

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

Fizika- matematika fakulteti

“Matematika” kafedrası

5130100-“Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr
darajasini olish uchun

Shirnova Mohigul Dehqon qizining

**“Kompleks hadli Teylor va darajali qatorlar”
mavzusida**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**“Ish ko’rildi va himoyaga ruxsat
berildi”**

Kafedra mudiri:

_____dots. R.T.Muxitddinov

“___” _____2015 y.

Ilmiy rahbar: _____dots R.T.Muxitdinov

“___” _____2015 y.

Taqrizchi _____Q.Q.Raxmonov

“___” _____2015 y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi“

Fakultet dekani: _____prof. Sh. M. Mirzayev

“___” _____2015 y.

Buxoro – 2015

Mundarija.

Kirish.....	3
I.Kompleks hadli qatorlar.....	.
1.1. Kompleks sonlar haqida ma'lumot.....	11
1.2. Sonli qatorlar.....	20
1.3.Qatorlar ustida amallar.....	27
1.4.Funksional qatorlar.....	32
1.5.Funksional qatorlarni integrallash va differensiallash.....	38
II. Kompleks hadli darajali qatorlar	
2.1. Darajali qatorlar.....	46
2.2. Darajali qatorning yaqinlashish doirasi va radiusi.....	48
2.3. Teylor qatori.....	53
Xotima.....	64
Adabiyotlar ro'yxati.....	65

Ta'limni tarbiyadan, tarbiyani
esa ta'limdan ajratib bo'lmaydi
bu sharqona qarash, sharqona
hayot "falsafasi"

I.A.Karimov

Kirish

Prezidentimizning bu so'zlari haqida fikr yuritganimizda esa buyuk ma'rifatparvar bobomiz A.Avloniyning "Tarbiya biz uchun yo hayot, yo momot, yo najot, yo halovat, yo saodat, yo falokat masalasidir" degan chuqur ma'noli so'zlarni istaymiz.

Haqiqatdan ham ertangi kunimizning qanday bo'lishi tinch va osoyishta mustaqil O'zbekistonimizning buyuk kelajagi qanday ravnaq topishi biz yoshlarni va biz kelajakda ta'lim-tarbiya beradigan yosh avlodning qo'lidadir.

Yosh avlodning har tomonlama kamol topishi istiqlol yillarining eng dolzarb vazifalaridan biri bo'lib kelmoqda. Vatanimizda ham bu borada ancha samarali ishlar bajarilmoqda. Bunga misol qilib "Sog'lom bola yili" Davlat dasturini keltirish mumkin. Ushbu dasturda 2014-2015 yillar davomida bajariladigan barcha ishlar rejasi haqida fikr yuritilgan. Ta'lim sohasiga ham katta e'tibor qaratilgan. "Sog'lom bola yili" Davlat dasturida maktabgacha ta'lim muassasalarining moddiy-texnik bazasini bosqichma-bosqich mustahkamlash, shu jumladan ularning tubdan ta'mirlash va jihozlash, yangilarini qurishga yo'naltirilgan aniq vazifalar belgilangan. Bolalarni maktabga tayyorlash bo'yicha mutlaqo yangi dasturlarning ishlab chiqilishi va joriy etilishi belgilangan bo'lib, ularda bolalarning aqliy, axloqiy estetik va jismoniy rivojlanishi nazarda tutilgan.

Boshlang'ich sinflarda o'qitish sifatini yanada ko'tarish choralari belgilangan. Jumladan, 1-4 sinf o'quvchilari uchun o'quv dasturlari va darsliklarining qayta ko'rib chiqilishi, shuningdek, o'qituvchilar uchun tegishli uslubiy qo'llanmalar ishlab chiqilishi nazarda tutilgan.

2014-2015 o'quv yilida 2,6 million o'quvchilar uchun 575 nomdagi 25 million nusxa darsliklar va darsliklarning qayta ko'rib chiqilishi shuningdek, o'qituvchilar uchun tegishli o'quv-uslubiy qo'llanmalar bilan ta'minlanadi.

“Milliy umumta'lim elektron kutubxona” loyihasining amalga oshirilishi ham bolalarning intellektual rivojlanishiga ko'maklashadi. Loyihada turli bilim olishga oid va o'quv materiallarini elektron formatga o'tkazish markazi multimedia axborot resurslari markazi, shuningdek, integratsiyalashgan axborot kutubxona tarmog'i tashkil etilishi, O'zbekistondagi barcha axborot kutubxona muassasalarining 2020 – yilgacha ushbu tarmoqqa ulanishi mo'ljallangan.

Mamlakatimizda ota-ona mehridan mahrum va imkoniyati cheklangan bolalarga alohida g'amxo'rlik ko'rsatib kelinmoqda. 2015-2017 yillarda mehribonlik uylari, ixtisoslashtirilgan maktab internatlar va maktabgacha tarbiya muassasalarining moddiy-texnik bazasini bosqichma-bosqich mustahkamlash, rivojlangan davlatlarning ilg'or tajribasini hisobga olgan holda o'quv tarbiya jarayonini tubdan takomillashtirish choralari ko'rildi.

Davlat dasturida 60.1 mingta o'quv o'ringa mo'ljallangan 380 ta umumta'lim maktablarini rekonstruksiya qilish va ta'mirlash, ularni kompyuter texnikasi, o'quv laboratoriya jihozlari va boshqa uskunalar bilan ta'minlash belgilangan.

Bundan tashqari 101 kasb-hunar kolleji va akademik litsey, 110 bolalar sport obyektlarini qurish, rekonstruksiya qilish va tubdan ta'mirlash rejalashtirilgan.

Maktablardagi chet tillari xonalarini zamonaviy axborot kommunikatsiya va texnika vositalari bilan jihozlash ko'zda tutilgan. Boshlang'ich sinf o'quvchilarini qo'llab-quvvatlash bo'yicha chora-tadbirlarni amalga oshirish davom ettiriladi. Jumladan, 586,9 ming nafar 1-sinf o'quvchilariga o'quv jihozlari to'plamlari va 6,5 million nusxadagi darsliklari, umumta'lim maktablarining 500 mingdan ortiq 2-sinf o'quvchilariga chet tillar bo'yicha multimediali ilovalar bepul beriladi.

Davlat dasturi doirasida amalgam oshiriladigan tadbirlarga 4,509 trilion so'm va 303 million dollar miqdorida mablag' yo'naltiriladi. Shunga yarasha ko'zlangan maqsadlardan samarali natijalarga erishiladi.

Bundan tashqari, 1997-yilda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risidagi" qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dastur"ini ham aytish mumkin.

"Kadrlar tayyorlash milliy dastur" haqida hukumat darajasidagi quyidagi fikrlarni O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov Vazirlar Mahkamasining "O'zbekistonning 1996-yildagi ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyoti yakunlari hamda 1997-yildagi iqtisodiy islohotlarning ustuvor yo'nalishlari" ga bag'ishlangan majlisidagi nutqida bayon etilgan:

1997-yilda biz yaxshi, zamonaviy talablarga javob beradigan kadrlar tayyorlash masalasiga alohida etibor berishimiz kerak.

Ta'lim tizimini tubdan qayta ko'rish vaqti yetdi, professional bilimlarni egallash imkoniyatlarini kengaytish, ma'mur-menejerlarni tayyorlashni yo'lga qo'yish, yangi sharoitlarda, yangi zamonaviy texnologiyalarda ishlashga qobil ishchi va mutaxassislarni tayyorlashni yo'lga qo'yish lozim.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimov Oliy Majlisning 9-sessiyasida kadrlar tayyorlash milliy dasturi butun ta'lim tizimining islohoti haqida hayotimizni hal etuvchi muhim masalalar qatorida ta'lim-tarbiya tizimini tubdan o'zgartirish, uni yangi zamon talabi darajasiga ko'tarish, barkamol avlodimiz kelajagiga dahldor qonun loyihalari ham bor degan edi. Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi inson omiliga juda katta ma'no, buyuk ma'no beradi: maqsad va vazifalar strategiyasidan tartib, to ta'lim-tarbiya jarayonini hamma qirralarga oid aniq dasturlar majmuasicha har bir negizida inson asosiy omil hisoblanadi.

Kadrlar tayyorlash tizimida shaxs bosh subyekti sifatiga ko'riladi. Shaxsning o'qimishliligi va uning yaratuvchanlik malakasi milliy dasturni amalga oshirishning asosiy natijasi bo'lmog'i darkor. Prezident I.A.Karimov milliy dastur to'g'risidagi o'z nutqida: "Faqatgina chinakam ma'rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini, bir so'z bilan aytganda, o'zligini anglash erkin va ozod

jamiyatda yashash, mustaqil davlatimizning jahon jamiyatidagi o'ziga munosib obro'li o'rin egallashi uchun fidoiylilik bilan kurashish mumkin" deb ta'kidlangandi.

Barchamizga ayonki, inson qalbiga yo'l ta'lim-tarbiyadan boshlanadi. Shuning uchun qachonki bu haqda gap ketsa, ajdodlarimiz qoldirgan bebaho merosini eslash bilan birga, ota-onalarimiz qatori biz uchun eng yaqin bo'lgan yana bir buyuk zot ustoz va murabbiylarning oliyjanob mehnatini hurmat bilan tilga olamiz.

Biz yurtimizda yangi avlod, yangi tafakkur sohiblarini tarbiyalashdek mas'uliyatli vazifani ado etishda birinchi galda ana shu kasb egalariga suyanamiz va tayanamiz, ertaga o'rnimizga keladigan yoshlarning ma'naviy dunyosini shakllantirishda ularning xizmati naqadar beqiyos ekanini o'zimizga yaxshi tasavvur qilamiz.

Agar bolalar erkin fikrlashni o'rganmasa, berilgan ta'lim samarasi past bo'lishi muqarrar. Jamiyatning har bir sohasi kabi ta'limda ham islohotlar amalga oshirildi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi-orzuyimizga erishishning qonun bilan himoyalangan hujjatidir.

Yurtboshimizning "Barkamol avlod-O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" asarlarida quyidagi shartlarni o'qishimiz mumkin.

"Mamlakatimizni istiqlol yo'lidagi birinchi qadamlaridanoq buyuk mamlakatimizni tiklash va yanada yuksaltirish, milliy ta'lim-tarbiya tizimini takomillashtirish, uning milliy zahirini mustahkamlash, zamon talablari bilan uyg'unlashtirish asosida jahon andozalari va ko'nikmalari darajasiga chiqish maqsadida katta ahamiyat berib kelinmoqda.

Davlat va jamiyat kadrlar tayyorlash tizimini uzluksiz rivojlantirish va takomillashtirishning kafili bo'lishi zarur. Ular yuqori malakali raqobatga qodir mutaxassislar tayyorlash bo'yicha ta'lim muassasalarning faoliyati uyg'unlashtirishi lozim. Faqat shundagina ko'zlangan maqsadlarga erishish mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi. Hozirgi kunda ta'lim sohasida o'zgarishlar yuz bermoqda ayniqsa talabalarga bilimlarni chuqur o'rgatish hamda ularni ko'proq mustaqil ishlashga o'rgatish ta'lim tizimining dolzarb vazifalaridan biridir. Ma'lumki, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fani matematika ta'lim sohasida o'qitiladigan fanlar orasida muhim o'ringa ega. Jumladan, kompleks hadli darajali qatorlar va Teylor qatorini o'rganish muhim amaliy ahamiyat kasb etadi.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi. Bu bitiruv malakaviy ishida kompleks hadli darajali qatorlarni yaqinlashishga tekshirish hamda Teylor qatoriga yoyish va ularga doir misollar yechish ishning asosiy maqsadini tashkil etadi.

Bitiruv malakaviy ishining vazifasi. . Bitiruv malakaviy ishida kompleks hadli darajali qatorlar va funksional qatorlar hamda Teylor qatoridan foydalanib ko'plab qatorlarni yaqinlashishga tekshirish, integrallarni qatorlar yordamida hisoblash ishning asosiy vazifasini tashkil etadi.

Bitiruv malakaviy ishining o'rganganlik darajasi. Bu bitiruv malakaviy ishida kompleks hadli darajali qator va Teylor qatoriga yoyish usullariga doir misollar keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishining tadqiqot predmeti. Analitik funksiyalar, kompleks hadli darajali qatorlar va Teylor qatorlari.

Bitiruv malakaviy ishining ob'yekti. Kompleks hadli darajali qatorlarni yaqinlashishga tekshirish, Teylor qatoriga yoyish.

Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamiyati. Bitiruv malakaviy ishidan universitet talabalari kompleks o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganayotganda darajali qatorga yoyishda keng foydalanishlari mumkin.

Bitiruv malakaviy ishining yangiligi. Kompleks hadli darajali qatorlar va Teylor qatoriga yoyish usuli o'rganilgan va bu usul misollar bilan yoritib berilgan.

Bitiruv malakaviy ishining metodlari. Bitiruv malakaviy ishida matematik analiz, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, chiziqli algebra elementlari va hisoblash usullaridan foydalanildi.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosi. Bitiruv malakaviy ishi amaliy ahamiyatga ega bo'lib, kompleks hadli darajali qatorlar va Teylor qatoriga yoyishning samarali usullari misollar bilan keltirilgan.

Bitiruv malakaviy ishining hajmi va tuzilishi. Mazkur bitiruv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, 8 ta qism, har bir bob xulosasi va xotima qismidan tuzilgan. Foydalanilgan adabiyotlar va mundarijadan iborat.

I bob. Kompleks hadli qatorlar.

I.1. Kompleks sonlar haqida ma'lumot.

Kompleks sonning algebraik ko'rinishi. $(0,1) \in C$ kompleks sonni olib, uni i orqali belgilaylik: $(0,1)=i$ ko'paytma bir tarafdin $(0,1) \cdot (0,1)=i \cdot i=i^2$ bo'lsa, ikkinchi tarafdin ko'paytirish qoidasiga ko'ra $(0,1) \cdot (0,1)=(0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)=(-1,0)=-1$ bo'ladi. $i^2=-1$ tenglik hosil bo'ladi.

