O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

“Matematik” kafedrasi

5130100 – “Matematika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha

bakalavr darajasini olish uchun

Usmonov Umar Chinpo‘latovich

‘‘Musbat aniqlangan matritsalar uchun ba’zi tengsizliklar ‘‘ mavzusida

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko’rildi va himoyaga ruxsat berildi”	**ilmiy rahbar _____ dots. T.H.Rasulov**
	«______» _____________________2015 y
Kafedra mudiri	
________dots. R.T.Muxitdinov	**Taqrizchi ______ dots. G’. Yunusov.**
“______”______________2015 y.	**«______» _____________________2015 y**

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani prof. Sh.M. Mirzayev

“________” 06. 2015y.

Buxoro-2015.y

Mundarija

KIRISH

“O’zbekiston-kelajagi buyuk davlat.
Bu-insonparvarlik qoidalarga asoslangan,
Millati, dini, ijtimoiy ahvoli,qat’iy nazar
Fuqorolarning huquqlari va erkinliklari
Ta’minlab beradigan davlatdir”

I.A.Karimov.

Keksalarning hayot darajasi va sifatini yanada yaxshilash, ularni moddiy va ma’naviy qo‘llab-quvvatlash ko‘lamini kengaytirish, yoshi ulug‘ insonlar, ayniqsa, 1941 — 1945 yillardagi urush va mehnat fronti faxriylariga ijtimoiy, pensiya ta’minoti va tibbiy xizmat ko‘rsatishni takomillashtirish, oila va jamiyatda, yoshlarni o‘zbek xalqining ko‘p asrlik qadriyat va an’analari ruhida tarbiyalashda keksalarning o‘rnini mustahkamlash maqsadida, shuningdek, 2015 yilning «Keksalarni e’zozlash yili» deb e’lon qilinishi munosabati bilan:

1. «Keksalarni e’zozlash yili» Davlat dasturini amalga oshirishning ustuvor vazifa va yo‘nalishlari etib quyidagilar belgilansin:

keksalarga g‘amxo‘rlik ko‘rsatish va e’tiborni kuchaytirish, ularning hayot darajasi va sifatini oshirish uchun qulay tashkiliy-huquqiy shart-sharoitlar yaratishga qaratilgan qonunchilik va me’yoriy-huquqiy bazani yanada takomillashtirish, pensiya ta’minoti va ijtimoiy qo‘llab-quvvatlash tizimini takomillashtirish, yoshi ulug‘ insonlarga davlat xizmatlari, shu jumladan, turli ma’lumotnoma va tasdiqlovchi hujjatlarni olish xizmatlari ko‘rsatishning eng qulay tizimini shakllantirish;

keksalar, avvalambor, fashizm ustidan qozonilgan g‘alaba va Vatanimizni qayta tiklashga munosib hissa qo‘shgan 1941 — 1945 yillardagi urush va mehnat fronti faxriylarini manzilli ijtimoiy himoya qilish va qo‘llab-quvvatlashni kuchaytirish, yoshi ulug‘ insonlar, birinchi navbatda, yolg‘iz qariyalar va nogironlarga ko‘rsatiladigan ijtimoiy va maishiy xizmatlar ro‘yxatini kengaytirish, ularni farovon va munosib turmush sharoitlari bilan ta’minlash uchun mahallalar, «Nuroniy» jamg‘armasi, boshqa nodavlat tashkilotlari va ijtimoiy tuzilmalar tomonidan moddiy va ma’naviy qo‘llab-quvvatlash miqyosini oshirish;

