

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika – matematika fakul'teti

“Matematika” kafedrası

5130100 «Matematika» ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr

darajasini olish uchun

Xamrayeva Mexriniso Muradilloevna

“Matritsaviy tenglamalar va ularning yechimlari haqida”

mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko'rildi va himoyaga ruxsat

Ilmiy rahbar _____ dots. Rasulov.T.

berildi”

” _____ ” _____ 2015y.

Kafedra mudiri

_____ dots. Muhitdinov R.T.

Taqrizchi: _____ dots. Teshayev M.X.

” _____ ” _____ 2015y.

” _____ ” _____ 2015y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani

prof. Sh.M.Mirzayev

« _____ » _____ 2015 y

Buxoro- 2015y.

Mundarija:

Kirish.....	6
I Matritsalar haqida.....	7
1.1	M
matritsalar haqida ma'lumotlar.....	7
1.2 Matritsaviy ko'phadlar.....	15
1.3 Jordan matritsalar.....	17
II Matritsaviy tenglamalar va ularning yechimlari haqida.....	23
2.1 $AX - XB = C$ matritsaviy tenglama.....	23
2.2 $f(x) = 0$ skalyar tenglama.....	36
2.3 Ko'p hadli matritsaviy tenglama.....	39
2.4 Xosmas va xos matritsadan m-darajali ildizni chiqarish.....	44
2.5. Matritsa logarifmi.....	56
Xotima.....	61
Glossariy.....	62
Lug'at.....	65
Adabiyotlar	68

KIRISH

Vatanimiz kelajagi, xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib ulg'ayib qanday inson bo'lib hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak.

I. A.Karimov

Bugungi kunda ta'lim tarbiya sohasidagi islohotlarning yo'nalishlari va prinsiplari O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi qonuni, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" va davlat ta'lim standartlari talablarida ko'rsatib berilgan. "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" talablaridan biri yoshlarni umuminsoniy qadriyatlarga asoslangan shaxsiy va kasbiy fazilatlarini shakllantirish fanlarga qiziqishni oshirish, rivojlantirish, izlanish, tadbirkorlik, ishbilarmonlik, ko'nikmalarini tarkib toptirishdan iboratdir.

Bu esa har bir o'qituvchida yuqori bilim va yuksak madaniyat egasi, tashkilotchi hamda tadbirkor bo'lishni talab qiladi. Chunki ta'lim-tarbiya-ong mahsuli, lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning rivojini ham belgilaydigan omildir. Binobarin, ta'lim-tarbiya tizimini o'zgartirmasdan turib ongni o'zgartirib bo'lmaydi. Ongni, tafakkurni o'zgartirmasdan turib esa biz ko'zlagan oliy maqsad-ozod va obod jamiyatni barpo etib bo'lmaydi.

2014-yil 5-dekabr. "O'zbekiston" xalqaro anjumanlar saroyi. Konstitutsiyamizning 22 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimda Yangi — 2015-yilning nomi birinchi marta aytildi: Prezidentimiz bu yilga — Keksalarni e'zozlash yili deb nom berishni taklif etdi. Uzoq davom etgan gulduros qarsaklar, qalblarda kechgan hayajon va entikishlar nafaqat taklif qo'llab-quvvatlangani, balki bunday azaliy milliy qadriyatimiz tafakkurimizda yanada yuksalganidan dalolat berar edi. Shu topda hammamiz dastavval o'z ota-onamizni esladik. Chunki Prezidentimiz ma'ruzasida aytilganidek, "Bir o'ylab ko'raylik, "Qarisi bor uyning

parisi bor”, “Qariyalar — xonadonlarimizning fayzi va farishtasi” degan maqol va hikmatli soʻzlarimizda qanday chuqur maʼno bor. Haqiqatan ham, qaysi xonadonda nuroniy otaxon yoki onaxon boʻlsa, bu oilada, albatta, fayzu baraka, farovonlik, ahillik boʻlishini barchamiz yaxshi bilamiz”.

Yana maʼruzada “bugun faxriylarimizning hurmatini joyiga qoʻyish, har qaysi keksa odamning yuragiga yetib borish, koʻnglini koʻtarish, shu bilan birga, ularning hayotini mazmunli qilish yoʻlida olib borayotgan ishlarimizni kuchaytirish, samarasini oshirish zarur”ligi alohida taʼkidlandi. Eʼtibor bering: faxriylarimizning “hurmatini joyiga qoʻyish”, “yuragiga yetib borish”, “koʻnglini koʻtarish”, “hayotini mazmunli qilish”, bu boradagi “ishlarni kuchaytirish” va “samarasini oshirish” degan aniq vazifalar belgilab berildi.

Biz bu oʻrinda ham jamiyatimizda ustuvor boʻlgan maʼnaviy va moddiy ragʻbat hamohangligini yaqqol koʻz oldimizga keltiramiz. Mana, ular:

Maʼnaviy muhit: keksa avlod, har bir keksa insonga nisbatan mehr-oqibat, hurmat-ehtirom va gʻamxoʻrlik koʻrsatish;

keksa avlod hayotining mazmunini boyitish ular hayotiga daxldor boʻlgan muammolarni yechishda yoshlar va oʻrta avlod vakillarining burch hamda masʼuliyatini yanada oshirish bu borada taʼlim muassasalari, mahalla, jamoat tashkilotlari faolligini kuchaytirish.

Moddiy muhit: keksa insonlarning yoshiga koʻra organizmidagi funksional ehtiyojlarni inobatga olgan holda, ularning munosib hayot kechirishi, salomatligi va sogʻlom turmush tarzini taʼminlash keksalarning jamiyatdagi ijtimoiy faolligini taʼminlash uchun yetarli shart-sharoit yaratish ularga manzilli gerontologiya va geriatriya xizmatlari koʻrsatishni yanada takomillashtirish ularning hordiq chiqarishini tashkil etishni yangi darajaga koʻtarish belgilab berildi.

2015-yil milliy tarbiyamizning yana bir anʼanasini yoshlarda keksalarni hurmat qilish, ularni eʼzozlashdek chin insoniy tuygʻularni shakllantirish, yanada yuksaltirish yili boʻladi. Chunki “keksalarni eʼzozlash” iborasidan soʻng “qanday qilib?” degan pedagogik savol tugʻiladi. Demak, bu — yoshlarimizga keksalarni

qayerda, qay vaziyatlarda, qanday e'zozlash bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarni o'rgatish masalasi hamdir.

Keksalarimiz — azizlarimiz. Keksalarimiz — el-yurtga xizmat qilgan va shunga mos iltifotga, yaxshi gapga, hurmat-izzat, e'zozga munosib ota-onalarimiz. Ular yoshligini shu aziz Vatan xizmatiga bag'ishlagan, farzand-nabiralarini tarbiyalab, voyaga yetkazib, uyli-joyli qilib, yaxshi-yomon kunlarni, hayot nimaligini, odam qanday yashashi kerakligini ko'rib, bilib, sinagan; millatimizning 70—100 yillik tarixiga guvoh; xonadonlar fayzi, farishtasi.

Bitiruv malakaviy ish mavzusining dolzarbligi: Matritsalar nazariyasining asoslaridan biri bu funksional analizdir. Chunki funksional analizning, xususan operatorlar nazariyasining ko'plab masalalari chekli o'lchamli fazolarga mos keladi. Ma'lumki chekli o'lchamli fazodagi har qanday chiziqli operatorga matritsa mos keladi va aksincha. O'z navbatida bunday operatorlarning spektorini o'rganishda matritsaviy tenglamalarni yechish muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli, matritsaviy tenglamalar va ularni yechish usullarini o'rganish funksional analiz xususan operatorlar nazariyasining dolzarb masalalaridan biri bo'lib hisoblanadi. Ular chiziqli algebra, operatorlar nazariyasi, matematik-fizika va sonlar nazariyasida keng tadbiquqa ega.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi: Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi chiziqli tenglamalarni o'rganish masalasini matritsaviy tenglamalarni yechishni o'rganishda umumlashtirishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining vazifalari: Buning uchun quyidagi vazifalar qo'yildi:

- 1) $AX + XB = C$ matritsaviy tenglamalarni yechish usullarini o'rganish;
- 2) Ko'p hadli matritsaviy tenglamani yechishni o'rganish;
- 3) Matritsadan m -darajali ildiz chiqarishni va matritsa logarifmini topishni o'rganish.

**Bitiruv malakaviy ishining o`rganilganlik darajasi:** Bitiruv malakaviy ishi to`liq o`rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: chiziqlitenglama, matritsaviy tenglama, teskarimatritsa, matritsaning xossonlari, matritsaviy ko`phad, matritsalogarifmi, skalya tenglama, matritsadan m-darajaliildiz chiqarish, nilponentmatritsa.

Bitiruv malakaviy ishining obyekti: Silvester-Rozenblum teoremasi, Kramer qoidasi, Jordan matritsasi, Jordan zanjiri.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo`lib, uni yoritishda bir nechta olimlarning ilmiy ishlari hamda turli adabiyotlardagi ma`lumotlar xususiy holda o`rganildi.

Bitiruv malakaviy ishining yangiligi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega.

Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamiyati: mavzu va mavzuga oid misol va masalalarni tahlil va tadbiq qilish.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosi: operatorlarning spektorial nazariyasi elementlarini matritsaviy tenglamalarning yechimlarini o`rganishga qo`llash.

Bitiruv malakaviy ishining metodlari: matematikanaliz usullari, chiziqli algebra, funksional analiz va kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanildi.

Bitiruv malakaviy ishining hajmi va tuzilishi: Bitiruv malakaviy ishikirish, ikki bob, sakkiz ta paragraf, ikki bob yuzasidan xulosalar, xotima, glossariy, ishda foydalanilgan ba`zitushunchalarning inglizcha-o`zbekcha lug`at va foydalanilgan adabiyotlar ro`yxatidan iborat bo`lib, X sahifa nitashkiletadi.

I Matritsalar haqida.

1.1 Matritsalar haqida ma'lumotlar

Hozirgi paytda fanning ko'plab sohalari (hisoblash matematikasi, fizika, iqtisodiyot va h.k.)da o'zining keng tatbiqlarini topayotgan matritsalar nazariyasi elementlari bilan tanishamiz.

Matritsa deb, biror tartibda joylashtirilgan sonlarning to'g'ri to'rtburchak ko'rinishidagi jadvaliga aytiladi. Bu sonlar shu matritsaning elementlari deyiladi.

Umuman, m ta satr va n ta ustunli to'g'ri to'rtburchakli matritsa m ta satr va n ta ustunli matritsa yoki $m \times n$ o'lchamli matritsa deb ataladi. $n \times n$ o'lchamli matritsa kvadrat matritsa, n son esa shu kvadrat matritsaning tartibi deyiladi.

Matritsani transponirlash (lotincha- transponere-o`rin almashtirib qo`yish).

$m \times n$ o'lchamli A matritsa berilgan bo`lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A matritsani transponirlash deb, uning satr va ustunlari nomerlarini o`zgartirmay, satrlari va ustunlarining o`rnini almashtirib yozishga aytiladi. A matritsani transponirlash natijasida $n \times m$ o'lchamli matritsa hosil bo`ladi. Uni A^T bilan belgilaymiz:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisalarni transponirlash amalining xossalarini keltiramiz:

$$(1.1.1) - \text{xossa: } (A^T)^T = A$$

$$(1.1.2) - \text{xossa: } (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(1.1.3) - \text{xossa: } (\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$$

$$(1.1.4) - \text{xossa: } (AB)^T = A^T \cdot B^T$$

Xos va Xosmas matritsalar

n-tartibli kvadrat matritsani olamiz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning gorizontal

$$a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

$$a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),$$

... ..,

$$a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$$

vektorlari (yoki satrlari) chiziqli erkli yoki chiziqli bog`langan bo`lishi mumkin.

**1.1.1 –ta`rif:** Satrli chiziqli erkli matritsa *xosmas matritsa* deb va satrlari chiziqli bog`langan matritsa *xos matritsa* deb ataladi.

**1.1.2 –ta`rif:** A matritsa uchun  $A \cdot B = E$  tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari matritsa* deyiladi va  $B = A^{-1}$  ko`rinishda belgilaymiz.

Shunday qilib

$$A \cdot A^{-1} = E$$

1.1.1 –teorema: Xos A matritsaga teskari matritsa mavjud mavjud emas.

n -tartibli xosmas matritsa ya'ni kvadrat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lsin. A ning satrlari chiziqli erklidir

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ushbu matritsani tuzamiz

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Bunda A_{ij} lar a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchilarini ifodalaydi. Bu matritsa A ga teskaridir. Haqiqatdan ham, $AB = C$ desak C ning bosh diagonaldagi har bir c_{ii} elementi quyidagiga teng bo'ladi:

$$c_{ii} = a_{i1} \frac{A_{i1}}{|A|} + a_{i2} \frac{A_{i2}}{|A|} + \dots + a_{in} \frac{A_{in}}{|A|} = \frac{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}}{|A|} = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

Qolgan hamma c_{ij} ($i \neq j$) elementlari uchun

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \dots + a_{nk}A_{nl} = 0 \quad (k \neq l) \quad (1.1.1)$$

tenglikka asosan

$$c_{ij} = \frac{a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0.$$

kelib chiqadi. Demak, $A \cdot B = E$. Xuddi shunday qilib, $B = A^{-1}$ va

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani topaylik. Bu yerda

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 24 - 75 + 8 - 20 - 10 + 72 = -1.$$

Quyidagi elementlarning algebraik to'ldiruvchilari bo'ladi.

$$\begin{aligned} A_{11} = 7, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = 6, \quad A_{21} = 20, \\ A_{22} = 2, \quad A_{23} = 17, \quad A_{31} = -19, \quad A_{32} = -2, \quad A_{33} = -16. \end{aligned}$$

Demak

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -20 & 19 \\ -1 & 2 & 2 \\ -6 & 17 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ushbu

$$A \cdot A^{-1} = E$$

va

$$A^{-1} \cdot A = E$$

lar bajariladi.

1.1.2 –teorema: A matritsaning satrlaridan biri qolganlari orqali chiziqli ifodalansa, A ni ixtiyoriy B matritsaga ko'paytirishdan hosil bo'lgan. $C=AB$ ko'paytmaning ham xuddi o'sha satri qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi.