Biz haqiqiy sonning kvadrati manfiy bo'lmaydi degan tushunchaga egamiz. Shuning uchun ham kvadrati -1 ga teng bo'lgan i sonini haqiqiy son deya olmaymiz. Demak, i mavhum birlik.

$(0,\beta) \in C$ kompleks sonni olaylik, bunda β – ixtiyoriy haqiqiy son. Bu sonni

$$(0,\beta)=(\beta \cdot 0 + 0 \cdot 1, \beta \cdot 1 + 0 \cdot 0) \quad (\text{I.1.1})$$

ko'rinishida yozish mumkin. Ravshanki,

$$(0,1) \cdot (0,1)=(\beta \cdot 0 - 0 \cdot 1, \beta \cdot 1 + 0 \cdot 0)=(\beta,0)(0,1) \quad (\text{I.1.2})$$

bo'ladi. Agar $(\beta,0)=\beta$, $(0,1)=i$ bo'lishini e'tiborga olsak, yuqoridagi munosabatlardan $(0,\beta)=\beta \cdot i=i \cdot \beta$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$(\alpha,0)=\alpha \quad , \quad (0,1)=i \quad , \quad (0,\beta)=i \cdot \beta \quad (\text{I.1.3})$$

Endi ixtiyoriy $(x,y) \in C$ kompleks sonni olaylik. Bu $(x,y) \in C$ kompleks sonni

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)$$

ko'rinishida yozish mumkin. (I.1.3) munosabatlardan foydalanib

$$(x,y)=x+iy$$

tenglikni hosil qila olamiz . Shunday qilib, biz ixtiyoriy $z=(x,y)$ kompleks sonni

$$z=x+iy \quad (\text{I.1.4})$$

ko'rinishida yoza olamiz. Odatda kompleks sonning (I.1.4) ko'rinishi uning algebraik ko'rinishi deyiladi. Bunda x haqiqiy son z kompleks sonning haqiqiy qismi deyiladi va u $\operatorname{Re} z$ kabi belgilanadi. $x=\operatorname{Re} z$ y haqiqiy son z kompleks sonning mavhum qismi deyiladi va $\operatorname{Im} z$ kabi belgilanadi: $y=\operatorname{Im} z$.

Algebraik ko'rinishda berilgan 2ta

$$z_1 = x_1 + i y_1 \quad \text{va} \quad z_2 = x_2 + i y_2$$

kompleks sonlarning tengligi, yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati quyidagicha

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

bo'ladi.

Ixtiyoriy $z = x + iy$ (I.1.4) kompleks son berilgan bo'lsin. Ushbu $x - iy$ kompleks son $z = x + iy$ kompleks sonning qo'shmasi deyiladi va $\bar{z}$ kabi belgilanadi:

$$\bar{z} = x - iy$$

Quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{z}_2 \neq 0$$

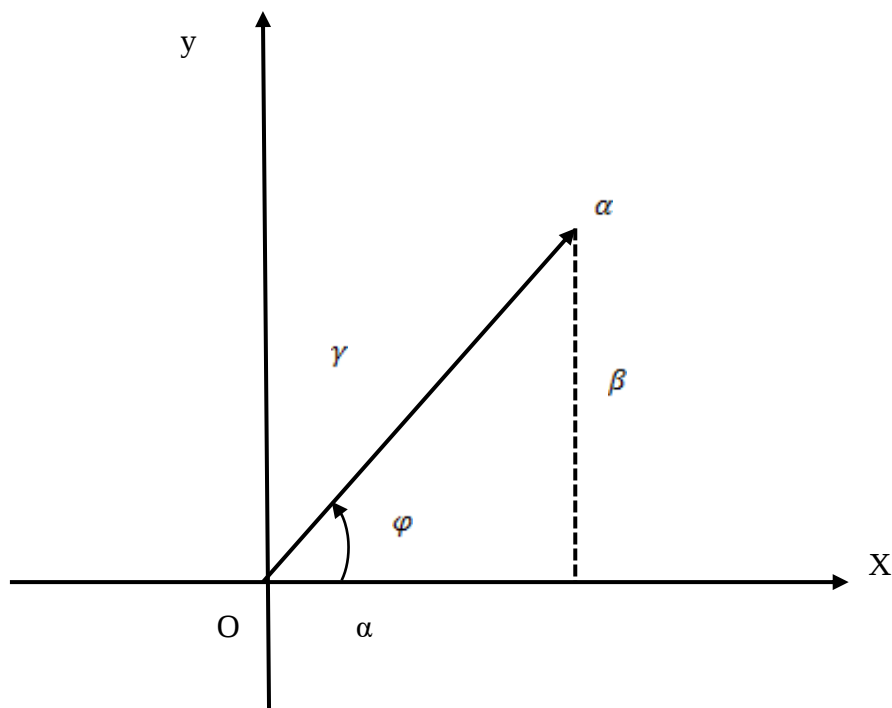
$$\overline{(\bar{z})} = z$$

Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi.

Ixtiyoriy

$$z = x + iy \quad (\text{I.1.4})$$

kompleks sonni olaylik. Tekislikda, koordinatalar x va y bo'lgan $M(x, y)$ nuqtani qaraymiz.



I.1.1-chizma kompleks tekislik

Chizmada ifodalangan $\overrightarrow{OM}$ shu M nuqtaning radius-vektori deyiladi. Radius vektorning uzunligi r , uning ox o'qi bilan tashkil etgan burchagi φ bo'lsin.

Chizmada tasvirlangan OMB to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

tengliklarni aniqlaymiz. Aniqlangan x va y ni kompleks sonning algebraik ko'rinishiga keltirib qo'ysak,

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\text{I.1.5})$$

ifoda hosil bo'ladi. Odatda kompleks sonning bu ifodasi uning trigonometrik ko'rinishi deyiladi. Bunda r musbat son z kompleks sonning moduli deyilib, $|z|$ kabi belgilanadi: $r = |z|$, φ burchak esa kompleks sonning argumenti deyilib, $\arg z$ kabi belgilanadi: $\varphi = \arg z$.

$\triangle OMB$ ga Pifagor teoremasini qo'llash natijasida

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (0 \leq r < +\infty) \quad (\text{I.1.6})$$

hamda

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \text{ya'ni} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (\text{I.1.7})$$

bo'lishini aniqlaymiz.

Demak, (I.1.6) formula $z = x + iy$ kompleks sonning modulini hisoblashda, (I.1.7) formula esa $z = x + iy$ kompleks sonning argumentini hisoblashda qo'llaniladi.

I.1.1-misol. Ushbu $z = 1 + i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.

Yechish. Berilgan kompleks sonda $x = 1$, $y = 1$ bo'ladi. Yuqoridagi formulalarga ko'ra

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

ya'ni $z = 1 + i$ kompleks sonning moduli $\sqrt{2}$ argumenti $\frac{\pi}{4}$ bo'ladi.

I.1.2-misol. Ushbu $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ kompleks sonni trigonometrik ko'rinishida ifodalang.

Yechish. Berilgan kompleks sonda $x = -2$, $y = -2\sqrt{3}$.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4$$

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$\varphi = \frac{4\pi}{3}$ ni olamiz chunki, berilgan kompleks songa mos bo'lgan vektor uchinchi chorakda yotadi.

$$z = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

Kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishi. Faraz qilaylik, $z \in C$ sonning moduli r ($0 \leq r \leq +\infty$) argumenti esa φ bo'lsin. Unda bu kompleks sonni

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\text{I.1.5})$$

trigonometrik ko'rinishida yoza olamiz.

Bizga ma'lum bo'lgan

$$e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Eyler formulasidan foydalansak z kompleks sonning

$$z = re^{i\varphi} \quad (\text{I.1.8})$$

ko'rinishiga ega bo'lamiz. Bu ifoda kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishi deyiladi.

Yuqorida kompleks sonning turli ko'rinishlari bilan tanishdik, qaralayotgan masalaning shartiga binoan kompleks sonning u yoki bu ko'rinishidan foydalaniladi.

Masalan, ikkita

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

kompleks sonlar uchun $z_1 \cdot z_2$ va $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) larning ifodalari sodda ko'rinishga ega bo'ladi.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Bu munosabatlardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1^o. Ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlar ko'paytmasining moduli shu sonlar modullarining ko'paytmasiga teng:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

argumenti esa shu sonlar argumentlarining yig'indisiga teng:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

2^o. Ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlar nisbati $\frac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$) ning moduli shu sonlar modullarining nisbatiga teng:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

argumenti esa shu sonlar argumentlarining ayirmasiga teng:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Kompleks sonni darajaga ko'tarish va undan ildiz chiqarish.
 $z_1, z_2, \dots, z_n$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. Yuqorida ikkita kompleks sonning

ko'paytmasini ko'rgan edik shu singari berilgan n ta kompleks sonlar ko'paytmasi

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)} \quad (\text{I.1.9})$$

ko'rinishida bo'ladi. Xususiyl holda $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ deb olsak, $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$ va $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$ bo'lishi ma'lum. (I.1.9) tenglikdagi $z_1, z_2, \dots, z_n$ kompleks sonlarning tengligidan (I.1.9) ifoda quyidagi ko'rinishga keladi:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \quad (\text{I.1.10})$$

Bu ifoda z kompleks sonning n -darajasi deyiladi.

Ravshanki,

$$r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Demak,

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (\text{I.1.11})$$

Odatda (I.1.11) formula Muavr formulasi deb ataladi.

Demak, trigonometrik shakldagi kompleks sonni n -darajaga ko'tarish uchun uning modulini shu darajaga ko'tarib, argumentini n ga ko'paytirish kerak.

I.1.3-misol. Ushbu $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ kompleks sonning 7-darajasi topilsin.

Yechish. Berilgan z kompleks sonni trigonometrik ko'rinishiga keltiramiz:

bunda $x = -2$, $y = -2\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4$$

$$\varphi = \arg z = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \left(\frac{-2\sqrt{3}}{-2} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

Hosil bo'lgan z sonning trigonometrik shaklini Muavr formulasidan foydalanib 7-darajaga ko'taramiz.

$$z^7 = 4^7 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)^7 = 16384 \left(\cos \frac{4\pi \cdot 7}{3} + i \sin \frac{4\pi \cdot 7}{3} \right) =$$

$$= 16384 \left(\cos \left(9\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(9\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = 16384 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -8192 - 8192\sqrt{3}i$$

Kompleks sonning har qanday darjali ildizlarini topish uchun bizga $z = a + ib$ son berilgan bo'lsin. Agar $z = k^n$ bo'lsa, k son z ning n -darajali ildizi deyiladi va

$$k = \sqrt[n]{z} \quad (\text{I.1.12})$$

ko'rinishida yoziladi. Bizga mana shu k ildizni topish talab qilinadi. Buning uchun dastlab berilgan z sonni trigonometrik ko'rinishga keltiramiz:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Kompleks sonlar ustida to'rt amalini bajarganimizda yana kompleks son hosil bo'lishini ko'rgan edik. Shuning uchun kompleks son ildizning ham, kompleks sondan iborat deya olamiz. Demak, shu fikrga asosan (I.1.12) ni quyidagicha yoza olamiz:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{I.1.13})$$

hozircha ρ va θ noma'lum bo'lib, masala shularni aniqlashdan iborat. Shu maqsadda (I.1.13) ning ikki tomonini n -darajaga ko'taramiz, u holda $z = k^n$, ya'ni kompleks sonni darajaga ko'tarishga asosan

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

hosil bo'ladi. Qavslarni ochib

$$r \cos \varphi + r i \sin \varphi = \rho^n \cos n\theta + \rho^n i \sin n\theta$$

tenglikka ega bo'lmiz. Tenglikning ikkala tomonini tenglashtirib, ushbu

$$\rho^n \cos n\theta = r \cos \varphi, \quad \rho^n \sin n\theta = r \sin \varphi \quad (\text{I.1.14})$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Tengliklarni kvadratga ko'tarib hadma-had qo'shsak

$$\rho^{2n} (\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta) = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

$$\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

tengliklardan

$$\rho^{2n} = r^2$$

$$\rho^n = r, \quad \rho = \sqrt[n]{r} \quad (\text{I.1.15})$$

ρ musbat son bo'lgani uchun o'ng tomonini ham, masbat haqiqiy r sonning n -darajali, aniq bir musbat ildizdan iborat deb tushunmoq lozim. Biz ρ noma'lumni aniqladik endi, (I.1.14) ning chap tomonidagi ρ^n o'rniga (I.1.15) dagi qiymatini keltirib qo'ysak,

$$\cos n\theta = \cos \varphi, \quad \sin n\theta = \sin \varphi \quad (\text{I.1.16})$$

tengliklar hosil bo'ladi.

Trigonometriyadan ma'lumki,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

U holda (I.1.16) tengliklarga ko'ra:

$$n\theta = \varphi + 2k\pi$$

bundan

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.1.17})$$

Shunday qilib, bizga noma'lum bo'lgan θ burchak cheksiz ko'p qiymatlarga ega ekan. Endi, (I.1.15) va (I.1.17) dagi ρ va θ ning qiymatlarini (I.1.13) ga qo'yib, uning chap tomonini qisqacha z_k bilan belgilaymiz:

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (\text{I.1.18})$$

bunda $k = 0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Bundan kompleks sonlardan olingan ildizlarning soni cheksiz ko'p bo'lishi mumkinmi, degan savol tug'lishi tabiiy. Shuning uchun kompleks sonni n -darajali ildizdan chiqarganda o'zaro teng bo'lmagan nechta ildiz kelib chiqishini tekshirishimiz zarur.