faxriylar va yoshi ulug‘ insonlarga tibbiy va ijtimoiy xizmat ko‘rsatish darajasi va sifatini oshirish, ularni tizimli asosda sog‘lomlashtirishni tashkil etish, profilaktika tadbirlarini ko‘paytirish, ko‘rish va eshitish organlari, tayanch-harakat tizimi va yurak-qon tomir kasalliklarini davolashning zamonaviy usullari bilan qamrab olish va ulardan foydalanishni kengaytirish, keksalar va nogironlarni yordamchi hamda texnik reabilitatsiya vositalari bilan, jumladan, imtiyozli asosda ta’minlash, keksalarga xizmat ko‘rsatishga ixtisoslashtirilgan sanatoriy-sog‘lomlashtirish va ijtimoiy xizmat ko‘rsatish muassasalarining moddiy-texnik bazasini yanada mustahkamlash;

mamlakatimizning mudofaa qobiliyati, iqtisodiy, madaniy va intellektual salohiyatini oshirish, jamiyatimizda tinchlik, totuvlik va barqarorlik muhitini mustahkamlashga bebaho hissa qo‘shgan, sog‘lom va barkamol unib-o‘sayotgan avlodni tarbiyalashda faol ishtirok etayotgan keksa avlod vakillariga munosib e’tibor qaratish va ularni har tomonlama qo‘llab-quvvatlash bo‘yicha keng ko‘lamli chora-tadbirlarni tizimli asosda amalga oshirish, oila va jamiyatda yoshi ulug‘ insonlarning o‘rni va obro‘sini oshirish, bolalar va yoshlarni ota-onalarni, har bir nuroniyni chuqur hurmat qilish, e’zozlash va ularga g‘amxo‘rlik ko‘rsatish tuyg‘usi ruhida tarbiyalash bo‘yicha aniq tadbirlarni amalga oshirish;

har bir keksaga har tomonlama e’tibor qaratish bo‘yicha amalga oshirilayotgan ishlar samaradorligini kuchaytirish va oshirish, keksalarning hayot faoliyati va dam olishini tashkil etish tizimini sifat jihatidan yangi bosqichga ko‘tarish, bunda ular uchun tuman va mahallalarda muloqot markazlari, qiziqishi bo‘yicha klublar tashkil etishga alohida e’tibor qaratish, jismoniy tarbiya va sport bilan shug‘ullanishlari uchun sharoit yaratish, televidenie, ommaviy axborot vositalari, kinoteatrlar, teatr va boshqa madaniy-ma’rifiy muassasalarda yoshi ulug‘ insonlarning qiziqishlariga mos mavzuda yangi maxsus ko‘rsatuvlar, spektakl va filmlar yaratish va efirga uzatish hajmini ko‘paytirish;

mahallalar va fuqarolarning o‘zini o‘zi boshqarish organlari tashkiliy tuzilmasida keksalar va nogironlarga doimiy e’tibor qaratadigan sektorni mustahkamlash, bunda ularga xizmat ko‘rsatadigan idora va xizmatlar, birinchi navbatda, pensiya, ijtimoiy va tibbiy ta’minot xizmatlari faoliyatini muvofiqlashtirish va nazorat qilishni nazarda tutish.

2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2014 yil 12 dekabrdagi F-4393-son farmoyishiga muvofiq tuzilgan Respublika komissiyasi tomonidan manfaatdor vazirlik va idoralar, Qoraqalpog‘iston Respublikasi Vazirlar Kengashi, viloyatlar va Toshkent shahar hokimliklari, jamoat va nodavlat tashkilotlari hamda fuqarolarning o‘zini o‘zi boshqarish organlari bilan hamkorlikda ishlab chiqilgan «Keksalarni e’zozlash yili» Davlat dasturi muvofiq tasdiqlansin.

3. Respublika komissiyasiga (SH. Mirziyoyev) «Keksalarni e’zozlash yili» Davlat dasturiga kiritilgan tadbirlarning to‘liq, o‘z vaqtida va sifatli bajarilishini tashkil etish va nazorat qilish yuklansin.