Isbot: A ning birinchi satri qolgan satrlar orqali chiziqli ifodalanadi deb faraz qilamiz:

$$a_{1j} = a_2 a_{2j} + a_3 a_{3j} + \dots + a_n a_{nj} = \sum_{i=2}^n a_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}) \quad (1.1.2)$$

$C=AB$ ko'paytmaning ta'rifiga va (1.1.2) ga asosan:

$$\begin{aligned} c_{1j} &= a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \dots + a_{1n}b_{nj} \\ &= \left(\sum_{i=2}^n a_i a_{i1} \right) b_{1j} + \left(\sum_{i=2}^n a_i a_{i2} \right) b_{2j} + \dots + \left(\sum_{i=2}^n a_i a_{in} \right) b_{nj} \\ &= a_2 (a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \dots + a_{2n}b_{nj}) \\ &\quad + a_3 (a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j} + \dots + a_{3n}b_{nj}) + \dots \\ &\quad + a_n (a_{n1}b_{1j} + a_{n2}b_{2j} + \dots + a_{nn}b_{nj}) \\ &= a_2 c_{2j} + a_3 c_{3j} + \dots + a_n c_{nj} = \sum_{i=2}^n a_i c_{ij}. \end{aligned}$$

1.1.3 –teorema: Xos A matritsaga teskari matritsa mavjud emas.

Isbot: A ning satrlari chiziqli bog'langanligi sababli, uning satrlaridan biri qolganlari orqali chiziqli ifodalaniladi. U holda (1.1.2)-teoremaga muvofiq, $A \cdot A^{-1} = E$ ko'paytmaning ham o'sha satr qolganlari orqali chiziqli ifodalaniladi. Bu esa B ning satrlari chiziqli erkli bo'lishiga zid keladi.

Demak, faqat xosmas kvadrat matritsalariga teskari matritsalar mavjud bo'lishi mumkin.

1.1.4 –teorema: Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir.

Isbot: 1 O'zaro teskari

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{in}y_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \quad (i = \overline{1, n}) \quad (1.1.3)$$

va

$$y_j = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \dots + b_{jn}x_n = \sum_{k=1}^n b_{jk}x_k \quad (j = \overline{1, n}). \quad (1.1.4)$$

Chiziqli almashtirishlarni bunday yozamiz:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n,$$

.....

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n,$$

(1.1.5)

va

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_n = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n,$$

$$0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_n = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n,$$

.....

$$0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 1 \cdot y_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n,$$

(1.1.6)

Birinchidan, (1.1.6) ning o'ng tomonidagi

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa (1.1.5) ning chap tomonidagi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari ekanini bilamiz. Ikkinchidan (1.1.5) dan (1.1.6) ni hosil qilish uchun (1.1.6) ning ikki tomonidagi A va E matritsalariga, 1.1.3-teoremada aytilganidek, elementar almashtirishlarni bir vaqtda qo'llab, A ni B gakeltiramiz. Bu holda (1.1.5) ning chap tomonidan xuddi (1.1.6) ning chap tomoni hosil bo'ladi. Endi qo'llaniladigan elementar almashtirishlar natijasida (1.1.5) ning o'ng tomoni (1.1.6) ning o'ng tomoniga, demak (1.1.5) ning o'ng tomonidagi E matritsa (1.1.6) ning o'ng tomonidagi B matritsaga o'tadi. Shunday qilib, A matritsaga teskari B matritsani hosil qilish uchun

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

Matritsalariga (1.1.3)-teoremada ko'rsatilgan elementar almashtirishlarni bir vaqtda tatbiq etish protsessida

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$$

matritsalariga kelamiz. O'ng tomondagi matritsa xuddi A ga teskari B matritsani ifodalaydi. $A \cdot B = E$ bo'ladi. A matritsa o'z navbatida, B ga teskari bo'lgani uchun $B \cdot A = E$ ham bajariladi.

2 A ga teskari B matritsa yagona ekanini ko'rsatis maqsadida C matritsani A ga teskari deb faraz qilib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$AC = E, B(AC) = EB, (BA)C = B, EC = B, C = B.$$

Kvadrat matrisaning determinanti.(lotincha- „determinans“-aniqlovchi).

Biz ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar hamda ularning asosiy xossalari bilan tanishamiz. Bu bandda ixtiyoriy n natural son uchun n -tartibli determinant tushunchasini aniqlash usulini qarab chiqamiz. Ixtiyoriy A kvadrat matrisaning determinanti $|A|$ yoki $\det A$ ko'rinishida belgilanadi. Ikkinchi tartibli determinantlar xossalari ixtiyoriy n -tartibli ($n \geq 3$) determinantlar uchun ham o'rinlidir. Shu xossalarni keltirib o'tamiz:

1.1.5-xossa: Determinantning hamma ustunlarini uning mos satrlari bilan (yoki aksincha) o'rnini almashtirishdan determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

1.1.6-xossa: Determinantning istalgan ikkita satrining (yoki ikki ustunining) o'rinlari almashtirilsa, determinantning faqat ishorasi o'zgaradi.

1.1.7-xossa: Ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinantning qiymati nolga teng.

1.1.8-xossa: Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

1.1.9-xossa: Agar determinant biror i -satr (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchining yig'indisidan iborat, ya'ni $a_{ik} = b_k + c_k$ ($k = \overline{1, n}$) bo'lsa, u holda berilgan determinant shunday ikkita determinantning yig'indisiga teng bo'ladi, bu determinantlarning i -satridan boshqa satrlari dastlabki determinantnikidek bo'ladi, ularning biridagi i -satr elementlari b_k elementlaridan, ikkinchisi esa c_k elementlardan iborat bo'ladi.

1.1.10-xossa: Determinantning biror ustun (sitr) elementlariga boshqa ustunning(sitrning) bir xil songa ko'paytirilgan mos elementlarini qo'shishdan determinantning qiymati o'zgarmaydi.

1.2. Matritsaviy ko`phadlar

P -maydon ustida n -tartibli matritsalar λ –ko`phad deb koeffitsientlari vazifasini elementlari  $P$  maydondan olingan bir xil  $n$ -tartibli kvadrat matritsalar o`ynaydigan λ ning ko`phadiga aytamiz: uning umumiy ko`rinishi

$$A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \dots + A_{k-1}\lambda + A_k \quad (1.2.1)$$

dan iborat bo`ladi.  $A_i$  matritsani  $\lambda^{k-i}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, k$  ga ko`paytishni, A_i matritsaning barcha elementlarini λ^{k-i} ga ko`paytirish kabi tushunib, so`ngra matritsalarini qo`shamiz va har qanday  $n$ -tartibli matritsaviy  $\lambda$  –ko`phadni n -tartibli λ –matritsa shaklida yozish mumkinligini hosil qilamiz.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4\lambda^3 + \lambda & -3\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ -\lambda^3 & \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Aksincha, n -tartibli har qanday λ –matritsa n -tartibli matritsaviy ko`phad shaklida yozilishi mumkin.

P maydon ustida ushbu

$$A(\lambda) = A_0\lambda^k + A_1\lambda^{k-1} + \dots + A_{k-1}\lambda + A_k,$$

$$B(\lambda) = B_0\lambda^l + B_1\lambda^{l-1} + \dots + B_{l-1}\lambda + B_l$$

n -tartibli λ –matritsalar berilgan bo`lin. Shu bilan birga  $B_0$  matritsa xosmas, ya`ni B_0^{-1} matritsa mavjud deb faraz qilamiz. U holda P maydon ustida xuddi shu n -tartibli shunday $Q_1(\lambda)$ va $R_1(\lambda)$ matritsalarini topish mumkinki,

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda) \quad (1.2.2)$$

boʻladi. Shu bilan birga $R_1(\lambda)$ ning darajasi $B(\lambda)$ ning darajasidan kichik yoki boʻlmasa $R_1(\lambda) = 0$. Ikkinchi tomondan P maydon ustida shunday n -tartibli $Q_2(\lambda)$ va $R_2(\lambda)$ matritsalarini topish mumkinki,

$$A_1(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda)$$

boʻladi, shu bilan birga $R_2(\lambda)$ ning darajasi $B(\lambda)$ ning darajasidan kichik yoki boʻlmasa $R_2(\lambda) = 0$. Bu shartlarni qanoatlantiruvchi $Q_1(\lambda)$ va $R_1(\lambda)$ shuningdek $Q_2(\lambda)$ va $R_2(\lambda)$ matritsalar bir qiymatli aniqlanadi. Bu teoremaning isboti sonli koʻphadlar uchun mos teoremaning isboti kabi olib boriladi.

1.3 Jordan matritsalar

Jordan matritsasi haqida tushuncha

Bu bobda kompleks sonlar maydonidagi n -tartibli kvadrat matritsalarini tekshiramiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

bunda a_{ik} — kompleks sonlar. A matritsani λ — matritsa deb qarash mumkin. Haqiqatdan, $a_{ik} \neq 0$ elementlar λ ga nisbatan nolinch darajali ko'phadlarni, $a_{ik} = 0$ elementlar esa nol ko'phadlarni ifodalaydi. Sonlardangina tuzilgan A matritsani, ya'ni λ — matritsaning xususiy holini *o'zgarmas matritsa* deb ataymiz. O'zgarmas matritsalarining eng sodda shakli — diagonal matritsa, ya'ni

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

ekanligi ma'lum, bunda $a_1, a_2, \dots, a_n$ — kompleks sonlar. Bu bobda asosan diagonal matritsalariga qaraganda murakkabroq bo'lsa ham, lekin ko'pgina hollarda ko'rinishi sodda bo'lgan maxsus bir xil shakldagi matritsalar tekshiriladi.

1.3.1 —ta'rif:

Ushbu

$$J_0 = \begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{vmatrix}$$

shakldagi n -tartibli o'zgarmas matritsa λ_0 ga oid n -tartibli Jordan katagi deyiladi. Bu matritsada: bosh diagonal bo'yicha joylashgan elementlar biror λ_0 o'zgarmas songa, bosh diagonal ustidagi elementlar 1 ga va qolgan hamma elementlar nolga teng. Masalan, ushbu matritsa

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2ga oid 5 –tartibli Jordan katagi. Shunga o'xshash

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

matritsa -3 ga oid 2 –tartibli Jordan katagi. Biror songa oid 1 – tartibli Jordan katagi ham bo'lishi mumkin. Masalan,

$$\begin{vmatrix} 4 - 7i \end{vmatrix}$$

matritsa $4 - 7i$ ga oid shunday katakdir.

1.3.2 –ta'rif: Bosh diagonal bo'ylab $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sonlarga oid $m_1, m_2, \dots, m_s$ –tartibli $J_1, J_2, \dots, J_s$ kataklar joylashgan va qolgan hamma elementlari nollardan iborat bo'lgan n -tartibli o'zgarmas matritsa *Jordanning normal shaklidagi matritsasi* yoki qisqacha *Jordan matritsasi* deb ataladi. Buni yana *matritsaning Jordan shakli* deb ham aytadilar. Jordan matritsasini yozganda, kataklar tashqarisidagi nollarga teng elementlarni tushurib qoldirib, matritsani

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

ko`rinishida yozadilar, bunda  $J_1$  bilan  $\lambda_1$  ga oid  $m_1$  –tartibli katak,  $J_2$  bilan  $\lambda_2$  ga oid  $m_2$  –tartibli katak, ...,  $J_s$  bilan  $\lambda_s$  ga oid  $m_s$  –tartibli katak belgilangan bo`lib, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sonlarning hammasi bosh diagonal bo`yicha joylashgan.  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  sonlar, shuningdek  $m_1, m_2, \dots, m_s$  sonlar ham har xil yoki bir-biriga teng bo`lishi mumkin. Bunda $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa 1 ga oid bitta 3 – tartibli katakdan iborat Jordan matritsasi.

Jordan matritsasining xarakteristik matritsasi

Masalan,

ushbu Jordan matritsasini olaylik:

$$J = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \\ & & \boxed{5} \end{pmatrix}.$$

Bu matritsa quyidagi bitta 3 –tartibli, bitta 2 –tartibli va bitta 1 –tartibli kataklardan tuzilgan:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, J_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, J_3 = \|5\|.$$

J matritsaning xarakteristik matritsasi

$$J - \lambda E = \begin{vmatrix} \boxed{4 - \lambda} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{4 - \lambda} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4 - \lambda} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boxed{2 - \lambda} & 1 \\ 0 & \boxed{2 - \lambda} \end{vmatrix} \boxed{5 - \lambda}.$$

ko`rinishga ega ekanligi ravshan. Bundagi kataklar ushbu matritsalarini ifodalaydi:

$$J_1 - \lambda E_1 = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$J_2 - \lambda E_2 = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$J_3 - \lambda E_3 = \|5 - \lambda\| = \|5\| - \lambda \|1\|.$$

Demak, E_1 birlik matritsaning tartibi J_1 ning tartibiga E_2 ning tartibi J_2 ning tartibiga va E_3 ning tartibi J_3 ning tartibiga teng. Shu misolga asosan, Jordan matritsasining xarakteristik matritsasini umumiy ko`rinishda quyidagicha yozamiz:

$$J - \lambda E = \begin{vmatrix} \boxed{J_1 - \lambda E_1} & & \\ & \boxed{J_2 - \lambda E_2} & \\ & & \boxed{J_3 - \lambda E_3} \end{vmatrix}. \quad (1.3.2)$$

Bunda E_i — birlik matritsaning tartibi J_i katakning tartibiga, ya`ni m_i ga teng.

$J - \lambda E$ matritsaning normal diagonal shaklini topish uchun, ushbu lemmani isbotlaymiz.

(1.3.1) –lemma. $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ ko'phadlarning har ikkitasi o'zaro tub bo'lsa,

$$F(\lambda) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(\lambda) \end{vmatrix}$$

va

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_n(\lambda) \end{vmatrix}$$

matritsalar ekvivalent bo'ladi, bunda

$$\phi_n(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda) \dots f_n(\lambda).$$

Ixtiyoriy matritsani Jordan matritsasiga keltirish

Bu paragrafda kompleks sonlar maydonidagi n –tartibli ixtiyoriy A matritsa bilan o'xshash Jordan matritsasini topish masalasini ko'ramiz. Buning uchun avval λ –matritsalariga doir quyidagi lemmalarni isbotlaymiz.