Biz k ga turlicha musbat qiymatlar bergan bilan (I.1.18) dan kelib chiqadigan ildizlar har xil bo'lavermaydi. Faqat

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{I.1.19})$$

bo'lgandagina $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$ ildizlar o'zaro teng emas, chunki (I.1.19) ga mos bo'lgan quyidagi

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \quad (\text{I.1.20})$$

burchaklarning bir-biridan farqi 2π dan kichik, misol uchun:

$$\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{n-1}{n} 2\pi < 2\pi$$

Endi, $k = n, n+1, n+2, \dots$ bo'lganda (I.1.18) dan yangi ildizlar kelib chiqmasligini, ya'ni

$$z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-1} \quad (\text{I.1.21})$$

ildizlarning yana takrorlanishini ko'rish qiyin emas shu maqsadda

$$k = np + q \geq n \quad q = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

deb belgilaymiz, u vaqtda:

$$\frac{\varphi + 2\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(np + q)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2q\pi}{n} + 2p\pi$$

O'ng tomonidagi mana shu burchakning sinus va kosinuslari mos ravishda ushbu

$$\frac{\varphi + 2q\pi}{n}$$

burchakning sinus va kosinuslariga teng bo'lgani uchun yana (I.1.19) hol takrorlanadi. Shunday qilib yuqoridagi fikrlardan quyidagi xulosaga kelish mumkin:

kompleks sonning n -darajali ildizlari soni n ta bo'lib, ular (I.1.20) ga asosan (I.1.18) formula orqali topiladi.

I.1.4-misol. $\sqrt[4]{-2 - 2i\sqrt{3}}$ ni hisoblang.

Avval radikal ishorasi ostidagi kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz

$$x = -2, \quad y = -2\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$$

Berilgan kompleks songa mos bo'lgan vektor uchinchi chorakda yotgani uchun $\varphi = \frac{4\pi}{3}$

Demak,

$$-2 - 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$$

Bundan, yuqoridagi formulaga asosan, to'rtinchi darajali ildizlarini topsak bo'ldi:

$$z_0 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i)$$

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

$$z_3 = \sqrt{2}(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

I.2. Sonli qatorlar.

Faraz qilaylik,

$$\{a\}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \quad (\text{I.2.1})$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ular yordamida ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifoda sonli qator, qisqacha qator deb yuritiladi va u

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ko'rinishida belgilanadi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Bunda $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sonlar qatorning hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi (yoki n -hadi) deyiladi.

Quyidagi

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yig'indi (I.2.1) qatorning n -qismaniy yig'indisi deb ataladi.

Demak, (I.2.1) qator berilganda har doim bu qatorning qismaniy yig'indilaridan iborat ushbu $\{S_n\}: S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ ketma-ketlikni hosil qilish mumkin.

I.2.1-ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da $\{S_n\}$ ketma-ketlik S ga ($S \in R$) yaqinlashsa, (I.2.1) qator yaqinlashuvchi deyiladi, S uning yig'indisi deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad , \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Agar S_n ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti mavjud bo'lmasa, yoki cheksiz bo'lsa), (I.2.1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Biz hadlari haqiqiy sonlardan tuzilgan sonli qatorlar haqida qisqacha ma'lumotga ega bo'ldik. Endi hadlari kompleks sonlardan tuzilgan ushbu

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n \dots \quad (\text{I.2.2})$$

ko'rinishdagi qatorlar bilan tanishib o'tamiz. Bu qatordagi har bir $z_n = x_n + y_n$ had o'zgarmas son dan iborat bo'lib, x_n, y_n lar haqiqiy sonlar hisoblanadi.

(I.2.2) qatorning xususiy yig'indilarini tuzamiz.

$$S_1 = z_1 ,$$

$$S_2 = z_1 + z_2 ,$$

$$S_3 = z_1 + z_2 + z_3 ,$$

.....

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n \quad (\text{I.2.3})$$

.....

Mana shu xususiy yig'indilarning

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

ketma-ketligiga asoslanib, (I.2.2) qatorning yaqinlashishiga ta'rif berish mumkin.

I.2.2-ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (I.2.3) ketma-ketlik biror chekli S limitga intilsa, ya'ni (I.2.3) ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (I.2.2) qator yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Demak, I.2.2 ta'rifga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

S -aniq son bo'lganda (I.2.2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, S son qatorning yig'indisi deyiladi:

$$S = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$$

Agar (I.2.3) ketma-ketlik cheksizga intilsa yoki hech qanday limitga intilmasa, (I.2.2) qator uzoqlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi haqida so'zlash ma'nosizdir.

Endi, kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlarini ifodalab, S_n yig'indini quyidagi ko'rinishga keltirib yozamiz:

$$\begin{aligned} S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_n + iy_n) = \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = \sigma_n + i\tau_n \end{aligned}$$

bunda

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad ,$$

$$\tau_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \quad .$$

Shu sababli (I.2.2) dan quyidagi qatorlar kelib chiqadi:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots \quad (I.2.4)$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots \quad (I.2.5)$$

Bularning xususiy yig'indilaridan mos ravishda ushbu ketma-ketliklarini hosil qilish mumkin:

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots \quad (I.2.6)$$

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots \quad (I.2.7)$$

I.2.2-ta'rifga ko'ra, agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \quad \text{va} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau \quad (I.2.8)$$

(σ, τ -aniq sonlar) bo'lsa, (I.2.4) va (I.2.5) qatorlarning ikkalasi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

I.2.1-teorema. Agar hadlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan (I.2.4) va (I.2.5) qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda kompleks sonlardan tuzilgan (I.2.2) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

Isbot. Faraz qilaylik, (I.2.4) va (I.2.5) qatorlarining ikkalasi ham yaqinlashuvchi, ya'ni (I.2.8) limitlar mavjud bo'lsin. U holda limitlarning xossasiga ko'ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n + i\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \sigma + i\tau = S ,$$

bunda $s = \sigma + i\tau$ aniq son bo'lgani uchun, I.2.2-ta'rifga ko'ra yaqinlashuvchidir. Aksincha S aniq son bo'lsa, σ va τ ham aniq son bo'ladi.

I.2.1-teoremaga asosan, agar (I.2.2) qatorning yaqinlashishini tekshirmoqchi bo'lsak, uning o'rniga (I.2.4) va (I.2.5) qatorlarning yaqinlashishini tekshirish kifoya. (I.2.4) va (I.2.5) qatorlarning hadlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgani uchun ularning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini matematik analiz kursida ko'rsatilgan alomatlar yordami bilan tekshiramiz.

Koshi alomati. Agar $n \in N$ ning biror $n_0 (n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n \geq n_0$ qiymatlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad (\sqrt[n]{a_n} \geq 1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Amaliy masalalarni hal qilishda Koshi alomatining quyidagi limit ko'rinishidan foydalanish ham mumkin.

Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $k < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $k > 1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Raabe alomati. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator berilgan bo'lsin.

Agar $n \in N$ ning biror $n_0 (n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n > n_0$ qiymatlar uchun

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \geq r > 1 \quad (n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \leq 1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

Raabe alomatini quyidagicha limit ko'rinishida ifodalash mumkin.

Agar ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \rho \quad \rho = const$$

limit o'rinli bo'lsa, $\rho > 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $\rho < 1$ bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

I.2.1-misol. Quyidagi $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{n} + \dots$ qator

yaqinlashuvchiligini tekshiring.

$$n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = n \left[1 - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{n}{1} \right] = n \left[1 - \frac{2n^2 + n}{2n^2 + 4n + 2} \right] = \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 4n + 2}$$

Raabe alomatiga ko'ra qatorni yaqinlashuvchi deya olamiz.

Dalamber alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$$

limit o'rinli bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $\ell < 1$ bo'lganda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

I.2.2-misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ ($x = \pm 1$) qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left| \frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} \right| : \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x - x^{n+1}}{1 - x^{n+1}} \right| = \begin{cases} |x|, & \text{agar } |x| < 1 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Demak, Dalamber alomatiga ko'ra $|x| < 1$ da berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. $|x| > 1$ bo'lganda esa qatorning xarakteri haqida Dalamber alomati biror xulosa bermaydi. Ammo $|x| > 1$ bo'lgan holda $n \rightarrow \infty$ da qatorning umumiy hadi nolga intilmaganligi sababli (uning limiti 1ga teng) qator uzoqlashuvchidir.

Demak, hadlari kompleks sonlardan iborat (I.2.2) qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash uchun uning haqiqiy va mavhum qismlaridan tuzilgan qatorlarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini tekshirish kifoya.

I.2.3-misol. Ushbu $(1-i) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}i\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}i\right) \dots$ qator

yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi aniqlansin, bunda $n = 0, 1, 2, \dots$

Qatorning haqiqiy va mavhum qismlaridan tuzilgan qatorlarni yozib olamiz:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

va

$$-1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \dots - \frac{1}{3^n} - \dots$$

Bularning har biri geometrik progressiya bo'lib, maxrajlari $|q| < 1$ dan iboratdir. Shu sababli mos qatorlarning yig'indilari quyidagilardan iborat:

$$\sigma = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad \text{va} \quad \tau = \frac{-1}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

Demak, qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi

$$S = \sigma + i\tau = 2 - \frac{3}{2}i$$

bo'ladi.

Qator yaqinlashuvchiligini yana quyidagicha ham tekshirish mumkin:

(I.2.2) qator hadlarining modullaridan

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + \dots + |z_n| + \dots \quad (\text{I.2.9})$$

qatorni tuzamiz, bunda

$$|z_n| = |x_n + y_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad (\text{I.2.10})$$

I.2.2-teorema. Agar (I.2.9) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (I.2.2) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. (I.2.9) qator yaqinlashuvchi bo'lsin deylik, (I.2.10) ga asosan:

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$$

va

$$|y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|$$

bo'lgani uchun

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| + \dots$$

va

$$|y_1| + |y_2| + |y_3| + \dots + |y_n| + \dots$$

qatorlarning har bir hadi (I.2.9) ning mos hadlaridan kichik. Shunga asosan so'nggi ikki qator yaqinlashuvchidir. Ikkinchi tomondan, bu qatorlar (I.2.4) va (I.2.5) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan bo'lgani uchun (I.2.4) va (I.2.5) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda oldingi teorema asosan (I.2.2) qator yaqinlashuvchidir. Teorema isbotlandi.

Bunga teskari teorema noto'g'ri hisoblanadi. Agar (I.2.9) qator yaqinlashsa (I.2.2) qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi. Bunday qatorlar tajribada ko'p ishlatiladi. Agar (I.2.2) qator yaqinlashuvchi, lekin (I.2.9) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (I.2.2) qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti. Faraz qilaylik, (I.2.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda yaqinlashish ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim(z_1 + z_2 + \dots + z_n) = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim(z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) = S$$

Bularga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0 \quad (\text{I.2.11})$$

ya'ni n cheksizga intilganda yaqinlashuvchi qatorning z_n umumiy hadi nolga intiladi.

Lekin, qatorning umumiy hadi nolga intilgani bilan uning yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.

Masalan,

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{i}{\sqrt{n}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

lardan tuzilgan qator uzoqlashuvchi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ bo'lganiga qaramay $x_n = \frac{1}{n}$

va $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dan tuzilgan qatorlar uzoqlashadi. Shu sababli (I.2.11) tenglik qator

yaqinlashishining zaruriy sharti yetarli emas deyiladi.

I.3.Qatorlar ustida amallar.

Qatorlarni qo'shish va ayirish . Agar bizga

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (I.2.2)$$

$$z'_1 + z'_2 + z'_3 + \dots + z'_n + \dots \quad (I.3.1)$$

ikkita sonli qator berilgan bo'lsin. Bu qatorlarning yig'indisi deb ushbu

$$(z_1 + z'_1) + (z_2 + z'_2) + \dots + (z_n + z'_n) + \dots \quad (I.3.2)$$

qatorni va ularning ayirmasi deb

$$(z_1 - z'_1) + (z_2 - z'_2) + \dots + (z_n - z'_n) + \dots \quad (I.3.3)$$

qatorga aytiladi.

Faraz qilaylik, (I.2.2) va (I.3.1) qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yigindilari mos ravishda S va S^1 bo'lsin. U holda haqiqiy sonlardan iborat qatordek (I.3.2) va (I.3.3) qatorlar ham yaqinlashuvchi bo'ladi va ularning yig'indisi mos ravishda $S \pm S^1$ teng bo'ladi. Yaqinlashuvchi qatorlarning bu xossasining isboti haqiqiy sonlardan iborat qatordagi singari bo'ladi.

Qo'sh qator haqida. Berilgan ushbu

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (I.2.2)$$

qatorning hadlaridan cheksiz ko'p shunday qatorlar tuzish mumkinki, (I.2.2) ning biror qatorga kirgan z_k hadi boshqa qatorlarga mutlaqo kirmaydi. (I.2.2) qatorni quyidagi usul bilan cheksiz ko'p qatorlarga ajratish mumkin:

$$z_1 + z_3 + z_6 + z_{10} + z_{15} + z_{21} + \dots$$

$$z_2 + z_5 + z_9 + z_{14} + z_{20} + \dots$$

$$z_4 + z_8 + z_{13} + z_{19} + \dots$$

$$z_7 + z_{12} + z_{18} + \dots$$

$$z_{11} + z_{17} + \dots$$

$$z_{16} + \dots$$

.....

Umumiy holda (I.2.2) qatorning cheksiz ko'p qatorlarga ajratilishi quyidagicha yoziladi:

tengsizlik har qanday istalgancha katta natural m son uchun to'g'ri bo'lganidan (I.3.5) qator absolyut yaqinlashadi degan natija kelib chiqadi.