Respublika komissiyasi:

bir hafta muddatda Qoraqalpog‘iston Respublikasi, viloyatlar va Toshkent shahri, tuman va shaharlarda Qoraqalpog‘iston Respublikasi Vazirlar Kengashi Raisi va tegishli hududlar hokimlari boshchiligida Davlat dasturini amalga oshirish bo‘yicha tegishli komissiyalar tashkil etilishini ta’minlasin va ularning zimmasiga Davlat dasturida belgilangan vazifalarni so‘zsiz, to‘liq va o‘z vaqtida bajarilishi uchun shaxsiy javobgarlik yuklasin;

ikki hafta muddatda vazirliklar, idoralar, kompaniyalar, uyushmalar va boshqa xo‘jalik birlashmalari, Qoraqalpog‘iston Respublikasi Vazirlar Kengashi, viloyatlar va Toshkent shahar hokimliklari tomonidan har bir vazirlik va idora, hudud, shahar, tuman va aholi punktlarining «Keksalarni e’zozlash yili» bo‘yicha hududiy va tarmoq dasturlari ishlab chiqilishi hamda qabul qilinishini ta’minlasin;

respublika davlat va xo‘jalik boshqaruvi organlari, shuningdek, joylardagi davlat hokimiyati organlari darajasida tasdiqlangan Davlat dasturiga kiritilgan tadbirlarni o‘z vaqtida va sifatli bajarish bo‘yicha ishlarni muvofiqlashtirsin va ushbu tadbirlar amalga oshirilishi ustidan tizimli nazorat o‘rnatsin;

har chorak yakunlari bo‘yicha «Keksalarni e’zozlash yili» Davlat dasturida belgilangan tadbirlar bajarilishi to‘g‘risida O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti devoniga axborot berib borsin.

4. O‘zbekiston Milliy axborot agentligi, O‘zbekiston Milliy teleradiokompaniyasi, O‘zbekiston Matbuot va axborot agentligi:

bosma va elektron ommaviy axborot vositalari, shu jumladan, internet-resurslarni jalb etgan holda, aholi o‘rtasida «Keksalarni e’zozlash yili» Davlat dasturining maqsad va vazifalari, uni amalga oshirish bo‘yicha asosiy yo‘nalishlar va chora-tadbirlar muntazam va keng ko‘lamda yoritilishini;

davlat va xo‘jalik boshqaruvi organlari, joylardagi davlat hokimiyati organlari, fuqarolarning o‘zini o‘zi boshqarish organlari va nodavlat notijorat tashkilotlarining davlat dasturida nazarda tutilgan tadbirlarni amalga oshirishdagi ishtiroki va qo‘shgan aniq hissasini aks ettirgan holda, davlat dasturining bajarilishi haqida keng jamoatchilikni muntazam xabardor qilib borishni ta’minlasin.

Barchamizga ayonki, inson qalbiga yo’l avvalo ta’lim-tarbiyadan boshlanadi. Shuning uchun qachonki bu haqida gap ketsa, ajdodlarimiz qoldirgan bebaho merosni eslash bilan birga, ota-onalarimiz qatori biz uchun eng yaqin bo’lgan yana bir buyuk zot o’qtiuvchi va murabbiylarnming olijanob mehnatini hurmat bilan tilga olamiz. Mamlakatimiz tarixida inson manfaatlari yili 1997-yil alohida sanalardan biri bo`lib qolsa ajab emas! Oliy majlisning to`qqizinchi sessiyasi “Ta`limto`grisidagi “va “kadrlar tayyorlash milliy dastur to`g`risida “ qonunlarni qabul qildi. Bu qonunlar uzluksiz ta`lim tizimining o`zbek modelini aniqlab berdi.

“Kadrlar tayyorlash milliy dastur to`g`risida “ qonunning amalda bajarilishi mamlakatimiz har bir fuqarosining burchi hisoblanadi.Bu borada Milliy dasturda bayon qilingan barcha qoidalar va maqsad, vazifalarni bir xil tushunish, ularga bir xil yondashish muhim ahamiyat kasb etadi, chunki har bir shaxs qonunni amalda bajarilishida o`z o`rnini topa olishi lozim.

