

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Fizika-matematika fakulteti

“Matematik fizika va analiz” kafedrası

Rajabova Kamola G'olibovna

“Genetikada algebraik strukturalar” mavzusida

“Matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat
berildi”

Ilmiy rahbar _____ prof. U.A.Roziqov
“_____” _____ 2015 y.

Kafedra mudiri _____ dots. R.T.Muxitdinov
“_____” _____ 2015 y.

Taqrizchi _____ prof.I.I. Safarov
“_____” _____ 2015 y

«Himoya qilishga ruxsat berildi »
Fakultet dekani _____ prof. Sh.M. Mirzayev
“_____” _____ 2015 y.

Buxoro – 2015 y.

MUNDARIJA.

KIRISH	4
I . Evolyutsion algebra va uning turli fanlarga tadbiqlariga misollar	
1.1. Fizikadan misollar.....	13
1.1.1. Diskret fazoda harakatlanuvchi zarrachalar.....	13
1.1.2. Diskret fazodagi oqimlar. Feynman grafi.....	13
1.2. Topologiyadan misollar.....	16
1.2.1. 3- sirtidagi zarrachalar harakati.....	16
1.2.2. Manfiy ehtimolli o'ramga ixtiyoriy o'tish.....	17
1.3. Ehtimollar nazariyasidan misollar. Stoxastik jarayonlar.....	18
1.4. Evolyutsion algebralar.....	18
1.4.1. Jo'nash nuqtasi. Birlik elementning mavjudligi.....	18
II . Evolyutsion algebralarning asosiy xossalari.	
2.1. Asosiy ta'riflar.....	27
2.1.1. Evolyutsion algebra ideallari.....	29
2.1.2. Evolyutsion algebraning faktorlari.....	30
2.2. Bazis elementlarining xossalari.....	31
2.2.1. Bog'langan munosabatlar.....	31
2.2.2. Ba'zi qiziqarli ayniyatlar.....	33
III . Evolyutsion operatorlar va algebralar ko'paytmasi	

3.1. Evolyutsion operatorlar.....	36
3.1.1. Generator to'plamlarni almashtirish.....	37
3.1.2. Evolyutsion algebra generator to'plamining „qattiqligi“.....	39
3.1.3. Evolyutsion algebraning avtomorfizm gruppasi.....	40
3.1.4. Evolyutsion algebralarning ko'paytirish algebrasi.....	41
3.1.5. Evolyutsion algebralarda hosila olingan L_f algebrasi.....	43
3.1.6. Evolyutsion algebralarning sentri (markazi).....	44
3.2. Assotsiativ bo'lmagan Banax algebrasi.....	45
3.2.1. Evolyutsion algebralarda norma ta'rifi.....	45
3.2.2. Evolyutsion algebralarda Banax fazosi sifatida.....	47
3.2.3. Davriylik va algebraik qat'iylik.....	49
3.2.4. Evolyutsion algebradagi generatorning davriyligi.....	49
XOTIMA.....	53
ADABIYOTLAR.....	55

Agar bolalar erkin fikrlashni o'rganmasa, berilgan ta'lim samarasi past bo'lishi muqarrar.

I.A. Karimov

KIRISH

Prezident I. A. Karimov “Faqatgina chinakkam ma'rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini bir so'z bilan aytganda, o'zligini anglash, erkin va ozod jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatida o'ziga munosib obro'li o'rin egallashi uchun fidoiylilik bilan kurashishi mumkin” – deb bejizga aytmaganlar. Kelajak avlod haqida qayg'urish, sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalab yetishtirishga intilish bizning milliy xususiyatimizdir.

Biz Alisher Navoiy, Bobur, Xorazimiy, Beruniy, Imom Buxoriy, Qoshg'ariy, Ulug'bek, Umar Xayyom, Ibn Sino avlodlari har tomonlama yetuk, barkamol bo'lib yetishishimiz uchun keng imkoniyatlar yaratilib, Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov yosh avlod tarbiyasiga juda katta e'tibor berib, kelajakda iqtidorli, qobiliyatli mutaxassislar tayyorlash borasida ko'plab sayyi- harakatlarni amalga oshirmoqdalar. Jumladan “Asosiy vazifamiz- vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz faravonligini yanada kuchaytirishdir” nomli 2009 yilining asosiy yakunlari va 2010 yilda O'zbekistonni ijtimoiy – iqtisodiy rivojlanishining eng muhim ustuvor yo'nalishlariga bag'ishlangan Vazirlar Mahkamasining majlisidagi ma'ruzasida “Biz farzandlarimizning nafaqat jismoniy va ma'naviy sog'lom o'sishi balki ularning eng zamonaviy intellektual bilimlarga ega bo'lgan, uyg'un rivojlangan insonlar bo'lib XXI asr talablariga to'liq javob beradigan barkamol

avlod bo'lib voyaga yetishi uchun zarur barcha imkoniyat va sharoitlarni yaratishni o'z oldimizga maqsad qilib qo'yganmiz.

Shu kunlarda hukumatimiz tomonidan ushbi masala yuzasidan qabul qilingan Davlat dasturi ana shu ezgu maqsadga erishish yo'lida, jami davlat va nodavlat manbalarni hisobga olgan holda, mavjud barcha resurs va imkoniyatlarimizni safarbar etilishni ko'zda tutadi"- deganlar.

Shuningdek, "Barkamol avlod yili " davlat dasturi to'g'risidagi O'zbekiston Respublikasi Prezidentining Qarorida "Ta'lim jarayonida yangi axbarot kommunikatsiya va pedagogik texnologiyalarni, elektiron dasturlar, multimediya vositalarini keng joriy etish orqali mamlakatimiz maktablarida, kasb- hunar kollejlari, litseylar va oliy o'quv yurtlarida o'qitish sifatini tubdan yaxshilash, ilm-fanni yanada rivojlantirish, iqtidorli va qobiliyatli yoshlarni ilmiy faoliyatga keng jalb etish, ularning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarish uchun sharoit yaratishga doir kompleks chora- tadbirlarni ishlab chiqish", ko'zda tutilgan vazifalardan hisoblanar ekan, darslarda Yangi Pedagogik Texnologiyalardan foydalanish, ta'lim samaradorligini oshirish. Prezidentimiz Islom Abdug'anevich Karimov ta'kidlagan- "Erkin fikrlash" ni o'rganish uchun ayni muddo bo'ladi.

Yurtboshimiz "Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" asarlarida quyidagi satrlarni o'qish mumkin: "Mamlakatimizni istiqlool yo'lidagi birinchi qadamlaridayoq, buyuk ma'naviyatimizni tiklash va yanada yuksaltirish, milliy ta'lim-tarbiya tizimini takomillashtirish, uning milliy zaminini mustahkamlash, zamon talablari bilan uyg'unlashtirish asosida jahon andozlari va ko'niklamali darajasiga chiqarish maqsadida katta ahamiyat berib kelinmoqda."

Jumladan, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" da ta'kidlanganidek, - Ta'lim sohasini tubdan isloh qilish uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xolis etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida yuksak ma'naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash milliy tizimini yaratish" dan iborat. Ta'lim tizimini isloh qilish bilan bir qatorda,

ta'lim jarayonining mazmunini, uning shakli tuzulmasi va unga qo'yilgan talablar ham yangicha ko'rinishga o'tmoqdaki, u endi o'zining oldingi, ya'ni sobiq tizim davridagi qotib qolgan ma'muriy, pedagogik tizimdan tubdan farq qilishi bilan xarakterlanadi.

Prezident Islom Abdug'aniyevich Karimov "Barkamol avlod- O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" mavzusidagi yana quyidagilarga to'xtalib o'tgan edi. Umumlashtirilgan holda kadrlar tayyorlash tizimining shakillanishi va faoliyat ko'rsatishning asosiy tamoillari, mening nazarimda quyidagi vazifalarni o'z ichiga oladi.

- Barcha xil va turdagi ta'lim muassasalarida yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash uchun uzliksiz ta'lim, fan va ishlab chiqarish salohiyatidan samarali foydalanish;

- Davlat ta'lim standartlarini joriy etish va ularni faoliyat ko'rsatish mexanizmini ishlab chiqarish

- Ixtisosliklar, malaka darajasiga ko'ra mutaxassislarga bo'lgan umumdavlat va mintaqaviy talablarning istiqbolni aniqlash.

- Ta'lim tizimini tuzilishi va mazmun jihatdan isloh qilish uchun o'qituvchilarni va murabbiylarni qayta tayyorlash.

- Davlat va ijtimoiy muassasalarning kasbga yo'naltirish bo'yicha faoliyatini takomillashtirish. Bunda kasb tanlashning bozor ehtiyojlari va imkoniyatlarini e'tiborga olish zarur.

- O'quvchi yoshlarni Vatanga sadoqatli bo'lish ruhida tarbiyalash.

- Ta'limiy muassasalarni birinchi navbatda, umumta'lim maktablarini davlat tomonidan to'liq ta'minlashni meyorlarni oshirish va uning mexanizmini takomillashtirish;

- Kadrlar tayyorlash tizimi iste'molchilarni – muassasalar, banklar va boshqalarning imkoniyatlaridan, birinchi navbatda, o'rta maxsus kasb- hunar

o`quv yurtlari va oliy o`quv yurtlarining moddiy va molyaviy bazasini mustahkamlash uchun mumkin qadar kengroq foydalanish;

- Qonun doirasida o`quv rejalari, dasturlari va o`qitish yo'llari, tabiiy xizmatlarni belgilashda ta'lim muassasalarida, birinchi navbatda, oliy o`quv yurtlarida mustaqillik berish va o`zini- o`zi boshqarishni joriy etish.

Tabiiyki, bunday murakkab vazifalarni amalga oshirishda davlat va jamiyatning ma'suliyati alohida ahamiyat kasb etadi.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzluksiz rivojlantirish va takomillashtirishning kafili bo'lishi zarur. Ular yuqori malakali, raqobatga qodir mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ta'lim muassasalarining faoliyatini uyg'unlashtirishi lozim.

Bu borada, yangi pedagogik texnologiyalarni o`quv jarayonida qo'llash jahon amaliyotida keng tarqalmoqda. Bu sohada ayniqsa AQSh, Angliya, Italiya, Fransiya, Rossiya, Yaponiya, Xitoy, Indoneziya mamlakatlarida birmuncha yutuqlarda erishilmoqda.

- O`quvchilarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib natijasida ularning aql-zakovat rivojiga tabiat va jamiyatdagi muammolarni hal etishning maqbul yo'llarini topa olishlariga ko'maklashish;

- O`quvchilarda vatanparvarlik, milliy g'ururni tarkib toptirishni rivojlantirish;

- O`quvchilarni qomusiy olimlarimizning matematikaga qo'shgan ulkan hissaslaridan xabardor qilish;

- Jamiyat tayaqqiyotida matematikaning ahamiyatini his qilgan holda umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to'g'risidagi tasavvurlarni shakllantirish;

ishlari olib borilmoqda.

Ona Vatanimizning jahondagi rivojlangan dunyoviy demakratik davlatlardan biriga aylantirish, ta'lim tarbiya ishlari milliy g'oya tizimidagi ustuvor ahamiyat kasb etadi. Hozirgi kundagi taraqqiyotimizning asosiy yo'nalishi bo'lgan bosh milliy

g'oya ustida to'xtalib, Prezidentimiz Islom Karimov quyidagi fikrlarni aytdilar: "Bizning bosh strategik maqsadimiz qat'iy va o'zgarmas bo'lib, bozor iqtisodiyotiga asoslangan erkin demokratik davlar barpo etish, fuqorilik jamiyatining mustahkam poydevorini shakillantirishfa iborat." Bu esa O'zbekistonning rivojlangan , kelajagi buyuk davlatga aylantirishning asosiy shartlaridan biri.

Istiqlol yo'lida qadam tashlab boarayotgan Vatanimizdagi mavjud ma'naviy madaniy omillarga ahamiyat berish bilan birga maorif, ta'lim tarbiya ishlariga e'tibor kuchaytirilmoqda.

Ta'lim va tarbiya tizimini o'zgarmasdan turib ongni o'zgartirib bo'lmaydi. Ongni, tafakkurni o'zgartirmasdan turub esa biz ko'zlagan oliy maqsad "Ozod va obod jamiyatni barpo etib bo'lamaydi deydlar " deydlar Prezidentimiz I.A. Karimov

Respublikamizda ta'limning yangi tizimini amalga oshirishda tariximizdagi ta'lim jarayonlarini o'rganib chiqib ta'limni isloh qilish dasturi tayyorlandi.

Barcha e'tibor ta'lim tizimini demokratik va insonparvarlik tamoyillari asosida takomillashtirish, uning moddiy texnika bazasini zamon va davr talablari darajasida ko'tarish va O'zbekiston ma'rifiy salohiyatini kuchaytirish qaratiladi.

Shu maqsadda 1992- yil 2- iyulda "Ta'lim to'g'risidagi " qonun qabul qilindi.

Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I. A. Karimovning Respublika Oliy Majlisi IX sessiyasida so'zlangan nutqi va "Ta'lim – tarbiya va kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish, barkamol avlodni voyaga etkazish to'g'risi" dagi Farmoni muhim ahamiyatga ega edi. Bu esa oliy ta'lim tizimida o'qitish sistemasini isloh qilishni taqizo etadi. Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturini amalga oshirish vazifalarida biridir. Matematika, informatika, axborot texnologiyalari o'sib borayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fanlari sifatida keng imkoniyatlarga ega. Ular tafakkurni

rivojlantirib, aqlni chaqxladi, fikrlashni tartibga soladi. Bu Prezidentimiz Islom Abdugʻaniyevich Karimovning "Oʻzbekiston XXI asr boʻsagʻasida : xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari" nomli kitoblarida keltirilgan quyidagi soʻzlardan ham bilib olask boʻladi: „Respublika quyidagi yoʻnalishlar boʻyicha – jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan boʻlib, ularda tadqiqotlar muvaffaqiyatli olib borilmoqda. Matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar shular jumlasidandir“, - degan fikrlarga mos keladi.

Taʼlim sohasida oʻquv muassasalarini qurish, rekonstruksiya qilish va kapital taʼmirlash borasidagi ishlar izchil davom ettirildi. Oʻtgan yili hammasi boʻlib 540 dan ziyod obyekt, shu jumladan , 380 ta maktab, 160 dan ortiq kasb-hunar kolleji va akademik litsey tubdan yangilandi. Mazkur maqsadlar uchun qariyb 550 milliard soʻm sarflandi. Ushbu mablagʻlarning 120 milliard soʻmdan ortigʻi taʼlim muassasalarini oʻquv , laboratoriya va ishlab chiqarish uskunalari, kompyuter va multimedia vositalari bilan taʼminlash uchun ajratildi.