Nihoyat (I.3.5) qatorning yig'indisi (I.2.2) ning S yig'indisiga teng ekanligini ko'rsatamiz. Uning uchun m cheksizlikka intilganda ushbu ayirmaning

$$S - (S_1 + S_2 + \dots + S_m)$$

nolga intilishini ko'rsatish kifoya. Ma'lumki (I.3.4) dagi oldingi m ta qatorning hamma hadlari yig'indisi $S_1 + S_2 + \dots + S_m$ dan iborat. Bu qatorlarni tuzilish usuliga asosan oxirgi yig'indiga (I.2.2) qatorning ba'zi hadlari kirmaydi, demak,

$$|S - (S_1 + S_2 + \dots + S_m)| \leq |z_{\alpha_1}| + |z_{\alpha_2}| + \dots,$$

bunda $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ lar natural sonlar. Endi, ixtiyoriy natural sonni n bilan belgilaylik va m ni shunday katta qilib olaylikki, natijada $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ indekslarning hammasi n dan katta bo'lsin. U holda ushbu

$$|S - (S_1 + S_2 + \dots + S_m)| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Berilgan (I.2.2) qator absolyut yaqinlashuvchi va yig'indisi S bo'lgani sababli istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ uchun shunday yetarli darajada katta natural n_0 son ko'rsatish mumkinki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \dots < \varepsilon$$

bo'ladi. Shunday qilib, yetarli darajada katta m uchun

$$|S - (S_1 + S_2 + \dots + S_m)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_1 + S_2 + \dots + S_m) = S$$

Teorema isbotlandi.

Qator hadlarining o'rinlarini almashtirish haqida.

I.3.2-teorema. Agar (I.2.2) sonli qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, uning hadlarining o'rinlarini istalgancha almashtirilsa ham qator yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi o'zgarmaydi.

(I.2.2) sonli qator hadlarining joylarini almashtirib quyidagicha yozaylik :

$$z_{m_1} + z_{m_2} + z_{m_3} \dots \quad (I.3.6)$$

bunda $m_1, m_2, m_3, \dots$ lar ma'lum tartibda yozilgan barcha natural sonlardan iborat.

Endi quyidagicha belgilash kiritib olaylik:

$$S_1 = z_{m_1}, \quad S_2 = z_{m_2}, \quad S_3 = z_{m_3}, \quad \dots$$

Farazimiz bo'yicha (I.2.2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lgani uchun yuqoridagi teorema asosan ushbu

$$S_1 + S_2 + \dots + S_m$$

qator ham absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi (I.2.2) ning S yig'indisiga teng. So'nggi qator esa (I.3.6) ning o'zginasidir.

Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Agar qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, bu teorema o'z kuchini yo'qotadi.

Qatorlarni ko'paytirish. Berilgan ushbu

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots \quad (\text{I.2.2})$$

$$z'_1 + z'_2 + z'_3 + \dots + z'_n + \dots \quad (\text{I.3.1})$$

qatorlarning ko'paytmasi deb quyidagi

$$z_1 z'_1 + (z_1 z'_2 + z_2 z'_1) + \dots + (z_1 z'_n + z_2 z'_{n-1} + \dots + z_n z'_1) + \dots \quad (\text{I.3.7})$$

qatorga aytiladi.

I.3.3-teorema. Agar berilgan (I.2.2) va (I.3.1) qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indilari mos ravishda S va S^1 dan iborat bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasidan iborat (I.3.7) qator ham absolyut yaqinlashib, yig'indisi $S = S \cdot S^1$ ga teng bo'ladi.

Isbot. Dastlab biz (I.2.2) va (I.3.1) qatorlarning hadlaridan tuzilgan ushbu

$$z_1 z'_1, z_1 z'_2, z_2 z'_1, z_2 z'_2, \dots \quad (\text{I.3.8})$$

ko'paytmalarni yozib olamiz. Mana shu hadlardan tuzilgan

$$z_1 z'_1 + z_1 z'_2 + z_2 z'_1 + z_2 z'_2 + \dots \quad (\text{I.3.9})$$

qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun (I.3.9) ning modullaridan tuzilgan qatorning xususiy

$$|z_1 z'_1| + |z_1 z'_2| + |z_2 z'_1| + |z_2 z'_2| + \dots \quad (\text{I.3.10})$$

yig'indisining chegaralangan ekanligini ko'rsatish kifoya. (I.3.10) yig'indiga kiruvchi (I.2.2) va (I.3.1) qatorlarning hadlarining eng katta nomeri (indeksi) n bo'lsin. Endi (I.3.10) yig'indi ushbu

$$(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|) \cdot (|z'_1| + |z'_2| + \dots + |z'_n|) \quad (\text{I.3.11})$$

ko'paytmadan katta bo'la olmaydi, chunki (I.3.11) dagi ba'zi hadlar (I.3.10) ga kirmay qolishi mumkin. U holda (I.3.10) yig'indi ushbu

$$(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots) \cdot (|z'_1| + |z'_2| + \dots + |z'_n| + \dots) \quad (\text{I.3.12})$$

ko'paytmadan albatta kichik bo'ladi, chunki (I.3.11) ga qaraganda (I.3.12) ko'paytma katta son. Demak, (I.3.10) ko'paytma SS^1 son bilan chegaralangan. U holda (I.3.9) qator absolyut yaqinlashuvchi ekan.

Endi (I.3.9) qatorning hadlaridan (I.3.7) qatorni tuzib olamiz:

$$S'_1 = z_1 z'_1, S'_2 = z_1 z'_2 + z_2 z'_1, \dots, S'_n = z_1 z'_n + z_2 z'_{n-1} + \dots + z_n z'_1, \dots$$

Teorema asosan (I.3.7) ham absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. Eng so'ngida (I.3.7) qatorning yig'indisi SS^1 ko'paytmaga tengligini ko'rsatish uchun (I.3.9) ning hadlaridan quyidagilarni tuzamiz:

$$S_1 = z_1 z'_1 + z_1 z'_2 + z_1 z'_3 + \dots,$$

$$S_2 = z_2 z'_1 + z_2 z'_2 + z_2 z'_3 + \dots,$$

$$\dots\dots\dots$$

Yuqoridagi teorema asosan bu qatorlarning har biri yaqinlashuvchi bo'lib, quyidagi

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \dots &= z_1(z'_1 + z'_2 + z'_3 + \dots) + z_2(z'_1 + z'_2 + z'_3 + \dots) + \dots = \\ &= (z'_1 + z'_2 + z'_3 + \dots)(z_1 + z_2 + z_3 + \dots) = S'S \end{aligned}$$

qator yig'indisi bilan (I.3.7) ning yig'indisi bir xilda bo'ladi. Teorema isbotlandi. Ma'lumki, chekli yig'indi hadlarining joylari almashtirilsa, yig'indining qiymati o'zgarmaydi, shuningdek yig'indilarni o'zaro hadlab ko'paytirish mumkin. Biz yuqorida absolyut yaqinlashuvchi qatorlar uchun ham bu xossalari o'rinli ekanini ko'rsatdik, ya'ni shu xossalarni cheksiz yig'indi uchun umumlashtirdik.

Qatorlarni ko'paytirishga doir teorema shartli yaqinlashuvchi qatorlar uchun umuman o'rinli emas, chunki ikkita shartli yaqinlashuvchi qatorlarning

ko'paytmasi uzoqlashuvchi bo'lib qolishi ham mumkin. Agar ularning ko'paytmasi yaqinlashuvchi bo'lishi oldindan ma'lum bo'lsagina shartli yaqinlashuvchi qatorlarni ko'paytirishda yuqorida aytilgan teoremani qo'llash mumkin.

I.4.Funksional qatorlar.

Yuqorida hadlari o'zgarmas kompleks sonlardan iborat bo'lgan qatorlar bilan tanishib o'tdik. Endi har bir hadi biror sohada aniqlangan kompleks o'zgaruvchili funksiyadan iborat bo'lgan qatorlar bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik, bizga har bir hadi G sohada aniqlangan $z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchining bir qiymatli $f_n(z)$ funksiyalaridan tuzilgan ushbu

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (\text{I.4.1})$$

funksional qator berilgan bo'lsin. Xususiyl holda, agar $y = 0$ bo'lsa, bundan haqiqiy o'zgaruvchilar sohasidagi

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

funksional qator kelib chiqadi. Albatta, so'nggi qatordagi har bir had faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qiladi, deb tushunish kerak.

Agar G sohaga tegishli biror z_0 o'zgarmas sonni (I.4.1) ga qo'ygandan hosil bo'lgan ushbu

$$f_1(z_0) + f_2(z_0) + \dots + f_n(z_0) + \dots \quad (\text{I.4.2})$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (I.4.1) funksional qator $z = z_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi. Agar G sohaning har bir nuqtasida (I.4.1) qator yaqinlashsa, o'sha qator G sohada yaqinlashuvchi deb ataladi. Funksional qatorning yaqinlashish sohasini aniqlash asosiy masalalardan biri hisoblanadi. (I.4.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi aniq bir $f(z_0)$ o'zgarmas songa teng bo'ladi. Shuningdek (I.4.1) qator G sohada yaqinlashuvchi bo'lsa, uning yig'indisi ham G sohada aniqlangan $z = x + iy$ ning aniq bir $f(z)$ funksiyasidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (\text{I.4.3})$$

Bu qatorning n -xususiyl yig'indisini quyidagicha

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

belgilasak, ushbu

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots \quad (\text{I.4.4})$$

ayirma (I.4.1) qatorning qoldiq hadi deyiladi. (I.4.3) va (I.4.4) ga asosan qatorning yaqinlashish sohasiga tegishli barcha z lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(z) - S_n(z)] = f(z) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = f(z) - f(z) = 0$$

ya'ni,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = 0 \quad (\text{I.4.5})$$

Buning ma'nosi shundan iboratki, agar (I.4.1) qator G sohadagi ixtiyoriy z nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda har qanday kichkina musbat ε son uchun shunday katta musbat N sonni topish mumkinki, $n > N$ bo'lganda

$$|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| = \varepsilon \quad (\text{I.4.5}')$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikning bajarilishi umuman olganda, ikki narsaga bog'liq : bir tomondan ε ga, ikkinchi tomondan, z ga beriladigan qiymatga bog'liq. Shu sababli izlanayotgan N son ham ε bilan z ga bog'liqdir, ya'ni $N = N(\varepsilon, z)$. Berilgan ε ga ko'ra (I.4.5') tengsizlikning o'rinli bo'lishi uchun zarur $N(\varepsilon, z)$ mavjud bo'lsa, (I.4.1) qator oddiy yaqinlashuvchi deyiladi.

Ba'zan bunday ham bo'lib qolishi mumkin: G sohaning barcha z nuqtalari uchun, z ga bog'liq bo'lmagan shunday umumiy $N^*(\varepsilon)$ musbat sonni topish mumkinki, $N(\varepsilon, z)$ ning hamma qiymatlari shundan katta bo'lmaydi, ya'ni

$$N(\varepsilon, z) \leq N^*(\varepsilon)$$

Demak, $n > N^*(\varepsilon)$ bo'lganda (I.4.5') tengsizlik G sohadagi hamma z nuqtalar uchun bajariladi. Bunday holda (I.4.1) qator tekis yaqinlashuvchi deb ataladi. Berilgan funksional qator G sohada oddiy yaqinlashuvchi bo'laturib, tekis yaqinlashmasligi ham mumkin. Lekin, tekis yaqinlashuvchi qator, albatta oddiy ham yaqinlashadi.

I.4.1-misol. Ushbu

$$a + az + az^2 + \dots + az^n + \dots \quad (\text{I.4.6})$$

cheksiz geometrik progressiyani tekshiramiz, bunda a -biror o'zgarmas son. Ma'lumki, geometrik progressiya n ta hadining yig'indisi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$S_n = a + az + az^2 + \dots + az^n = \frac{a(1-z^{n+1})}{1-z}$$

Bu formula birdan farqli bo'lgan ixtiyoriy z uchun o'rinlidir. Agar $|z| < 1$ bo'lsa,

$\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ va $|z| > 1$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = \infty$ bo'ladi. Shunga asosan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + az + az^2 + \dots + az^n) = \begin{cases} \frac{a}{1-z}, & |z| < 1 \\ \infty, & |z| > 1, a \neq 0 \end{cases}$$

Demak, (I.4.6) qator $|z| < 1$ doira ichida yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi:

$$f(z) = \frac{a}{1-z}$$

ga teng.

Birlik doira tashqarisida esa, ya'ni $|z| > 1$ bo'lganda qator uzoqlashadi. $|z| = 1$ aylanada ham (I.4.6) qator uzoqlashadi, chunki bu holda qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi.

Endi (I.4.6) qatorning $|z| < 1$ da tekis yaqinlashishi yoki tekis yaqinlashmasligini tekshiramiz. Shu maqsadda qoldiq hadni yozib olamiz:

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = \frac{a}{1-z} - \frac{a(1-z^{n+1})}{1-z} = \frac{az^{n+1}}{1-z}$$

$$\left| \frac{az^{n+1}}{1-z} \right| < \varepsilon \quad (\text{I.4.7})$$

tengsizlik yoki

$$|z|^{n+1} < \frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}, \quad \text{ya'ni} \quad (n+1)\ln|z| < \ln \frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}$$

bajarilishi uchun

$$n+1 > \frac{\ln \frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}}{\ln|z|}$$

tengsizlik bajarilishi yetarlidir ($|z| < 1$ da $\ln|z| < 0$ bo'lgani uchun tengsizlik ishorasi o'zgaradi), bundan

$$n > \frac{\ln \frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}}{\ln|z|} - 1 \quad (\text{I.4.8})$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni $z \rightarrow 1$ da cheksizlikka intiladi, shu sababli $|z| < 1$ doiraning barcha nuqtalari uchun umumiy va (I.4.8) tengsizlikning o'ng tomonidan katta bo'lgan $N(\varepsilon)$ miqdorni topib bo'lmaydi, buni quyidagicha tushunish mumkin, z ga bog'liq bo'lmagan shunday $N(\varepsilon)$ ni topib bo'lmaydiki, $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda $|z| < 1$ doiraning barcha nuqtalari uchun $|R_n(z)| < \varepsilon$ tengsizlik qanoatlantirilsin. Demak, $|z| < 1$ doirada (I.4.8) qator tekis yaqinlashmaydi. $|z| < 1$ doirada yotuvchi $|z| \leq 1 - \sigma$, $\sigma > 0$ doirada shu qatorni tekshirib ko'ramiz. Istalgancha kichik ε uchun (I.4.8) tengsizlik o'ng tomonidagi kasr musbat bo'lib, $|1-z| \geq 1-|z|$ va $|z| \leq 1 - \sigma$ bo'lgani uchun (I.4.8) o'sha kasr suratining absolyut qiymatining eng katta qiymati $\ln \frac{\sigma_\varepsilon}{|a|}$ ga, maxraj absolyut qiymatining eng kichik qiymati esa $|\ln(1-\sigma)|$ ga teng. Demak, (I.4.8) tengsizlikning o'ng tomoni $|z| < 1 - \sigma$ doira nuqtalari uchun

$$N(\varepsilon) = \frac{\ln \frac{\sigma_\varepsilon}{|a|}}{\ln(1-\sigma)} - 1$$

sondan katta bo'lmaydi, shunday ekan $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda (I.4.7) tengsizlik $|z| \leq 1 - \sigma$ doiraning barcha nuqtalarida bajariladi, ya'ni (I.4.6) qator $|z| \leq 1 - \sigma$ doirada tekis yaqinlashadi. Shunday qilib, (I.4.6) qator radiusi 1 dan istalgancha kichik bo'lgan doirada tekis yaqinlashuvchi bo'lar ekan.