Prezident I.A.Karimov Milliy dastur to`g`risidagi o`z nutqida hayotimizni hal etuvchi muhim masalalar qatorida ta`lim – tarbiya tizimini tubdan o`zgartirish uni yangi zamon talabi darajasiga ko`tarish, barkamol avlodimiz kelajagiga daxldor qonun loyihalari ham bor", - degan edi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi inson omiliga juda katta ma`no beradi. Maqsad va vazifalar strategiyasidan tortib to ta`lim – tarbiya jarayonining hamma qirralariga oid aniq dasturlar majmuasigacha har biri negizida inson asosiy omili hisoblanadi.

Shaxsning o`qimishliligi va uning yaratuvchanlik malakasi Milliy dasturni amalga oshirishning  asosiy natijasi bo`lmogi darkor.

Prezident I.A.Karimov "faqatgina chinakkam ma`rifatli odam inson qadrini, millat qadriyatlarini bir so`z bilan aytganda o`zligni anglash ,erkin va ozod jamiyatda yashash ,mustaqil davlatimizning jahon hamjamiyatida o`ziga munosib obro`li o`rin egallashi uchun fidoiylik bilan kurashishi mumkin ",-deb ta`kidlagan edi.

Kelajak avlod haqida qayg`urishni,sog`lom, barkamol naslni tarbiyalab yetishtirishga intilish bizning milly xusussiyatimizdir.

Lo`nda qilib aytganda, bugungi kunda odimizga qo`ygan buyuk maqsadlarimizga ezgu niyatlarimizga, erishishimiz, jamiyatimizda yanglanish , hayitimizning taraqqiyoti va istiqboli amalga oshirilayotgan islohotlarimiz, rejalarimizning samarasi taqdiri bularning barchasi, avvalambor, zamon talablariga javob beradigan yuqori malakali, ongli mutaxasis kadrlar tayyorlash muammosi bilan chambarchas bog`liqligini anglab yetmoqdamiz. Hozirgi paytda xorijiy tillarni o`rganish va o`rgatishga, yurtimizda katta ahamiyat bermoqda. Bu ham albatta bejiz emas.

Men Abdulla Avloniyning "Tarbiya biz uchun yo hayot yo mamot ,yo najot, yo halokat ,yo saodat –yo falokat masalasidir" degan fikrini ko`p mushohada qilaman.

Buyuk ma`rifayparvarning bu so`zlari asrimiz boshida millatimiz uchun qanchalar muhi va dolzarb bo`lsa hozirgi kunda biz uchun ham shunchalik, balki undan ko`ra muhim va dolzarb.

Chunki ta`lim-tarbiya ong mahsuli, lekin ayni vaqtda ong darajasi va uning rivoji ham belgilaydigan omildir. Bonobarin ta`lim–tarbiya tizimini o`zgartirmasdan turib ongni o`zgartirib bo`lmaydi. Ongni tafakurni o`zgartirmasdan turib ozod va obod jamiyatni barpo etib bo`lmaydi.

Bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi: Musbat va manfiy aniqlangan matritsalar bilan bog’liq masalalar matematikaning ko’plab sohalarida uchrab turadi. Musbat aniqlangan matritsalarning asosiy xossalarini o’rganish jarayonida musbat sonlar uchun o’rinli bo’lgan xossalardan qaysilari musbat aniqlangan matritsalarga umumlashtirish mumkin bo’lgan tabiiy savol paydo bo’ladi.

Masalan bunday matritsalar uchun o’rta qiymat turlari mavjudmi ?

Musbat aniqlangan matritsalar bilan bog’liq qanday tengsizliklar mavjud?

Mazkur bitiruv malakaviy ishida biz yuqoridagi savolarga javob izlashga harakat qilamiz.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy maqsadi: Musbat sonlar uchun ma’lum bo’lgan xossalarning musbat aniqlangan matritsalar uchun o’rinli bo’ladigan va o’rinli bo’lmaydigan qismlarga ajratishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining asosiy vazifalari: Buning uchun quydagi vazifalar qo’yildi:

1) Musbat aniqlangan matritsalar uchun o’rta qiymat turlarini o’rganish va ularni misolarda tahlil qilish.