2011-2016- yillarda oliy taʼlim muassasalarini moddiy- texnik bazasini modernizatsiya qilish dasturi doirasida 19 ta oliy taʼlim muassasasida qurilish, rekonstruksiya qilish, kapital taʼmirlash va jihozlash boʻyicha qiymati 230 milliard soʻmlik ishlar bajarildi. Andijon davlat universiteti, Buxoro muhandislik- texnologiya instituti, Oʻzbekiston Milliy universitetida yangi oʻquv binolari barpo etildi.

2014-yilda bir qator yangi institute va fakultetlar, oʻquv-ilmiy markazlar ochildi. Toshkent tibbiyot akademiyasining stomotologiya fakulteti va hududlardagi tibbiyot oliy oʻquv yurtlari negizida Andijon, Buxoro, Samarqand va Nukus shaharlarida filiallariga ega boʻlgan Toshkent davlat stomotologiya institute tashkil etildi.

Toshkent davlat sharqshunoslik institutida xitoyshunoslik fakulteti ochildi, shuningdek shu institute qoshida Abu Rayxon Beruniy nomidagi Sharq qoʻlyozmalari markazi tashkil qilindi.

Malakaviy bitiruv ishining dolzarbligi:

Biologiyaning evolyutsion nazariyasini o'rganishda evolyutsion algebralar hosil bo'ladi. Evolyutsion algebra deb nomlangan algebraning sinfiga e'tibor qilamiz. Evolyutsion algebra tushunchasi algebra va dipotik sistemalar orasida yotadi. Algebraik jihatdan evolyutsion algebralar Banach algebrasi bilan noassosiativ almashtirishi bilan bog'liq masalalar zamonaviy matematik fizikaning ko'plab sohalarda uchray turadi. Bunday almashtirishlar operatorlar nazariyasida ham alohida o'rin egallaydi. Ma'lumki, almashtirishi izometrik operatoridir, shu sababli bu almashtirish yordamida hosil qilingan yangi operatorning spektri ustma-ust tushadi.

Malakaviy bitiruv ishining maqsadi va vazifalari:

Zamonaviy matematik nazariyalar turli sohalarda qo'llanilmoqda. Xususan, biologiyaning masalarida matematik apparat keng tadbiiq etilmoqda. Malakaviy bitiruv ishim shunday tadbiiqlardan biri, ya'ni genetikada algebraning tadbiiqini o'rganishga bag'ishlanadi. Maqsad, genetikada hosil bo'ladigan algebralarni aniqlash, ularning asosiy xossalarni o'rganish va biologiyaga tadbiiqlarni tushinish. Asosiy vazifa, hozirgi kungacha bu sohada olingan natijalarni sistematik tasniflash va undagi matematik metodlarni o'rganish.

Malakaviy bitiruv ishining obykti va predmeti:

Ishning obykti evolyutsion algebralar va predmeti esa algebra. B. M. I. ning obykti va predmeti bu evolyutsion algebralarning ta'riflari va asosiy xossalari fizika, topologiya va ehtimollar nazariyasiga tadbiiqlari. Ulardan foydalanish jarayonida turli xil ta'rif, tushuncha va tasdiqlardan foydalaniladi. Bitiruv malakaviy ishini tayyorlash jarayonida almashtirishining asosiy xossalari o'rganilib, ularga doir misollar tahlil qilinadi. Bunda umumiy natijalar va xulosalar olindi. Ushbu mavzuga oid turli xil adabiyotlardan foydalanildi.

Malakaviy bitiruv ishining ilmiy yangiligi:

Malakaviy ish referativ xarakterga ega. Unda asosan bugungi kungacha evolyutsion algebralar nazariyasida olingan natijalar va ularning tadbiqlari sistematik tasnif etiladi.

Tadqiqot usuli va uslubiyoti.

Ish asosan nazariy xarakterga ega. Unda kommutative va no-associative algebralar usullari. No-chiziqli akslantirishlar, chiziqli algebra, matritsalar nazariyasi usullari qo'llaniladi.

Olingan asosiy natijalar.

Ish referativ xarakterga ega, unda evolyutsion algebralarining quyidagi xossalari o'rganildi:

1. Asosiy ta'riflar va turli sohalarga tadbigiga misollar,
2. Evolyutsion algebra ideallari va faktorlari. Bazis elementlarining xossalari.
3. Ba'zi qiziqarli ayniyatlar
4. Evolyutsion algebralarga mos operatorlar xossalari.
5. Generator to'plami va uning xossalari.
6. Evolyutsion algebraning avtomorfizm gruppasi xossalari.
7. Evolyutsion algebralarining ko'paytirish algebrasi va hosila olingan L_f algebrasi.
8. Evolyutsion algebralarining sentri (markazi).
9. Assotsiativ bo'lmagan Banax algebrasi va evolyutsion algebralarda norma.
10. Davriylik va algebraik qat'iylik xossalari.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi:

BMIda biologiyaning shunday sistemalari qaralganki, unda har bir individ faqat o'zining tipidagi individ bilan chachishganda yangi avlod beradi. Har xil tipli individlar chachishmaydi. Shu faraz ostida evolyutsion algebra hosil qilinadi, yani

bu algebra shunday chiziqli fazoki, uning bir xil bazis elementlari nol emas, har xil bazis elementlari ko'paytmasi esa nol. Bu algebra asosan haqiqiy yoki kompleks sonlar maydoni ustida o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamiyati:

Ishda o'rganilgan evolyutsion algebralardan biologiyaning ba'zi masalalarini yechishda foydalanish mumkin. Masalan, genetikada avloddan-avlodga o'tishda qanday genetik xossalar saqlanishi va qandaylari yo'qolib ketishi dinamikasi shu algebralarning nilpotent bo'lishlik masalasiga keltiriladi. Avloddan-avlodga o'tganda invariant qoladigan xossalar esa, algebraning idempotent elementlari orqali ifodalanadi.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosi:

BMIda algebraning metodlari, no associative algebralarning nazariyasi, gruppalar va dinamik sistemalar nazariyasi qo'llaniladi.

Bu metodlar matematik qat'iy metodlardir.

Malakaviy bitiruv ishining tuzilishi va hajmi:

Malakaviy bitiruv ishi mundarija, kirish, 3 ta bob, 8 ta paragraf, xulosa, xotima va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Malakaviy bitiruv ishi 56 betdan iborat.

I. Evolyutsion algebra va uning turli fanlarga tadbirlariga misollar.

1.1. Fizikadan misollar.

1.1.1. Diskret fazoda harakatlanuvchi zarrachalar.

Diskret fazoda, masalan G grafida harakatlanayotgan zarrachani qaraymiz. Faraz qilaylik, bu harakat v_i uchdan boshlansin, u holda qaysi uch uning 2-holati bo'lishi v_i ning qaysi qo'shni nazarda tutilishidan bog'liq. Biz v_i dan uning

qo'shnisi v_i ga o'tuvchi qirrasiga koeffitsientni qo'yishimiz mumkin. Masalan, bunday koeffitsient sifatida w_{ij} ni olishimiz mumkin. U ehtimol bo'lishi shart emas. Shu sababli 2-holat shunday uchki, bu zarracha juda yaqin. Bu zarracha biror uchda to'xtasa, uning izi to'la koeffitsient maksimumga ega bo'lgan traektoriya bo'ladi. Endi harakatini qanday algebraik (berilgan bo'lsa to'la) tavsiflash mumkin va boshlang'ich hamda oxirgi uchlari berilgan bo'lsa, to'la koeffitsient maksimumga ega bo'lgan traektoriyani qanday topish mumkin degan savolga javob izlaymiz.

Bu masalani muhokama qilish uchun generator to'plamda berilgan va quyidagi qoidalar bilan aniqlangan algebraik modelni olamiz.

$V=\{v_1, \dots, v_r\}$ -generator (bazis) to'plam va unda quyidagicha

$$v_i v_i = \sum w_{ij} v_j$$

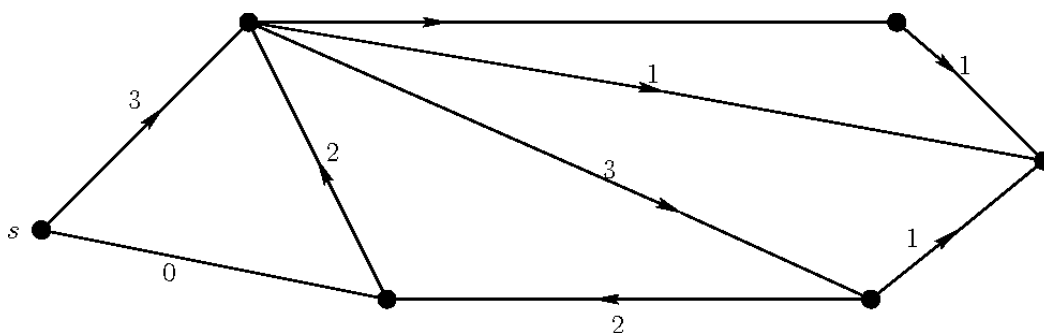
$$v_i v_j = 0 \quad i \neq j$$

ko'paytirish qoidasi berilgan bo'lsin, bu yerda w_{ij} va w_{ji} lar turlicha bo'lishi mumkin va $i, j=1, 2, \dots, r$. Bunday ko'paytma orqali evolyutsion algebra hosil bo'ladi.

1.1.2. Diskret fazodagi oqimlar.Feyman grafi.

Ba'zi asosiy ta'riflarni keltiramiz. Faraz qilaylik, $G=(V,E)$ multigraf, $s, t \in V$ lar 2 ta fiksirlangan uch va $C: \vec{E} \rightarrow \mathbb{N}$ akslantirish bo'lsin, bu yerda $\mathbb{N}$ oqim natural sonlar va 0 dan iborat to'plam berilgan. C ga G dagi hajm funksiyasi deyiladi va (G, s, t, c) -karrali tarmoq, bu yerda $\vec{E}$ bu G dagi yo'naltirilgan qirralar to'plami.

Tarmoqda misollar qaraymiz. **1.1.2.1-chizmaga qarang.**



1.1.2.1-chizmada. tarmoqqa misol.

Shuni ta'kidlab o'tish joizki, c funksiyaga qarang 2 ta yo'nalishdan bog'liq bo'lmagan holda aniqlangan.

$C: \vec{E} \rightarrow R$ funksiya ushbu 3 ta

$$(F_1)f(e,x,y) = -f(e,y,x), \quad \forall (e,x,y) \in \vec{E} \quad x \neq y;$$

$$(F_2)f(v,V)=0 \quad \forall v \in V - \{s, t\}$$

$$(F_3)f(\vec{e}) \leq e(\vec{e}), \quad \forall \vec{e} \in \vec{E};$$

shartlarni qanoatlantirsa, bu funksiya (G, s, t, c) tarmoqdagi **oqim** deyiladi.

x uchdan y o'tuvchi hajmi c_{xy} bilan belgilaymiz, u $c(e, x, y) = c_{xy}$ hajm funksiyasi orqali berilgan. $A=(G, s, t, c)$ algebrani generatorlar va va aniqlanish qoidalar bilan aniqlaymiz.

∇ -generator to'plam va aniqlanish qoidasi quyidagicha:

$$x \cdot x = \sum x \cdot c_{xy} \cdot y,$$

$$x \cdot y = 0 \quad x \neq y.$$

Bu yerda x va y lar uchlar. $A=(G, s, t, c)$ algebrada, oqim-bu antisimmetrik chiziqli akslantirish shunisi qiziqarliki, **Kirxgof** qoidasi oqim uchun algebrada avtomatik ravishda bajariladi.

Feyman grafi.

Elementar zarrachalar fizikasining ba'zi asosiy tushunchalarini eslatib o'tamiz. Feyman grafi shunday grafki, uning har bir qirrasi topologik nuqtai nazardan erkin elementar zarracha tarqalishini ifodalaydi, har bir uch esa elementar zarralar ta'sirini ifodalaydi. Bu yerda biz Feyman grafda abstrat nuqtai nazar bilan yondashamiz. Feyman grafi sodda qirralarda qo'shimcha ravishda eksterial qirralar deb ataluvchi ba'zi ekstra sodda qirralarga ega bo'lishi mumkin. Har bir eksterial qirra faqat bitta oxirgi nuqtaga ega. Agar kamida bitta qirra biror uch bilan inuident bo'lsa bu uchga eksterial uch deyiladi.

Eksterial uchlardan boshqa uchlarga interial uchlar deyiladi. Eksterial uchlarning umumiy soni n ga nisbatan Feyman grafi turlicha nomlanadi. $n=0$ uchun ular graflarning vakum nolyarizatsiyasi deyiladi; $n=1$ uchun itbaliq (golovan) grafi deyiladi; $n=2$ uchun o'zi energiya oluvchi graf deyiladi; $n=3$ uchun graf uchlari deyiladi; $n=4$ uchun 2-zarrachali sochilish grafi deyiladi; $n=5$ uchun 1-zarrachali ishlab chiqarish grafi deyiladi. Ular Feyman integral

nazariyasida masalalarida uchraydi .Biroq u yerda algebraik struktura mavjudligini misol sifatida ko'rsatish mumkin, biz faqat 1 ta muammoni izlaymiz. Feynman integralining ba'zi xossalari topish uchun Feynman grafida transport masalasini muhokama qilishimiz kerak.

Diskret fazodagi oqim haqidagi avvalgi misolga o'xshash ravishda biz avvalgi misolda ega bo'lmagan algebraik modelni aniqlaymiz va asl muammoning sodda variantini hosil qilamiz. Shunday qilib, bizning algebraik model Feynman integral nazariyasiga kirishni ta'minlaydi, ba'zi quyidagi rasmda Feynman grafiga misol keltirilgan bo'lib, u Landau tenglamasining spesifik echimi va uning mos algebrasidan kelib chiqadi.