Haqiqiy o'zgaruvchilar sohasidagiga o'xshash kompleks o'zgaruvchilar sohasida ham berilgan funksional qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanligini aniqlab beradigan juda soda alomat bor. Bu yerda ham shu belgi Veyershtass belgisi deyiladi.

Tekis yaqinlashish (Veyershtass) belgisi. Agar G sohada

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (\text{I.4.1})$$

qatorning har bir hadining moduli ushbu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (\text{I.4.9})$$

musbat hadli yaqinlashuvchi sonli qatorning mos hadidan katta bo'lmasa, u holda (I.4.1) qator G sohada tekis yaqinlashadi.

Isbot. Berilgan (I.4.9) qatorning qoldiq hadi

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

va (I.4.1) ning qoldiq hadi

$$R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

bo'lsin. Yuqorida qo'yilgan shartga muvofiq

$$|f_1(z)| \leq a_1, |f_2(z)| \leq a_2, \dots, |f_n(z)| \leq a_n, \dots$$

bo'lgani sababli

$$|R_n(z)| \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = r_n$$

bo'ladi. Berilgan (I.4.9) qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, ya'ni har qanday kichik musbat ε son uchun shunday katta $N(\varepsilon)$ musbat son topish mumkinki, $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda

$$r_n < \varepsilon$$

bo'ladi. Shubhasiz, bu yerdagi N son z ga bog'liq emas, chunki (I.4.9) sonli qatordan iborat bo'lib, unda $z = x + iy$ ishtirok etmaydi. Demak, $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda $|R_n(z)| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa ta'rifga ko'ra, (I.4.1) qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Darajali qatorlarni tekshirishda asosan mana shu tekis yaqinlashish belgisidan ko'p foydalaniladi.

I.4.1-teorema. Agar biror G sohada barcha hadlari uzluksiz bo'lgan ushbu

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

qator o'sha sohada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda qatorning $f(z)$ yig'indisi ham G sohada uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Dastlab $f(z)$ ning G sohadagi biror ixtiyoriy z_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz. Uning uchun G ga tegishli yana bitta $z_0 + h$ nuqta olib ushbu

$$S_n(z_0) = f_1(z_0) + f_2(z_0) + \dots + f_n(z_0)$$

va

$$S_n(z_0 + h) = f_1(z_0 + h) + f_2(z_0 + h) + \dots + f_n(z_0 + h)$$

xususiy yig'indilarni tuzamiz. Bundan:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = [f(z_0 + h) - S_n(z_0 + h)] + [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)]$$

yoki (I.4.4) ga muvofiq

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = R_n(z_0 + h) + [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] - R_n(z_0)$$

Bundan ushbu

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| \leq |R_n(z_0 + h)| + |S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| + |R_n(z_0)| \quad (\text{I.4.10})$$

tengsizlik kelib chiqadi. Berilgan (I.4.1) qator, teoremaning shartiga ko'ra, G sohada tekis yaqinlashuvchi bo'lgani sababli har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N(\varepsilon)$ sonni topish mumkinki, $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda $|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ bo'ladi.

Mana shunga asosan, z_0 va $z_0 + h$ nuqtalar ham G ga tegishli bo'lgani uchun

$$|R_n(z_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{I.4.11})$$

Ikkinchi tomondan, (I.4.1) qatorning barcha hadlari G sohada uzluksiz bo'lgani sababli uning n ta hadining $S_n(z)$ yig'indisi ham uzluksiz bo'ladi. Demak, uzluksizlik ta'rifiga asosan har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ son borki, $|h| < \sigma$ bo'lganda

$$|S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{I.4.12})$$

bo'ladi. Demak, (I.4.11) va (I.4.12) ga asosan (I.4.10) dan:

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

U holda berilgan qator yig'indisi $f(z)$ funksiya $G \ni z_0$ da uzluksiz bo'ladi.
 z_0 nuqta G ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun $f(z)$ funksiya G sohada uzluksizdir.

Teorema isbotlandi. Bu teoremaning muhim joyi shundaki, $f(z)$ ning uzluksiz bo'lishi uchun (I.4.1) qator tekis yaqinlashuvchi bo'lishi kerak. Agar qator notekis yaqinlashuvchi bo'lsa, uning har bir hadi uzluksiz bo'lsa ham yig'indisi uzluksiz bo'lmasligi mumkin.

Ushbu

$$z + (z^2 - z) + \dots + (z^n - z^{n+1}) + \dots \quad (\text{I.4.13})$$

qatorni $|z| < 1$ doirada va $z = 1$ nuqtada tekshiramiz. Bu qator birinchi n ta hadining yig'indisi $S_n(z) = z^n$, $|z| < 1$ bo'lsa, yetarli katta n da, ya'ni $n \rightarrow \infty$ da nolga intiladi, agar $z = 1$ bo'lsa, u holda $S_n(1) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = 1$

Demak, (I.4.13) qatorning $S(z)$ yig'indisi $|z| < 1$ doiraning ichida yotuvchi ixtiyoriy nuqtada nolga teng, bu doira aylanasining $z = 1$ nuqtasida 1 ga teng. (I.4.13) qatorning hadlari uzluksiz funksiyalardan iborat bo'lishiga qaramay, uning yig'indisi $z = 1$ nuqtada uzilishga ega bo'lyapti. Buning sababi (I.4.13) qatorning $|z| < 1$ da tekis yaqinlashmasligidadir.

I.5.Funksional qatorlarni integrallash va differensiallash.

Ushbu

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (\text{I.5.1})$$

funksional qatorning har bir hadi G sohada aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lib, qatorning o'zi shu sohada tekis yaqinlashuvchi bo'lsin, deylik.

U holda shu qatorning

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (\text{I.5.2})$$

yig'indisi ham G da uzluksiz.

I.5.1-teorema. Agar

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

qatorning har bir hadi G sohada uzluksiz va qatorning o'zi shu sohada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda G sohada yotuvchi har qanday Γ chiziqli bo'ylab qatorni hadlab integrallash mumkin:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz + \dots \quad (I.5.3)$$

Buni (I.5.2) ga muvofiq

$$\int_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots] dz = \int_{\Gamma} f_1(z)dz + \int_{\Gamma} f_2(z)dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z)dz + \dots$$

ko'rinishda yozish ham mumkin. Teoremada ikki shart qo'yilgan bo'lib, ulardan biri, qator hadlarining G sohada uzluksiz bo'lishi va ikkinchisi, qatorning tekis yaqinlashishidir. Bu shartlardan birortasi bajarilmay qolsa, u holda teorema umuman o'rinli bo'lmaydi, ya'ni (I.5.1) dagi $f(z)$ dan biror kontur bo'ylab olingan integral o'ng tomondagi har bir haddan olingan integrallar yig'indisiga teng bo'lavermaydi. Buni haqiqiy o'zgaruvchilar sohasida ham kuzatganmiz.

Isbot. (I.5.1) qatorning S_n xususiy yig'indisini olaylik.

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$$

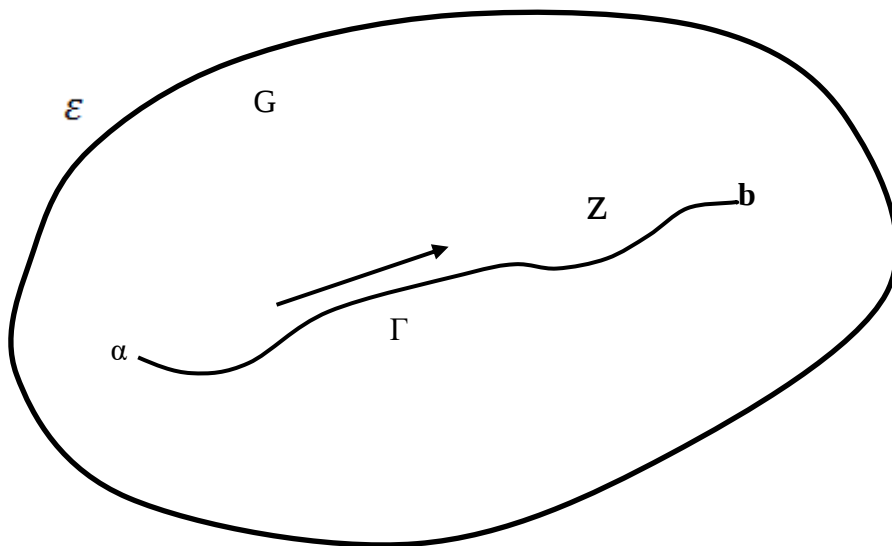
va qatorning qoldiq hadini

$$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

orqali belgilaylik. Teorema shartiga muvofiq qator tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday musbat $N(\varepsilon)$ sonni topish mumkinki, $n \geq N(\varepsilon)$ bo'lganda $|R_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$ bo'ladi. Endi Γ chiziqning uzunligini ℓ orqali belgilasak (I.5.1-chizma), interallarning xossasiga muvofiq

$$\left| \int_{\Gamma} [f(z) - S_n(z)] dz \right| = \left| \int_{\Gamma} R_n(z) dz \right| < \varepsilon \ell$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.



I.5.1-chizma ϵ -egri chiziq

Buning ma'nosi, $n \rightarrow \infty$ holda, tengsizlik chap tomonining limiti nolga teng demakdir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma} S_n(z) dz \right| = 0$$

Lekin birinchi integralda n ishtirok etmaydi, shuning uchun

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz \right] = \\ &= \int_{\Gamma} f_1(z) dz + \int_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \int_{\Gamma} f_n(z) dz + \dots \end{aligned}$$

Teorema isbotlandi. So'nggi tenglikni quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Agar Γ chiziq G soha ichidagi yopiq konturdan iborat bo'lsa, teorema quyidagicha tenglik bilan ifodalanadi:

$$\oint_{\Gamma} [f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots] dz = \oint_{\Gamma} f_1(z) dz + \oint_{\Gamma} f_2(z) dz + \dots + \oint_{\Gamma} f_n(z) dz + \dots \quad (I.5.4)$$

Quyida analitik funksiyalar qatoriga doir K. Veyershtassning ikki teoremasini isboti bilan keltiramiz.

I.5.4-teorema. Agar biror G sohada analitik funksiyalardan tuzilgan

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (I.5.5)$$

qator G da to'la yotuvchi ixtiyoriy yopiq $\overline{G_1}$ sohada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda 1) qatorning yig'indisi $f(z)$ G da analitik funksiya bo'ladi; 2) qatorni istalgan marta hadlab differensiallash mumkin.

$$f^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \dots + f_n^{(k)}(z) + \dots \quad (I.5.6)$$

3) differensiallashdan hosil bo'lgan barcha qatorlar $\overline{G_1}$ sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. (I.5.4) qatorning hadlari G da analitik (demak, uzluksiz) funksiyalar bo'lib, qator $\overline{G_1}$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun uning yig'indisi $f(z)$ funksiya G ga nisbatan ichki bo'lgan ixtiyoriy yopiq $\overline{G_1}$ sohada uzluksiz, demak barcha G da uzluksiz bo'ladi. Endi $f(z)$ ning ixtiyoriy nuqtasi z bo'lsin. $\overline{G_1}$ ning chegarasini Γ_1 bilan belgilab olamiz. $\overline{G_1}$ soha G ga tegishli ixtiyoriy soha bo'lgani uchun uni z nuqtani o'z ichiga oladigan qilib tanlashimiz mumkin. Γ_1 ning ixtiyoriy nuqtasi ξ bo'lsin ($\xi - z \neq 0$)

Ushbu

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{f_1(\xi)}{\xi - z} + \frac{f_2(\xi)}{\xi - z} + \dots + \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} + \dots$$

qator Γ_1 da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, shuning uchun uni hadlab integrallash mumkin: $\frac{1}{2\pi i}$ ga ko'paytirib, Γ_1 bo'ylab integrallaymiz:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_1(\xi)d\xi}{\xi - z} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_2(\xi)d\xi}{\xi - z} + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_n(\xi)d\xi}{\xi - z} + \dots$$

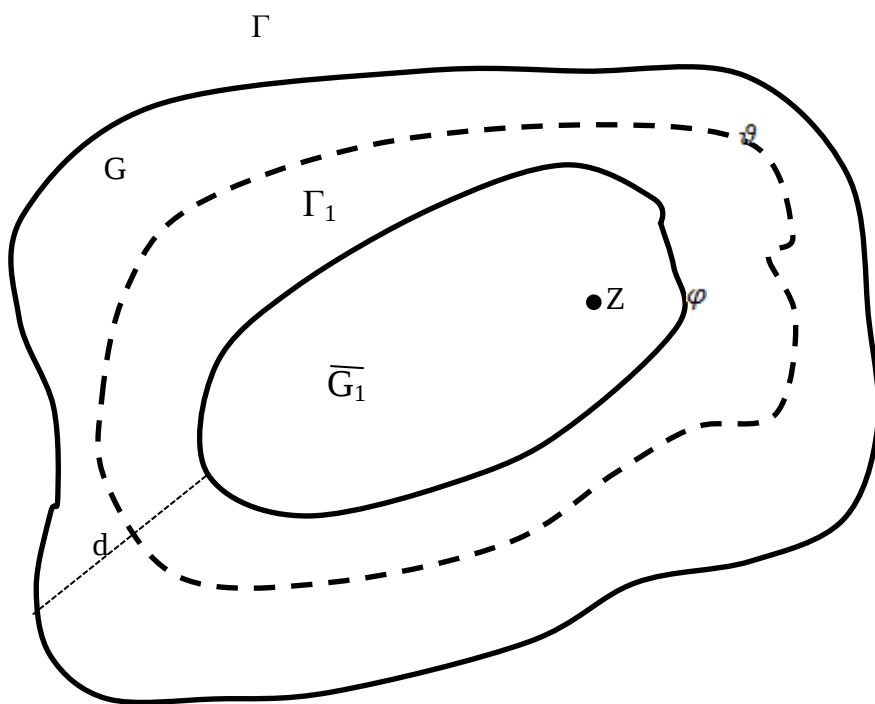
$f_n(z)$ funksiyalar G da analitik bo'lgani uchun o'ng tomondagi har bir integralga Koshining formulasini tadbiq etsak, ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots = f(z)$$

tenglik hosil bo'ladi. Shunday qilib, $f(z)$ funksiya Γ_1 da uzluksiz bo'lib, $f(z)$ Koshi tipidagi integral orqali ifoda qilingani uchun z nuqtada analitik funksiyadir.