1.3.2 –lemma. n -darajali

$$F(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1}\lambda + A_n$$

λ –matritsa va birinchi darajali

$$A - \lambda E$$

λ –matritsa uchun

$$F(\lambda) = (A - \lambda E)Q(\lambda) + R \quad (1.3.3)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $Q(\lambda)$ va o'zgarmas R matritsalar mavjuddir.

1.3.3 –lemma. Ikkita n -tartibli A va B o'zgarmas matritsalar bir-biriga o'xshash bo'lishi uchun, ularning $A - \lambda E$ va $B - \lambda E$ xarakteristik matritsalar ekvivalent bo'lishi zarur va yetarli.

1.3.1 –teorema. Kompleks sonlar maydonidagi har bir n -tartibli o'zgarmas A matritsaga o'xshash bo'lgan J Jordan matritsasi mavjud.

Xulosa

Mazkur malakaviy bitiruv ishining I bobida ishni yoritishda ishlatiladigan asosiy tushunchalar berilgan bo'lib, u 3 paragrafdan iborat.

1 paragrafda matritsalar, ularga mos determinantlar, teskari matritsalar haqida tushunchalar berilgan

2 paragrafda matritsaviy ko'phadlar va xossalari berilgan.

3 paragrafda matritsani Jordan matritsasiga keltirish qaralgan.

II. Matritsaviy tenglamalar va ularning yechimlari haqida

2.1 $AX - XB = C$ tenglama

Bizga

$$AX - XB = C \quad (2.1.1)$$

matritsaviy tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda $A = \|a_{ij}\|_1^m$, $B = \|b_{kl}\|_1^n$ berilgan m va n tartibli kvadrat matritsalar, $C = \|c_{jk}\|$ — berilgan matritsa, X esa $X = \|x_{jk}\|$ — izlanayotgan $m \times n$ tartibli matritsa. (2.1.1) tenglama X matritsa elementlariga bog'liq bo'lgan mns kalyar tenglamalar sistemasiga ekvivalent.

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_{jk} - \sum_{i=1}^n x_{il} b_{lk} = c_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

Quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasi

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_{jk} - \sum_{i=1}^n x_{il} b_{lk} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

ni qaraymiz. U holda matritsaviy ko'rinishda quyidagicha yozamiz:

$$AX - XB = 0. \quad (2.1.2)$$

Bundan quyidagi xulosa kelibchiqadi: agar (2.1.2) tenglama faqat nol yechimga ega bo'lsa, u holda (2.1.1) tenglama faqat bitta yechimga ega bo'ladi. Lekin (2.1.2) tenglamadagi A va B matritsalar umumiy xarakteristik sonlarga ega bo'lmasagina faqat nol yechimga ega bo'ladi. Bundan ko'rinib turibdiki, agar A va B matritsalar umumiy xarakteristik songa ega bo'lmasa, (2.1.1) tenglama bitta va faqat bitta yechimga ega; agarda A va B matritsalar umumiy xarakteristik songa ega bo'lsa, C „ozod had“ ga bog'liq holda ikkita hol kuzatilishi mumkin:

1)(2.1.1) tenglama ma`noga ega emas

2)Bu tenglama cheksiz ko`p yechimga ega

$$X = X_0 + X_1$$

bu yerda X_0 –(2.1.1) tenglamaning fiksirlangan xususiy yechimi, X_1 –esa (2.1.2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi. Endi esa (2.1.1) tenglamaning xususiy yechimlarini ko`rib o`taylik.

$$AX = XB \text{ tenglama}$$

$$AX = XB \quad (2.1.3)$$

ko`rinishidagi tenglama berilgan bo`lsin. Bu yerda A va B lar ikkita turli xil tartibli kvadrat matritsa bo`lsin:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^m, \quad B = (b_{kl})_{k,l=1}^n,$$

X esa $m \times n$ tartibli to`g`ri burchakli qidirilayotgan matritsa, ya`ni

$$X = (x_{jk}) (j = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n).$$

A va B matritsaning kompleks sonlar to`plamidan elementar bo`luvchilarini yozib olaylik:

$$(A): (\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, \dots, (\lambda - \lambda_u)^{p_u} \quad (p_1 + p_2 + \dots + p_u = m)$$

$$(B): (\lambda - \mu_1)^{q_1}, (\lambda - \mu_2)^{q_2}, \dots, (\lambda - \mu_v)^{q_v} \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_v = n).$$

Bu elementar bo`luvchilar orqali A va B matritsani Jordan formasiga keltiramiz:

$$A = U\tilde{A}U^{-1}, B = V\tilde{B}V^{-1}. \quad (2.1.4)$$

Bu yerda U va V lar $m \times m$ tartibli xosmas kvadrat matritsalar, $\tilde{A}$ va $\tilde{B}$ esa-Jordan matritsalar:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \{\lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \lambda_1 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \lambda_1 E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)}\} \\ \tilde{B} &= \{\mu_1 E^{(q_1)} + H^{(q_1)}, \mu_1 E^{(q_2)} + H^{(q_2)}, \dots, \mu_1 E^{(q_v)} + H^{(q_v)}\}.\end{aligned}\quad (2.1.5)$$

$$(2.1.3) \quad \text{tenglamadagi } A \text{ va } B \text{ matritsalar } n \text{ ga } u \text{ larning} \quad (2.1.4)$$

ifodasini keltirib qo'yish natijasida quyidagiga ega bo'lamiz:

$$U \tilde{A} U^{-1} X = X V \tilde{B} V^{-1}.$$

Bu tenglikning ikkala tomonining chap tomoniga U^{-1} ni, o'ng tomoniga esa V ni ko'paytirib

$$\tilde{A} U^{-1} X V = U^{-1} X V \tilde{B} \quad (2.1.6)$$

ni hosil qilamiz. X matritsa o'rniga $m \times n$ tartibli $\tilde{X}$ matritsani kiritib

$$\tilde{X} = U^{-1} X V \quad (2.1.7)$$

(2.1.6) tenglamani quyidagicha ko'riishda yozib olamiz:

$$\tilde{A} \tilde{X} = \tilde{X} \tilde{B}. \quad (2.1.8)$$

Biz (2.1.3) tenglamani xuddi shunday ko'rinishdagi lekin undagi matritsalar Jordan formasiga ega bo'lgan tenglamaga alishtirdik. $\tilde{A}$ va $\tilde{B}$ matritsalarining kvazidiagonal ko'rinishi orqali $\tilde{X}$ matritsani qismlarga ajratamiz:

$$\tilde{X} = (X_{\alpha\beta}) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v)$$

bu yerda $X_{\alpha\beta} - p_\alpha \times q_\beta$ tartibli to'g'ri burchakli matritsa, $(\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v)$. Qism matritsani kvazidiagonal matritsaga ko'paytirish qonunidan foydalanib, (2.1.8) tenglamaning chap va o'ng qismlariga matritsalarini ko'paytirishni ko'raylik. Unda bu tenglama uv matritsaviy tenglama

$$[\lambda_\alpha E^{(\rho_\alpha)} + H^{(\rho_\alpha)}] X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} [\mu_\beta E^{(q_\beta)} + H^{(q_\beta)}]$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v).$$

Oxirgi tenglikdan quyidagicha ham yozish mumkin:

$$(\mu_\beta - \lambda_\alpha)X_{\alpha\beta} = H_\alpha X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta} G_\beta (\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v). \quad (2.1.9)$$

Hosil bo'lgan ifodalarni qisqartirib ushbu

$$H_\alpha = H^{(\rho_\alpha)}, G_\beta = G^{(q_\beta)} (\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v) \quad (2.1.10)$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

(2.1.9) tenglamada ikkita hol kuzatilishi mumkin:

1) $\lambda_\alpha \neq \mu_\beta$ (2.1.9) tenglamani $r - 1$ marta iteratsiyalaylik

$$(\mu_\beta - \lambda_\alpha)^r X_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma+\tau=r} (-1)^r H_\alpha^\sigma X_{\alpha\beta} G_\beta^\tau \quad (2.1.11)$$

(2.1.9) dan

$$H_\alpha^{\rho_\alpha} = G_\beta^{q_\beta} = 0 \quad (2.1.12)$$

tengligini ko'ramiz. (2.1.11) dan $r \geq \rho_\alpha + q_\beta - 1$ ni olsak, (2.1.11) tenglamaning o'ng qismida turgan yig'indining har bir hadi, quyidagi tengsizliklardan kamida bittasi bajariladi:

$$\sigma \geq \rho_\alpha \quad \tau \geq q_\beta.$$

Shuning uchun (2.1.12) ning $H_\alpha^\sigma = 0$, yoki $G_\beta^\tau = 0$ qismi bajariladi. Bundan tashqari $\lambda_\alpha \neq \mu_\beta$ holni ko'rib chiqsak

$$X_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.1.13)$$

ekanligi (2.1.11) dan kelibchiqadi.

2) $\lambda_\alpha = \mu_\beta$, bu holda (2.1.9) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$H_\alpha X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} G_\beta. \quad (2.1.14)$$

H_α va G_β matritsalarining birinchi diagonal usti elementlari 1ga, qolgan elementlari esa 0ga teng. H_α va G_β matritsalarining bu maxsus strukturasi hisobga olgan holda

$$|X_{\alpha\beta}| = \|\xi_{ik}\| \quad (i = 1, 2, \dots, p_\alpha; k = 1, 2, \dots, q_\beta)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Biz (2.1.14) matritsaviy tenglamani unga ekvivalent bo'lgan skalyar munosabat sistemasiga alishtiraylik:

$$\xi_{i+1,k} = \xi_{i,k-1} \quad (\xi_{i0} = \xi_{p_\alpha,k} = 0; i = 1, 2, \dots, p_\alpha; k = 1, 2, \dots, q_\beta) \quad (2.1.15)$$

(2.1.15) tenglik quyidagilarni anglatadi:

1) $X_{\alpha\beta}$ matritsada asosiy diagonalga parallel bo'lgan har bir chiziqda o'zaro teng bo'lgan elementlar turibdi.

$$2) \xi_{21} = \xi_{31} = \dots = \xi_{p_\alpha 1} = \xi_{p_\alpha 2} = \dots = \xi_{p_\alpha, p_\beta-1} = 0$$

$p_\alpha = q_\beta$ bo'lsin. Bu holda $X_{\alpha\beta}$ — kvadrat matritsa. 1) va 2) tasdiqlardan ko'rinib turibdi $X_{\alpha\beta}$ matritsaning asosiy diagonal osti elementlari 0 ga teng, asosiy diagonalning barcha elementlari esa $C_{\alpha\beta}$ ga, birinchi diagonal ustining barcha elementlari $C_{\alpha\beta}^{'}$ ga teng va hokazo:

$$X_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} C_{\alpha\beta} & C_{\alpha\beta}^{' } & \dots & C_{\alpha\beta}^{(p_\alpha-1)} \\ 0 & C_{\alpha\beta} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & C_{\alpha\beta}^{' } \\ 0 & \dots & 0 & C_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = T_{p_\alpha}; \quad (2.1.17)$$

(2.1.17) tengliklarda $C_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta}^{' }, \dots, C_{\alpha\beta}^{(p_\alpha-1)}$ lar ixtiyoriy parametrlar. Shunday qilib

$$p_\alpha < q_\beta \text{ da } X_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_{\alpha\beta}^{(q_\beta-p_\alpha)} \\ \hat{0} \end{pmatrix}, T_{p_\alpha} \quad (2.1.18)$$

va

$$p_\alpha > q_\beta \text{ da } X_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \} p_\alpha - q_\beta \quad (2.1.19)$$

ekanligi ko`rinib turibdi. (2.1.17), (2.1.18) va (2.1.19) matritsalar haqida fikr yuritadigan bo`lsak, ular to`gri yuqori uchburchak formasiga ega.  $X_{\alpha\beta}$  dagi ixtiyoriy parametr  $p_\alpha$  va  $q_\beta$  sonlarning eng kichigiga teng. Quyidagi berilgan sxema  $X_{\alpha\beta}$  matritsa strukturasining  $\lambda_\alpha = \mu_\beta$  dagi holatini ko`rsatadi. (Bu yerda ixtiyoriy parametr a, b, c, d orqali ifodalangan):

$$X_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad X_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}, \quad X_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(p_\alpha = q_\beta = 4)(p_\alpha = 3, q_\beta = 5)(p_\alpha = 5, q_\beta = 3).$$

$\tilde{X}$ matritsada ixtiyoriy olingan parametrlarni hisoblash uchun, 1)-holni $d_{\alpha\beta}(\lambda)$ orqali eng katta umumiy bo`luvchi elementar bo`luvchilarini $(\lambda - \lambda_\alpha)^{p_\alpha}$ va $(\lambda - \mu_\beta)^{q_\beta}$ deb va $\delta_{\alpha\beta} - d_{\alpha\beta}(\lambda)$ ko`phadning darajasi deb belgilaymiz.

$$(\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v)$$

$$1)\text{--holda } \delta_{\alpha\beta} = 0$$

$$2)\text{--holda esa } \delta_{\alpha\beta} = \min(p_\alpha, q_\beta) \text{ ga ega bo`lamiz.}$$

Shunday qilib ikkala holda ham $X_{\alpha\beta}$ dagi ixtiyoriy parametrlar soni $\delta_{\alpha\beta}$ ga teng.

$\tilde{X}$ matritsada ixtiyoriy parametrlar soni quyidagi

$$N = \sum_{\alpha=1}^u \sum_{\beta=1}^v \delta_{\alpha\beta}$$

formula orqali topiladi. Keyinchalik biz (2.1.9) tenglamaning umumiy yechimini X_{AB} (hozirgacha bu yechimni biz $\tilde{X}$ orqali belgilayotgan edik) orqali ifodalaymiz.