Uning uchlarini v_1, v_2, v_3, v_4 orqali va 2 ta ∞ uchlarini e_1 va e_2 orqali belgilaymiz. Energiya saqlovchi Feynman grafiga mos algebra bu generator to'plami $\{v_1, v_2, v_3, v_4, e_1, e_2\}$ va aniqlash munosabatlari

$$v_1^2 = a_{12} v_2, \quad v_2^2 = p e_1,$$

$$v_3^2 = a_{31} v_1 + a_{32} v_2,$$

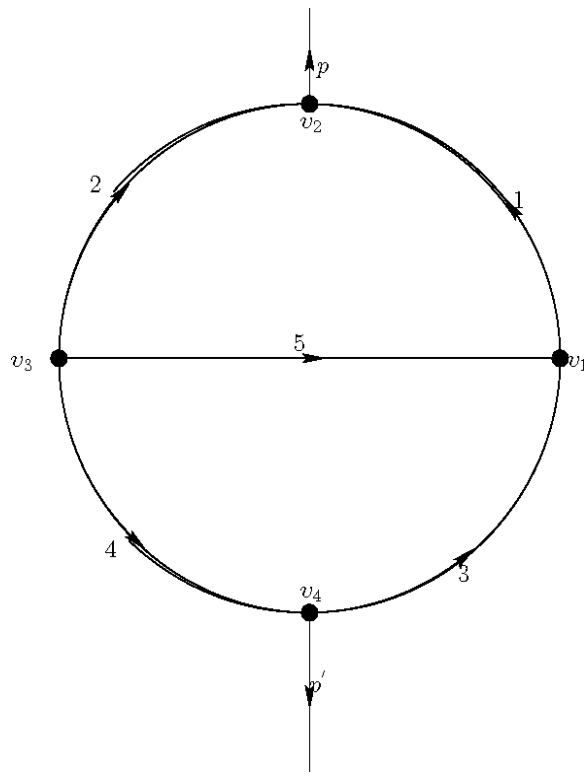
$$v_4^2 = a_{41} v_1 + a_{43} v_3 - p e_2,$$

$$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2,$$

$$v_i v_j = 0 \quad i \neq j,$$

$$e_1 e_2 = 0.$$

Bo'lgan xususiy algebra bo'ladi. Bu yerda a_{ij} va p koeffisientlar fizik ma'noga ega sonlardir.



1.1.2.2-rasmda. Feynman grafiga misol.

1.2.Topologiyadan misol

1.2.1.3-sirtdagi zarrachalar harakati.

Fazoda (M 3-sirt, kompakt yoki kompakt bo'lmagan) harakatlanuvchi zarrachani qaraymiz va zarracha holatidan bog'liq t_1 vaqtni fiksirlaymiz, u ichma – ich grafdagi zarracha izidir. 3-sirt triangulyasiya mavjud bo'lib, uning skeleti graf bo'ladi. Harakatni ifodalash uchun

$$v_i v_j = \sum a_{ij} v_j$$

$$v_i v_j = 0, \quad i \neq j$$

ni aniqlashimiz mumkin, bu yerda v_i triangulyasiya uchi. a_{ij} koeffisient 3-sirt xossalari bilan bog'liq bo'lishi mumkin.

Masalan, sirt geometrik strukturaga ega bo'lsa a_{ij} chetki nuqta atrofidagi Gauss egri chizig'i bilan bog'liq. Biz bu munosabatlardan $A(M, t_1)$ algebrani aniqlashda foydalanamiz. Bu algebra zarracha harakati haqida ma'lumot beradi

vaqt t_2 ga o'zgargan paytda biz boshqa $A(M, t_2)$ algebrani hosil qilamiz. Vaqt oraliqlarining cheksiz kerakligini olamiz, bunda $A(M, t_k)$ algebralar kerakligi hosil bo'ladi. Vaqt oralig'i 0 ga intilganda $A(M, t_k)$ ning limiti qanday bo'ladi deb so'rash mumkin. Ko'rinib turibdiki, bu algebralar kerakligi M sirt xossalarida o'z aksini topadi.

1.2.2. Manfiy ehtimolli o'ramga ixtiyoriy o'tish.

Kichik o'lchamli topologiyada Burau tasviri haqida adabiyotlar mavjud. Jones o'zining **“Hecke algebra representation of braid group and link polynomials”** maqolasida **Burau** tasvirining ehtimollik talqinini bergan. Biz bu maqoladan (kam o'zgarishlar bilan) parcha keltiramiz:

“ For positive braids there is also a mechanical interpretation of the Burau matrix: lay the braid out flat and make it into a bowling alley with n lanes, the lanes going over each other according to the braid. If a ball travelling along a lane has probability $1-t$ of falling off the top lane (and continuing in the lane below) at every crossing, then the (i, j) entry of the (nonreduced) Burau matrix is the probability that a ball bowled in the i th lane will end up in the j th. “

Lin, Tian va Vang o'zlarining “Burau representation and random walks on string links” maqolasida bu g'oyani umumlashtirganlar. Bu maqoladan parcha keltiramiz.

(1) Agar biz quyi segmentga musbat tomondan kessak og'irligi $1-t$ bo'ladi va t ga teng aks holda va

(2) Agar biz quyi segmentda manfiy tomondan kessak og'irlik $1-\bar{t}$ bo'ladi, bunda $\bar{t} = t^{-1}$.

1.3.Ehtimollar nazariyasidan misollar.

Stoxastik jarayonlar.

Holatlarning S-sanoqli to'plamida harakatlanuvchi stoxastik jarayonlarni qaraymiz. n -qadamda keyingi ixtiyoriy mexanizmda o'tish jarayoni faqat hozirgi

holatdan bog'liq va avvalgi tarixdan va n dan bog'liq emas. Bu jarayon sanoqli holatlar fazosidagi **Markov zanjiri** deyiladi. Faraz qilaylik, X_n bu $S = \{s_i | i \in \Delta\}$ holat fazodagi diskret vaqtli Markov zanjiri bo'lib, o'tish ehtimoli $p_{ij} = Pr\{X_{n+1} = s_j | X_n = s_i\}$ ga teng. Bunda biz avvalo stasionar Markov zanjirini algebra bo'yicha qayta bayon qilamiz. Generator to'plami sifatida S ni olamiz va aniqlash qoidasi

$$s_i s_i = \sum_j p_{ij} s_j$$

$$s_i \cdot s_j = 0 \quad i \neq j$$

kabi bo'lsa, u holda xususiy algebrani hosil qilamiz.

1.4. Evolyutsion algebralar.

Biz evolyutsion algebrani generatorlar va aniqlash munosabatlari yordamida aniqlaymiz. Biz evolyutsion algebralarining asosiy algebraik xossalarini o'rganamiz.

1.4.1. Jo'nash nuqtasi. Birlik elementning mavjudligi.

Biz algebrani generatorlar va aniqlash munosabatlari tilida aniqlaymiz. Generatorlar va munosabatlar usuli aksiomatik usulda o'xshash bo'lib, u yerda aksiomalar rolini munosabatlar o'ynaydi. $x_1, x_2, \dots, x_v$ generatorlar va $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_r = 0$ aniqlash munosabatlar yordamida aniqlangan A algebra formal ta'rifini eslatamiz.

Avvalo biz K maydon ustida $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ generatorlar to'plami bilan assotsiativ bo'lmagan va kommutativ bo'lmagan R erkli algebrani qaraymiz. Shuni ta'kidlash joizki, uning elementlari koeffisientlari K dan bo'lgan kommutativ bo'lmagan x_i o'zgaruvchilarning ko'phadi bo'ladi va bazislar sonlardan tashkil topgan. Qavsli so'z deganda qavsli $x_1, x_2, \dots, x_v$ o'zgaruvchilarning bir hadini tushunamiz. Bunda bir had ko'paytuvchilari tartibi yagona usul bilan aniqlanadi. Xususan, barcha f_i elementlar R erkli algebra elementlaridir. Keyin biz bu

elementlarga topilgan R da I idealni qaraymiz R/I faktor algebra generatorlar va munosabatlar bo'yicha aniqlangan algebradir. $x_1, x_2, \dots, x_v$ generator va $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_r = 0$ munosabatlar bilan A algebra uchun

$$R/I = \{x_1, x_2, \dots, x_v \mid f_1, f_2, \dots, f_r\}$$

belgilashni ishlatamiz.

1.4.1.1-Ta'rif. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$ generatorlar to'plami va $R = \{f_e = x_e^2 + \sum_{k=1}^v a_{ek} x_k, f_{ij} = x_i x_j \mid a_{ek} \in K, i \neq j, e, i, j = 1, 2, \dots, v\}$ aniqlash munosabatlari to'plami bo'lsin, bu yerga K -bu maydon, u holda evolyutsion algebra

$$R = \{x_1, x_2, \dots, x_v \mid x_e^2 + \sum_{k=1}^v a_{ek} x_k, x_i x_j, i \neq j; i, j, e \in \Lambda\}$$

kabi aniqlanadi, bu yerda indekslar to'plami: $\Lambda = \{1, 2, \dots, v\}$.

1.4.1.1-Eslatma. Ko'plab amaliy masalalarda K - haqiqiy sonlar maydoni deb olinadi. Agar K maydon sifatida haqiqiy sonlar maydoni olingan bo'lsa, evolyutsion algebra haqiqiy va a_{jk} koeffisientlar nomanfiy bo'lsa, evolyutsion algrbraga **nomanfiy** deyiladi. Agar evolyusion algebra nomanfiy va

$\sum_{k=1}^v a_{jk} = 1$ bo'lsa, unga **Markov evolyutsion algebra** deyiladi.

1.4.1.2-Eslatma. Trivial evolyutsion algebraning 2-turi mavjud, nol evolyutsion algebralar va nolmas trivial evolyutsion algebralar. Agar aniqlash munosabatlari barcha generatorlar uchun $x_i \cdot x_j = 0$ bo'lsa va $x_i^2 = 0$, bunday generatorlarga tortilgan generatorlar nol evolyutsion algebralar deyiladi. Agar $i \neq j$ uchun $x_i \cdot x_j = 0$ va $x_i \cdot x_j = k_i \cdot x_i$ bo'lsa, bu yerda $k_i \in K$ nolmas element, bunday generatorga tortilgan algebra nolmas trivial evolyutsion algebra deyiladi. Triviallikdan xolis bo'lish uchun evolyutsion algebrani nolmas algebra deb faraz qilamiz.

Bunday usulda aniqlangan evolyutsion algebralarni tushuntirish uchun generatorlarning xossalarini tushuntirish kerak. Shu maqsadda qavsli so'zning uzunligi tushunchasini kiritamiz. Faraz qilaylik $W(x_1, x_2, \dots, x_v)$ qavsli so'z bo'lsin. W ning uzunligi $l(W)$ belgilaymiz va W dagi har bir x_i generator hollari soninig yig'indisi kabi aniqlaymiz. Demek Φ bo'sh so'z uchun $l(\Phi) = 0$ va har bir x_i

generator uchun $l(x_i)=1$. Masalan, $W=K(x_1x_2)((x_3x_1)x_2)$, bunda $l(W)=5$, $k \in H$.

1.4.1.1-Teorema. Agar X generator to'plami chekli bo'lsa, u holda $R(X)$ evolyutsion algebra chekli bo'ladi. Bundan tashqari, X generatorlar to'plami $R(X)$ algebrada bazis vazifasini bajarishi mumkin.

Isbot. Bizga ma'lumki, $R(X)$ evolyutsion algebraning umumiy elementi bu keltirilgan qavsli so'zlar chiziqli kombinatsiyasidir. Keltirilgan qavsli so'z degandab $R(X)$ ning aniqlash munosabatlari predmetini bildiruvchi qavsli so'zni tushunamiz. Shu sababli biz har qanday W keltirilgan so'z generatorlar chiziqli kombinatsiyasi sifatida ifodalashini isbotlay olsak, u holda $R(X)$ da bazis bo'luvchi X generatorlar bor deb xulosa chiqarish mumkin. Endi isbotni tugatish uchun induksiya usulini qo'llaymiz. Agar $l(W)=0$ bo'lsa, u holda $W=\Phi$ va agar $l(W)=1$ bo'lsa, u holda W - bu x_i aniq generator bo'lishi kerak. Bundan tashqari, agar $l(W)=2$ bo'lsa u holda W - bu biror x_j generatorlar uchun x_j^2 bo'lishi kerak, chunki 2 ta turli generatorlar uchun $x_i \cdot x_j = 0$

$x_j^2 + \sum_{k=1}^v a_{j,k} x_k = 0$ bo'lgani uchun $W = x_j^2 = \sum_{k=1}^v -a_{j,k} x_k$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $l(W)=n$ bo'lganda w -generatorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida tasvirlansin. $l(W)=n+1$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu yerda w -keltirilgan qavsli so'z bo'lgani uchun w dagi 1-ko'paytuvchini aniq x_i generator uchun $x_i x_i$ bo'ladi, aks holda $w=\Phi$ bo'ladi. $x_i x_i = \sum_{k=1}^v -a_{i,k} x_k$ bo'lgani uchun 1-ko'paytuvchini olgach ko'phadga keltiriladi. Ko'phadning har bir hadi n dan kichik yoki teng uzunlikka ega. Induksiya ko'ra ko'phadning har bir hadi generatorning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlanadi. Shuning uchun w ham generatorning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlanadi. Shunday qilib induksiya ko'ra har bir keltirilgan so'z generatorlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida tasvirlanadi. Demak X generator to'plam $R(X)$ uchun bazis ekan.

X ning chiziqli bog'lanmagan to'plam ekanligini ham isbotlash kerak. Faraz qilaylik, $\sum_k a_k x_k = 0$ bo'lsin. U holda tenglamaning har ikkala tomonini x_k ga

ko'paytirib $a_k x_k^2 = 0$ ni hosil qilamiz. $x_k^2 \neq 0$ bo'lgani uchun har bir k indeks uchun $a_k = 0$ bo'ladi, chunki $R(X)$ nolmas algebradir.

Aslida, yuqoridagi teoremda cheklilik sharti yetarli emas, chunki $R(X)$ ning har bir elementi keltirilgan qavsli sonlarning chekli chiziqli kombinatsiyasidir va generatorlar soni chekli yoki cheksiz bo'lsada keltirilgan qavsli so'zlar chekli uzunlikga ega.

1.4.1.2-Ta'rif. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ harflarning sanoqli to'plami bo'lib, generatorlar to'plami deb ataladi.

V_s esa K maydon ustida S ga tortilgan chiziqli fazo bo'lsin.

$$m: V_s^* \rightarrow V_s$$

Bichiziqli akslantirishni.

$$m(x_i, x_j) = 0 \quad \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa,}$$

$$m(x_i, x_i) = \sum_k a_{i,k} x_k$$

$V_s^* \otimes V_s$ ustida bichiziqli davom ettirilgan m akslantirishni aniqlaymiz. U holda (V_s, m) juftlikka evolyutsion algebra deyiladi.

1.4.1.3-Ta'rif. Faraz qilaylik, $(A, *)$ - K maydon ustida algebra bo'lsin. Agar unda

$$x_i x_j = 0, \quad \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa}$$

$$x_i x_i = \sum_k a_{i,k} x_k$$

shartni qanoatlantiruvchi sanoqli $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ bazis bo'lsa, u algebraga evolyutsion algebra deyiladi. Bu bazisga tabiiy **bazis** deyiladi.

1.4.1.1-Misol. Wright-Fisher modeli.