Lekin, z nuqta G sohaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun $f(z)$ funksiya G sohada analitikdir.

Teoremaning 2-qismini isbotlash uchun G va G_1 larning chegaralari orasidan bitta yopiq γ kontur olaylik.



**I.5.2-chizma. G da to'la yotuvchi
ixtiyoriy yopiq $\overline{G_1}$ soha**

$\overline{G_1}$ bilan γ ning nuqtalari orasidagi eng kichik masofa d bo'lsin. γ ning ixtiyoriy nuqtasi ξ va z esa $\overline{G_1}$ ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. G da to'la yotuvchi ixtiyoriy yopiq sohada (I.5.5) qator tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ushbu

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} = \frac{f_1(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} + \frac{f_2(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} + \dots + \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} + \dots$$

qator ham γ konturda tekis yaqinlashadi, bunda k - ixtiyoriy butun musbat son.

Bu tenglikning ikki tomonini $\frac{k!}{2\pi i}$ ga ko'paytirib, integrallansa,

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_1(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} + \dots + \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_n(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} + \dots$$

tenglik hosil bo'lib, analitik funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini hisoblash formulasiga muvofiq

$$f^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \dots + f_n^{(k)}(z) + \dots$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shu bilan biz (I.5.5) qator yig'indisining hosilalari shu qatorni hadlab differensiallash natijasida hosil bo'lishini ko'rsatdik. Endi teoremaning 3-qismini, ya'ni (I.5.6) qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbot qilamiz. (I.5.5) qator γ chiziqda tekis yaqinlashgani sababli har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N(\varepsilon)$ sonni topish mumkinki, $n > N$ bo'lganda $|f(\xi) - S_n(\xi)| < \varepsilon$ bo'ladi. Shartimizga muvofiq γ dagi hamma ξ lar uchun:

$$|\xi - z| \geq d$$

U holda integralning xossasiga muvofiq:

$$|f^{(k)}(z) - S_n^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) - S_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon \ell}{d^{k+1}} = \varepsilon_1,$$

bunda ℓ son γ ning uzunligi,

$$\varepsilon_1 = \frac{k! \ell}{2\pi d^{k+1}} \varepsilon$$

Tengsizlikning o'ng tomoni har qanday kichik ε_1 musbat sondan iborat bo'lgani uchun chap tomonidagi ayirma limiti nolga teng bo'ladi, demak, (I.5.6) qatorning $\overline{G_1}$ sohada tekis yaqinlashishi isbot qilindi.

1-teorema isbotlandi.

Izoh. Agar (I.5.5) qator G da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, isbot qilinganga asosan (I.5.6) qator barcha nuqtalari G da yotuvchi ixtiyoriy $\overline{G_1}$ yopiq sohada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, degan xulosa noto'g'ri bo'ladi. Masalan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ qator $|z| \leq 1$

doirada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, chunki $\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ qator esa

yaqinlashuvchidir. Ammo uning hatto birinchi hosilasidan iborat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ qator

ham $|z| < 1$ doirada tekis yaqinlashmaydi (oddiy yaqinlashadi), lekin $|z| \leq r$ ($r < 1$)

doirada esa tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

I.5.3-teorema. Agar (I.5.5) qatorning hadlari G da analitik bo'lib, $\overline{G}$ da uzluksiz bo'lsa va G ning chegarasida qator tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (I.5.5) qator barcha G da tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Haqiqatan, G ning chegarasidagi ξ nuqtani olamiz. Teorema shartiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $n \geq N(\varepsilon)$ $p > 1$ bo'lganda

$$|f_n(\xi) + f_{n+1}(\xi) + \dots + f_{n+p}(\xi)| < \varepsilon \quad (\text{I.5.7})$$

bo'ladi.

$$f_n(\xi) + f_{n+1}(\xi) + \dots + f_{n+p}(\xi)$$

funksiya G da analitik va $\overline{G}$ da uzluksiz bo'lgani uchun modulning maksimum prinsipiga asosan (I.5.7) tengsizlik G sohaning barcha z nuqtalarida ham to'g'ri bo'ladi.

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishining 1 bobi Kompleks hadli qatorlar deb nomlangan bo'lib, besh bo'limdan iborat.

1-bo'limda kompleks sonlar haqidagi umumiy ma'lumotlar keltirilgan.

2-bo'limda sonli qator tushunchasi va kompleks hadli sonli qator, qatorlarning yaqinlashishi kabilar haqidagi ta'riflar keltirilgan.

3-bo'limda qatorlar ustida amallarni bajarish va yaqinlashuvchi qatorlar ustida amallar bajarishga oid teoremlar isboti bilan o'z aksini topgan.

4-bo'limda funksional qator tushunchasi, funksional qatorlarni yaqinlashuvchilikka tekshirish kabilar o'rin olgan.

5-bo'limda funksional qatorlarni integrallash va differentsiallashtirishga oid teoremlar bilan birgalikda K. Veyershtassning mashhur ikki teoremasi o'rin egallagan.

II bob. Kompleks hadli darajali qatorlar.

II.1. Darajali qatorlar.

Funksional qatorning xususiy holi bo'lmish darajali qator tajribada ko'proq ishlatiladi. z -a ayirmaga nisbatan darajali qator deb mana bu ko'rinishga ega bo'lgan

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (\text{II.1.1})$$

qatorga aytiladi. Bu qatorda qatnashayotgan

$$a = \alpha + i\beta \quad \text{va} \quad c_n = \sigma_n + i\tau_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

kompleks sonlardir. Agar $a = 0$ bo'lsa, $z = x + iy$ o'zgaruvchiga nisbatan darajali bo'lgan ushbu

$$c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots \quad (\text{II.1.2})$$

qatorga ega bo'lamiz.

Darajali qatorlarning yaqinlashishiga doir Abelning muhim teoremasi bilan tanishamiz.

II.1.1-teorema. Agar (II.1.1) darajali qator z_0 nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qator $|z-a| = |z_0-a|$ doiraning hamma nuqtalarida absolyut yaqinlashadi. Shuningdek, u har qanday yopiq $|z-a| \leq r$ doirada ham tekis yaqinlashadi, bunda $r < |z_0-a|$.

Isbot. Teoremaning shartiga ko'ra

$$c_0 + c_1(z_0-a) + c_2(z_0-a)^2 + \dots + c_n(z_0-a)^n + \dots$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun uning umumiy hadi nolga intiladi, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

va demak, barcha n lar uchun

$$|c_n(z_0-a)^n| \leq M$$

Faraz qilaylik, z ushbu

$$|z-a| \leq r, \quad (r < |z_0-a|)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda mana shu tengsizlikka va (II.1.1) ning umumiy hadiga asoslanib quyidagi tengsizlikni yoza olamiz:

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n \leq M \left(\frac{r}{|z_0-a|} \right)^n = Mq^n \quad (\text{II.1.3})$$

bunda

$$q = \frac{r}{|z_0-a|} < 1$$

bo'lganidan ushbu

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi. U holda (II.1.3) ga asosan, (II.1.1) qator ushbu

$$|z-a| \leq r$$

doirada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi r ni $|z_0-a|$ ga istagancha yaqinlashtirish mumkin bo'lgani uchun (II.1.1) qator

$$|z-a| < |z_0-a|$$

doirada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. II.1.1 Abel teoremasi isbotlandi.

So'nggi tengsizlikning geometrik ma'nosi shuki, bu tengsizlik a markazli va z_0 nuqtadan o'tuvchi doirani ifodalab, z lar uning ichki nuqtalaridir, $|z-a| \leq r$ esa o'sha doira ichidagi a markazli ixtiyoriy doiradir. Demak, mana shu ichki doiralarda (II.1.1) qator tekis va absolyut yaqinlashadi, lekin katta doira ichida esa faqat absolyut yaqinlashadi. Agar $a=0$ bo'lsa, doira markazi koordinatalar boshida bo'ladi.

Natija. Agar (II.1.1) qator $z = z_0$ nuqtada uzoqlashsa, $|z-a| > |z_0-a|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtada uzoqlashadi.

Ravshanki, har qanday (II.1.1) ko'rinishdagi darajali qator $z=a$ nuqtada, ya'ni doiraning markazida yaqinlashuvchi bo'ladi.

II.1.1-misol. Ushbu $1 + z + 2^2 z^2 + 3^3 z^3 + \dots + n^n z^n + \dots$ darajali qator faqat $z=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatan, ixtiyoriy $z \neq 0$ nuqtada biror yetarli

katta n dan boshlab $n|z| > 2$ bo'lgani uchun $n \rightarrow \infty$ da tekshirilayotgan qatorning umumiy hadi $n^n z^n$ cheksizlikka intiladi, chunki $|n^n z^n| = (n|z|)^n > 2$. Bu tengsizlikdan qatorning ixtiyoriy $z \neq 0$ nuqtada uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

II.1.2-misol. Ushbu $1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots$ qator ixtiyoriy z nuqtada absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatan, z qanday bo'lmasin, biror n dan boshlab $\frac{|z|}{n} \leq \frac{1}{2}$ qilib olish mumkin bo'lgani uchun

$$\left| \frac{z^n}{n^n} \right| = \left(\frac{|z|}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

bo'ladi. Shunday qilib, qaralayotgan qatorning ma'lum bir hadidan boshlab barcha hadlari cheksiz kamayuvchi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

progressiyaning mos hadidan katta emas. Demak, ixtiyoriy z nuqtada tekshirilayotgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagi misoldan bilamizki, darajali qator bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya $|z| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda yaqinlashuvchi, boshqa nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy (II.1.1) darajali qatorni tekshirganimizda 3 hol bo'lishi mumkin:

- 1) qator faqat o'zining markazida ($z = a$) yaqinlashadi;
- 2) qator barcha chekli z nuqtalarda yaqinlashadi;
- 3) qator ayrim nuqtalarda yaqinlashadi, ayrim nuqtalarda esa uzoqlashadi.

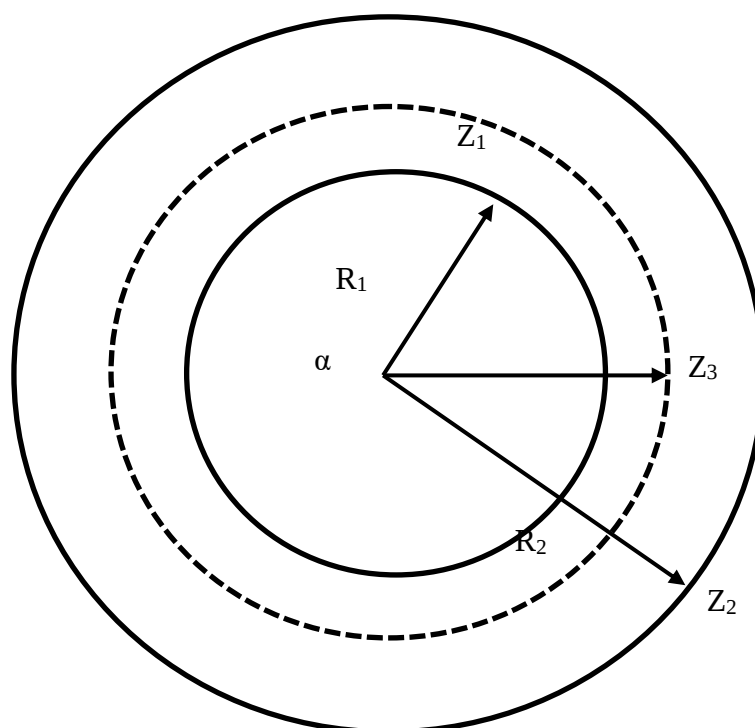
II.2.Darajali qatorning yaqinlashish doirasi va radiusi.

Yuqorida (II.1.1) darajali qatorni tekshirishda 3-hol qator ayrim nuqtalarda yaqinlashuvchi, ayrim nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'lishini aytgan edik. Bunday holda darajali qatorning yaqinlashish sohasini aniqlash masalasi bilan shug'ullanamiz. Buning uchun (II.1.1) qator z_1 nuqtada yaqinlashuvchi va z_2

nuqtada uzoqlashuvchi bo'lsin, deb faraz qilamiz. U holda, Abel teoremasiga muvofiq, $|z - a| < |z_1 - a| = R_1$ doira ichida qator yaqinlashuvchi va $|z - a| > |z_2 - a| = R_2$ doira tashqarisida uzoqlashadi. ($R_1 < R_2$). Qatorning halqada yaqinlashishi yoki uzoqlashishi noma'lumdir.