2.1.1 –teorema. Bizga

$$AX = XB$$

ko'rinishidagi matritsaviy tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda

$$A = \|a_{ik}\|_1^m = U\tilde{A}U^{-1} = \\ = U\{\lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \lambda_1 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \lambda_1 E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)}\}U^{-1},$$

$$B = \|b_{ik}\|_1^n = V\tilde{B}V^{-1} = \\ = V\{\mu_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \mu_1 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \mu_1 E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)}\}V^{-1}.$$

U holda berilgan matritsaviy tenglamaning umumiy yechimi quyidagi

$$X = UX_{AB}V^{-1}$$

formula bilan beriladi. Bu yechimda X_{AB} matritsa $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{B}$ tenglamaning umumiy yechimi bo'lib quyidagicha stukturaga ega bo'ladi:

X_{AB} – quyidagicha qismlarga bo'linadi

$$X_{AB} = \{\widehat{X_{AB}}\}_{\alpha}^{q\beta} p_{\alpha} (\alpha = 1, 2, \dots, u; \beta = 1, 2, \dots, v) \quad .$$

Agar

$$\lambda_{\alpha} \neq \mu_{\beta}$$

bo'lsa, u holda $X_{\alpha\beta}$ matritsaning o'rniga 0 matritsa turadi. Agarda $(\lambda - \mu_{\beta})$ bo'lsa, u holda $X_{\alpha\beta}$ ning o'rniga yuqori to'g'ri burchakli ixtiyoriy matritsa turadi. X_{AB} matritsada X matritsa N ta ixtiyoriy parametrlarga $c_1, c_2, \dots, c_N$ larga chiziqli bog'liq bo'ladi:

$$X = \sum_{j=1}^N c_j x_j. \quad (2.1.21)$$

Bu tenglikda N soni quyidagi

$$N = \sum_{\alpha=1}^u \sum_{\beta=1}^v \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.1.22)$$

[bunda esa $\delta_{\alpha\beta}(\lambda - \lambda_\alpha)^{p_\alpha}$ va $(\lambda - \mu_\beta)^{q_\beta}$ lar eng katta umumiy bo'luvchisining darajasini ifodalaydi.] $X_1, X_2, \dots, X_N$ lar (2.1.21) – formuladagi matritsalar (2.1.3) tenglamaning yechimlaridir (X matritsadagi c_j parametrga 1 ni bersak, qolgan parametrlarga 0 ni bersak X_j matritsaga ega bo'lamiz: $j = 1, 2, \dots, N$). Bu yechim chiziqli bog'liqmas, aks holda $c_1, c_2, \dots, c_N$ parametrlarning ayrim bir qiymatlari ayni bir paytda 0 ga teng bo'lmaganidan X va X_{AB} matritsalar 0 ga tengligi kelib chiqardi bu esa ziddiyat. Bunday holda (2.1.22) – tenglama tenglamadan chiquvchi ixtiyoriy yechim o'zi bilan N ta chiziqli kombinatsiya chiziqli bog'liqsiz tenglamani ko'rsatadi.

Agar A va B matritsalar umumiy xarakteristik sonlarga ega bo'lmasa ($|\lambda E - A|$ va $|\lambda E - B|$ xarakteristik ko'phadlar o'zaro tub) unda,

$$N = \sum_{\alpha=1}^u \sum_{\beta=1}^v \delta_{\alpha\beta} = 0$$

bo'ladi. Bundan esa $X = 0$ ligidan (2.1.3) – tenglama faqat $X = 0$ trivial yechimga ega bo'ladi.

Eslatma: A va B matritsalarining elementlari biror bir K maydonga tegishli bo'lsin. U holda (2.1.20) – formuladagi U, V, X_{AB} matritsalarining elementlari ham shu K maydonga tegishli deb aytib bo'lmaydi. Bu matritsalarining elementlarini K maydonda oxirgi $|\lambda E - A| = 0$ va $|\lambda E - B| = 0$ xarakteristik tenglamalarning ildizlariga qo'shish yo'li orqali olingan K_1 kengaytirilgan maydondan tanlab

olishimiz mumkin. Bunday ko`rinishdagi asosiy maydonni kengaytirishda asosan berilgan matritsalar normal Jordan formasiga keltirib ishlanadi. (2.1.3) matritsaviy tenglamalar mn chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasiga ekvivalent, bunda X izlanayotgan matritsada noma'lumlar sifatida X_{jk} lar ($j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$) xizmat qiladi:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_{jk} = \sum_{h=1}^n x_{ih} b_{hk} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1.23)$$

Oldin isbot qilganimizdek, bu sistema N ta chiziqli bog`liqsiz bo`lgan yechimlarga ega, bunda $N = (2.1.22)$ formula orqali topiladi. Bazis chiziqli bog`liqsiz yechimlarni (2.1.23) tenglama koeffitsientlari yotgan asosiy  $K$  maydondan tanlash mumkin. Unda, (2.1.21) formuladagi  $X_1, X_2, \dots, X_N$  matritsalarini shunday tanlaymizki, uning elementlari  $K$  maydonga tegishli bo`lsin. (2.1.21) formulaning ixtiyoriy parametrlariga K maydondan mumkin bo`lgan qiymatlarni keltirib qo`yib, (2.1.3) tenglamani qanoatlantiruvchi, elementlari K maydondan olingan barcha X matritsalariga ega bo`lamiz.

$A=B$ xususiy hol. O`rin almashinuvchi matritsalar.

(2.1.3) –tenglamaning xususiy holi bo`lgan

$$AX = XA$$

ni ko`rib o`taylik. Bu yerda $A = \|a_{ik}\|_1^n$ –berilgan matritsa, X esa

$X = \|x_{ik}\|_1^n$ – izlanayotgan matritsa. A matritsani normal Jordan formasiga keltiramiz:

$$\begin{aligned} A &= U \tilde{A} U^{-1} = \\ &= U \{ \lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \lambda_1 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \lambda_1 E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)} \} U^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Unda, (2.1.20) –formulaga asosan $V = U, \tilde{B} = \tilde{A}$ va X_{AA} ifodani X_A orqali qisqartirib ifodalab, (2.1.24) tenglamaning barcha yechimlarga ega bo`lamiz. U

holda agar barcha matritsalar A matritsa bilan o`rin almashinuvchi matritsalar bo`lsa, u holda bu quyidagi

$$X = UX_{\tilde{A}}U^{-1} \quad (2.1.26)$$

ko`rinishda ifodalaniladi.  $X_{\tilde{A}}$  matritsa  $\tilde{A}$  matritsa bilan o`rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsani ifodalaydi. Oldin tushuntirib o`tganimizdek, $X_{\tilde{A}} - u^2$ qismlarga ajraladi

$$X_{\tilde{A}} = (X_{\alpha\beta})_1^u$$

$\tilde{A}$ – Jordan matritsasiga mos holda qismlarga ajraladi; $X_{\alpha\beta}$ – nol matritsa yoki ixtiyoriy yuqori to`g`ri burchakli matritsa, $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ dan yoki $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$.

Misol uchun $X_{\tilde{A}}$ matritsa elementlarini quyidagi elementar bo`luvchilarga ega bo`lgan A matritsa uchun yozib olaylik:

$$(\lambda - \lambda_1)^4, (\lambda - \lambda_1)^3, (\lambda - \lambda_2)^2, (\lambda - \lambda_2)(\lambda_1 \neq \lambda_2) .$$

Bu holda $X_{\tilde{A}}$ – quyidagi ko`rinishga keladi:

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & e & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & k & l & m & p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & k & 0 & m & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & s & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & z \end{array} \right\| (a, b, \dots, z \text{ — ixtiyoriy parametrlar}).$$

$X_{\tilde{A}}$ dagi parametrlar soni N ga teng. Bu yerda

$$N = \sum_{\alpha, \beta=1}^u \delta_{\alpha\beta}$$

$\delta_{\alpha\beta} - (\lambda - \lambda_\alpha)^{p_\alpha} \text{va} (\lambda - \lambda_\beta)^{p_\beta}$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi darajasini anglatadi. Matritsaning invariant ko'phadlarini ko'rib o'taylik:

$$i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_t(\lambda); i_{t+1}(\lambda) = \dots = i_n(\lambda) = 1.$$

Bu ko'phadlarning darajalarini

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq n_{t+1} = \dots = 0$$

orqali ifodalaymiz. Har bir invariant ko'phad bir nechta o'zaro tub oddiy elementar bo'luvchilarning ko'paytmasi bo'lganidan, unda N uchun formulani quyidagi

$$N = \sum_{g,j=1}^t \chi_{gj}, \quad (2.1.27)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Bu yerda $\chi_{gj} - i_g(\lambda)$ va $i_j(\lambda) (g, j = 1, 2, \dots, t)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisining darajasidir. Lekin $i_g(\lambda)$ va $i_j(\lambda)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi shu ko'phadlarning biridir va shuning uchun $\chi_{gj} = \min(n_g, n_j)$. Bu yerdan

$$N = n_1 + 3n_2 + \dots + (2t - 1)n_t$$

ga ega bo'lamiz. N soni A matritsa bilan o'rin almashinuvchi chiziqli bog'liqsiz matritsalar soni hisoblanadi.

2.1.2 –teorema. $A = \|a_{ik}\|_1^n$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi chiziqli bog'liqsiz matritsalar soni quyidagi

$$N = n_1 + 3n_2 + \dots + (2t - 1)n_t \quad (2.1.28)$$

formula orqali topiladi. Bu yerda $n_1, n_2, \dots, n_t$ —lar A matritsaning $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \dots, i_t(\lambda)$ invariant ko'phadlarning darajalaridir.

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_t \quad (2.1.29)$$

(2.1.28) va (2.1.29) lardan

$$N \geq n_1 \quad (2.1.30)$$

kelib chiqadi. $g(\lambda) - \lambda$ dan olingan ko'phad bo'lsin. Bunda $g(A)$ matritsa A matritsa bilan o'rin almashinuvchi matritsadir. Shu vaqtda quyidagi teskari savol tug'iladi: qanday holda A matritsa bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsa A dan olingan ko'phad sifatida ifodalanishi mumkin? Bu holda A matritsa bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsa

$$E, A, A^2, \dots, A^{n_1-1}$$

chiziqli bog'liqsiz matritsalarining chiziqli kombinatsiyalari bo'lardi.

$$N = n_1 \leq n$$

holni ko'rib chiqib va (2.1.30) bilan taqqoslagan holda

$$N = n_1 = n$$

ligi kelib chiqadi. Shunday qilib (2.1.2) teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

(2.1.1)-natija: A matritsaning elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa va $n_1 = n$ bo'lgan holdagina A matritsa bilan o'rin almashinuvchi barcha matritsalar A dan olingan ko'phad kabi ifodalanadi. A matritsa bilan o'rin almashinuvchi matritsadan olingan ko'phadlar ham A matritsa bilan o'rin almashinuvchidir. Quyidagi savolni qo'yaylik: qaysi holda A matritsa bilan o'rin almashinuvchi barcha matritsalar C matritsadan olingan ko'phadlar kabi ifodalanishi mumkin? Bu hol bajarilsin deb qaraylik. Bunday holda C matritsa Gamilton-Keli teoremasining xarakteristik tenglamasini qanoatlantiradi, unda C bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsa

$$E, C, C^2, \dots, C^{n_1-1}$$

matritsa orqali chiziqli ifodalaniladi. Shuning uchun ko'rib o'tilayotgan holimizda $N \leq n$. Buni (2.1.30) bilan taqqoslagan holda $N = n$ ligini topamiz. Lekin (2.1.28) va (2.1.27) lardan $n_1 = n$ dir.

(2.1.2)-natija: $n_1 = n$ va $\lambda E - A$ matritsaning barcha elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lgan holdagina A matritsa bilan o'rin almashinuvchi barcha matritsalar bitta va xuddi o'sha C matritsadan olingan ko'phad kabi ifodalanadi. Bu holda A matritsa bilan o'rin almashinuvchi barcha matritsalar A matritsadan olingan ko'phadlar ko'rinishida ham ifodalaniladi.

O'rin almashinuvchi matritsalarining yana bir asosiy xossasini belgilaylik.

2.1.3 –teorema. Agar 2 ta $A = \|a_{ik}\|_1^n, B = \|b_{ik}\|_1^n$ matritsalar o'rin almashinuvchi va ulardan biri masalan A

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ \widehat{A}_1 & \widehat{A}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.1.31)$$

kvazidiagonal ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda A_1 va A_2 lar umumiy xarakteristik songa ega emas. Bundan esa boshqa matritsa ham xuddi shunday

$$B = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 \end{pmatrix} \quad (2.1.32)$$

kvazidiagonal ko'rinishga ega bo'ladi.

Isbot. B matritsani (2.1.31) dagi kvazidiagonal ko'rinishga mos holda qismlarga ajrataylik:

$$B = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ \widehat{B}_1 & \widehat{X} \\ Y & B_2 \end{pmatrix}.$$

$AB=BA$ ni yozib olib, 4 ta matritsaviy tenglikni olamiz:

$$1. A_1 B_1 = B_1 A_1, \quad 2. A_1 X = X A_2, \quad 3. A_2 Y = Y A_1, \quad 4. A_1 B_2 = B_2 A_2 \quad (2.1.33)$$

(2.1.33)dagi ikkinchi va uchinchi tenglamalar A_1 va A_2 lar umumiy xarakteristik songa ega emasligidan faqat $X = 0$ va $Y = 0$ nol yechimlarga ega bo`ladi. Shunday qilib, bizning farazimiz isbotlandi. (2.1.33) dagi tengliklardan birinchi va to`rtinchilari A_1 va B_1 , A_2 va B_2 matritsalarining o`rin almashinuvchiligini ifodalaydi.

2.2 $f(X) = 0$ skalyar tenglama

Oldin

$$g(X) = 0 \quad (2.2.1)$$

tenglamani ko`rib chiqaylik, bunda

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \dots (\lambda - \lambda_h)^{a_h}$$

o`zgaruvchan  $\lambda$ lar orqali berilgan ko`phad, X esa – n tartibli izlanayotgan matritsa. X matritsa minimal ko`phadi,  $i_1(\lambda)$  birinchi invariant ko`phadi $g(\lambda)$ ko`phadning bo`luvchisi bo`lishi kerak, unda  $X$  matritsaning elementar bo`luvchilari quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

$$(\lambda - \lambda_{i_1})^{p_{i_1}}, (\lambda - \lambda_{i_2})^{p_{i_2}}, \dots, (\lambda - \lambda_{i_v})^{p_{i_v}} \left(\begin{array}{l} i_1, i_2, \dots, i_v = 1, 2, \dots, h \\ p_{i_1} \leq a_{i_1}, p_{i_2} \leq a_{i_2}, \dots, p_{i_h} \leq a_{i_h} \\ p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_v} = n \end{array} \right).$$

$i_1, i_2, \dots, i_n$ indekslar ichida bir biriga teng bo`lganlari ham mavjud. X – esa berilgan n tartibli izlanayotgan matritsa.