Populatsion genetikada o'lchovi N fiksirlangan diploid populatsiyaning evolutsion o'zini tutishi o'rganiladi. Faraz qilaylik, ikkita allel A_1, A_2 mavjud va $g_1, \dots, g_n$ genlar berilgan bunda $n=2N$. Genlar orasidagi munosabatlar hisobga olinmaganda har bir avlodda A_1 gen soni X ni bilish etarli bo'ladi. t -avlodda bu sonni $X(t)$ bilan belgilaymiz. $X(t+1)$ ning $X(t)$ hosil bo'lish qoidasini aniqlash kerak. Buni aniqlashda Wright-Fisher quyidagi modelni taklif etishdi: $X(t+1)$ son n indexli va $X(t)/n$ parametrlari binomial tasodifiy miqdor. Bunday biologik sistemada g_i va g_j lar orasidagi ko'paytma quyidagicha aniqlaymiz: $g_i \cdot g_j = 0$ agar $i \neq j$ va $g_i \cdot g_i = \sum_j p_{ij} g_j$ yani evolutsion algebra hosil bo'ladi.

Endi evolyutsion algebraning asosiy xossalarini muhokama qilamiz. Ular evolyutsion algebra ta'rifidan kelib chiqadigan natijalardir.

1.4.1.1-Natija.1) Evolyutsion algebra umuman olganda assotsiativ emas.

2) Evolyutsion algebra kommutativ va silliq:

3) Evolyutsion algebra umuman olganda kuchli assosiativ emas.

4) Evolyutsion algebraning to'g'ri yig'indisi yana evolyutsion algebra bo'ladi.

5) Evolyutsion algebralarning **Kroneker** ko'paytmasi yana evolyutsion algebra bo'ladi.

Isbot. Biz hamisha $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ generator to'plam bilan ishlaymiz va trivial bo'lmagan evolyutsion algebralarni qaraymiz.

1) Umumiy holda, biror i indeks uchun $e_i e_i = \sum_j a_{ij} e_j$ bo'lib, shunday $i \neq j$ topiladiki $a_{ij} \neq 0$ bo'ladi. Shu sababli $e_i (e_i e_j) \neq 0$ bo'ladi. Lekin $e_i (e_i e_j) = e_i \cdot 0 = 0$.

2) Shu sababli

$$(e_i e_i) e_j \neq e_i (e_i e_j).$$

Evolutsion algebradan olingan ixtiyoriy 2 ta $x = \sum_i a_i e_i$ va $y = \sum_i b_i e_i$ elementlar uchun

$$x \cdot y = \sum_i a_i e_i \cdot \sum_i b_i e_i = \sum_{i,j} a_i b_j e_i e_j = \sum_i a_i b_i e_i^2 = y \cdot x$$

o'rinli. Shu sababli, ixtiyoriy evolyutsion algebra kommutativdir. Agar algebra $x(yx) = (xy)x$ tenglikni qanoatlantirsa, unga silliq algebra deyiladi. Osongina ko'rsatish mumkinki, kommutativ algebra silliqdir. Shuning uchun ixtiyoriy evolyutsion algebra silliq bo'ladi.

3) e_i ni olib

$$(e_i \cdot e_i) \cdot (e_i \cdot e_i) = \sum_k a_{ik} e_k \cdot \sum_l a_{il} e_l = \sum_k a_{ik}^2 e_k^2$$

$$((e_i \cdot e_i) \cdot e_i) \cdot e_i =$$

$$((\sum_k a_{ik} e_k) \cdot e_k) e_k = (a_{ii} e_i^2) \cdot e_i = (a_{ii} \sum_k a_{ik} e_k) \cdot e_i = a_{ii}^2 e_i^2$$

ni hosil qilamiz.

$$(e_i \cdot e_i) \cdot (e_i \cdot e_i) \neq ((e_i \cdot e_i) \cdot e_i) \cdot e_i.$$

o'rinli bo'ladi. Shu sababli, evolyutsion algebra kuchli assotsiativ bo'lishi shart emas.

4) Mos ravishda

$$\{e_i \mid i \in \Lambda_1\} \text{ va } \{\eta_j \mid j \in \Lambda_2\}$$

generator to'plamli A_1 va A_2 evolyutsion algebra'larni qaraymiz. U holda $A_1 + A_2 = \{e_i, i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2\}$ generator to'plamga ega biz e_i ga $(e_i, 0)$ ni η_j ga $(0, \eta_j)$ ni mos qo'ydik. Aslida, bu generator to'plam $A_1 \oplus A_2$ uchun tabiiy bazis bo'ladi. Biz buni quyidagi kabi keltirib chiqaramiz.

$$e_i \cdot e_i = \sum_k a_{ik} e_k$$

$$e_i \cdot e_j = 0, \text{ yoki } i \neq j$$

$$\eta_i \cdot \eta_i = \sum_k b_{ik} \eta_k$$

$$e_i \cdot \eta_j = (e_i, 0) \cdot (0, \eta_j) = 0$$

Shu sababli $A_1 \oplus A_2$ evolyutsion algebra bo'ladi. Ko'rinib turibdiki, $A_1 \oplus A_2$ ning o'lchami A_1 ning va A_2 ning o'lchamlari yig'indisiga teng. Agar to'g'ri yig'indida qo'shiluvchilar soni 2 dan katta bo'lsa, isbot xuddi shunga o'xshash amalga oshiriladi.

5) Avvalo mos ravishda $\{e_i | i \in \Lambda_1\}$ va $\{\eta_j | j \in \Lambda_2\}$ generator to'plamli A_1 va A_2 evolyutsion algebralarni qaraymiz. A_1 va A_2 2 ta chiziqli fazoning tenzor ko'paytmasi $A_1 \oplus_k A_2$ da ko'paytirish amalini odatdagi usul bilan aniqlaymiz, yani $x_1 \otimes x_2$ va $y_1 \otimes y_2$ uchun $(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$ kabi aniqlaymiz. U holda biz 2 ta algebralarning **Kroneker** ko'paytmasini hosil qilamiz. Bu Kroneker ko'paytmasi evolyutsion algebra bo'ladi, chunki Kroneker ko'paytmasining generator to'plam $e_i \otimes \eta_j | i \in \Lambda_1, j \in \Lambda_2$ bo'ladi va aniqlash munosabatlari

$$(e_i \otimes \eta_j) \cdot (e_i \otimes \eta_j) \neq 0,$$

$$(e_i \otimes \eta_j) \cdot (e_k \otimes \eta_l) = 0, \quad \text{agar } i \neq k \text{ yoki } j \neq l$$

kabi bo'ladi. Uning o'lchami uchun

$$\dim(A_1 \otimes A_2) = \dim(A_1) \dim(A_2)$$

o'rinlidir. Kroneker ko'paytmasida ko'paytuvchilar soni 2 dan kichik bo'lsa, isbot shunga o'xshash bo'ladi.

Birlik elementning mavjudligi.

A evolyutsion algebra uchun birlik elementni saqlamaydigan A_1 algebrani hosil qilish uchun standart qurishdan foydalanamiz.

A_1 da A ideal bo'ladi va $A_2 | A$ ning K bo'yicha o'lchami 1 ga teng bo'ladi. A_1 ni tartiblangan (k, x) juftliklar to'plami sifatida olamiz, bunda $k \in K$ va $x \in A$ qo'shish va songa ko'paytirish

$$(k, x) + (c, y) = (k+c, x+y),$$

va

$$(k, x) \cdot (c, y) = (kc, ky+cx+xy),$$

kabi aniqlangan, bu yerda $k, c \in K, x, y \in A$. U holda A_1 - K bo'yicha $(1, 0)$ birlik elementga ega algebra bo'ladi, bu yerda 1 bu K maydonning birlik elementi va 0 bu A ning bosh elementi. A_1 dagi barcha $(0, x)$ juftliklar to'plami A ga izomorfik bo'ladi, bunda $A - A_1$ dagi ideal. Kommutativ Jordan algebra va alternativ algebra uchun birlik elementni qo'shib shu turdagi assosiativ bo'lmagan algebrani hosil qilamiz. Evolyutsion algebra holida A_1 umuman olganda evolyutsion algebra bo'lmaydi. A_1 ning $\{(1, 0), (0, e_i) : i \in \Lambda\}$ qism to'plami bazis bo'ladi va shu sababli A_1 algebraning generator to'plami bo'ladi, bu qism to'plam evolyutsion algebra generator to'plami shartlarini qanoatlantirmaydi.

1.4.1.1-Tasdiq. Evolyutsion algebra birlik elementga ega bo'lishi uchun uning nolmas trivial bo'lmagan evolyutsion algebra bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, A evolyutsion algebra $\{e_i | i \in \Lambda\}$ generator to'plamga ega bo'lsin va $\mu = \sum_i a_i e_i$ birlik element bo'lsin, u holda har bir $i \in \Lambda$ uchun $\mu e_i = e_i$ ni hosil qilamiz. Shuning uchun

$$e_i = \left(\sum_j a_j e_j \right) e_i = a_i e_i^2 = a_i \sum_j a_{ij} e_j.$$

o'rinli. $a_i a_{ii} = 0$ va agar $i \neq j$ bo'lsa, $a_{ij} = 0$ lar o'rinli. Bu esa A ning nomas trivial bo'lmagan evolyutsion algebra ekanligini bildiradi va birlik element $\mu = \sum_i \frac{1}{a_{ii}} e_i$ kabi aniqlanadi. Ikkinchi tomondan agar A nolmas trivial bo'lmagan evolyutsion algebra bo'lsa, u holda oson oson tekshirish mumkin birlik element mavjud bo'lib, μ bilan belgilanadi.

Bu bobda evolyutsion algebra kelib chiqishi mumkin bo'lgan turli sohalardan misollar keltirilgan. Jumladan, fizikadan misollar, diskret fazoda harakatlanuvchi zarrachalar, diskret fazodagi oqimlar, topologiyadan misollar, ehtimollar nazariyasidan misollar hamda stoxastik jarayonlarda evolyutsion algebralarga misollar keltirilgan.

Shu bilan birga bu bobda evolyutsion algebralarning ta'rifi, ba'zi elementar xossalari keltirilgan. Bu xossalra keyingi boblarni tushinish uchun muhim xossalardir.

II . Evolyutsion algebralarning asosiy xossalari.

2.1. Asosiy ta'riflar.

2.1.1-Ta'rif. 1) A evolyutsion algebra bo'lib, A_1-A ning qism fazosi bo'lsin. Agar A_1 da $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ tabiiy bazis mavjud bo'lib $\{e_j \mid j \in \Lambda\}$ tabiiy bazisgacha

davom ettirish mumkin bo'lsa, A_1 ga evolyutsion qism algebra deyiladi, bu yerda Λ_1 va Λ lar indekslar to'plami, Λ_1 esa Λ ning qism to'plami.

2) Faraz qilaylik, A - evolyutsion algebrava va I - A ning evolyutsion qism algebrasi bo'lsin. Agar $AI \subseteq I$ bo'lsa, I ga evolyutsion ideal deyiladi .

3) Faraz qilaylik, A va B lar evolyutsion algebralar bo'lsin. Agar $f: A \rightarrow B$ chiziqli gomomorfizm algebraik akslantirish va A ning $\{e_j \mid j \in \Lambda\}$ tabiiy bazisi uchun $\{f(e_i) \mid i \in \Lambda\}$ - B ning evolyutsion qism algebrasiga tortilgan bo'lsa, f ga **evolyutsion gomomorfizm** deyiladi. Agar evolyutsion gomomorfizm bir qiymatli va ustida akslantirish bo'lsa, unga **evolyutsion izomorfizm** deyiladi.

4) Faraz qilaylik, A kommutativ algebra bo'lsin. $a \in A$ ning prinsipial darajasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a$$

.....

$$a^n = a^{n-1} \cdot a;$$

va to'la darajalarini

$$a^{[1]} = a^{(2)} = a \cdot a$$

$$a^{[2]} = a^{(2^2)} = a^{(2)} \cdot a^{(2)}$$

$$a^{[3]} = a^{(2^3)} = a^{(4)} \cdot a^{(4)}$$

.....

$$a^{[n]} = a^{(2^n)} = a^{(2^{n-1})} a^{(2^{n-1})} .$$

kabi aniqlaymiz.

Qulaylik uchun $a^{[0]} = a$ deb olamiz. U holda ushbu

$$(a^{[n]})^{[m]} = a^{[n+m]},$$

xossa o'rinli, bu yerda n va m lar musbat butun sonlar.

Bu xossa $a^{[n]}$ ning m -to'la darajasida a ning necha marta qatnashishini hisoblash bilan isbotlanadi. Demak,

$$(a^{[n]})^{[m]} = (a^{(2^n)})^{(2^m)} = a^{(2^n 2^m)} = a^{(2^{n+m})} = a^{[n+m]}.$$

5) Agar E evolyutsion algebra 2 ta xosmas evolyutsion qism algebralar to'g'ri yig'indisi ko'rinishda tasvirlanmasa, u holda E ga bog'lamli deyiladi.

6) Agar E evolyutsion algebra xosmas evolyutsion idealga ega bo'lmasa, E ga sodda deyiladi.

7) Agar E evolyutsion algebra xosmas qism algebraga ega bo'lmasa E ga keltirilmaydigan deyiladi.

Evolyutsion algebraning tabiiy bazisi boshqa bazislarga nisbatan muhim ahamiyatga ega. Chunki generatorlar genetikada allellarni ifodalaydi.

2.1.1-Misol. Faraz qilaylik, $E = e_1, e_2, e_3$ bazisli evolyutsion algebra bo'lib, ko'paytirish

$$e_1 e_1 = e_1 + e_2,$$

$$e_2 e_2 = -e_1 - e_2,$$

$$e_3 e_3 = -e_2 + e_3.$$

kabi aniqlangan bo'lsin. $U_1 = e_1 + e_2, U_2 = e_1 + e_3$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} (\alpha u_1 + \beta u_2)(\gamma u_1 + \delta u_2) &= \alpha\gamma u_1^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)u_1 u_2 + \beta\delta u_2^2 \\ &= (\alpha\delta + \beta\gamma)u_1 + \beta\delta u_2 \end{aligned}$$

bo'ladi.

Demak, $F = K U_1 + K U_2$ - E ning qism algebrasi bo'ladi. Shunday qilib, F -evolyutsion qism algebra bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, v_1, v_2 lar F dagi bazis bo'lsin. U holda biror $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ uchun

$$v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2,$$

$$v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2$$

bo'lib, $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ bo'ladi. Faraz qilaylik, $v_1 v_2 = 0$ bo'lsin. U holda

$\beta\delta = 0$ va $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ bo'ladi. Agar $\beta = 0$ bo'lsa $\alpha\delta = 0$ bo'ladi. U holda

$D=0$ va bu ziddiyat. Agar $\delta = 0$ bo'lsa, shunga o'xshash ziddiyat hosil bo'ladi. Shu sababli $v_1 v_2 \neq 0$ va F - evolyutsion qism algebra emas.

Evolyutsion algebralar qism algebralarga nisbatan yopiq emasligini ko'rdik. Bu yangi evolyutsion qism algebralar tushunchasini kiritishga sabab bo'ldi.