2) Ermid matritsasi va uning asosiy xossalarini o’rganish.

3) Musbat aniqlangan matritsalar uchun ba’zi muhim tengsizliklar.

Bitiruv malakaviy ishining o’rganganlik darajasi: Bitiruv malakaviy ishi to’liq o’rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti: Ishorasi aniqlangan matritsa, matritsa ustida amallar, qavariq va monoton matritsaviy funksiyalar,..

Bitiruv malakaviy ishining obyekti: Musbat aniqlangan matritsalar va ularga oid tengsizlik munosabatlari.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega. Olingan asosiy natijalar: bir nechta adabiyotlardan mavzuga oid ma’lumotlar to’plangan, ular isbotlar va misollar bilan boyitilgan.

Bitiruv malakaviy ishining yangiligi: Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega.

Bitiruv malakaviy ishining amaliy ahamyati: Mavzu va mavzuga oid misol va masalalarni tahlil va tadbiq qilish hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishining metodologiyasi: chiziqli algebra, matematik analiz va funksional analiz usullaridan foydalanildi. .

Bitiruv malakaviy ishining metodlari: Musbat sonlar uchun o’rinli bo’lgan tengsizlik munosabatlarini musbat aniqlangan matritsalarga umumlashtirishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining tarkibi va hajmi: Kirish, ikkita bob, beshta paragraf, xotima, glossariy, inglizcha-o’zbekcha lug’at va foydalanilgan adabiyotlar ro’yxatidan iborat bo’lib, I - Bob boshlang’ich tushunchalar, matritsalar uchun tushuncha ta’riflar, o’rta qiymat turlari va tengsizliklarni o’rganish va ularni misollarda tahlil qilish, bob – xulosasi, II - bob asosiy qism, musbat aniqlangan matritsalar uchun o’rta qiymat turlarini o’rganish va ularni misollarda tahlil qilish, ermid matritsasi va uning asosiy xossalarini o’rganish, musbat aniqlangan matrisalar uchun ba’zi tengsizliklar, bob – xulosasi, sahifani tashkil etadi.

I-BOB: BOSHLANG’ICH TUSHUNCHALAR.

1.1Matritsalar haqida tushunchalar.

1.1.1-Ta’rif.

a_{ik} haqiqiy sonlar n ta satr va m ta ustunda joylashgan quyidagi to`g`ri to`rtburchak

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}=(a_{ik}) \qquad (1.1.1)$$

shaklidagi jadvalga $n\times m$ o`lchamli **matritsa** deyiladi.

a_{ik} haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi.

$1°x°m$ o`lchamli matritsaga **satr matritsa**, $n°x°1$ o`lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi. **Nol matritsa** deb, har bir elementi nolga teng bo`lgan matritsaga aytiladi.

$n°x°m$ o`lchamli $A=(a_{ik})$ va $B=(a_{ik})$ matritsalar berilgan bo`lsin. Agar matritsalarning barcha mos elementlari o`zaro teng bo`lsa, matritsalar o`zaro teng deyiladi va $A=B$ ko`rinishda yoziladi.

1.1.2-Ta’rif:

$m\times n$ o’lchamli matritsa deb, $a_{ij}, i=1,2,...m, j=1,2,...n$, sonlardan tuziljan m ta satr, n ta ustunli quyidagi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1.2)$$

jadvalga aytamiz. Matritsa qisqacha, $A=\left\|a_{ij}\right\|$ ko’rinishda ham yozilishi mumkin.

Agar $m=n$ bo’lsa, A kvadrat matritsa deyiladi.

Agar barcha $i=1,2,...m, j=1,2,...n$ lar uchun $a_{ij}=b_{ij}$ bo’lsa, bir xil o’lchamli $A=\left\|a_{ij}\right\|$ va $B=\left\|b_{ij}\right\|$ matritsalarni teng deymiz, ya’ni $A=B$.