Biz izlayotgan X matritsamiz quyidagi

$$X = T \{ \lambda_{i_1} E^{(p_{i_1})} + H^{(p_{i_1})}, \dots, \lambda_{i_v} E^{(p_{i_v})} + H^{(p_{i_v})} \} T^{-1}. \quad (2.2.2)$$

Bu yerda T – ixtiyoriy n tartibli xosmas matritsa.

Berilgan tartibdagi izlanayotgan matritsa orqali berilgan (2.2.1) tenglamaning ko`pgina yechimlari (2.2.2) formuladagi chekli sondagi o`zaro o`xshash bo`lgan matritsalar bilan mos keladi.

2.2.1-misol. Bizga

$$X^m = 0 \quad (2.2.3)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Agarda matritsaning ba'zi bir darajalari 0 ga teng bo'lsa, unda bu matritsa nilponent matritsa deb ataladi. Matritsa darajasi 0 ga teng bo'lgandagi ko'rsatkichning eng kichigi, bu matritsaning nilponent indekslari deb ataladi. Ko'rinib turibdiki, (2.2.3) – tenglamaning yechimlari $\mu \leq m$ nilponent indeksli nilponent matritsalarini sanaladi. n – tartibli bu tenglamaning barcha yechimlarini qamrab oluvchi formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$X = T\{H^{(p_{i_1})}, H^{(p_{i_2})}, \dots, H^{(p_{i_v})}\}T^{-1} \left(\begin{array}{l} p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_v} \leq m \\ p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_v} = n \end{array} \right) \quad (2.2.4)$$

Bu yerda T – ixtiyoriy n – tartibli xosmas matritsa.

2.2.2-misol. Bizga

$$X^2 = X \quad (2.2.5)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi matritsaga idempotent matritsa deyiladi. Idempotent matritsaning elementar bo'luvchilari faqat λ yoki $\lambda - 1$ bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu matritsani xuddi xarakteristik songa ega, 0 ga yoki 1 ga teng bo'lgan oddiy strukturali matritsa kabi aniqlash mumkin. Berilgan tartibdagi barcha idempotent matritsalarini qamrab oluvchi formula, quyidagi

$$X = T \underbrace{\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}}_n T^{-1} \quad (2.2.6)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda T – ixtiyoriy xosmas matritsa. Endi esa yanada umumiyroq bo'lgan

$$f(X) = 0 \quad (2.2.7)$$

tenglamani ko'rib chiqamiz. Bu yerda $f(\lambda) - \lambda$ kompleks argumentli G tekislikning biror sohasida regulyar funksiya. Biz izlayotgan $X = \|x_{ik}\|_1^n$

yechimining xarakteristik sonlari G atrofida yotishi talab qilinsin. G ning atrofida va chegarasida yotuvchi $f(\lambda)$ funksiyaning barcha nollarini yozib olaylik:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots,$$

$$a_1, a_2, \dots$$

xuddi oldingi holatdagidek, X matritsaning har bir elementar bo'luvchilari quyidagicha ko'rinishda

$$(\lambda - \lambda_i)^{p_i} (p_i \leq a_i)$$

bo'ladi va shuning uchun

$$X = T\{\lambda_{i_1} E^{(p_{i_1})} + H^{(p_{i_1})}, \dots, \lambda_{i_v} E^{(p_{i_v})} + H^{(p_{i_v})}\} T^{-1} \quad (2.2.8)$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_v = 1, 2, \dots, ; p_{i_1} \leq a_{i_1}, p_{i_2} \leq a_{i_2}, \dots, p_{i_v} \leq a_{i_v};$$

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_v} = n)$$

Bu yerda T —ixtiyoriy xosmas matritsa.

2.3 Ko`p hadli matritsaviy tenglama

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \dots + A_m = 0 \quad (2.3.1)$$

$$Y^m A_0 + Y^{m-1} A_1 + \dots + A_m = 0 \quad (2.3.2)$$

tenglamalarni qaraylik. Bu yerda $A_0, A_1, \dots, A_m$ –lar berilgan matritsalar, X va Y esa n –tartibli izlanayotgan kvadrat matritsalar. (2.2.1) tenglama (2.3.1) va (2.3.2) tenglamaning xususiy holi ya`ni trivial yechimini ifodalaydi va oxirgi keltirilganlardan $A_i = \alpha_i E, \alpha_i$ –son va $i = 1, 2, \dots, m$.

Keyingi keltiriladigan teorema (2.3.1) va (2.3.2) va (2.2.1) tenglamalar orasida bogliqlikni o`rnatadi.

2.3.1 –teorema. Har bir $A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \dots + A_m = 0$ matritsaviy tenglanning yechimlari

$$g(X) = 0 \quad (2.3.3)$$

skalyar tenglamani qanoatlantiradi. Bu yerda

$$g(\lambda) = |A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_m|. \quad (2.3.4)$$

Yana bu skalyar tenglamani

$$Y^m A_0 + Y^{m-1} A_1 + \dots + A_m = 0$$

Y matritsaviy tenglamaning ixtiyoriy yechimini qanoatlantiradi.

Isbot: Matritsaviy ko`phadni $F(\lambda)$ deb

$$F(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_m$$

deb yozib olaylik. U holda (2.3.1) va (2.3.2) tenglamani

$$F(X) = 0, \quad \hat{F}(X) = 0$$

deb yozsa bo`ladi. Bezu teoremasiga asosan, tenglamaning yechimlari  $X$  va  $Y$  bo`lsa, $F(\lambda)$ matritsaviy ko`phad o`ng tomondan $\lambda E - X$ ga, chap tomondan $\lambda E - Y$ ga bo`linadi:

$$F(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - X) = (\lambda E - Y)Q_1(\lambda).$$

Bu yerdan esa

$$g(\lambda) = |F(\lambda)| = |Q(\lambda)|\Delta(\lambda) = |Q_1(\lambda)|\Delta_1(\lambda). \quad (2.3.5)$$

$\Delta(\lambda) = |\lambda E - X|$ va $\Delta_1(\lambda) = |\lambda E - Y|$ — X va Y matritsalarining xarakteristik ko`phadlari. Gamilton-Keli teoremasiga asosan

$$\Delta(X) = 0, \quad \Delta_1(Y) = 0$$

bo`ladi. (2.3.5) dan $g(X) = g(Y) = 0$ ligi kelib chiqadi.

Teorema isbotlandi.

Biz (2.3.1) tenglamaning har bir yechimi $g(\lambda) = 0$ (darajasi $\leq mn$) skalyar tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun (2.3.1) tenglamaning yechimini

$$T_i D_i T_i^{-1} \quad (2.3.6)$$

ko`rinishidagi matritsalar ichidan qidirishga to`g`ri keladi. Bu yerda  $D_i$  — bizga ma`lum matritsa. Bu matritsani xoxishga ko`ra normal Jordan formasiga ega deb hisoblasak bo`ladi. T_i — n -tartibli ixtiyoriy matritsa $i=1, 2, \dots, k$. (2.3.1) tenglamadagi X matritsa o`rniga (2.3.6) ni keltirib qo`yamiz, bunda T_i matritsani shunday tanlab olamizki T_i matritsa (2.3.1) tenglamani qanoatlantirishi kerak. Har bir T_i matritsa uchun o`zining chiziqli tenglamasiga ega bo`lamiz

$$A_0 T_i D_i^m + A_1 T_i D_i^{m-1} + \dots + A_m T_i = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (2.3.7)$$

(2.3.7) tenglamadagi T_i matritsaning yechimini topishning yagona usuli bu matritsaviy tenglamani izlanayotgan T_i matritsaning elementlariga bog`liq bo`lgan

chiziqli bir jinsli skalyar tenglamalar sistemasiga alishtirishdan iborat.(2.3.7) tenglamadagi T_i matritsaning har bir yechimi,(2.3.6) tenglamada qo'yilgan, berilgan (2.3.1) tenglamaning yechimini beradi. Analogik bahslar (2.3.2) tenglama uchun ham o'tkazilishi mumkin. Keyingi 2 ta paragraflarda biz (2.3.1) tenglamani xususiy hollari bo'lgan, matritsadan m -darajali ildizni chiqarish bilan bog'liq. Shuni e'tiborga olish kerakki, Gamilton-Keli teoremasi 2.3.1-teoremaning xususiy holi ekan. Umuman olganda λ ni o'rniga qo'yilgan ixtiyoriy A kvadrat matritsa

$$\lambda E - A = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun isbotlangan teoreмага asosan

$$\Delta(A) = 0$$

ligi kelib chiqadi. Bu yerda

$$\Delta(\lambda) = |\lambda E - A|.$$

2.3.1- teorema quyidagi ko'rinishda ham umumlashtirilishi mumkin:

2.3.2 –teorema.(Fillip teoremasi): Agar $X_0, X_1, \dots, X_m$ n –tartibli o'zaro juft o'rin almashinuvchi kvadrat matritsalar

$$A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots + A_m X_m = 0 \quad (2.3.8)$$

matritsaviy tenglamani qanoatlantirsa, unda xuddi shu $X_0, X_1, \dots, X_m$ matritsalar

$$g(X_0, X_1, \dots, X_m) = 0 \quad (2.3.9)$$

$$g(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) = |A_0 \xi_0 + A_1 \xi_1 + \dots + A_m \xi_m| \quad (2.3.10)$$

skalyar tenglamani ham qanoatlantiradi.

Isbot: $f_{ik}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) - \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$ dan olingan chiziqli formalalar.
 $(i, k=1, 2, \dots, n)$

$$F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) = \|f_{ik}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)\|_1^n = A_0 \xi_0 + A_1 \xi_1 + \dots + A_m \xi_m;$$

$\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$ —skalyar o`zgaruvchilar berilgan bo`lsin.

$\hat{F}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m) = \|\widehat{f_{ik}}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)\|_1^n$ orqali F matritsaga totirilgan matritsani belgilaymiz. Bu yerda $\widehat{f_{ik}}[F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)] = |f_{ik}|_1^n$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) determinantdagi f_{ki} elementning algebraik to`ldiruvchisi bo`ladi. U holda $\hat{F}$ matritsaning har bir $\widehat{f_{ik}}(1, 2, \dots, n)$ elementi $m - 1$ darajali $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}$ ga bog`liq bo`lgan bir jinsli ko`phad bo`ladi va shuning uchun $\hat{F}$ matritsani quyidagi

$$\hat{F} = \sum_{j_0 + j_1 + \dots + j_m = n-1} F_{j_0 j_1 \dots j_m} \xi_0^{j_0} \xi_1^{j_1} \dots \xi_m^{j_m}$$

ko`rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $F_{j_0 j_1 \dots j_m}$ — biror bir n - tatribli doimiy matritsa. $\hat{F}$ matritsani aniqlashdan

$$\hat{F}F = g(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)E$$

ayniyatga duch kelamiz. Bu ayniyatni quyidagi

$$\begin{aligned} \sum_{j_0 + j_1 + \dots + j_m = n-1} F_{j_0 j_1 \dots j_m} (A_0 \xi_0 + A_1 \xi_1 + \dots + A_m \xi_m) \xi_0^{j_0} \xi_1^{j_1} \dots \\ = g(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)E \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

ko`rinishda yozib olamiz. (2.3.11) ayniyatdagi chap qismdan o`ng qismga o`tish qavslarni ochish va o`xshash hadlarga keltirish yo`li orqali amalga oshadi. Bunday holda (2.3.11) tenglikdagi  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$  o`zgaruvchilar o`rniga o`zaro o`rin almashinuvchi  $X_0, X_1, \dots, X_m$  matritsalarini qo`yamiz:

$$\begin{aligned} \sum_{j_0 + j_1 + \dots + j_m = n-1} F_{j_0 j_1 \dots j_m} (A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots + A_m X_m) X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_m^{j_m} \\ = g(X_0, X_1, \dots, X_m). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Lekin bu $A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots + A_m X_m = 0$ shart asosida amalga oshiriladi. Unda (2.3.12) dan

$$g(X_0, X_1, \dots, X_m) = 0$$

ekanligi topamiz. Xuddi shuni isbotlash tayin qilingan edi.

2.3.1-Eslatma. (2.3.2)-teorema agar (2.3.8) tenglamani

$$X_0 A_0 + X_1 A_1 + \dots + X_m A_m = 0 \quad (2.3.13)$$

tenglama bilan almashtirib bo'lsagina o'z kuchida qoladi.

Haqiqatdan ham, (2.3.2)-teoremani

$$A_0 X_0 + A_1 X_1 + \dots + A_m X_m = 0$$

tenglamaga ham qo'llash mumkin va bu tenglamadan hadlari bo'yicha transponirlangan matritsaga o'tish mumkin.

2.3.2-Eslatma. Agar $X_0, X_1, \dots, X_m$ ni o'rniga $X^m, X^{m-1}, \dots, X, E$ ni olsak (2.3.1)-teorema 2.3.2- teoremaning xususiy holi sifatida hosil bo'ladi.

2.4 Matritsadan m-darajali ildizni chiqarish

Xosmas matritsadan m-darajali ildizni chiqarish

Hozirgi va keyingi mavzu

$$X^m = A \quad (2.4.1)$$

tenglamaga bag'ishlanadi. Bu yerda A —berilgan n -tartibli matritsa, X —esa n -tartibli izlanayotgan matritsa, m —berilgan butun musbat son.