2.1.1. Evolyutsion algebra ideallari.

A - algebradagi I ideal avvalo qism algebra va $AI \subseteq I$, $IA \subseteq I$ lar o'rinli E evolyutsion algebrada evolyutsion ideal avvalo qism evolyutsion algebradir. Demak, evolyutsion qism algebralar uchun shartlar evolyutsion ideal uchun yetarlidir.

2.1.1.1-Tasdiq. Har qanday evolyutsion qism algebra evolyutsion ideal bo'ladi.

Isbot. Agar E_1 – bu E ning evolyutsion qism algebrasi bo'lsa, u holda E_1 ning $\{e_i \mid i \in \Lambda_1\}$ generator to'plami mavjud bo'lib, E ning $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ generator to'plamigacha davom ettirilishi mumkin, bu yerda Λ_1 bu Λ ning qism to'plami.

$$x \in E_1 \text{ va } y \in E \text{ uchun}$$

$$x = \sum_{i \in \Lambda_1} x_i e_i \text{ va } y = \sum_{i \in \Lambda} y_i e_i$$

deb olamiz. Bu yerda $x_i, y_i \in K$ u holda

$xy = \sum_{i \in \Lambda_1} x_i y_i e_i^2 \in \Lambda_1$ ko'paytmani hosil qilamiz. Shu sababli, $EE_1 \subseteq E_1$. E kommutativ algebra bo'lgani uchun E_1 ikki yoqlama ideal bo'ladi.

Biz evolyutsion ideal tushunchasini evolyutsion qism algebraga ekvivalent tushuncha sifatida ishlatamiz. Bizga ma'lumki, sodda algebra xosmas idealga ega emas. Agar evolyutsion algebra xosmas qism algebrasi bo'lsa, unga keltirilmaydigan bo'ladi. Yuqoridagi tasdiqdan keltirilmaydigan evolyutsion algebra sodda evolyutsion algebra bo'lishi va sodda evolyutsion algebra keltirilmaydigan evolyutsion algebra bo'lishi kelib chiqadi. Ular aslida evolyutsion algebrada ular bir xil tushunchalardir. Umumiy algebra nazariyasiga ko'ra agar evolyutsion algebra evolyutsion qism algebralar to'g'ri yig'indisi kabi yozilsa, biz uni yarim sodda evolyutsion algebra deymiz.

2.1.1.1-Natija. 1) Yarim sodda evolyutsion algebra bog'lanmagan bo'ladi.

2.1.2.Evolyutsion algebraning faktorlari.

Faraz qilaylik, E_1 va E evolyutsion algebraning evolyutsion ideali bo'lsin. U holda $\bar{E} = E / E_1$ faktor algebra barcha $\bar{x} = x + E_1$ qo'shnilik sinflaridan tashkil topgan bo'lib, ular ushbu $k\bar{x} = \overline{kx}$, $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ amallar bilan bog'langan. Oson tekshirish mumkinki, $\bar{E}$ evolyutsion algebra bo'ladi. E ni $\bar{E}$ ning ustida akslantirish $\pi: x \rightarrow \bar{x}$ kanonik akslantirish E_1 yadroli evolyutsion gomomorfizm bo'ladi.

2.1.2.1-Lemma. $\eta_1, \dots, \eta_m$ la n o'lchovli E evolyutsion algebra elementlari bo'lsin va $i \neq j$ bo'lganda $\eta_i \eta_j = 0$ shart bajarilsin. Agar bu elementlarning bazilari E da bazisni tashkil qilsa, u holda bu ketma-ketliklarning $(m-n)$ ta nol mavjud.

Isbot. Faraz qilaylik, $\eta_1, \dots, \eta_n$ - E da tabiiy bazis bo'lsin. U holda $\eta_{n+k}, 1 \leq k \leq (m-n)$

Element $\eta_i, 1 \leq i \leq n$ larning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishda tasvirlanadi, ya'ni $\eta_{n+k} = \sum_{i=1}^n a_i \eta_i$. Bu tenglamaning ikki tomonini η_i ga ko'paytirib $\eta_{n+k} \eta_i = a_i \eta_i^2 = 0$ ni hosil qilamiz, u holda har bir $i, 1 \leq i \leq k$ uchun $a_i = 0$ bo'ladi. Shunday qilib, $\eta_{n+k} = 0$, bu yerda $1 \leq k \leq n-m$

2.1.2.1-Teorema. E_1 va E_2 lar evolyutsion algebralar bo'lsin va $f: E_1 \rightarrow E_2$ evolyutsion algebraik gomomorfizm bo'lsin. U holda $K = \ker(f)$ - E_1 ning evolyutsion qism algebra bo'ladi va agar f surektiv bo'lsa, $E_1 \setminus K$ - E_2 ga izomorf bo'ladi. Yoki $E_1 \setminus K - f(E_1)$ ga izomorf bo'ladi.

Isbot. $e_1, e_2, \dots, e_m$ - E_1 dagi tabiiy bazis bo'lsin, evolyutsion algebra gomomorfizm ta'rifiga ko'ra $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)$ - E_2 dagi evolyutsion qism algebra bo'ladi. Bu qism algebra B bilan belgilaymiz.

$\dim(B) = m$ bo'lsa, u holda oson ko'rsatish mumkin $K = \ker(f) = 0$ bo'ladi. K - nol qism algebra bo'ladi. $\dim(B) = n < m$ bo'lsa, $\dim(K) = n - m$ ekanligini isbotlaymiz. $i \neq j$ uchun $f(e_i)f(e_j) = f(e_i e_j) = 0$ va $f(e_i)$ larning ba'zislari E_1 ning obrazida tabiiy bazis bo'ladi, $E_1 - E_2$ ning evolyutsion qism algebrasidir. 1-lemmaga ko'ra $m-n$ ta nol mavjud: aytaylik $f(e_{n+1}) = 0, \dots, f(e_m) = 0$ bo'lsin. Bu esa $e_{n+1}, \dots, e_m \in K$ ni bildiradi. Aslida, ularning qobig'i evolyutsion qism algebra bo'lib, f ning $m-n$ o'lchamli K yadrosi bo'ladi.

$$\bar{f}: E_1 \setminus K \rightarrow f(E_1)$$

akslantirish $x+K \rightarrow f(x)$ kabi aniqlaymiz. $\bar{f}$ ning izomorf ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Xulosa qilish mumkinki, evolyutsion algebra gomomorfik bo'lishi mumkin va faqat o'zining faktoriga gomomorf bo'lishi mumkin ekan.

2.2. Bazis elementlarining xossalari.

2.2.1. Bog'langan munosabatlar.

E orqali $\{e_1, e_2, \dots, e_v\}$ generator to'plamli evolyutsion algebrani belgilaymiz.

Agar $x = \sum_{j=1}^v a_j e_j$ da $a_i \in K$ koefitsientlar nolmas bo'lsa, e_i lar $x \in K$ ga bog'langan deyiladi. $e_i x$ ga bog'langan bo'lsa, $e_i < x$ kabi yoziladi.

Agar $e_i < e_i^{[n]}$ bo'lsa, $\langle e_1 \rangle \subseteq \langle e_i \rangle$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas, bu yerda $\langle x \rangle$ orqali x ga tortilgan evolyutsion qism algebra belgilanadi.

2.2.1.1-Lemma. Faraz qilaylik, E nomanfiy evolyutsion algebra bo'lsin. U holda har bir $x, y \in E^+$ va $n \geq 0$ uchun $z \in E^+$ mavjud bo'lib,
 $(x + y)^{[n]} = x^{[n]} + z$

bo'ladi, bu yerda
 $E^+ = \sum \alpha_i e_i; \alpha_i \geq 0$.

Isbot. Lemmani n bo'yicha induksiya usulida isbotlaymiz. Ma'lumki,
 $(x + y)^{[0]} = x^{[0]} + y$ va $z = y$ deb yozish yetarli. Bundan tashqari,
 $(x + y)^{[1]} = x^{[1]} + 2xy + y^2$. E^+ qo'shish, ko'paytirish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq bo'lgani uchun $z = 2xy + y^2 \in E^+$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, tasdiq $n > 1$ uchun o'rinli bo'lsin. Xususan, $x, y \in E^+$ ni olamiz. $w \in E^+$ bo'lib $(x + y)^{[n]} = x^{[n]} + w$ bo'lsin. U holda biror $z \in E^+$ uchun
 $(x + y)^{[n+1]} = (x^{[n]})^{[1]} + z = x^{[n+1]} + z$ bo'ladi.

2.2.1.1-Tasdiq. E nomanfiy evolyutsion algebra bo'lsin. $e_i < e_j^{[n]}$ va $e_j < e_k^{[n]}$ bo'lsa, u holda $e_i < e_k^{[n+m]}$ bo'ladi.

Isbot. Biror $\alpha_j \neq 0$ va $y \in E$ uchun $e_k^{[m]} = \alpha_j e_j + y$ bo'lib, e_j element u bilan bog'lanmagan bo'lsin. $\alpha_j > 0$ va $y \in E^+$ o'rinli. 2-lemmaga ko'ra biror $z \in E^+$ uchun

$$e_k^{[n+m]} = (e_k^{[m]})^{[n]} = (\alpha_j e_j + y)^{[n]} = (\alpha_j e_j)^{[n]} + z = \alpha_j^{(2^n)} e_j^{[n]} + z$$

o'rinli bo'ladi. Endi biror $\beta_j > 0$ va $v \in E$ uchun $e_j^{[n]} = \beta_j e_i + v$ bo'lib e_i bilan bog'langan. Shuning uchun $e_i < e_k^{[n+m]}$.

Biz E evolyutsion algebra generatorlarning qisman tartiblangan munosabatini hosil qilishimiz mumkin. e_i va e_j lar E ning ixtiyoriy 2 ta generatorlari bo'lsin, agar e_i element e_j ning darajasi bilan bog'langan bo'lsa, masalan e_i element $e_j^{[n]}$ bilan bog'langan bo'lsa, u holda $e_i < e_j$ yoki $e_i < e_j^{[n]}$ deb olamiz. Bu munosabat quyidagi ma'no qisman tartibdir.

(1) E ning ixtiyoriy generator uchun $e_i < e_i^{[0]}$.

(2) Agar $e_i < e_j^{[n]}$ va $e_j < e_j^{[m]}$ bo'lsa, e_i va e_j lar 2 tomonlama bog'langan deyimiz. Umumman olganda e_i va e_j lar o'xshash bo'lishi shart emas. Lekin e_i ga tortilgan evolyutsion qism algebra va e_j ga tortilgan evolyutsion qism algebra o'xshashdir.

(3) Agar $e_i < e_j^{[n]}$ va $e_j < e_k^{[m]}$ bo'lsa, u holda $e_i < e_k^{[n+m]}$. Bu 2.1.6.1-tasdiq.

2.2.2. Ba'zi qiziqarli ayniyatlar.

2.2.2.1-Tasdiq. 1) Faraz qilaylik, $\{e_i \mid i \in \wedge\}$ bu A evolyutsion algebradagi tabiiy bazis bo'lsin, u holda $\{e_i^2 \mid i \in \wedge\}$ - A qism algebra ga tortilgan bo'ladi.

2) Faraz qilaylik, $\{e_i \mid i \in \wedge\}$ - A evolyutsion algebradagi tabiiy bazis bo'lsin. U holda quyidagi ayniyatlar o'rinli:

$$e_i^m = a_{ii}^{m-2} e_i^2, \quad \forall i \in \wedge, \quad \forall m \geq 2$$

$$e_i^2 \cdot e_j = a_{ij} e_j^2, \quad \forall i, j \in \wedge,$$

$$(e_i^m)^2 = a_{ii}^{2m-4} e_i^{(4)}, \quad \forall i \in \Lambda, \quad \forall m \geq 2$$

$$e_i^4 \cdot e_i^4 = a_{ii}^4 e_i^{(2)}, \quad \forall i, j \in \Lambda,$$

Bu yerda a_{ij} lar A ning strukturaviy koeffisientlari.

3) Faraz qilaylik, $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$ -A evolyutsion algebradagi tabiiy bazis bo'lsin, u holda $\wedge$ indekslar to'plamining $\wedge_0$ chekli qism to'plami uchun

$$(\sum_{j \in \wedge_0} e_j)^2 = \sum_{j \in \wedge_0} e_j^2.$$

o'rinli.

Isbot.1) $\{e_i \mid i \in \wedge\}$ generator to'plam bo'lgani uchun

$$e_i^2 = \sum_k a_{ik} e_k,$$

$$e_i^2 \cdot e_i^2 = \sum_k a_{ik} e_k \cdot \sum_l a_{il} e_l = \sum_{l,k} a_{ik} a_{il} e_k e_l = \sum_k a_{ik}^2 e_k^2,$$

$$e_i^2 \cdot e_j^2 = \sum_k a_{ik} e_k \cdot \sum_l a_{jl} e_l = \sum_k a_{ik} a_{jk} e_k^2,$$

o'rinli.

Shunday qilib,

e_i^2 larning chiziqli kombinatsiyalarning ko'paytmasi yana e_i^2 larning chiziqli kombinatsiyasi kabi yoziladi. Bu esa $\{e_i^2 \mid i \in \wedge\}$ to'plam A ning qism algebrasiga tortilgandir.

2)

$$e_i^2 = \sum_k a_{ik} e_k,$$

$$e_i^3 = e_i^2 \cdot e_i = \left(\sum_k a_{ik} e_k \right) \cdot e_i = a_{ii} e_i^2.$$

o'rinli. Agar har bir butun $m > 2$ uchun $e_i^{m-1} = a_{ii}^{m-2} \cdot e_i^2$ bo'lsa, u holda

$$e_i^m = e_i^{m-1} e_i = a_{ii}^{m-3} e_i^2 \cdot e_i = a_{ii}^{m-3} \left(\sum_k a_{ik} e_k \right) \cdot e_i = a_{ii}^{m-2} e_i^2.$$

o'rinli.

Induksiya bo'yicha 1-formulani hosil qilamiz. 2-formula uchun

$$e_i^2 \cdot e_j = \left(\sum_k a_{ik} e_k \right) \cdot e_j = a_{ii}^{m-2} e_j^2.$$

ga egamiz. 3-formula uchun

$$(e_i^m)^2 = e_i^m \cdot e_i^m = a_{ii}^{2m-4} e_i^2 \cdot e_i^2 = a_{ii}^{2m-4} e_i^{(4)}.$$

ni ko'rish mumkin.

m=4 deb olib

$$e_i^4 e_i^4 = a_{ii}^4 e_i^2 \cdot e_i^2 = a_{ii}^4 e_i^{(4)}.$$

ni hosil qilamiz.

3) Tog'ridan to'g'ri hisoblab

$$\left(\sum_{j \in \Lambda_0} e_j \right)^2 = \sum_{j \in \Lambda_0} e_j \cdot \sum_{j \in \Lambda_0} e_i = \sum_{j \in \Lambda_0} e_i \cdot e_j = \sum_{j \in \Lambda_0} e_j^2.$$

ga ega bo'lamiz.