Bir xil o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ va $B=\|b_{ij}\|$ matritsalarni yig'indisi $A+B$ deb, shunday $S=\|s_{ij}\|$ matritsaga aytamizki, bunda $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=1,2,...m, i=1,2,....n$, bo'ladi.

1.1.1-Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa,}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ bo'ladi.}$$

$A=\|a_{ij}\|$ matritsani α songa ko 'paytmasi deb, A matritsani barcha elementlarini α ga ko'paytirishdan hosil bo'ladigan $V=\|b_{ij}\|, b_{ij}=\alpha a_{ij}, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n$ matritsaga aytamiz.

1.1.2-Misol.

$$\alpha=3, A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } \alpha\times A=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

$m\times n$ o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsaning $n\times k$ o'lchamli $B=\|b_{ij}\|$ matritsaga ko'paytmasi deb, elementlari quyidagi

$$s_{ij}=a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2j}+....+a_{in}b_{nj}, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n .$$

formulalardan aniqlanadigan $m\times k$ o'lchamli matritsaga aytamiz.

1.1.3-misol.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+6 & 4-2 & 0+2 \\ 0-3 & 0+1 & 0-1 \\ 3+3 & 12-1 & 0+1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 6 & 11 & 1 \end{pmatrix}=C$$

Agar $m\neq k$ bo'lsa, $V\times A$ ko'paytmani bajarib bo'lmaydi, lekin agar $m=k$ bo'lsa, umumiy holda $A\times V=V\times A$ bo'lmaydi, chunki $A\times V$ matritsa $m\times m$ o'lchamli, $V\times A$ matritsa esa $n\times n$ o'lchamli matritsa bo'ladi. Xatto $m=n$ bo'lgan holda ham matritsalar ko'paytmasi uchun kommutativlik (o'rin almashtirish) xossasi o'rinli emas.

1.1.4-Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 18 & 15 & 6 \end{pmatrix},$$

ya'ni $A\times V \neq V\times A$.

Bevosita tekshirish yo'li bilan quyidagi:

1) $(\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)=\lambda(A\cdot B)$, λ-son;

2) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$;

3) $C\cdot(A+B)=C\cdot A + C\cdot B$;

4) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;

xossalarni o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Agar A va V $n\times n$ o'lchamli kvadrat matritsalar bo'lsa, u holda

1) $\det(A\cdot B)=\det A\cdot \det B$;

2) $\det(\lambda A)=\lambda^n \det A$;

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Agar barcha i, j lar uchun $a_{ij}^T = a_{ji}$ bo'lsa, $A^T=\left\|a_{ij}^T\right\|$ matritsani $A=\left\|a_{ij}\right\|$ matritsaja transponirlangan matritsa deymiz.

Agar $n\times n$ o'lchamli matritsa bo'lsa, A^T $n\times m$ o'lchamli matritsa bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \ A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1.1.4-Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quyidagi xossalar o'rinli:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;

2) $(A+V)^T = A^T + V^T$

3) $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$

Agar $A^T = A$ bo'lsa, kvadrat A matritsa simmetrik, $A^T = -A$ bo'lsa, kososimmetrik matritsa deb ataladi.

1.1.1-Teorema.

Har qanday A kvadrat matritsani simmetrik V va kososimmetrik S matritsalar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Teskari matritsa.

Quyidagi $n \times n$ o'lchamli matritsani ko'raylik:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

Ixtiyoriy $n \times n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsa uchun $A \cdot E = E \cdot A = A$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya'ni E matritsalar uchun birlik vazifasini bajaradi. Shuning uchun E ni birlik matritsa deb aytiladi.

Determinanti 0 ga teng bo'lgan quyidagi har qanday $n \times n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsa maxsus matritsa deb ataladi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.1.4}$$

Aks holda, ya'ni $\det A \neq 0$ bo'lsa, A matritsa maxsus bo'lmagan matritsa deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko'rilgan misolga ko'ra

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa maxsus matritsa, chunki

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.1.3-Ta'rif.