Quyidagi

$$|A| \neq 0$$

holni ko'rib o'taylik. Bu holda A matritsaning xarakteristik sonlari 0 dan farqli yoki $|A|$ barcha xarakteristik sonlar ko'paytmasiga teng. A matritsaning elementar bo'luvchilarini

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{p_u} \quad (2.4.2)$$

deb belgilaylik va A matritsani quyidagicha

$$A = U \tilde{A} U^{-1} = U \{ \lambda_1 E_1 + H_1, \dots, \lambda_u E_u + H_u \} U^{-1} \quad (2.4.3)$$

Jordan formasiga olib kelsak, izlanayotgan X matritsamizning xarakteristik sonlarini m -darajaga ko'tarish natijasida A matritsaning xarakteristik sonlari kelib chiqadi. Bunda X matritsaning xarakteristik sonlari ham 0 dan farqli. Shuning uchun bu xarakteristik sonlarning hosilasi

$$f(\lambda) = \lambda^m$$

0 ga teng bo'lmaydi. Lekin bu holda X matritsani m -darajaga ko'targanda X matritsaning elementar bo'luvchilari bo'linib ketmaydi. Yuqorida keltirib o'tilganlardan X matritsaning elementar bo'luvchilari

$$(\lambda - \xi_1)^{p_1}(\lambda - \xi_2)^{p_2} \dots (\lambda - \xi_u)^{p_u} \quad (2.4.4)$$

bo`ladi. Bu yerda agar  $\lambda_j$  had  $\lambda_j(\xi_j = \sqrt[m]{\lambda_j}; (j = 1, 2, \dots, u))$  nim – darajasining ildizlaridan biri bo`lsa, $\lambda_j^m = \lambda_j$ bo`ladi. Endi esa  $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$  ni quyidagicha aniqlaymiz.  $\lambda$  tekislikda  $0$  ni qabul qilmaydigan markazi  $\lambda_j$  nuqtada bo`lgan aylana olaylik. Bu aylanada $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning m ta alohida tarmoqlarga egamiz. Bu tarmoqlarni aylananing markazi bo`lgan λ_j nuqtadagi qiymatiga qarab bir-biridan ajratish mumkin. Izlanayotgan X matritsamiz ξ_j xarakteristik soni bilan λ_j nuqtadagi qiymati mos tushuvchi tarmoqni $\sqrt[m]{\lambda}$ orqali belgilaylik va $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$ yoyiluvchi qator yordamida matritsadan funksiyani aniqlaylik.

$$\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j} = \lambda_j^{\frac{1}{m}} E_j + \frac{1}{m} \lambda_j^{\frac{1}{m}-1} H_j + \frac{1}{2!} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \lambda_j^{\frac{1}{m}-2} H_j^2 + \dots \quad (2.4.5)$$

λ_j nuqtada qaralayotgan $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning hosilasi 0 dan farqli, bundan esa (2.4.5) matritsa faqat bitta elementar bo`luvchiga ega

$$(\lambda - \xi_j)^{p_j}, \quad E_j = \sqrt[m]{\lambda_j} (j = 1, 2, \dots, u).$$

Bu yerda $E_j = E^{(p_j)}, \quad H_j = H^{(p_j)} (j = 1, 2, \dots, u)$. Bu yerdan ko`rinib turibdiki

$$(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u})$$

kvazidiogonal matritsa, X izlanayotgan matritsa kabi xuddi shunday (2.4.4) elementar bo`luvchilarga ega bo`ladi. Shuning uchun quyidagicha T xosmas matritsa

$$(T \neq 0) \quad X = T(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}) T^{-1} \quad (2.4.6)$$

mavjud bo`ladi. T matritsani aniqlash uchun, ayniyatning ikkala tomoniga

$$(\sqrt[m]{\lambda})^m = \lambda$$

ni qo'yamiz. λ matritsaning o'rniga $\lambda_j E_j + H_j (j = 1, 2, \dots, u)$ qo'yib,

$$\left(\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j} \right)^m = \lambda_j E_j + H_j (j = 1, 2, \dots, u)$$

ga ega bo'lamiz. Endi esa (2.4.1) va (2.4.6) dan

$$A = T \{ \lambda_1 E_1 + H_1, \lambda_2 E_2 + H_2, \dots, \lambda_u E_u + H_u \} T^{-1} \quad (2.4.7)$$

kelib chiqadi. (2.4.3) va (2.4.7) larni taqqoslab:

$$T = \cup X_{\tilde{A}} \quad (2.4.8)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda $X_{\tilde{A}} - \tilde{A}$ bilan o'rin almashtirilgan ixtiyoriy xosmas matritsa. $X_{\tilde{A}}$ — matritsaning tuzilishi 2.1 mavzuda to'liq tushuntirib o'tilgandi.

(2.4.6) dagi T matritsaning o'rniga $\cup X_{\tilde{A}}$ ifodani qo'yib, (2.4.1) tenglamaning barcha yechimlarini qamrab oluvchi

$$X = \cup X_{\tilde{A}} \{ \sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u} \} X_{\tilde{A}}^{-1} U^{-1} \quad (2.4.9)$$

formulani olamiz. Bu formulaning o'ng tomonidagi ko'pqiyamat diskret hamda kontinual xarakterga ega: bu ko'pqiyamatning diskret xarakteri kvazidiagonal matritsaning turli xil chekli tarmoqlarida $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyaning turli panjaralarini tanlash hisobiga olinadi. Bunday holda $\lambda_j = \lambda_k$ bo'lganda ham $\sqrt[m]{\lambda}$ tarmoqning j va k diagonal panjaralari turli xil bo'lishi mumkin. Bu ko'pqiyamatning kontinual xarakteriga $X_{\tilde{A}}$ matritsada saqlanuvchi ixtiyoriy parametrlari hisobiga ega bo'lamiz. (2.4.1) tenglamaning barcha yechimlarini A matritsadan olingan m -daraja ildizlar deb ataymiz va $\sqrt[m]{A}$ kabi belgilaymiz. Umumiy holda $\sqrt[m]{A}A$ matritsadan

olingan funksiya hisoblanmaydi va bu A matritsadan olingan ko'phad ko'rinishida berilmaydi.

2.4.1 –Eslatma. Agar A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ sonlar hammasi turli xil, unda X_A matritsa kvazidiagonal ko'rinishga

$$X_A = \{X_1, X_2, \dots, X_u\} \quad (2.4.10)$$

ega bo'ladi. Bu yerda X_j matritsa $\lambda_j E_j + H_j$ bilan o'rin almashinuvchidir, shu sababli $\lambda_j E_j + H_j$, ($j = 1, 2, \dots, u$) istalgan funksiya bilan ham o'rin almashinuvchidir. Shuning uchun (2.4.10) formula qaralayotgan holda

$$X = U \left(\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u} \right) U^{-1}$$

ko'rinishni oladi. Bunday holda, agar A matritsaning elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa, $X = \sqrt[m]{A}$ uchun formulada faqat diskret ko'pqiyimat mavjuddir. Bu holda $\sqrt[m]{A}$ ning ixtiyoriy qiymatini A dan olingan ko'phad deb tasavvur qilish mumkin.

2.4.1 –misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dan

$$X^2 = A$$

tenglamaning barcha yechimlari, A ning barcha kvadrat ildizlarini topish talab qilinsin. Bu holda A matritsa Jordan formasiga ega bo'lgan bo'ladi. Shuning uchun (2.4.10) formulaga $A = \tilde{A}$, $U = E$ ni qo'yish mumkin. Bu holda X_A matritsa

$$X_A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}$$

kabi ko`rinishda bo`ladi. Bu yerda a, b, c, d, e – ixtiyoriy parametrlar.

X ning barcha izlangan yechimlarini beruvchi (2.4.10) formula bu holda quyidagi ko`rinishni

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & c \end{pmatrix}^{-1} \varepsilon^2 = \eta^2 = 1 \quad (2.4.11)$$

qabul qiladi. (2.4.10) formuladagi X ni o`zgartirmay turib,  $X_A$  ni  $|X_A| = 1$  qiymatni beruvchi birorta skalyarga ko`paytirish mumkin. Bu holda bu $a^2 e = 1$ tenglikga olib keladi, bu yerdan esa $e = a^{-2}$ ligi kelib chiqadi. X_A^{-1} matritsaning elementlarini hisoblaylik. Bu uchun X_A matritsa matritsa koefitsientlari bilan chiziqli almashtirishni yozib olaylik:

$$y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3,$$

$$y_2 = ax_2,$$

$$y_3 = dx_2 + a^{-2}x_3.$$

Bu tenglamalar sistemasini x_1, x_2, x_3 ga bog`liq holda yechaylik. Unda  $X_A^{-1}$  teskari matritsa bilan almashtirishga ega bo`lamiz:

$$x_1 = a^{-1}y_1 - (a^{-2}b - cd)y_2 - acy_3$$

$$x_2 = a^{-1}y_2$$

$$x_3 = -ady_2 + a^2y_3.$$

Bu yerdan esa

$$X_{\tilde{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & cd - a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{pmatrix}$$

ni topamiz.(2.4.11) formula

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \varepsilon & (\varepsilon - \eta)acd + \frac{\varepsilon}{2} & a^2c(\eta - \varepsilon) \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon - \eta)da^{-1} & \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon & (\varepsilon - \eta)v\omega + \frac{\varepsilon}{2} & (\eta - \varepsilon)v \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon - \eta)v & \eta \end{pmatrix} (v = a^2c; \omega = a^{-1}d) \quad (2.4.12) \end{aligned}$$

ni beradi. X ning yechimini ikkita ixtiyoriy v va ω parametrlarga va ikkita ε va η ixtiyoriy belgilarga bog`liq.

Xos matritsadan m-darajali ildizni chiqarish

A -xos matritsa berilgan bo`lsin.

$$|A| = 0$$

bo`lgan holni ko`rib o`taylik. Birinchi holatdagi kabi, A matritsani normal Jordan formasiga olib kelaylik:

$$A = \cup \{ \lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}; H^{(q_1)}, \dots, H^{(q_t)} \} U^{-1} \quad (2.4.13).$$

Bu yerda $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, \dots, (\lambda - \lambda_u)^{p_u}$ orqali nol bo`lmagan xarakteristik sonlarga javob beruvchi  $A$  matritsaning elementar bo`luvchilarini belgiladik, $\lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, \dots, \lambda^{q_t}$ —ni esa nol xarakteristik sonli elementar bo`luvchilarini ifodalab oldik. U holda

$$A = \cup \{ A_1, A_2 \} U^{-1} \quad (2.4.14)$$

o`rinli bo`ladi, bu yerda

$$A_1 = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \dots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}, A_2 = \{H^{(q_1)}, \dots, H^{(q_t)}\} \quad (2.4.15)$$

A_1 – xosmas matritsa ($|A| \neq 0$), A_2 – esa $\mu = \max(q_1, q_2, \dots, q_t)$ ($A_2^\mu = 0$) nilponent indeksli nilponent matritsadir.

A_1 va A_2 matritsalar 2.1 da isbot qilinganidek umumiy xarakteristik songa ega emas, bundan esa (2.4.3) dagi ikkinchi matritsa xususiy kvazidiagonal formaga ega ekanligi kelib chiqadi

$$U^{-1} X U = \{X_1, X_2\}. \quad (2.4.16)$$

(2.4.1) tenglamani ikkita tenglamaga alishtirsak

$$X_1^m = A_1, \quad (2.4.17)$$

$$X_2^m = A_2. \quad (2.4.18)$$

$|A_1| \neq 0$ bo'lganligi sababli, (2.4.17) tenglamaga yuqoridagi olingan natijalarni qo'llaymiz. Shuning uchun X_1 ni (2.4.9) formula orqali topamiz:

$$X_1 = X_{A_1} = \left\{ \sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}} \right\} X_{A_1}^{-1}. \quad (2.4.19)$$

Shunday qilib, (2.4.18) tenglamani ko'rib chiqish qoldi. A_2 nilponent matritsaning barcha m -darajali ildizlarini topish bilan shug'ullansak, bu normal Jordan formasiga ega

$$A_2 = \{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)}\}. \quad (2.4.20)$$

$\mu = \max(q_1, q_2, \dots, q_t)$ – A_2 matritsaning nilponentlik indeksi.

$A_2^\mu = 0$ va (2.4.18) dan

$$X_2^{m\mu} = 0$$

ligini topamiz. Oxirgi tenglik izlanayotgan X_2 matritsa ham nilponent ekanligini ko'rsatadi. v – nilponentlik indeksidir. Bu yerda

$$m(\mu - 1) < v < m\mu.$$

X_2 matritsani Jordan formasiga olib kelsak:

$$X_2 = T\{H^{(p_1)}, H^{(p_2)}, \dots, H^{(p_s)}\}T^{-1} \quad (2.4.21)$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_s \leq v).$$

Endi esa oxirgi tenglikni ikkala tomonini ham m -darajaga ko'tarsak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A_2 = X_2^m = T\{[H^{(v_1)}]^m, [H^{(v_2)}]^m, \dots, [H^{(v_s)}]^m\}T^{-1}. \quad (2.4.22)$$

Endi esa $[H^{(v)}]^m$ matritsa qanday elementar bo'luvchilarga ega ekanligini aniqlaylik. $e_1, e_2, \dots, e_v$ bazisli v – o'lchovli fazodagi $H^{(v)}$ matritsa orqali berilgan chiziqli operatorni H orqali belgilaymiz. $H^{(v)}$ matritsaning birinchi diagonalusti elementlari 1 ga, qolgan elementlari esa 0 ga teng. $H^{(v)}$ matritsa ko'rinishidan

$$He_1 = 0, He_2 = 0, He_v = e_{v-1} \quad (2.4.23)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu tengliklardan H operator uchun $e_1, e_2, \dots, e_v$ vektorlarning Jordan zanjirini ifodalashi va λ^v elementar bo'luvchi mos ekanligini ko'rsatadi. (2.4.23) tenglikni quyidagicha

$$He_j = e_{j-1} (j = 1, 2, \dots, v; e_0 = 0)$$

yozib olamiz. Ma'lumki,

$$H^m e_j = e_{j-m} (j = 1, 2, \dots, v; e_0 = e_{-1} = \dots = e_{-m+1} = 0). \quad (2.4.24)$$

v sonini quyidagi

$$v = km + r \quad (\kappa < m)$$

ko`rinishda faraz qilaylik. Bu yerda  $k, r$  – butun, nomanfiy sonlar.  $e_1, e_2, \dots, e_v$  bazis vektorlarni quyidagi ko`rinishda joylashtirib chiqamiz:

$$\begin{array}{cccc} e_1, & e_2, & \dots & , e_m \\ e_{m+1}, & e_{m+2}, & \dots & , e_{2m} \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ e_{(k-1)m+1}, & e_{(k-1)m+2}, & \dots & , e_{km}, \\ e_{km+1}, & \dots \dots \dots & \dots \dots \dots & , e_{km+r}. \end{array}$$