Bu bobda evolyutsion algebralar nazariyasining asosiy ta'riflari va xossalari keltirilgan. Masalan, evolyutsion algebraning qism evolyutsion algebrasi va ideali tariflari hamda xossalari keltirilgan. Shuni takitlash kerakki, har qanday qsim algebra ham evolyutsion qsim algebra bo'lavermaydi. Chunki evolyutsion qsim algebra bo'lishi uchun uning tabiiy bazisini katta evolyutsion algebraning tabiiy bazisigacha davom ettirish mumkin bo'lishi kerak. Bobda evolyutsion algebraning faktorlari algebralari, bazis elementlarining xossalari ham o'rganilgan. Hamda, ba'zi qiziqarli ayniyatlar to'la isboti bilan berilgan.

III. Evolyutsion operatorlar va algebralar ko'paytmasi.

3.1. Evolyutsion operatorlar.

3.1.1-Ta'rif. Faraz qilaylik, E bu $\{e_i | i \in \Lambda\}$ generator to'plamli evolyutsion algebra bo'lsin. Biz K -chiziqli L akslantirishni

$$L: E \rightarrow E$$

$$e_i \mapsto e_i^2 \quad \forall i \in \Lambda$$

kabi aniqlasak, u holda L - E ning ustida chiziqli davom ettiriladi. L ni chiziqli akslantirish sifatida qaraymiz, u holda tabiiy bazis bo'yicha L evolyutsion operatorning matritsa ko'rinishda ega bo'lamiz.

$$L(e_i) = e_i^2 = \sum_k a_{ki} e_k \quad \forall i \in \Lambda$$

bo'lgani uchun

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

ga ega bo'lamiz.

Agar E chekli o'lchamli algebra bo'lsa, bu matritsa chekli tomonga ega bo'ladi. Algebraik akslantirish bo'lmagan evolyutsion algebra evolyutsion algebraning dinamik xossalriga ega. $\theta = \sum_{i \in \Lambda} e_i$ formula belgilash yordamida L ni

barcha $x \in E$ uchun

$$L(x) = \theta \cdot x = \left(\sum_{i \in \Lambda} e_i \right) \cdot x,$$

kabi aniqlaymiz. Bunda $\wedge$ ning chekli yoki cheksizligi ahamiyatga ega emas. E dagi ko'paytmaning yig'indisiga nisbatan distributivlik qonuniga ko'ra L chiziqli akslantirish bo'ladi

$$L(e_i) = \left(\sum_{i \in \Lambda} e_i \right) \cdot e_i = e_i^2, \quad \forall i \in \Lambda,$$

ga ko'ra evolyutsion operatorning bu ta'rifi avvalgisi bilan o'xshashdir. $\wedge$ cheksiz bo'lganda $\theta = \sum_{i \in \Lambda} e_i$ bilan ishlash qiyin emas, chunki $\left(\sum_{i \in \Lambda} e_i \right) \cdot x$ hamisha cheklidir.

Bu θ element universal element deyiladi.

3.1.1-Teorema. Agar E_0 bu E evolyutsion algebraning evolyutsion qism algebrasi bo'lsa, u holda L evolyutsion operator E ni E_0 ga invariant o'tkazadi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\{e_i \mid i \in \wedge_0\}$ - E_0 dagi tabiiy bazis va $\{e_i \mid i \in \wedge\}$ esa uning E dagi tabiiy bazisigacha davomi bo'lsin.

Berilgan $x \in E_0$ uchun $x = \sum_{i \in \wedge_0} c_i e_i$ va evolyutsion algebra

$$L(x) = \sum_{i \in \wedge_0} c_i e_i^2 = \sum_{i \in \wedge_0, k \in \wedge_0} c_i a_{ki} e_k,$$

Kabi ta'sir qiladi, chunki E-qism algebra. Shunday qilib, $L(x) \in E_0$ bo'lsa $L(E_0) \subset E_0$ bo'ladi. Istalgan butun n uchun $L^n(E_0) \subset E_0$ bo'ladi.

3.1.1-Misol. Bir o'yin haqida.

Bir kishi ikki mashina o'ynayapti. Birinchi mashina p extimollik bilan ikkinchi mashina esa q extimollik bilan yutqizadi. Agar kishi biror mashinaga yutqizsa u shu mashinani yana o'ynaydi, agar u bir mashinani yutsa, keyin ikkinchi mashinaga o'tadi. e_i orqali i -mashinani o'ynash holatini belgilaymiz. Bu o'yinga mos evolyutsion algebrani quyidagi ko'paytirish jadvali orqali berish mumkin

$$e_1 \cdot e_2 = 0, e_1 \cdot e_1 = (1-p)e_1 + pe_2, e_2 \cdot e_2 = qe_1 + (1-q)e_2.$$

Bu evolyutsion algebraga mos evolyutsion operator xossalaridan foydalanib o'yinchi etralicha ko'p o'ynaganida $(qe_1 + pe_2)/(p+q)$ holatga yaqin bo'ladi. Agar $p=q=1$ bo'lsa, biz t siklik algebraga ega bo'lamiz. Agar $p=q=0$ bo'lsa, biz nol bo'lmagan trivial algebraga ega bo'lamiz.

3.1.1. Generator to'plamlarni almashtirish.

$\{e_i \mid i \in \wedge\}$ va $\{\eta_j \mid j \in \wedge\}$ lar E evolyutsion algebra uchun 2 ta generator to'plamlar bo'lsin. Faraz qilaylik, ular orasidagi akslantirish $e_i = \sum_k a_{ki} \eta_k$ yoki $\eta_i = \sum_k b_{ki} e_k$ kabi berilgan bo'lsin. Aniqlash munosabatlari uchun

mos ravishda agar $i \neq j$ bo'lsa, $e_i e_j = 0$, $e_i^2 = \sum_k p_{ki} e_k$ va agar $i \neq j$ bo'lsa

$\eta_i \eta_j = 0$, $\eta_i^2 = \sum_k q_{ki} \eta_k$ lar o'rinlidir, bunda $i, j \in \wedge$.

U holda

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= \left(\sum_k a_{ki} \eta_k \right) \cdot \left(\sum_k a_{kj} \eta_k \right) = \sum_k a_{ki} a_{kj} \eta_k^2 \\ &= \sum_{v,k} a_{ki} a_{kj} q_{vk} \eta_v = \sum_v \sum_k q_{vk} a_{ki} a_{kj} \eta_v = 0. \end{aligned}$$

ga ega bo'lamiz. 0 vektorning har bir komponenta koeffisienti 0 bo'lgani uchun

$\mathcal{G} \in \wedge$ va $i \neq j$ larda $\sum_k q_{jk} a_{ki} a_{kj} = 0$. Shunga o'xshash

$$e_i \cdot e_i = \left(\sum_k a_{ki} \eta_k \right)^2 \\ = \sum_k a_{ki}^2 \eta_k^2 = \sum_{v,k} a_{ki}^2 q_{vk} \eta_v = \sum_{v,k,u} a_{ki}^2 q_{vk} b_{uv} e_u = \sum_u p_{ui} e_u,$$

dan

$$p_{ui} = \sum_{v,k} b_{uv} q_{vk} a_{ki}^2.$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$A^{-1} Q A^{(2)} = P,$$

$$Q(A^* A) = 0,$$

ni hosil qilamiz, bunda

$$A = (a_{ij}), \quad Q = (q_{ij}), \quad P = (p_{ij}), \quad A^{(2)} = (a_{ij}^2)$$

va 2 ta matritsa uchun yulduzcha amal quyidagicha aqinlanadi:

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ lar 2 ta $n \times n$ matritsalar bo'lsin, u holda $A^* B = (c_{ij}^k)$ -bu

$n \times \frac{n(n-1)}{2}$ o'lchamli matritsa bo'ladi, bunda $i < j$ bo'ladigan (i, j) juftlik uchun

$c_{ij}^k = a_{ki} b_{kj}$ sharlar k bilan indekslardan, ustunlar esa (i, j) juftlik bilan leksikagrafik tartibda indekslardan.

Biz yuqoridagi shartlarni tavsiflash uchun B I ham ishlatamiz:

$$B^{-1} P B^{(2)} = Q,$$

$$P(B^* B) = 0,$$

Bu yerda $BA = AB = I$

3.1.2. Evolyutsion algebra generator to'plamining "qattiqligi".

Berilgan $\{e_i | i \in \wedge\}$ generator to'plam uchun evolyutsion operatorni hosil qilamiz va uni L_e bilan belgilaymiz. Generator to'plam $\{\eta_j | j \in \wedge\}$ ga o'zgarganda yana evolyutsion operatorni hosil qilamiz va uni L_η bilan belgilaymiz. Generator

to'plam evolyutsion algebraning tabiiy bazisi bo'lgani uchun L_e va L_η lar chiziqli akslantirish sifatida bir xil bo'lishi mumkin. Demak, qo'shimcha shartlar bajarilganda ular turlichadir.

Shunday qilib, evolyutsion operator faqat chiziqli akslantirish emas. U spesifik generator to'plamga bog'liq akslantirishdir. Bu xossa algebraning dinamik holatini o'zgarishda juda muhim, chunki algebrada ko'paytirish dinami qadam sifatida qoraladi.

3.1.2.1-Lemma. L_e va L_η lar o'xshash chiziqli teskarilanuvchi akslantirish bo'lishi uchun $\{e_i | i \in \wedge\}$ va $\{\eta_j | j \in \wedge\}$ generator to'plamlar o'xshash bo'lishi yoki biri ikkinchisidan o'rin almashtirishdan hosil bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Bu yerda biz avvalgi paragrafda foydalanilgan belgilashlardan foydalanamiz. L_η ning $\{\eta_j | j \in \wedge\}$ generator to'plam bo'yicha matritsa ko'rinishi Q bo'ladi va

$$L_\eta(e_1, e_2, \dots, e_n) = L_\eta(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)A = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)QA \\ = (e_1, e_2, \dots, e_n)A^{-1}QA.$$

L_η ning $\{\eta_j | j \in \wedge\}$ generator to'plami bo'yicha matritsa ko'rinishi $A^{-1}QA$ bo'ladi.

Lekin bizga ma'lumki, L_e ning $\{e_i | i \in \wedge\}$ tabiiy bazis bo'yicha matritsa ko'rinishi P bo'ladi. Shunday qilib, agar L_η va L_e lar o'xshash chiziqli akslantirish bo'lsa, $P = A^{-1}QA^{(2)} = P$, bo'ladi. Avvalgi paragraflardan ma'lumki, $A^{-1}QA^{(2)}$ L_η taskarilanuvchan bo'lgani uchun $A = A^{(2)}$ bo'ladi. $B = B^{(2)}$ ekanligi shunga o'xshash isbotlanadi. $a_{ij} = a_{ij}^2$ bo'lgani uchun a_{ij} soi 0 yoki 1 bo'ladi, bundan esa A faqat

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

kabi almashtirish matritsasi bo'lishi kelib chiqadi. Umumiylikni buzmaganda $k \geq 3$ uchun $a_{11} \neq 0, a_{12} \neq 0$, va $a_{1k} \neq 0$ deb faraz qilamiz. U holda $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1$

bo'ladi. Demak, yo $b_{11} \neq 0$ yoki $b_{21} \neq 0$ ekan. Biroq bu elementlardan bittasi nolmas bo'lishi mumkin, aks holda $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 2$ bo'ladi. Faraz qilaylik, $b_{21} \neq 0$ va $b_{11} = 0$ bo'lsin, u holda $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0$, bunda $b_{12} = 0$ bo'ladi. $a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 0$ ga ko'ra $b_{13} = 0$ ni hosil qilamiz. Induksiya bo'yicha $b_{1j} = 0, j = 2, 3, \dots$ ni hosil qilamiz. Bu esa B ning singulyar emasligiga ziddir. Agar $b_{11} \neq 0$ va $b_{21} = 0$ deb olsak, shunga o'xshash $b_{21} = b_{22} = \dots = b_{2n} = \dots = 0$ ni hosil qilamiz. Bu ziddiyatdir. Shunday qilib A ning har bir satri faqat bitta nolmas elementni saqlashi shunga isbotlanadi. Demak, A-almashtirish matritsasi ekan.

3.1.3. Evolyutsion algebraning avtomorfizm gruppasi.

Berilgan E evolyutsion algebra uchun E ning qancha generator to'plamga ega bo'lishini bilish muhimdir.

3.1.3.1-Tasdiq. Agar $\{e_i \mid i \in \wedge\}$ generator to'plamli E evolyutsion algebraning g avtomorfizimli berilgan bo'lsa, u holda $G^{-1}PG^{(2)}=P$ va $P(G*G)=0$ bo'ladi, bu yerda G va P lar g va L larning mos ravishda matritsa ko'rinishlaridir.

Isbot. $g(e_i) = \sum_k g_{ki} e_k$ $G = (g_{ij})$ deb yozib olamiz. $i \neq j$ uchun

$$g(e_i \cdot e_j) = 0 = g(e_i) g(e_j) = \sum_k g_{ki} e_k \sum_k g_{kj} e_k = \sum_k g_{ki} g_{kj} e_k^2 = \sum_{k,v} p_{vk} g_{ki} g_{kj} e_v.$$

ga egamiz. shunday qilib, har bir v uchun

$$\sum_k p_{vk} q_{ki} q_{kj} = 0 \quad \text{ya'ni} \quad P(G*G) = 0 \quad i=i \quad \text{uchun}$$

$$g(e_i \cdot e_j) = 0 = g(e_i) g(e_j) = \sum_k g_{ki}^2 e_k^2 = \sum_{k,j} g_{ki}^2 p_{jk} e_j = \sum_{k,j} p_{ki} g_{jk} e_j.$$

o'rinli. Shu sababli $\sum_k p_{jk} q_{ki}^2 = \sum_k q_{jk} p_{ki}$ bo'ladi, yani $PG^{(2)} = GP$ shu sababli $G^{-1}PG^{(2)} = P$

Shunday qilib, E ning avtomorfizm gruppasini $Avto(E) = \{G \mid G^{-1}PG^{(2)} = p \text{ va } P(G*G) = 0\}$ kabi tasvirlashimiz mumkin. Barcha generator to'plamlar majmuasini tavsiflashda avtomorfizm gruppasini qo'lashimiz mumkin.

3.1.3.2-Tasdiq. $B = \{e : i \in \wedge\} - E$ evolyutsion algebraning generator to'plami bo'lsin. U holda $g(B) : g \in \text{Auto}(E)$ oila E ning barcha turli generator to'plamlar majmuasi bo'ladi.