Agar $R_1 = R_2 = R$ bo'lsa, $|z - a| < R$ doira ichida qator yaqinlashib, tashqarisida uzoqlashadi. Agar $R_1 \neq R_2$ bo'lsa, $\frac{R_1 + R_2}{2} = R_3$ deb belgilaymiz. Abel teoremasiga muvofiq, $|z - a| = R_3$ aylananing biror z_3 nuqtasida (II.1.1) qator yaqinlashsa, $|z - a| < R_3$ doira ichida ham yaqinlashadi. Aksincha, agar z_3 nuqtada uzoqlashsa, $|z - a| > R_3$ da ham uzoqlashadi. Shu bilan biz R_1 va R_2 radiusli doiralar orasidagi halqani toraytira boramiz.

II.2.1-chizmadagi kabi.



II.2.1-chizma darajali qatorning yaqinlashishi doirasi

Faraz qilaylik, $|z - a| < R_3$ doirada (II.1.1) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U vaqtda $\frac{R_2 + R_3}{2} = R_4$ deb yuqoridagi mulahazani takrorlaymiz. Shu xilda cheksiz davom etilsa, shunday R songa ega bo'lamizki, natijada (II.1.1) qator

$$|z - a| < R \quad (\text{II.2.1})$$

doira ichida yaqinlashib, uning tashqarisida uzoqlashuvchi bo'lib qoladi. $|z - a| = R$ aylananing o'zida esa qatorning yaqinlashish yoki uzoqlashish masalasi ochiq qoladi. (Aylananing biror z^* nuqtasidagi yaqinlashish yoki uzoqlashishni tekshirmoqchi bo'lsak, u nuqtani (II.1.1) ga qo'yib, o'zgarmas hadli qator hosil qilib, so'ngra uni tekshirish zarur). Mana shunday xususiyatga ega bo'lgan R son (II.1.1) qatorning yaqinlashish radiusi, (II.2.1) esa yaqinlashish doirasi deb ataladi.

(II.1.1) qator koeffitsientlaridan quyidagi sonlar ketma-ketligini tuzamiz:

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots \quad (\text{II.2.2})$$

Bu ketma-ketlikning eng katta limitini L orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}^2 \quad (\text{II.2.3})$$

(II.1.1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi $R = \frac{1}{L}$ formula bilan aniqlanadi.

(II.2.3) formula Koshi-Adamar formulasi deyiladi.

Isbot. a) $L = 0$ bo'lsin, bu holda $R = \infty$ bo'lib, (II.1.1) qatorning ixtiyoriy $z = z_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatish kerak. Bu holda (II.2.2) ketma-ketlik nolga yaqinlashadi, shuning uchun ixtiyoriy $z = z_0 \neq 0$ nuqtada va $0 < \theta < 1$ da ushbu

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{\theta}{|z_0 - a|}$$

tengsizlik n ning istalgancha katta qiymatlaridan boshlab o'rinli bo'ladi. Demak, biror n dan boshlab

$$|c_n(z_0 - a)^n| < \theta^n$$

bo'ladi. Bundan, darhol (II.1.1) qatorning ixtiyoriy z nuqtada absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

b) $L = \infty$ $R = 0$ bo'lsin. Bu holda (II.1.1) qatorning $z = a$ dan boshqa har qanday nuqtada uzoqlashuvchi bo'lishini ko'rsatish kerak. (II.2.2) ketma-ketlikning eng katta limiti cheksiz bo'lgani sababli ixtiyoriy $z \neq 0$ nuqta uchun n ning cheksiz ko'p $n = n_k$ qiymatlari topilib, bular uchun

$$\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \frac{1}{|z-a|}$$

tengsizlik bajariladi. Bundan

$$|c_{n_k} (z-a)^{n_k}| > 1$$

bo'lib, (II.1.1) qator yaqinlashuvchi bo'lishining ushbu zaruriy sharti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n (z-a)^n = 0$$

hech bir $z \neq a$ nuqtada bajarilmaydi.

v) L chekli son, ya'ni $0 < L < \infty$ bo'lsin. Bu holda (II.1.1) qatorning

$|z-a| < \frac{1}{L}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzoqlashuvchi bo'lishini ko'rsatish kerak.

$|z-a| < \frac{1}{L}$ bo'lsin. L eng katta limit bo'lgani uchun, bu limitning xossasiga

asosan, yetarli katta n dan boshlab

$$\sqrt[n]{|c_n|} < L + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0).$$

ε ni quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlab olamiz:

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|z-a|} - L \right).$$

U holda oldingi tengsizlikni bunday yozish mumkin:

$$\sqrt[n]{|c_n|} < L + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{|z-a|} - L \right) = \frac{1+L|z-a|}{2|z-a|}$$

yoki

$$\sqrt[n]{|c_n|} |z-a| < \frac{1+L|z-a|}{2} = \theta < 1$$

chunki $L|z-a| < 1$. Bundan

$$|c_n||z-a|^n < \theta^n$$

Demak, (II.1.1) qator $|z-a| < \frac{1}{L}$ doirada absolyut yaqinlashadi. Endi

$$|z-a| > \frac{1}{L}$$

bo'lsin. L ning ta'rifidan ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ va n ning cheksiz ko'p qiymatlarida

$$\sqrt[n]{|c_n|} > L - \varepsilon$$

bo'ladi. ε ni bunday tanlab olamiz:

$$\varepsilon < L - \frac{1}{|z-a|}$$

Bu holda

$$\sqrt[n]{|c_n|} > L - \left(L - \frac{1}{|z-a|} \right) = \frac{1}{|z-a|}$$

yoki

$$|c_n||z-a|^n > 1$$

Oxirgi tengsizlik n ning cheksiz ko'p qiymatlari uchun o'rinli bo'lganidan $c_n(z-a)^n$ had $n \rightarrow \infty$ da nolga intilishi mumkin emas, ya'ni qator yaqinlashuvchi.

Shunday qilib, Koshi-Adamar formulasi barcha hollar uchun isbot bo'ldi.

II.2.1-misol. Ushbu

$$z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots$$

qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Bunda

$$c_n = \frac{1}{n^n}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = 0$$

Demak, $R \rightarrow \infty$, ya'ni qator tekislikning hamma chekli nuqtalarida yaqinlashadi.

II.2.2-misol.

$$z + 2^{\ln 2} z^2 + \dots + n^{\ln n} z^n + \dots$$

qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Bunda

$$c_n = n^{\ln n}, \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n \cdot \ln n}{n}} = 1$$

Demak, yuqoridagi qatorning yaqinlashish radiusi $R = 1$

II.3. Teylor qatori.

Ushbu

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (\text{II.3.1})$$

darajali qatorning yaqinlashish radiusi $R > 0$ bo'lsin, deylik. Abel teoremasiga ko'ra bu qator R' radiusli ($R' < R$) har qanday doirada tekis yaqinlashuvchidir. Qatorning har bir hadi chekli tekislikda, jumladan yuqorida aytilgan doirada analitik bo'lgani uchun Veyersstrass teoremasiga muvofiq qator yig'indisi

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \quad (\text{II.3.2})$$

shu doirada analitik bo'ladi hamda (II.3.2) dan istagancha hosila olish mumkin bo'lib, hosilaviy qatorlar $|z-a| \leq R'$ doirada tekis yaqinlashadi.

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \dots + nc_n(z-a)^{n-1} + \dots$$

$$f''(z) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(z-a) + \dots + n \cdot (n-1)c_n(z-a)^{n-2} + \dots$$

.....

$$f^{(k)}(z) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_k + (k+1) \cdot k \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_{k+1}(z-a) + \dots$$

Bulardagi $z = x + iy$ yaqinlashish doirasi ichidagi ixtiyoriy nuqtadir. Xususiyl holda $z = a$ doira markazidan iborat bo'lib, so'nggi tengliklardan quyidagi

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = c_1, \quad f''(a) = 2!c_2, \quad \dots, \quad f^{(k)}(a) = k!c_k, \quad \dots$$

yoki

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \dots, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (\text{II.3.3})$$

formulalar kelib chiqadi. Mana shu qiymatlarni (II.3.2) tenglikka keltirib qo'ysak,

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (\text{II.3.4})$$

tenglikka ega bo'lamiz, bu qator $f(z)$ funksiyaning Teylor qatori deb ataladi. (II.3.3) ning o'ng tomonidagi sonlar esa Teylor koeffitsientlari deyiladi.

$a=0$ da ushbu qator Maklerson qatorini tashkil etadi va u quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots \quad (\text{II.3.5})$$

Har qanday musbat darajali qatorni Teylor qatoriga aylantirish mumkin. Bu aytib o'tilgan fikrlar quyidagi teoremda o'z aksini topgan.

II.3.1-teorema. Darajali

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

qator yig'indisi yaqinlashish doirasi ichida analitik funksiyadan iborat bo'lib, bu qator o'z yig'indisining Teylor qatoridir.

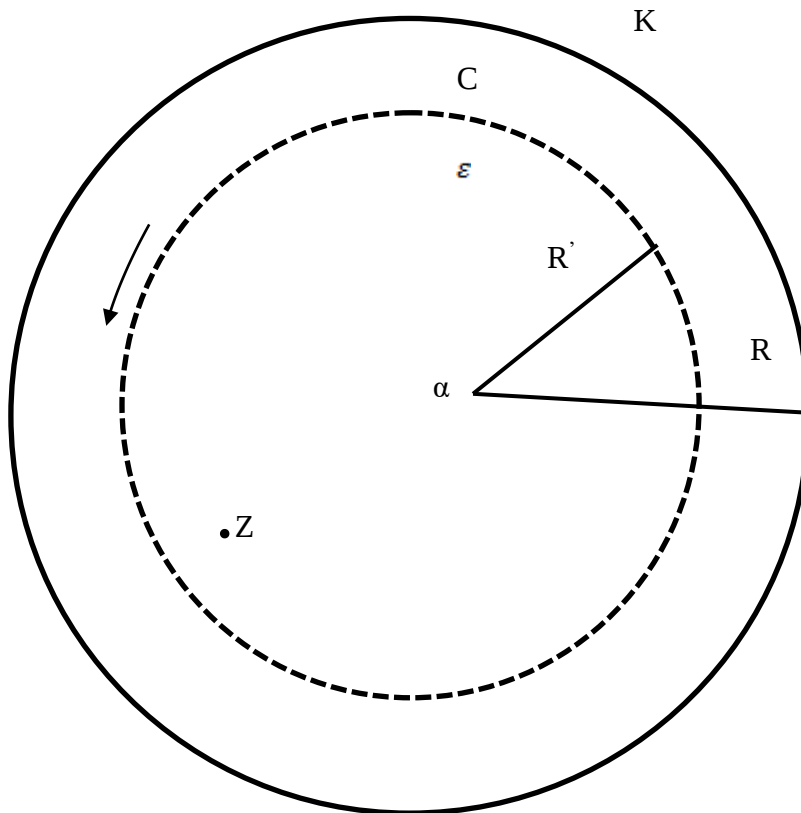
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \text{va} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$$

qatorlar a nuqtaning $|z-a| < R$ atrofida bitta $f(z)$ yig'indiga ega bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda yuqoridagilarga asosan $c_n = b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Bu esa darajali qatorga yoyishning yagonalik xossasini ifodalaydi.

Yuqorida har qanday musbat darajali qatorni Teylor qatoriga keltirishni ko'rib o'tdik. Endi esa berilgan funktsiyani darajali, ya'ni Teylor qatoriga yoyishni qaraymiz. Buning uchun o'sha funktsiya ma'lum bir shartga bo'ysunishi kerak.

$f(z)$ funktsiya, K aylana bilan chegaralangan $|z-a| < R$ doira ichida analitik bo'lsin, deb faraz etaylik. Mana shu K aylana ichidagi ixtiyoriy nuqtani z bilan belgilab, markazi a nuqtaga joylashgan R' radiusli $R' < R$ biror aylana chizaylikki, z nuqta shu aylananing ichida qolsin.

II.3.1-chizma.



II.3.1-chizma. C ichidagi yopiq doira

Berilgan $f(z)$ funksiya C aylanada va uning ichidagi doirada analitik bo'lgani uchun Koshining formulasi o'rinlidir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

bunda ξ nuqta C aylana ustidagi ixtiyoriy nuqta, z esa C ichidagi nuqtadir.

Qo'yilgan masala mana shu $f(z)$ analitik funksiyaning $z - a$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyishdan iborat. Ravshanki,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a} \right)} \quad (\text{II.3.6})$$

Endi, chizmadan:

$$|z - a| < |\xi - a|, \text{ demak, } q = \left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| < 1$$

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = 1 + \frac{z-a}{\xi-a} + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n + \dots \quad (\text{II.3.7})$$

bo'lib, (II.3.6) ga bu tenglikni keltirib qo'ysak, ushbu

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{\xi-a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\xi-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} + \dots \quad (\text{II.3.8})$$

C ichidagi yopiq doirada absolyut va tekis yaqinlashuvchi qatorga ega bo'lamiz. Bu qatorning ikki tomonini $f(\xi)$ analitik funksiyaga ko'paytirilsa ham u tekis yaqinlashuvchi bo'lib, qolaveradi, chunki $|f(\xi)|$ cheklidir. Shu sababli uni hadlab integrallay olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-a} + (z-a) \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^2} + \\ &+ (z-a)^2 \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^3} + \dots + (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Tenglikning chap tomoni Koshi formulasiga asosan $f(z)$ ga teng va o'ng tomonidagi integrallarni esa $f(z)$ ning a nuqtadagi mos hosilari bilan almashtirilsa,

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (\text{II.3.9})$$

Taylor qatori hosil bo'ladi. Demak, (II.3.3) ga asosan

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \quad (\text{II.3.10})$$

($n=0,1,2,3,\dots$) Taylor koeffitsientlarini hisoblash integral formulalariga ega bo'lamiz.