Bujadvaldabiz m ta ustunga ega amiz. Birinchi r ustun har birida $k + 1$ ta vektor, qolgan ustunlar esa k ta vektor dan iborat bo`ladi. (2.4.25) tenglik har bir ustundagi vektorlar  $H^m$  operatorga bog`liq bo`lgan vektorlarning Jordan zanjiri bo`lishini ko`rsatadi. Agar (2.4.25) ning qatorlaridagi vektorlarning ketma-ket raqamlanishini, ustunlaridagi bilan alishtirsak, unda hosil bo`lgan H^m operatoridagi yangi bazisli matritsa quyidagi normal Jordan formasiga

$$\left\{ \underbrace{H^{(k+1)}, \dots, H^{(k+1)}}_r, \underbrace{H^{(k)}, \dots, H^{(k)}}_{m-r} \right\},$$

ega bo`ladi.  $k=0$  bo`lganda $\left\{ \underbrace{H^{(k)}, \dots, H^{(k)}}_{m-r} \right\}$ ning panjaralari ishtirok etmaydi va bu matritsa $\left\{ \underbrace{H^{(1)}, \dots, H^{(1)}}_r \right\}$ ko`rinishida bo`ladi, bundan esa

$$[H^{(v)}]^m = P_{v,m} \left\{ \underbrace{H^{(k+1)}, \dots, H^{(k+1)}}_r, \underbrace{H^{(k)}, \dots, H^{(k)}}_{m-r} \right\} P_{v,m}^{-1}. \quad (2.4.26)$$

$P_{v,m}$ – bir bazisdan boshqasiga o`tgandagi matritsa quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$P_{v,m} = \left\| \begin{array}{ccc} \overbrace{1 \ 0 \dots 0}^m & 0 & \dots \\ 0 \ 0 \dots 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \ 0 & \dots & 0 \\ 0 \ 1 & \dots & 0 \end{array} \right\|_m. \quad (2.4.27)$$

$H^{(v)}$ matritsa bitta $\lambda^{(v)}$ elementar bo'luvchiga ega. $H^{(v)}$ matritsani m -darajaga ko'tarish natijasida bu elementar bo'luvchi tilim-tilim bo'linib ketmaydi.(2.4.26) formulada ko'rsatilganidek, $[H^{(v)}]^m$ elementar bo'luvchiga ega:

$$\underbrace{\lambda^{(k+1)}, \dots, \lambda^{(k+1)}}_r, \quad \underbrace{\lambda^{(k)}, \dots, \lambda^{(k)}}_{m-r}.$$

(2.4.22) tenglamaga qaytsak,

$$v_i = k_i m + r_i (0 \leq r_i < m, k_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.4.28)$$

(2.4.26) dan (2.4.22) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$A_2 = X_2^m = TP \left\{ \underbrace{H^{(k_1+1)}, \dots, H^{(k_1+1)}}_{r_1}, \underbrace{H^{(k_1)}, \dots, H^{(k_1)}}_{m-r_1}, \right. \\ \left. \underbrace{H^{(k_2+1)}, \dots, H^{(k_2+1)}}_{r_1}, H^{(k_2+1)}, \dots \right\} P^{-1} T^{-1}, \quad (2.4.29)$$

bu yerda $P = \{P_{v_1, m}, P_{v_2, m}, \dots, P_{v_s, m}\}$.

(2.4.20) ni (2.4.29) ga mos qo'yish natijasida, ularning panjaralari

$$H^{(k_1+1)}, \dots, H^{(k_1+1)}, H^{(k_1)}, \dots, H^{(k_1)}, H^{(k_2+1)}, \dots, H^{(k_2+1)}, \dots \quad (2.4.30)$$

tartibi bilan aniqlikda panjaralar bir-biriga mos tushishi kerak

$$H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)}. \quad (2.4.31)$$

Elementar bo'luvchilarning mumkin bo'lgan sistemalari soni har doim chekli.

$$\max(v_1, v_2, \dots, v_s) \leq m\mu, \quad v_1 + v_2 + \dots + v_s = n_2 \quad (2.4.32)$$

($n_2 - A_2$ matritsaning darajasi)

Har qanday konkret holda, tajribalarning chekli soni orqali X_2 ning elementar bo'luvchilari sistemasi sonini oson topish mumkin. Har bir $\lambda^{v_1}, \lambda^{v_2}, \dots, \lambda^{v_s}$ elementar bo'luvchilari sistemasi uchun (2.4.18) tenglamaning yechimlari mavjud

bo'lishini ko'rsataylik va u yechimlarni topaylik. Bu holda quyidagi tashkil qiluvchi Q matritsa mavjud:

$$\{H^{(k_1+1)}, \dots, H^{(k_1+1)}, H^{(k_1)}, \dots, H^{(k_1)}, H^{(k_2+1)}, \dots\} = Q^{-1}A_2Q. \quad (2.4.33)$$

Q matritsa panjarani kvazidiagonal matritsaga o'tkazishini amalga oshiradi. Bunda bazis vektorlar qayta nomerlanadi. Shu sababli Q matritsa ma'lum deb hisoblash mumkin. (2.4.33) dan foydalanib, (2.4.29) dan

$$A_2 = TPQ^{-1}A_2QP^{-1}T^{-1}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerdan esa

$$TPQ^{-1} = X_{A_2} \text{ yoki } T = X_{A_2}QP^{-1}. \quad (2.4.34)$$

$X_2 - A_2$ bilan o'rin almashtirishdan hosil bo'lgan ixtiyoriy matritsadir.

(2.4.34) ifodani (2.4.21) dagi T ni o'rniga qo'ysak

$$X_2 = X_{A_2}QP^{-1}\{H^{(v_1)}, H^{(v_2)}, \dots, H^{(v_s)}\}PQ^{-1}X_{A_2}^{-1} \quad (2.4.35)$$

ga ega bo'lamiz. (2.4.16), (2.4.19) va (2.4.35) dan, barcha izlanayotgan yechimlarini o'zida qamrab oluvchi quyidagi

$$\begin{aligned} X = & \cup \{X_{A_1}, X_{A_2}QP^{-1}\} \left\{ \sqrt[m]{\lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}}, \dots, \right. \\ & \left. \sqrt[m]{\lambda_u E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)}}, H^{(v_1)}, H^{(v_2)}, \dots, H^{(v_s)} \right\} \\ & \cdot \{X_{A_1}^{-1}, PQ^{-1}X_{A_2}^{-1}\}U^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

formulani olamiz. Xosmas matritsaning m –darajasining ildizi har doim ham mavjud emas. Uning mavjud bo'lishi X_2 matritsa elementar bo'luvchilari sistemasi mavjud bo'lishi bilan bog'liq. Osongina ko'rinib turibdiki, masalan

$$X^m = H^{(\rho)}$$

tenglamam $m > 1, \rho > 1$ bo'lgan holda yechimga ega emas.

(2.4.2) – Misol.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsadan kvadrat ildiz chiqarib,

$$X^2 = A$$

tenglamani barcha yechimlarini toping. Bu holda

$$A = A_2, X = X_2, m = 2, t = 2, q_1 = 2, q_2 = 1.$$

Xmatritsa faqat bitta λ^3 elementar bo'luvchiga ega. Shuning uchun

$$s = 1, v_1 = 3, \kappa_1 = 1, r_1 = 1 \text{ va}$$

$$P = P_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}, Q = E.$$

Bundan tashqari, bu misolni ham (2.4.1) misoldagi kabi (2.4.35) formulaga qo'yish mumkin:

$$X_{A_2} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{pmatrix}, \quad X_{A_2}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & cd - a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{pmatrix}.$$

Bu formuladan

$$X = X_2 = X_{A_2} P^{-1} H^{(3)} P X_{A_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ni olamiz. Bu yerda $\alpha = ca^{-1} - a^2 d$ va $\beta = a^3$ – ixtiyoriy parametrlardir

2.5 Matritsa logarifmi

$$e^X = A \quad (2.5.1)$$

matritsaviy tenglamani qaraylik. Bu tenglamaning barcha yechimlari A matritsaning logarifmlari ya'ni natural logarifmi deb ataladi va $\ln A$ orqali belgilanadi. A matritsaning λ_j xarakteristik sonlari $\lambda_j = e^{\xi_j}$ formula yordamida X matritsaning ξ_j xarakteristik sonlari bilan bog'langan. Shuning uchun (2.5.1) tenglama yechimga ega bo'lsa, A matritsaning barcha xarakteristik sonlari noldan farqli va bu A matritsa xosmasdir. $|A| \neq 0$. (2.5.1) tenglamaning yechimi mavjud bo'lishi uchun $|A| \neq 0$ shart bajarilishi zarur. Yana bu shartni yetarliligini pastroqda ko'rib o'tamiz. $|A| \neq 0$ bo'lsin. A matritsaning elementar bo'luvchilarini

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \lambda_u)^{\rho_u} \quad (2.5.2)$$

$$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_u \neq 0, \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_u = n)$$

yozib olaylik. Bu elementar bo'luvchilar yordamida A matritsani normal Jordan formasiga

$$A = U \tilde{A} U^{-1} = U \{ \lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \lambda_2 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \lambda_u E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)} \} U^{-1} \quad (2.5.3)$$

olib kelaylik. ξ ning barcha qiymatlarida e^{ξ} funksiya hosilasi noldan farqli bo'lgani uchun, A matritsadan $A = e^X$ matritsaga o'tishda elementar bo'luvchilar tilim-tilim bo'linmaydi, bunda X matritsa

$$(\lambda - \xi_1)^{\rho_1}, (\lambda - \xi_2)^{\rho_2}, \dots, (\lambda - \xi_u)^{\rho_u} \quad (2.5.4)$$

elementar bo'luvchilarga ega bo'ladi. Bu yerda $e^{\xi_j} = \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots, u$).

$\xi_j - \ln \lambda_j$ ning bitta qiymatidir. ($j = 1, 2, \dots, u$). Kompleks o'zgaruvchili tekislikdan markazi λ_j nuqtada radiusi $r < |\lambda_j|$ bo'lgan λ aylana olaylik va $f_i(\lambda) = \ln \lambda$ orqali qaralayotgan aylanada λ_j nuqtaning qiymati X matritsaning ξ_j xarakteristik songa teng bo'lgan $\ln \lambda$ funksiyaning tarmog'ini ifodalaylik ($j = 1, 2, \dots, u$). Shundan so'ng quyidagicha

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_j E^{(\rho_j)} + H^{(\rho_j)}) &= f_j(\lambda_j E^{(\rho_j)} + H^{(\rho_j)}), \dots, \ln(\lambda_u E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)}) \\ &= \ln \lambda_j E^{(\rho_j)} + \lambda_j^{-1} H^{(\rho_j)} + \dots \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

belgilar olamiz. $\ln \lambda$ ning hosilasi λ tekislikni chekli qismining hech qayerida nolga teng bo'lmaganligi sababli (2.5.3) tenglama faqat bitta $(\lambda - \xi_j)^{\rho_j}$ elementar bo'luvchiga ega. Bundan esa

$$\{\ln(\lambda_j E^{(\rho_j)} + H^{(\rho_j)}) = f_j(\lambda_j E^{(\rho_j)} + H^{(\rho_j)}), \dots, \ln(\lambda_u E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)})\}$$

kvazidiagonal matritsa izlanayotgan X matritsa kabi xuddi o'sha elementar bo'luvchilarga egaligi kelib chiqadi. Shu sababli $T (|T| \neq 0)$ matritsa mavjud.

$$X = T \{ \lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \lambda_2 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \lambda_u E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)} \} T^{-1} \quad (2.5.7)$$

T matritsani aniqlash uchun

$$A = e^X = T \{ \lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}, \lambda_2 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}, \dots, \lambda_u E^{(\rho_u)} + H^{(\rho_u)} \} T^{-1} \quad (2.5.8)$$

ekanligini eslatib o'tamiz. (2.5.8) ni (2.5.3) ga mos qo'yib,

$$T = \cup X_A \quad (2.5.9)$$

ligini topamiz. Bu yerda $X_A - \tilde{A}$ matritsadan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsa.

(2.5.9) dagi T ifodani (2.5.7) ga mos qo'yib, matritsaning barcha logarifmlarini o'zida qamrovchi

$$\begin{aligned}
& X \\
& = \\
& \cup X_A \{ \ln(\lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}), \ln(\lambda_2 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}), \dots, \ln(\lambda_u E^{(\rho_u)} \\
& + H^{(\rho_u)}) \} X_A^{-1} U^{-1}
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

umumiy formulaga ega bo'lamiz.