3.1.4. Evolyutsion algebraning ko'paytirish algebrasi.

E algebra bo'lsin. L_a va R_a orqali mos ravishda a ga chapdan va o'ngdan ko'paytiri operatorini belgilaymiz.

$$L_a : x \mapsto a \cdot x$$

$$R_a : x \mapsto x \cdot a$$

L_a operatorlarga tortilgan E chiziqli fazo endomorfizmlarning to'la matritsa algebrasi $\text{Hom}(E, E)$ ning qism algebrasi E algebraga chapdan ko'paytirish operator algebrasi deyiladi va $L(E)$ bilan belgilaymiz. E algebradan o'ngdan ko'paytirish algebrasi $R(E)$ ham shunga o'zhash aniqlanadi. Barcha $L_a, R_a, a \in E$ operatorlarga tortilgan $\text{Hom}(E, E)$ ning qism algebrasiga E algebraning ko'paytirish algebrasi deyiladi va $M(E)$ orqali belgilandi.

3.1.4.1-Natija. Agar E evolyutsion algebra bo'lsa, $L(E) = R(E) = M(E)$ -a birlik elementga ega assosiativ algebra bo'ladi.

Isbot. E kommutativ bo'lgani uchun isboti oson.

3.1.4.2-Natija. Agar $E = \{e_i | i \in \wedge\}$ tabiiy bazisga ega evolyutsion algebra bo'lsa, u holda $\{L_i | i \in \wedge\}$ chiziqli fazo bo'ladi va $\text{span}(L, E)$ kabi belgilanadi, u barcha chap (o'ng) ko'paytirish operatorlaridan tashkil topgan, bu yerda $L_i = L_{e_i}$ $\text{span}(L, E)$ chiziqli fazo bo'lsa va E bir xil o'lchovga ega. Umumiy holda, agar $\dim E^2 \neq 1$ bo'lsa $\dim E < \dim(L(E))$ o'rinli.

Isbot. Ixtiyoriy L_x chapdan ko'paytirish operatori uchun yagona usul bilan $x = \sum_i a_i e_i$ ni yozish mumkin u holda E dagi ko'paytirish operatorining chiziqliligiga ko'ra $L_x = \sum_i a_i L_i$. Agar $y = \sum_i b_i e_i$ uchun $L_x = L_y$ bo'lsa, u holda $L_x(e_k) = L_y(e_k)$ va $(\sum_i a_i e_i)e_k = (\sum_i b_i e_i)e_k$ o'rinli. Demak,

$$a_k e_k^2 = b_k e_k^2 ,$$

$$(a_k - b_k) e_k^2 = 0 ,$$

$$(a_k - b_k) \sum_i p_{ki} e_i = 0 .$$

ekan. E trivial bo'lmagan algebra bo'lgani uchun shunday $j, p_{kj} \neq 0$ topilib $(a_k - b_k) p_{kj} e_j = 0$ bo'ladi, demak har bir k uchun $a_k - b_k = 0$. Shu sabab $x=y$, bu esa $x \rightarrow L_x$ akslantirishning **inektivligini** bildiradi. Shunday qilib, barcha chapdan ko'paytirish operatorlarining qobig'i bo'lgan chiziqli fazo $\{L_i \mid i \in \wedge\}$ to'plamning qobig'i bo'ladi. Demak, $\{L_i \mid i \in \wedge\}$ to'plam **span(L,E)** uchun bazis bo'ladi. E assosiativ bo'lmagan algebra bo'lgani uchun $x \rightarrow L_x$ akslantirish E ni $L(E)$ ga akslantiruvchi algebraik akslantirish bo'lmaydi. Umumiy holda $\{L_i \mid i \in \wedge\}$ to'plam $L(E)$ da bazis bo'lmaydi. $\dim E^2 > 1$ bo'lgani uchun 2 ta turli e_i va e_j generator topilib kvadratlari e_i^2 va e_j^2 har biriga parallel emas. Aniqlik uchun ularni e_1 va e_2 orqali belgilaymiz. $L_2 \circ L_1 - L_i, i \in \wedge$ larning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishda tasvirlab bo'lmaydi. Faraz qilaylik, $L_2 \circ L_1 = \sum_i a_i L_i$ bo'lsin, u holda

$$L_2 \circ L_1(e_k) = \left(\sum_i a_i L_i \right)(e_k);$$

o'rinli, shu sababli

$$k \neq 1, \quad 0 = a_k e_k^2, \quad a_k = 0;$$

$$k=1, \quad L_2(e_1^2) = a_1 e_1^2, \quad p_{12} e_2^2 = a_1 e_1^2;$$

$$p_{12} p_{2k} = a_1 p_{1k}, \quad \forall k.$$

o'rinli, agar a_1 nolmas bo'lsa, $P_{1k} = \frac{P_{12}}{a_1} P_{2k}, \forall k$, lekin bu mumkin emas, chunki e_i^2 va e_j^2 lar parallel emas. Shunday qilib, $L(E) - \{L_i \mid i \in \wedge\}$ ning qobig'i bo'la olmaydi.

3.1.5. Evolyutsion algebrada hosila olingan L_i algebrasi.

Ixtiyoriy algebra uchun E evolyutsion algebraning hosilalari qism fazo bo'lgan $\text{Der}(E)$ L_i algebrasi bo'ladi. $\text{Der}(E)$ ga tegishli elementni tavsiflaymiz. $\{e_i \mid i \in \wedge\}$ to'plam E ning generator to'plami, $D \in \text{Der}(E)$ va faraz qilamiz. $i \in \wedge$ uchun $D(e_i) = \sum_k d_{ki} e_k$. Hosilaning $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ ta'rifiga ko'ra

$$D(e_i e_j) = D(e_i) e_j + e_i D(e_j)$$

$$= (\sum_k d_{ki} e_k) e_j + e_i (\sum_k d_{kj} e_k) = d_{ji} e_j^2 + d_{ij} e_i^2 = d_{ji} (\sum_k p_{kj} e_k) + d_{ij} (\sum_k p_{ki} e_k) = \sum_k (d_{ji} p_{kj} + d_{ij} p_{ki}) e_k = 0,$$

ni hosil qilamiz, shunday qilib, $i \neq j$ uchun $p_{kj} d_{ji} + p_{ki} d_{ij} = 0, i \in \wedge$ bundan tashqari

$$D(e_i^2) = D(\sum_k p_{ki} e_k) = \sum_k p_{ki} D(e_k) = \sum_{j,k} p_{ki} d_{jk} e_j = 2 \sum_j d_{ii} p_{ji} e_j,$$

o'rinli.

Shuning uchun ixtiyoriy $i, j \in \wedge$ uchun $2p_{ji} d_{ii} = \sum_k p_{ki} d_{jk}$ o'rinli. Demak,

$$\text{Der}(E)$$

$$= \{D \in \text{End}(E) \mid p_{kj} d_{ji} + p_{ki} d_{ij} = 0, \text{ yoki } i \neq j; 2p_{ji} d_{ii} = \sum_k p_{ki} d_{jk}\}.$$

ekan.

3.1.6. Evolyutsion algebraning sentroidi.

Barcha chap va o'ng ko'paytirish operatorlari bilan o'rin almashtiruvchi barcha $T \in \text{Hom}(E, E)$ chiziqli akslantirishlar to'plamiga E algebraning sentroidi deyiladi va $\Gamma(E)$ kabi belgilanadi.

$$T L_x = L_x T, \quad T R_y = R_y T, \quad x, y \in E.$$

Sentroid $M(E)$ ko'paytirish algebrasini markazlashtiradi, ya'ni

$$\Gamma(E) = \text{Cent}_{\text{Hom}(E, E)}(M(E)).$$

3.1.6.1-Teorema. Har qanday evolyutsion algebra sentroidlashtiriladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $T \in \Gamma(E)$ sentroid element bo'lsin. Faraz qilamiz, $i \neq j$ uchun $T(e_i) = \sum_k t_{ki} e_k$ bo'lsin. U holda

$$T L_{e_j}(e_i) = T(e_j e_i) = 0 = L_{e_j} T(e_i) = e_j \left(\sum_k t_{ki} e_k \right) = t_{ji} e_j^2 = t_{ji} \sum_k p_{kj} e_k,$$

o'rinli, demak $t_{ij} = 0$ u holda

$$T L_{e_j}(e_i) =$$

$$T(e_i^2) = T\left(\sum_k p_{ki} e_k\right) = \sum_k p_{ki} T(e_k) = \sum_{k,j} p_{ki} t_{jk} e_j = \sum_{j,k} t_{jk} p_{ki} e_j,$$

va

$$L_{e_i} T(e_i) = e_i \sum_k t_{ki} e_k = t_{ii} e_i^2 = t_{ii} \sum_k p_{ki} e_k,$$

ni qaraymiz. Ularni solishtirib

$$t_{ii} p_{ji} = \sum_k t_{jk} p_{ki} \quad \text{yoki} \quad j \in \Lambda$$

$$t_{ii} p_{ji} = t_{jj} p_{ji}, \quad \text{yoki} \quad j \in \Lambda$$

ni hosil qilamiz. Shu sababli, $t_{ii} = t_{jj}$ ni hosil qilishimiz kerak. Shuning uchun

$T(e_i) = k(T) e_i$ bu yerda $k(T)$ -K maydondagi son. Demak, T songa ko'paytirish ekan. Xulosa qilsak, $\Gamma(E) \cong K$ va E -sentrionlashtirilgan ekan.

3.2. Assosiativ bo'lmagan Banax algebrasi.

Evolyutsion algebrada evolyutsion qismini sonli tasviflash uchun norma kiritish zarurdir. Bu norma kiritilgach evolyutsion algebra Banax algebra bo'ladi.

Biz avvalo evolyutsion algebrada normani aniqlaymiz va keyin istalgan chekli o'lchamli evolyutsion algebra Banax algebra ekanligini isbotlaymiz.

3.2.1. Evolyutsion algebrada norma ta'rifi.

Faraz qilaylik, $E = \{e_i \mid i \in \Lambda\}$ genrator to'plamli evolyutsion algebra bo'lsin.

E ni K maydonga o'tkazuvchi N funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$N : E \rightarrow K$$

$$N(x) = \sum_i |a_i|$$

Bu yerda $x \in E$ va $x = \sum_k a_k e_k$. Tekshirish mumkinki, N norma bo'ladi.

Nomanfiyligi.

$$N(x) = \sum_i |a_i| \geq 0.$$

Agar $N(x)=0$ bo'lsa, u holda $N(x) \sum_i |a_i| = 0$. Shu sababli, $|a_i|=0$, bu esa $a_i = 0$

bo'lishi bildiradi, ya'ni $x=0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Chiziqliligi. $N(ax) = |a|N(x)$, $a \in K$ chunki

$$N(ax) = \sum_i |aa_i| = |a| \sum_i |a_i| = |a|N(x)$$

Uchburchak tengsizligi.

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y). \quad x = \sum_i a_i e_i \text{ va } y = \sum_i b_i e_i \text{ uchun}$$

$$\begin{aligned} N(x+y) &= N\left(\sum_i (a_i + b_i)e_i\right) \\ &= \sum_i |a_i + b_i| \\ &\leq \sum_i (|a_i| + |b_i|) = \sum_i |a_i| + \sum_i |b_i| = N(x) + N(y). \end{aligned}$$

o'rinli.

Shunday qilib, evolyutsion algebra normallangan algebra ekan. Biz uni $N(x) = \|x\|$ deb belgilaymiz.

3.2.1.1-Tasdiq. Har qanday l evolyutsion operator chegaralangan chiziqli operatoridir.

Isbot. $x \in E$ uchun E evolyutsion algebraning $\{e_i | i \in \Lambda\}$ tabiiy bazisi bo'yicha $x = \sum_k a_k e_k$ bo'ladi. U holda

$$L(x) = \sum_i a_i L(e_i) = \sum_i a_i e_i^2 = \sum_{i,j} a_i p_{ji} e_j.$$

$$N(L(x)) = \sum_j \left| \sum_i a_i p_{ji} \right| \leq \sum_j \sum_i |a_i p_{ji}| \leq \sum_i |a_i| \sum_j |p_{ji}| \leq \sum_i |a_i| c_i \leq c N(x),$$

o'rinli, bu yerda $c_i = \sum_j |p_{ji}|$ va $c = \max\{c_i \mid i \in \wedge\}$.

Demak, T - chegaralangan ekan.

3.2.1.1-Natija. $SP(L, E)$ ning har bir elementi chegaralangan chiziqli operator bo'ladi, bu yerda $SP(L, E)$ orqali E dagi barcha chapdan ko'paytirish operatorining chiziqli fazosi belgilangan.

Isbot. Ma'lumki, K bo'yicha $SP(L, E) = \text{Span}(L_i : i \in \wedge)$ o'rinli. Agar $x = \sum_k a_i e_i$ bo'lsa, u holda

$$L : x = a_i e_i^2.$$

Ko'rinib turibdiki,

$$N(L_i(x)) = N\left(a_i \sum_j p_{ji} e_j\right) \leq c_i |a_i| \leq c \sum_i |a_i| = c N(x),$$

o'rinli. Shu sababli L_i –chegaralangan. Endi $\forall \theta \in S_p(L, E)$ ni $\theta = \sum_i \beta_i L_i$, $\beta_i \in K$

kabi yozib olamiz. Ixtiyoriy $x = \sum_k a_i e_i$ uchun

$$\theta(x) = \sum_i \beta_i L_i(x) = \sum_i \beta_i \alpha_i e_i^2 = \sum_{i,j} \beta_i \alpha_i p_{ji} e_j,$$

o'rinli, u holda

$$N(\theta(x)) = \sum_{i,j} |\beta_i \alpha_i p_{ji}| \leq c \sum_i |\beta_i \alpha_i| \leq c \sum_i |\beta_i| \cdot \sum_i |\alpha_i| \leq cb N(x),$$

bo'ladi, bu yerda $b = \sum_i |\beta_i|$ –bu berilgan θ operator uchun o'zgarmasdir.

3.2.2.Evolyutsion algebra Banax fazosi sifatida.

Funksional analiz kursida chiziqli operator chegaralangan bo'lishi uchun uning uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir degan teorema bor, 6-tasdiq va 6-natijaga ko'ra evolyutsion operatorlar va chapdan ko'paytirish operatorlari chegaralangandir. Shunday qilib, topologiya bo'yicha uzluksizlik $\rho(x, y) = N(x, y), x, y \in E$ metrika kabi tushuniladi.

3.2.2.1-Teorema. Faraz qilaylik, E chekli n o'lchamli evolyutsion algebra bo'lsin, u holda u chiziqli normalanga fazo sifatida to'la bo'ladi, ya'ni E -Banax fazosidir.

Isbot . Faraz qilaylik, $x^m = \sum_{j=1}^n a_j^m e_j, m = 1, 2, \dots$ - E dagi ketma-ketlik bo'lsin.

