgan konturni tanlaymiz. Koshi teoremasiga asosan biz

$$\begin{aligned} & \frac{e^{(a-1)\ln z} dz}{1-z} + (1 - e^{2a\pi i}) \left\{ \int_r^{1-r} f(x) dx + \int_{1+r}^R f(x) dx \right\} + \\ & \int_{C_r} + \int_{\gamma_r} \frac{e^{(a-1)\ln z} dz}{1-z} + \int_{\gamma'_r} \frac{e^{a-1} \ln z dz}{1-z} + \int_{C_R} \frac{e^{(a-1)\ln z} dz}{1-z} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.34)$$



#### 2.2.10- chizma aylana konturi

ga egamiz.  $r \rightarrow 0$  da  $\int_{C_r}$  ga va  $R \rightarrow \infty$  da  $\int_{C_R} \rightarrow 0$  bo'lishi ko'rinib turibdi.  $\gamma_r$  va  $\gamma'_r$

bo'ylab mos holda  $z^{a-1} = 1 + O(r)$  va  $z^{a-1} = e^{2a\pi i} + O(r)$ ;  $1 - z = re^{i\varphi}$ ,  $dz = -ire^{i\varphi}d\varphi$  ga egamiz. Bu yerda  $\varphi$  0 dan  $-\pi$  gacha va  $-\pi$  dan  $-2\pi$  gacha o'zgaradi. Demak

$$\int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} = \pi i(1 + e^{2a\pi i}) + O(r).$$

bo'ladi.  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  da limitga o'tishda

$$(1 - e^{2a\pi i})I + \pi i(1 + e^{2a\pi i}) = 0$$

ni olamiz. Bu yerdan izlangan maxsus integralimiz

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x} dx = \pi \cot a\pi \quad (2.2.34)$$

ga teng.

**2.2.14-misol.**  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2}$  ( $a > b > 0$ ) integralni hisoblash uchun  $e^{it} = z$  deb

olamiz. Unda  $dt = \frac{dz}{ie^{it}} = \frac{dz}{iz}$ ,  $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  bo'ladi va bu integral birlik aylana bo'yicha olingan integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2} = \frac{4}{ib^2} \int_{|z|=1} \frac{zdz}{(z^2 + \frac{2a}{b}z + 1)^2}$$

ga o'tadi.  $|z|=1$  aylana ichidagi integraosti funksiya bitta  $z_0 = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - a}{b}$  qutbga

$$C_{-1} = \left[ \frac{d}{dz} \frac{z}{(z + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{b})^2} \right]_{z=z_0} = \frac{b^2 a}{4(a^2 - b^2)^{3/2}}$$

chegirmaga ega bo'ladi.

chegirmalar haqidagi teorema asosan izlanayotgan integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b \cos t)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \quad (a > b > 0) \quad (2.2.35)$$

### Xulosasi.

II-bob 2 qismdan iborat bo'lib, ular chegirmalar va ularni hisoblash, chegirmalar nazariyasining ba'zi tadbirlariga bag'ishlangan.

Bu bobda asosan, maxsus nuqtalar, qutb nuqtalarva u haqidagi teorema, chegirmalar nazariyasi, chegirmalar haqidagi teoremlar, chegirmalarni hisoblash usullari va chegirmalar nazariyasining bir necha tadbirlari ularga doir bir qator misollar keltirilgan.

Bir qator integrallarning qiymatlari chegirmalar yordamida hisoblab ko'rsatilgan.

### **Xotima.**

Bu bitiruv malakaviy ishida kompleks o'zgaruvchili funksiya tushunchasi, haqida ma'lumot berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining birinchi qismi bu kompleks o'zgaruvchili funksiya haqida. Bu qismda kompleks o'zgaruvchili funksiya tushunchasi, kompleks o'zgaruvchili funksiya integrali va uning xossalari, Koshi teoremasi, Koshi integrali, ularning isbotlari keltirilgan. Bundan tashqari ularga doir misollar ko'rilgan.

I bobning uchinchi qismi Loran qatorlari. Bu qismda Loran qatoriga doir teorema, ta'rif va uning xossalari, Loran qatoriga oid misollar o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy qismi chegirmalar nazaryasini o'rganishdan boshlangan. Chegirmalarga ta'riflar, teoremlar isboti bilan keltirilgan. Bularga misollar ko'rilgan.

Asosan chegirmalar nazaryasining Funksiyaning yopiq egri chiziq bo'yicha integrallarini hisoblash,  $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$  ko'rinishdagi integralni hisoblash,

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$  ko'rinishdagi integrallarni hisoblashning tadbirlari keltirilgan. Bularga doir misollar ko'rilgan.

Bitiruv malakaviy ishimdan Oliy o'quv yurtlari talabalari foydalanishlari mumkin.

## Adabiyotlar

- 1) Karimov I.A. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganining 18-yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruzasi. "Milliy tiklanish" 2010-yil 8-dekabr 1-3 b
- 2) Karimov I.A. "Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch" Toshkent "Ma'naviyat" 2008 60-64 b
- 3) Karimov I.A. Barkamol avlod orzusi "O'zbekiston milliy ensiklopediyasi" Davlat ilmiy nashriyoti Toshkent 2000 9-31 b
- 4) Г. Худайберганов, А. Ворисов "Комплекс анализ" Тошкент (1998)
- 5) М.А.Лаврентьев и Б.В. Шабат "Методы теории функций комплексного переменного" (1973) 438-447 б
- 6) Г. Худайберганов, А. Ворисов "Математик анализ курсидан мисол ва масалалар туплами" Toshkent 2000. 292-330 b
- 7) Т. Азларов Х. Мансуров "математик анализ курсидан мисол ва масалалар туплами" (1994)
- 8) Б.А. Фукс ва Б.В. Шабат "Функция комплексного переменного и некоторые их приложения" 1959
- 9).Гахов Ф.Д "Крайевие задачи" Москва "Наука", 1977.
- 10) Краснов М.Л "Интегральные уравнения" Москва "Наука", 1977
- 11) /<http://www.nitolsalar.com/ru.tech/nolgtesi>.
- 12)<http://toshkent.uz/uz/news/antide/4073>.
- 13)<http://uzbek.trib.ir/irillik/.512-orbital-mat.stansiya.htm>.
- 14)<http://ziyo.net/>.
- 15) <http://www.mathematices.com/>.