2.5.1 – Eslatma: Agar A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa, (2.5.10) formulaning o'ng tomonidagi X_A va X_A^{-1} ko'phadlarni tashlab yuborish mumkin. 2. A haqiqiy xosmas matritsa haqiqiy X logarifmga ega ekanligini ko'ramiz. Izlanayotgan matritsa $Q + i\pi: (\lambda - Q - i\pi)^{q_1}, \dots, (\lambda - Q - i\pi)^{q_t}$ xarakteristik sonlarga mos keluvchi bir nechta elementar bo'luvchilarga ega bo'lsin. X matritsa haqiqiy ekanligidan $(\lambda - Q + i\pi)^{q_1}, \dots, (\lambda - Q + i\pi)^{q_t}$ elementar bo'luvchilarga ega. X matritsadan A matritsaga o'tishda elementar bo'luvchilar qismlarga bo'linmaydi, lekin $Q + i\pi, Q - i\pi$ xarakteristik sonlar

$$\mu = c^\rho > 0$$

$$e^{\rho+i\pi} = -\mu, e^{\rho-i\pi} = -\mu$$

sonlariga alishtiriladi. Shuning uchun A matritsaning elementar bo'luvchilari sistemadagi manfiy xarakteristik songa mos har bir elementar bo'luvchi bir marta juft son da takrorlanadi. Endi esa A matritsa haqiqiy X logarifmga yoki elementar bo'luvchilari bo'lmasa¹ yoki har bir bunday elementar bo'luvchi bir marta juft takrorlangandagiga² ega bo'ladi. Endi bu zaruriy shart yetarliligini isbotlaymiz. Bunda (2.5.6) kvazidiagonal matritsa (2.5.5) formulaga mos λ_i haqiqiy va musbat bo'lgan panjaralaridan, $\ln \lambda_i$ uchun haqiqiy qiymatlarni olamiz: Agar qaysidir panjarada λ_n kompleks son mavjud bo'lsa, unda shunday o'lchamdagi

¹Bu holda haqiqiy $\ln A = r(A)$ mavjud bo'ladi, $r(\lambda)$ – esa $\ln_0 \lambda$ uchun tegishli interpolatsion ko'phadi

$\lambda_q = \lambda_n$ boshqa panjara topiladi. Har bir panjara (2.5.9) da shartga asosan panjaralarning saqlangan o'lchamda bir matra juft takrorlanadi. Unda bu panjaralarning yarmiga

$$\ln \lambda_k = \ln |\lambda_k| + i\pi$$

ni qo'yib, boshqa yarmidan esa

$$\ln \lambda_k = \ln |\lambda_k| - i\pi$$

ni olamiz. Unda (2.5.9) kvazidiagonal matritsanning diagonal panjaralari yo haqiqiy yo o'zaro qo'shma kompleksdir. Lekin bunday kvazidiagonal matritsa har doim haqiqiy matritsaga³ o'xshash bo'ladi. E — orqali xuddi shunday o'lchamli birlik matritsani belgilab,

$$T = \begin{pmatrix} E & iE \\ E & -iE \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2i}E & -\frac{1}{2i}E \end{pmatrix}, \quad T^{-1}DT = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$$

ekanligini oson tekshirish mumkin. Shuning uchun shunday $T_1 (|T_1| \neq 0)$ xosmas matritsa mavjudki,

$$X_1 = T_1 \{ \ln(\lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}), \ln(\lambda_2 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}), \dots, \ln(\lambda_n E^{(\rho_n)} + H^{(\rho_n)}) \} T_1^{-1}$$

matritsa haqiqiydir. Bunday holda

²Bu shart xususiyl holda $A = B^2$, B — haqiqiy matritsa bo'lgandagina bajariladi.

³Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$D = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \bar{B} \end{pmatrix}$$

kvazidiagonal matritsa har doim haqiqiy matritsaga o'xshash. Bu yerda

$$B = U + iV, \quad \bar{B} = U - iV,$$

bunda U va V —lar haqiqiy matritsalar.

$$A_1 = e^{X_1} = T_1 \{ \ln(\lambda_1 E^{(\rho_1)} + H^{(\rho_1)}), \ln(\lambda_2 E^{(\rho_2)} + H^{(\rho_2)}), \dots, \ln(\lambda_n E^{(\rho_n)} + H^{(\rho_n)}) \} T_1^{-1} \quad (2.5.11)$$

matritsa ham haqiqiydir. (2.5.11) formula bilan (2.5.3) formulani mos qo'yib, A va A_1 matritsalar o'zaro o'xshash degan qarorga kelamiz. Lekin ikki o'zaro o'xshash haqiqiy matritsalar bir-biriga $W (|W| \neq 0)$ haqiqiy xosmas matritsa bilan almashtirilishi mumkin:

$$A = W A_1 W^{-1} = W e^{X_1} W^{-1} = e^{W X_1 W^{-1}}.$$

Unda

$$X = W X_1 W^{-1}$$

matritsa A matritsanining izlangan haqiqiy logarifmi bo'ladi.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishining II bobi matritsaviy tenglamalar, ularning turlari, ba'zi xususiy holler qaralgan bo'lib, har bir holda o'rganilayotgan tenglamalarning yechish usullari bayon qilingan. Bu bob 5 ta paragrafdan iborat.

Xotima

Ushbu bitiruv malakaviy amaliyoti matritsaviy tenglamalar va ularni yechish usullarini o`rganishga bag`ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi kirish, boshlang`ich tushunchalar va asosiy qismdan iborat. Kirish qismi II bobdan iborat bo`lib, 1-bandda O`zbekiston Respublikasi Prezidentining ilm-fan taraqqiyotga bag`ishlangan nutqidan olingan ba`zi ma`lumotlar kiritilgan. 2-bandda esa bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi, asosiy maqsadi, vazifalari, o`rganilgan darajasi, predmeti, obyekti, ilmiy farazi, yangiligi, amaliy ahamiyati, metadalogik asosi, metodlari, tarkibi va hajmidan iborat.

Ishning I bobida matritsalar haqida ma`lumotlar, matritsaviy ko`phadlar, Jordan matritsalar o`rganilgan. II bobda esa  $AX - XB = C$  matritsaviy tenglama,  $f(x) = 0$  skalyar tenglama, ko`p hadli matritsaviy tenglama, xosmas va xos matritsadan m-darajali ildiz chiqarish, matritsa logarifmlari o`rganilgan.

Glossariy

Diagonal-grekcha soʻzdan olingan boʻlib, „*dia*``-*orqali* va „*gonium*``-*burchak* degan maʼnoni anglatadi. Bu koʻpburchakning bir tomonda yotmaydigan ikki uchini tutashtiruvchi toʻgʻri chiziqdır. Bu atama eramizdan avvalgi 3 asrda yashab oʻtgan qadimgi grek olimi Evklidning asarlarida uchraydi.

Faktorial(k)-lotincha „*factor*`` soʻzidan olingan boʻlib, „*koʻpaytma*`` degan maʼnoni anglatadi. Birinchi boʻlib bu atama fransuz matematigi Lui Arbogastanining asarlarida uchraydi. *k* deb belgilanishini esa nemis matematigi Kreytan Kramp fanga kiritgan.

Formula-lotincha „*formula*`` soʻzidan olingan boʻlib, „*forma*`` , „*qoida*`` degan maʼnoni anglatadi. Bu birorbir masalani ifodalovchi matematik belgilarning kombinatsiyasi hisoblanadi.

Funksiya-lotincha „*function*`` soʻzidan olingan boʻlib, „*bajarish*`` , „*qilish*`` degan maʼnoni anglatadi. Bu bir oʻzgaruvchi kattalikni boshqasiga bogʻliqligini ifodalovchi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. Birinchi boʻlib bu atama 1692 yilda nemis olimi G. Leybnitsning asarlarida uchragan. Uning koʻrinishi hozirgi zamonaviy koʻrinishda emas edi. Hozirgi zamonaviy koʻrinishga oʻxshash koʻrinish shvetsariyalik olim I. Bernulli (1718 y)ning asarlarida uchraydi. Funksiyaning $f(x)$ deb belgilanishini esa rus olimi L. Eyler (1734 y) fanga kiritgan.

Logarifm-grekcha soʻzdan olingan boʻlib, „*logos*``-„*munosabat*`` , „*arithmos*``-„*son*`` degan maʼnoni anglatadi. *m* daraja koʻrsatkichlini *N* ni hosil qilish uchun *a* darajaga koʻtarish zarur. Buni fanga Neper taklif qilgan edi.

Matritsa-lotincha „*matrix*`` soʻzidan olingan boʻlib, „*bosh*`` , „*manba*`` degan maʼnoni anglatadi. Bu qator va ustunlardan tashkil topgan bir necha toʻplamlar orqali ifodalanadigan toʻgʻri burchakli jadvaldir. Buni birinchi boʻlib

Gamilton va IXX asr o`rtalarida A. Keli va J.Silvestrlar fanga kiritishgan. Ikki vertikal to`g`ri chiziq orqali zamonaviy ifodalanishini 1841 yilda A.Keli fanga kiritgan.

Multiplikativlik-lotincha „*multiplicato*“ so`zidan olinagan bo`lib, „*ko`paytma*“ degan ma`noni bildiradi. Bu esa Eyler funksiyasining xossasidir.

Nul-lotincha „*nullum*“ so`zidan olingan bo`lib, „*hech nima*“, „*hech qanday*“ degan ma`noni anglatadi. Nolning belgilanishi eramizdan avvalgi 1 mingyillikning o`rtalarida paydo bo`lgan.

Numeratsiya-lotincha so`zdan olingan bo`lib, „*hisoblayman*“ degan ma`noni anglatadi.

Qo`shish*-lotincha „*plus*“ so`zidan olingan bo`lib, „*ko`p“ degan ma`noni anglatadi. Bu belgi qo`shishni ifodalashda, yana musbat sonlarni ifodalashda ishlatiladi. Bu belgini chexiyalik olim Ya.Vidman (1849 y) fanga kiritgan.

Skalyar-lotincha „*scalaris*“ so`zidan olingan. Bu kattalik har bir qiymatni bitta son bilan ifodalanadi. Bu belgini irlandiyalik olim U.Gamilton (1843 y) fanga kiritgan.

*Yig`indi*-lotincha „*summa*“ so`zidan olingan bo`lib, „*jami*“, „*umumiy*“ degan ma`noni anglatadi. Qo`shishning natijasi hisoblanadi. $\sum$ belgisini (grekcha „*sigma*“ harfi) fanga rus olimi L.Eyler (1755 y) kiritgan.

Xarakteristika-grekcha „*character*“ so`zidan olingan bo`lib, „*belgi*“, „*o`ziga xos xususiyat*“ degan ma`noni anglatadi. O`nli logarifmning butun qismini avstriyalik olim G.Brigs (1624 y) fanga kiritgan.

*O`rin almashtirishlar*- har biriga berilgan  $n$  ta elementning hammasi kiradigan birlashmalarga aytiladi. Bir o`rin almashtirish boshqasidan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladi. Masalan: a, b, c elementlaridan $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ 6 ta o`rin almashtirish tuzish mumkin.

Kompleks sonlar-deb, $Z=a+bi$ ko'rinishidagi sonlarga aytiladi. Bu yerda $a, b \in \mathbb{R}$ haqiqiy sonlar, i alohida turdagi yangi son bo'lib, uning kvadrati minus birga teng, ya'ni $i^2=-1$. $Z=a+bi$ kompleks sonda a -uning haqiqiy qismi, b soni esa uning mavhum qismi deyiladi.

Maksimum-lotincha „*maximum*“ so'zidan olingan bo'lib, „*eng katta*“ degan ma'noni anglatadi. To'plamdagi funksiyaning eng katta qiymati funksiyada aniqlangan.

Minimum-lotincha so'zdan olingan bo'lib, „*eng kichik*“ degan ma'noni anglatadi. To'plamdagi funksiyaning eng kichik qiymati funksiyada aniqlangan.

Modul-lotincha „*modulus*“ so'zidan olingan bo'lib, „*o'lchov*“, „*kattalik*“ degan ma'noni anglatadi. Bu haqiqiy sonning absolyut kattaligini Nyutonning shogirdi R.Kots fanga kiritgan

Lug`at

Bazis vektor- base vector

Shox,bo`lak- branch

Kombinatsiya- combination

Kompleks son- complex number

Doimiy son- constant

Yoyish- decomposition

Ta`rif- definition

Hosila- derivate

Diagonal- diagonal

Diagonal matritsa- diagonal matrix

Ayirma- difference

Argument orttirmasi- difference quotient

Skalyar ko`paytma- dot product

Bo`sh to`plam- empty set, null set

Juft funksiya- even function

Juft son- even number

Aniq yechim- exact solution

Ko`rsatkich- exponent

Ifoda- expression

Ko`paytuvchi- factor, multiplier

Maydon- field

Formula- formula

Kompleks o`zgaruvchili funksiya- function of a complex variables

Umumiy ko`rinish- general form

Umumiy yechim- general solution

Ayniyat- identity

Teskari- inverse

Qonun- law

Asosiy diagonal- main diagonal

Natural logarifm- natural logarithm

Manfiy- negative

n-chi had- n^{th} term

Nol matritsa- null matrix

Xossa- property

Tenglama- equation

Tenglik- equality

Jordan formasi- Jordan form

Kvazidiagonal matritsa- kvasidiagonal matrix

Qism to`plam- subset

Chiziq- line

Xarakteristik son- eigenvalue

O`zaro tub- cardinal

EKUB- integers

O`rin alamshinuvchi matritsalar- commutative matrices

Daraja- power

Bir jinsli tenglamalar sistemasi- homo system of equation

Tekislik- plain, champaign, smoothness

Fazo- space

Elementar bo`luvchi- elementary divisor

Ko`p hadli matritsa- polynomial matrix

Kvadrat matritsa- quadratic matrix

Skalyar o`zgaruvchi- sclar variables

Xos matritsa- the original matrix

Ildiz- root

Indeks- index

Ustun- column

Qator- row

Jordan zanjiri- Jordan chain

Chekli son- finite number

Panjara- lattice

Markaz- centre

Haqiqiy-

real.

Adabiyotlar

1. I.A.Karimov, Barkamol avlod orzusi, „Sharq” ,1999-yil, 99-123 betlar.
2. I.A.Karimov, Kadrlar tayyorlash milliy dasturi, „Toshkent”,1997 yil, 56-88 betlar.
3. I.A.Karimov , Keksalarni e`zozlash yili davlat dasturi, 2015 yil.
4. R.Bhatia, Matrixanalysis, Springer-Verlag, New York, 1997.
5. http://library.kiwix.org/wikipedia_ru_all/A/html
6. <http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/enhanced-core-algorithms/compute/>
7. <http://dxdy.ru/member36128.html>
8. <http://m.habrahabr.ru/post/148336/>
9. <http://mash-xxl.info/info/407008/>
10. http://edu.sernam.ru/book_sm_math32.php?d=94
11. http://sernam.ru/book_matrix.php?d=57
12. <http://en.wikipedia.org/wiki/>
13. <http://www.imo-official.org/>
14. <http://lib.mexmat.ru>.
15. <http://docviewer.yandex.ru/>
16. <http://www.yandex.ru/>
17. <http://www.goole.com/>