U holda

$$\begin{aligned} p(a_i^m e_i, a_i^k e_i) &= N(a_i^m e_i - a_i^k e_i) = |a_i^m - a_i^k| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i^m - a_i^k| = p(x^m, x^k) \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |a_i^m - a_i^k|. \end{aligned}$$

o'rinli x^m Koshi ketma-ketli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday m_0 nomer topilib ixtiyoriy $m, k > m_0$ natural sonlar uchun $\rho(x^m, x^k) < \varepsilon$ o'rinli. Shunday

qilib,
$$|a_i^m - a_i^k| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Haqiqiy analizdagi Koshi alomatiga ko'ra b_i son topilib, $|a_i^m - b_i| < \frac{\varepsilon}{n}$ bo'ladi, ya'ni a_i^m kordinatalar kerakligi $b_i, i=1, 2, \dots, n$ ga intiladi. Agar

$x^0 = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ belgilash olsak, u holda

$$\rho(x^m, x^0) = \sum_i^n |a_i^m - b_i| \leq \varepsilon$$

o'rinli. Bu esa x^m ketma-ketlik x^0 ga intilishini bildiradi. Demak, E chiziqli normallangan Fazo sifatida to'la ekan, ya'ni E Banax fazosi ekan.

3.2.2.1-Natija. Chekli o'lchamli E evolyutsion algebra uchun E assosiativ bo'lmagan Banax algebra bo'ldi.

Isbot. 3.2.2.1-teoreadan kelib chiqadi.

3.2.2.2-Teorema. Faraz qilaylik, E -chekli o'lchamli evolyusion $BL(E \rightarrow E) - E$ da aniqlanga barcha chiziqli chegaralangan operatorlar to'plami bo'lsin. U holda E dagi barcha ko'paytirish operatorlar qism fazosi $L(E)$, $BL(E \rightarrow E)$ ning Banax qism fazosi algebrasi bo'ladi.

Isbot. Funktsional analizda, X Banax fazosi $R(X \rightarrow X)$ esa X ni X ga o'tkazuvchi chiziqli chegaralangan operatorlar fazosi bo'lsa, u holda $R(X \rightarrow X)$ Banax algebrasi bo'ladi degan teorema bor. E -Banax algebra bo'lgani uchun $BL(E, E)$ ham Banax algebra bo'ladi. $L(E)$ ning har bir elementi chegaralangan va $L(E)$ ning 2 ta elementi ko'paytmasi yana chegaralangan bo'lgani uchun chapdan ko'paytirish operator algebrasi $BL(E \rightarrow E)$ ning qism algebrasi bo'ladi. Biroq biaga ma'lumki, $L(E)$ $BL(E \rightarrow E)$ ning Banax qism algebrasi bo'lmaydi.

3.2.3. Davriylik va algebraik qat'iylilik.

Bu yerda biz evolyutsion algebrada har bir generatorning, davri tushunchasini kiritamiz. Ma'lumki, nomanfiy sodda evolyutsion algebralar har bir generator uchun algebraik qat'iylilik va algebraik o'tib ketish tushunchasini kiritamiz. Ular algebralar evolyutsiyasini o'rganishda muhim rol o'ynaydi.

3.2.4..Evolutsion algebradagi generatorning davriyligi.

3.2.4.1-Ta'rif. Faraz qilaylik, e_j - E evolyusion algebradagi generator bo'lsin.

$\{\log_2 m \mid e_j < (e_j^{(m)})\}$ to'planning eng kattan umumiy bo'luvchisiga e_j ning d davri deyiladi, bu yerda $e_j^{(m)}$ daraja biror k to'la daraja, $2^k = m$ ya'ni

$$d = g.c.d. \{ \log_2 m \mid e_j < (e_j^{(m)}) \}.$$

Agar $d=1$ bo'lsa e_j -davriy deyiladi, agar

$$\{ \log_2 m \mid e_j < (e_j^{(m)}) \}$$

bo'sh to'plam bo'lsa, $d = \infty$ deb olamiz. Bu ta'rifni tushunish uchun evolyusion operator va elementning to'la darajasi orasidagi bo'g'lanishni ifodolovchi tasdiqni keltiramiz.

3.2.4.1-Tasdiq. e_j generator d davrga ega bo'lishi uchun d son $\{n \mid L^n(e_i) \neq 0\}$ bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni $d = g.c.d. \{n \mid p_i L^n(e_i) \neq 0\}$.

bu yerda p_i -bu E ning proeksiyalovchi akslantirishi bo'lib, E ning har bir elementiga uning e_i komponentasini mos qo'yadi.

Isbot. Biz matritsaning to'la darajasi tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik,

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot (e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2) = (e_1, e_2, \dots, e_n) B,$$

bo'lsin, $B = (P_{ij})$ – E ning o'zgarmas matritsasi

$$\begin{aligned} (e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2) \cdot (e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) B \cdot (e_1, e_2, \dots, e_n) B \\ &= (e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, \dots, e_n^{(4)}) \\ &= \left(\sum_k p_{k1} e_k, \sum_k p_{k2} e_k, \dots, \sum_k p_{kn} e_k \right) \\ &\cdot \left(\sum_k p_{k1} e_k, \sum_k p_{k2} e_k, \dots, \sum_k p_{kn} e_k \right) \\ &= \left(\sum_k p_{k1}^2 e_k^2, \sum_k p_{k2}^2 e_k^2, \dots, \sum_k p_{kn}^2 e_k^2 \right) \\ &= (e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2) \begin{pmatrix} p_{11}^2 p_{21}^2 & \cdots & p_{n1}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n}^2 p_{2n}^2 & \cdots & p_{nn}^2 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, \dots, e_n) B B^{(2)}. \end{aligned}$$

ni qaraymiz. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} (e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, \dots, e_n^{(4)}) \cdot (e_1^{(4)}, e_2^{(4)}, \dots, e_n^{(4)}) &= (e_1^{(8)}, e_2^{(8)}, \dots, e_n^{(8)}) \\ &= (e_1, e_2, \dots, e_n) B B^{(2)} \cdot (e_1, e_2, \dots, e_n) B B^{(2)} \\ &= (e_1, e_2, \dots, e_n) B (B B^{(2)})^{(2)}. \end{aligned}$$

Endi matritsaning to'la darajasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$A^{[1]} = A$$

$$A^{[2]} = A A^{(2)} = A(A^{[1]})^{(2)}$$

$$A^{[3]} = A(A^{[2]})^{(2)} = A(AA^{(2)})^{(2)}$$

.....

$$A^{[k+1]} = A(A^{[k]})^{(2)}.$$

Shunday qilib,

$$(e_1^{[m]}, e_2^{[m]}, \dots, e_n^{[m]}) = (e_1, e_2, \dots, e_n)B^{[m]}.$$

ga egamiz.

Shuni ta'kidlash lozimki, L evolyutsion operatorning matritsa ko'rinishi B matritsa bo'yicha berilgan $\rho_i L^k(e_j) \neq 0$ deganda B^k ning (i, j) elementi nolmas deb tushuniladi. tekshirish osonki B^k ning (i, j) elementi nolmas bo'lishi uchun $B^{[k]}$ ning (i, j) - elementi nolmas bo'lishi zarur va yetarli, bu esa $\rho_i(e_j^{(2^k)}) \neq 0$ ni bildiradi. Bu esa $e_j < e_j^{(2^k)}$, isbot tugadi.

3.2.4.1-Natija. e_j generator d davrga ega bo'lishi uchun d soni $\{n \mid e_j < e_j^{[n]}\}$ to'planning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lishi zarur va etarli, bu yerda

$$e_j^{[n]} = e_j^{(2^n)}.$$

3.2.4.1-Teorema. Nomanfiy sodda evolyutsion algebrada barcha generatorlar bir xil davrga ega.

Isbot. Faraz qilaylik, e_i va e_j lar E sodda evolyusion algebradagi 2 ta generatorlar bo'lsin. e_i va e_j larning davrlarini mos ravishda d_i va d_j bilan belgilaymiz. e_i element e_j ning to'la darajasiga bog'langanligi uchun $e_i < e_j^{[n]}$ deb olamiz va e_i element e_j ning to'la darajasiga bog'langanligi uchun $e_i < e_i^{[m]}$ deb olamiz. teoremadan $e_i < e_i^{[n+m]}$ va $e_j < e_j^{[n+m]}$ ni hosil qilamiz. U holda $d_i | n+m$ va $d_j | n+m$ bo'ladi. $S_i < S_j^{[n+m]}$ bo'lgani uchun $e_i < e_j^{[d_j+n+m]}$ va $e_i < e_i^{[d_j+n+m]}$, u holda $d_j | d_j + n + m$. Shu sababli $d_i | d_j$. Shunga o'xshash $d_j | d_i$. Demak, $d_i = d_j$.

Bu bobda evolyutsion algebralarga mos keluvchi evolyutsion operatorlar o'rganilgan. Bu operatorlar chiziqli operatorlar bo'lib, agar algebra chelkli n o'lchovli bo'lsa, chiziqli evolyutsion operator $n \times n$ tartibli kvadratik matritsa bilan beriladi. Evolyutsion operatorlarni qo'llab, bu bobda, generatorlar (bazislar) to'plamida almashtirishlar hamda evolyutsion algebra generator to'plamining qattiqligi xossalari o'rganilgan. Hamda, evolyutsion algebraning avtomorfizm gruppasi, evolyutsion algebralarning ko'paytirish algebrasi, hosila olingan L_f algebrasi va sentri (markazi) xossalari to'la isboti bilan keltirilgan.

Evolutsion algebralarda norma kiritilgan va bu normaga nisbatan evolutsion algebraning associative bo'lmagan Banach algebrasi bo'lishi isbotlangan. Hamda, davriylik va algebraik qat'iylik o'rganilgan.

XOTIMA

Zamonaviy matematik nazariyalar turli sohalarda qo'llanilmoqda. Xususan, biologiyaning masalalarida matematik apparat keng tadbiq etilmoqda. Malakaviy bitiruv ishi shunday tadbirlardan biri, yani genetikada algebraning tadbirini o'rganishga bag'ishlandi. Maqsad, genetikada hosil bo'ladigan algebralarni aniqlash, ularning asosiy xossalari o'rganish va biologiyaga tadbirlarini tushinish edi. Asosiy vazifa, hozirgi kungacha bu sohada olingan natijalarni sistematik tasniflash va undagi matematik metodlarni o'rganishdan iborat edi.

Ish 3 bobdan iborat bo'lib quyidagi ishlar qilindi:

Evolutsion algebra kelib chiqishi mumkin bo'lgan turli sohalardan misollar keltirildi. Jumladan, fizikadan misollar, diskret fazoda harakatlanuvchi zarrachalar, diskret fazodagi oqimlar, topologiyadan misollar, ehtimollar nazariyasidan misollar hamda stoxastik jarayonlarda evolutsion algebralarga misollar keltirilgan. Shu bilan birga evolutsion algebralarning ta'rifi, ba'zi elementar xossalari keltirilgan .

Evolutsion algebralar nazariyasining asosiy ta'riflari va xossalari keltirildi. Masalan, evolutsion algebraning qsim evolutsion algebrasi va ideali ta'riflari hamda xossalari keltirilgan. Evolutsion algebraning faktorlari algebralari, bazis elementlarining xossalari ham o'rganildi. Hamda, ba'zi qiziqarli ayniyatlar to'la isboti bilan berildi.

Evolutsion algebralarga mos keluvchi evolutsion operatorlar o'rganildi. Bu operatorlar chiziqli operatorlardir. Evolutsion operatorlarni qo'llab, generatorlar (bazislar) to'plamida almashtirishlar hamda evolutsion algebra generator to'plamining qattiqligi xossalari o'rganildi. Hamda, evolutsion algebraning

avtomorfizm gruppasi, evolyutsion algebralarning ko'paytirish algebrasi va sentri (markazi) xossalari to'la isboti bilan keltirildi.

Evolutsion algebralarda norma kiritilgan va bu normaga nisbatan evolutsion algebraning associative bo'lmagan Banach algebrasi bo'lishi isbotlandi. Hamda, davriylik va algebraik qat'iylik, evolyutsion algebradagi generatorning davriyligi o'rganildi.

Bitiruv malakaviy ish orqali matematikaning biologiyaga qo'llanishi metodlari o'zlashtirildi.

Adabiyotlar

1. O`zbekiston Respublikasi Prezidentining, “Barkamol avlod yili davlat dasturida”gi farmoni. Xalq so`zi gazetasi, 30.01.2010, 21-son.
2. I.A.Karimov, “Tarixiy xotirasiz kelajak yo`q”, O`zbekiston, 1998, b-31.
3. I. A. Karimov, “Yuksak ma`naviyat yengilmas kuch” ”Ma`naviyat” nashriyoti. Toshkent 2009-yil.
4. Jamiyatimiz mafkurasi xalqni-xalq, millatni-millat qilishga xizmat etsin. ”Tafakkur” jurnali, 1998-yil. 2-son.
5. U.A. Rozikov and U.U.Zhamilov. On F-quadratic stochastic operators, Math. Notes. 83(4), 554-559 (2008).
6. U.A.Rozikov and U.U.Zhamilov, The dynamics of stricly operators non-Volterra quadratic schochasticoperators on the 2 – simplex, Sbornik: Math. 200(9), 1339-1351 (2009).

7. U.A.Rozikov and A.Zada, On l-Volterra quadratic stochastic operators, Doklady. Math. 79(1) 32-34 (2009).
8. U.A.Rozikov and N.B.Shamsiddinov, On non-Volterra quadratic stochastic operators generated by a product measure, Stoch, Anal. Appl. 27(2) 353-362 (2009).
9. J.P.Tian, "Evolution algebras and their applications," Lecture Notes in Mathematics, 1921, Springer-Verlag, Berlin, (2008).
10. A. Worz - Busekros, "Algebras in genetics" Lecture Notes in Biomathematics, 36. Springer-Verlag, Berlin-New York. 1980.
11. E. Lombardi, Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond all Algebraic Orders (2000).
12. H.Kicchle, Theory of K-Loops (2002).
13. I.Chueshov, Monotone Random Systems (2002).
14. R.N.Ganikhodzhaev, Quadratic stochastic operators Lyapunov functions, and tournaments, Russian Acad. Sci. Sb. Math. 76(2). 489-506 (1993).
15. P. Holgate, "The interpretation of derivations in genetic algebras" Linear Algebra Appl. 85.75-79.(1987).
16. Etherington I.M.H. Non-associative algebra and the symbolism of genetics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* B 61, 24-42, 1941.
17. Gonshar H. Contribution of genetic algebras, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), 273-279, 1973.
18. Schafer R.D. An introduction to non-associative algebras, Acad. Press, New York, 1966.
19. Holgate P. Selfing in genetic algebras, *J. Math. Biology*, 6, 197-206, 1978.

20. Lyubich Y.I. Mathematical structures in population genetics. Springer. 1992.

21. Nill Cambell. Biology. The Benjamin Cummings Com. 1996.