Xususiyl holda, $a=0$ bo'lib (II.3.9) dan:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots \quad (\text{II.3.11})$$

qator hosil bo'ladi. Bulardan, quyidagi II.3.2-teorema isbot qilindi.

II.3.2-teorema. Berilgan a nuqtada analitik bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyani shu nuqtaning biror atrofida $(z-a)$ ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyish mumkin. Bu qator $f(z)$ analitik bo'lgan $|z-a| < R$ doirada yaqinlashuvchidir.

Izoh. $f(z)$ funksiya $|z-a|=R$ aylananing barcha nuqtalarida analitik bo'lishi mumkin emas. Haqiqatan, aks holda bu aylananing har bir ξ nuqtasi uchun $|z-\xi| < r_\xi$ doira mavjud bo'lib, $f(z)$ bu doirada analitik bo'ladi. r radius r_ξ radiuslarning eng kichigi bo'lsin (bunday r ning mavjudligi Geyne-Borel lemmasidan kelib chiqadi): agar yopiq va chegaralangan $\bar{G}$ sohaning ($\bar{G}$ o'rniga uzluksiz chiziq olish ham mumkin) har bir z nuqtasi K_z doiraning markazi bo'lsa, u holda $\bar{G}$ sohani qoplovchi chekli sondagi shunday doiralar mavjuddir.

Bu lemmani isbotlash uchun $\bar{G}$ sohani biror Q kvadrat ichiga joylashtirib, so'ngra haqiqiy argumentli funksiyalar nazariyasidagiga o'xshash mulohazalarni yuritish kifoyadir. U holda, $f(z)$ funksiya $|z-a| < R+r$ doirada ham analitik bo'ladi, demak yuqoridagi teoreмага asosan, $f(z)$ funksiya Teylor qatorining yaqinlashish radiusi ham $R+r$ ga teng bo'lishi kerak. Buning bo'lishi mumkin emas, chunki shart bo'yicha u radius R ga teng edi. Shunday qilib, $|z-a|=R$ aylananing barcha nuqtalarida $f(z)$ funksiya analitik bo'lmas ekan ya'ni bu aylanada funksiyaning kamida bitta maxsus nuqtasi bor. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: a nuqtada analitik bo'lgan $f(z)$ funksiya markazi a da va chegarasi a ga eng yaqin $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtasidan o'tuvchi doirada Teylor qatori bilan ifodalanadi. Bu izoh $f(z)$ funksiya tabiati bilan bu funksiya yoyilgan darajali qator yaqinlashish radiusi o'rtasidagi bog'lanishni ochib beradi. U darajali qatorlar nazariyasi o'zining to'la ifodasini faqat kompleks sohada topishini ko'rsatadi.

Masalan, matematik analiz kursidan ma'lumki,

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (*)$$

qator $|x| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar uchun yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $\frac{1}{1+x^2}$ ga teng. Bu funksiya esa x o'zgaruvchi $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgarganda aniqlangan.

Haqiqiy o'zgaruvchilar sohasida (*) qatorning yig'indisi barcha x larda aniqlangan bo'lishiga qaramay, nima uchun tekshirilayotgan qator $x \leq -1$ va $x \geq 1$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x ning qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lmaydi, degan savolga javob bera olmaymiz. Agar yuqoridagi qatorni kompleks sohada tekshirsak, bu savolga darhol javob beramiz, chunki $\frac{1}{1+z^2}$ funksiya uchun $z = \pm i$ maxsus nuqtalar bo'ladi, shuning natijasida tekshirilayotgan qatorning yaqinlashish radiusi 1 ga teng. Odatda, $f(z)$ funksiya a nuqta atrofida $(z-a)$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyilsa, uni a nuqtada golomorf funksiya deb ataymiz. Demak, $f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi golomorfligi bilan analitikligi o'zaro ekvivalent tushunchalardir.

II.3.1-misol. $f(z) = z \cdot e^{-z}$ funksiyaning $a=1$ nuqtada Teylor qatoriga yoying.

Avvalo berilgan funksiyaning

$$f(z) = [1 + (z-1)] \cdot e^{-(z-1)-1} = [1 + (z-1)] \cdot e^{-1} \cdot e^{-(z-1)}$$

ko'rinishda yozib olamiz, so'ng $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z) = U_1(z) + U_2(z) + \dots + U_n(z) + \dots$ munosabatdan foydalanib

$$e^{-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n!}$$

bo'lishini topamiz. Natijada

$$\begin{aligned} f(z) = ze^{-z} &= [1 + (z-1)]e^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n!} = e^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-1} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \right) (z-1)^n = \\ &= e^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} (-1)^{n+1} e^{-1} (z-1)^n \end{aligned}$$

II.3.2-misol. Ushbu

$$f(z) = \sin^2 z$$

funksiyaning $a=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

Ravshanki

$$\sin^2 z = \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2z$$

Endi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

munosabatdan foydalanib,

$$\cos 2z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$$

bo'lishini topamiz.

Natijada

$$f(z) = \sin^2 z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$$

bo'ladi. Bu berilgan funksiyaning $a=0$ nuqtadagi Teylor qatoridir.

II.3.3-misol. Ushbu

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}$$

funksiyani $a=0$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying va uning yaqinlashish radiusini toping.

Berilgan funksiya $C \setminus \{-1\}$ to'plamda holomorf bo'ladi.

Qaralayotgan funksiyaning

$$f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} = z^2 \cdot \varphi(z)$$

ko'rinishda yozib olamiz, bunda

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Unda

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n z^n]' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}$$

bo'ladi. Natijada berilgan funksiya uchun

$$f(z) = -z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n+1}$$

yoyilmaga kelamiz. Keyingi darajali qator $\{z|z| < 1\}$ da yaqinlashadi, $\{z|z| > 1\}$ da esa uzoqlashadi. Demak, qatorning yaqinlashish radiusi $r = 1$ bo'ladi.

Loran qatori. Ushbu

$$\dots + c_{-n} \cdot \frac{1}{(z-a)^n} + c_{-(n-1)} \cdot \frac{1}{(z-a)^{n-1}} + \dots + c_{-1} \cdot \frac{1}{z-a} + c_0 + c_1 \cdot (z-a) + c_2 \cdot (z-a)^2 + \dots + c_n \cdot (z-a)^n + \dots$$

ifoda Loran qatori deyiladi va

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

kabi belgilanadi. Bunda $\dots, c_{-n}, c_{-(n-1)}, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ kompleks sonlar Loran qatorining koeffitsientlari, a esa biror kompleks son.

Loran qatori

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (\text{II.3.12})$$

va

$$\sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (\text{II.3.13})$$

qatorlar yig'indisi sifatida ifodalanadi. (II.3.12) qatorga Loran qatorining to'g'ri qismi, (II.3.13) ga esa bosh qismi deyiladi.

(II.3.12) darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (\text{II.3.14})$$

formula yordamida topilib, uning yaqinlashish sohasi, $\{z \in C : |z-a| < R\}$ bo'ladi.

(II.3.13) qatorning yaqinlashish radiusi

$$r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (\text{II.3.15})$$

formula yordamida topiladi va uning yaqinlashish sohasi $\{z \in C : |z - a| > r\}$ bo'ladi.

Berilgan Loran qatorining yaqinlashish sohasi

$\{z \in C : |z - a| < R\} \cap \{z \in C : |z - a| > r\} = \{z \in C : r < |z - a| < R\}$ to'plamdan (halqadan) iborat bo'ladi.

II.3.3-teorema. Agar $f(z)$ funksiya $U = \{r < |z - a| < R\}$ sohada (halqada) golomorf bo'lsa, u shu halqada Loran qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (\text{II.3.16})$$

qatorning koeffitsientlari ushbu

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots) \quad (\text{II.3.17})$$

formulalar yordamida topiladi ($r < \rho < R$).

Agar $M = \max_{|z-a|=\rho} |f(z)|$ desak, Loran qatori (II.3.16) ning

koeffitsientlari uchun

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots) \quad (\text{II.3.18})$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Odatda (II.3.18) Koshi tengsizliklari deyiladi.

Loran qatorini yaqinlashish sohasida hadlab differensiallash

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \right)' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_n (z - a)^n]' ,$$

shuningdek hadlab integrallash

$$\int \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \right] dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int c_n (z - a)^n dz$$

mumkin.

II.3.4-misol. Ushbu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ Loran qatorining yaqinlashish nuqtalari to'plamini

toping.

Ravshanki,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$$

Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi har bir qatorning yaqinlashish radiusi hamda yaqinlashish sohasini topamiz:

(II.3.13) formuladan foydalanib $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + 1}$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 1}}} = 3,$$

Yaqinlashish doirasi esa $\{z | z < 3\}$ bo'lishini topamiz. Bu qatorning umumiy hadi uchun $\{z | z = 3\}$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^n}{3^n + 1} \right| = 1 \neq 0$$

buning $\{z | z = 3\}$ da uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Endi

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} \tag{II.3.19}$$

qatorni

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{z^n}{3^n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{3^{-n} + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \omega^n$$

$(\omega) = \frac{1}{z}$ ko'rinishda yozib olamiz. Ravshanki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \omega^n$$

qator $\{\omega < 1\}$ da (II.3.19) qator esa $\{\omega < 1\} = \left\{ \left| \frac{1}{z} \right| < 1 \right\} = \{z > 1\}$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Berilgan Loran qatorining yaqinlashish nuqtalaridan iborat to'plam

$$\{z < 3\} \cap \{z > 1\} = \{1 < z < 3\} \text{ halqadan iborat bo'lar ekan}$$

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishimning II bobi Kompleks hadli darajali qatorlarga bag'ishlangan bo'lib, ushbu bob uch bo'limdan iborat.

Birinchi bo'limda darajali qator tushunchasi, uning yaqinlashishiga doir teoremlar o'z isboti bilan o'rin olgan.

Ikkinchi bo'limda darajali qatorning yaqinlashish doirasi va radiusi haqidagi ma'lumotlar aytib o'tilgan.

Uchinchi bo'limda esa Teylor qatori, berilgan funksiyani Teylor qatoriga yoyishga doir ma'lumotlar keltirilgan.

Xotima.

Bitiruv malakaviy ishining ushbu bobi Kompleks hadli qatorlar deb nomlangan bo'lib, besh qismdan iborat. Ular kompleks sonlar haqida ma'lumot, sonli qatorlar, qatorlar ustida amallar, funksional qatorlar, funksional qatorlarni integrallash va differensiallash

Kompleks sonlar haqida ma'lumot qismida kompleks sonlar haqidagi umumiy ma'lumotlar, kompleks soning ko'rinishlari keltirilgan.

Sonli qatorlar qismida sonli qator tushunchasi va kompleks hadli sonli qator, qatorlarning yaqinlashishi kabilar haqidagi ta'riflar keltirilgan.

Qatorlar ustida amallar qismida qatorlar ustida amallarni bajarish va yaqinlashuvchi qatorlar ustida amallar bajarishga oid teoremlar isboti bilan o'z aksini topgan.

Funksional qatorlar qismida funksional qator tushunchasi, funksional qatorlarni yaqinlashuvchilikka tekshirish kabi ma'lumotlar keltirilgan.

Funksional qatorlarni integrallash va differensiallash qismida funksional qatorlarni integrallash va differensiallashga oid teoremlar isboti bilan keltirilgan.

Kompleks hadli darajali qatorlar bobi, uch qismdan iborat bo'lib, darajali qatorlar, darajali qatorning yaqinlashish doirasi va radiusi, Teylor qatoriga bag'ishlangan.

Darajali qatorlar qismida darajali qator tushunchasi, uning yaqinlashishiga doir teoremlar o'z isboti bilan keltirilgan.

Darajali qatorning yaqinlashish doirasi va radiusi qismida darajali qatorning yaqinlashishi, yaqinlashish doirasi va radiusi haqidagi ma'lumotlar aytib o'tilgan.

Teylor qatori qismida esa berilgan funksiyaning Teylor qatoriga yoyish, Teylor qatorining xususiy holi Maklerson qatori haqidagi, Loran qatori haqidagi fikrlar bilan birgalikda Teylor qatoriga yoyishga doir misollar keltirilgan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishidan Oliy o'quv yurtlari matematika ta'lim yo'nalishi talabalari kompleks hadli darajali qatorlar mavzusini o'rganishda foydalanishlari mumkin.

Adabiyotlar.

1. Karimov I.A “Yuksak ma’naviyat-yengilmas kuch” Toshkent-2008 yil
2. Karimov I.A “Barkamol avlod dasturi” Toshkent-2010
3. I.A.Karimov “O’zbekiston XXI asrga intilmoqda”. Toshkent 1999
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т.1. М. Наука, 1985
5. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного М., “Наука” 1977..
6. Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Туйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ) 3 қисм. “Ўзбекистон” 2000 й.
7. Волковский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., “Наука” 1975.
8. Сирожиддинов С.Х, Салохитдинов М.С., Мақсудов Ш. Комплекс ўзгарувчи функциялар назарияси. Т. “Ўқитувчи” 1979.
9. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного М., “Наука” 1977.
10. Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И. Лекции по ТФКП. М., “Наука” 1984.
11. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного М., “Наука” 1972.
12. *Интернет-справочник по математическому анализу и ТФКП*
<http://allmath.ru/highermath/mathanalysis/matan/matan.htm>
14. Т.Азларов,Х.Мансуров «Математический анализ» часть. Учебник для студентов и пединститутов. Ташкент 1995.

15. Т.Азларов,Х.Мансуров «Математический анализ» II часть.

Учебник для студентов и пединститутов. Ташкент 1995

16. G. Xudoyberganov, A. Vorisov, H. Mansurov. "Kompleks analiz".

Toshkent << Universitet>> 1998.