Agar $A \cdot V = V \cdot A = E$ munosabat o'rinli bo'lsa, $n \times n$ o'lchamli kvadrat $A = \|a_{ij}\|$ matritsani maxsus bo'lmagan $n \times n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsaga teskari matritsa deb ataladi.Teskari matritsa $V = A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko'ramiz.

Faraz qilaylik, $A = \|a_{ij}\|$ maxsus bo'lmagan kvadrat matritsa bo'lsin. Agar A_{ij} – a_{ij} elementning $\det A$ dagi algebraik to'ldiruvchisi bo'lsa, u holda

$$A^{v} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.1.5)$$

A ga biriktirilgan matritsa deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan quyidagi kelib chiqadi:

$$A^{v}A = AA^{v} = \det A \cdot E, \text{ bundan } A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{v}$$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan matritsalar usuli deb ataladi.

1.1.5-Misol.

Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matiritsani topamiz, buning uchun yuqorida aytilgan ta'rif va tushunchalardan ketma – ketlik asosida bajaramiz.

Yechish:

$\det A = 0 + 6 + 16 - 0 - (-4) - 30 = 26 - 30 = -4$ ga teng. Demak, A maxsus bo'lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Shuning uchun,

$$A^{v}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1}=\frac{1}{|-4|}A^{v}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -7/4 & 9/4 & -5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

Quyida ko’riladigan usulimiz elementar almashtirishlar usuli deb ataladi. Agar A $n\times n$ o’lchamli maxsus bo’lmagan kvadrat matritsa bo’lsa, uning uchun o’lchami $n\times 2n$ bo’lgan $J_A=(A|E)$ matritsa tuzib olamiz, ya’ni A matritsaga birlik E matritsani birlashtirib tuzamiz. Hosil bo’lgan J_A matritsani satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni $(E|V)$ ko’rinishga keltiramiz. U holda $V=A^{-1}$ bo’ladi.

1.1.6-Misol.

Elementar almashtirishlar usuli yordamida quyidagi matritsaga teskari matritsani topamiz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Yechish: J_A matritsani tuzib olamiz:

$$J_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

J_A matritsaning satrlarini mos ravishda $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, deb belgilab olib, ular ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\gamma_1' = \frac{1}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_1'' = \gamma_1' - \frac{2}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_1''' = \gamma_1'' - \frac{1}{24}\gamma_3''$$

$$\gamma_2' = \gamma_2 - \frac{4}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_2'' = \frac{3}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_2''' = \gamma_2'' - \frac{1}{12}\gamma_3''$$

$$\gamma_3' = \gamma_3 - \frac{2}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_3'' = \gamma_3' + \frac{1}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_3''' = \frac{7}{24}\gamma_3''.$$

Natijada ketma-ket quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right).$$

Demak,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}.$$

Teskari matritsa quyidagi xossalarga ega:

1^0. $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{A^{-1}}{\alpha}, (\alpha \neq 0)$

2^0. $(AV)^{-1} = V^{-1} \cdot A^{-1}$

3^0. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

1^0-xossaning isboti. Agar $\alpha \neq 0$ bo'lsa, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A \neq 0$ bo'ladi, shuning uchun $\alpha A = \|\alpha a_{ij}\|$ matritsa maxsus emas, demak, $(\alpha A)^{-1}$ mavjud. Agar A_{ij} deb αA matritsaning αa_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi, A_{ij} deb esa A matritsaning

a_{ij} elementini algebraik to'ldiruvchisini belgilasak, u holda $A_{ij} = \alpha^{n-1} A_{ij}$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha^n \det A}\left\| A_{ji} \right\| = \frac{1}{\alpha^n \det A}\left\| \alpha^{n-1} A_{ji} \right\| = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\det A}\left\| A_{ji} \right\| = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\det A} A^v = \frac{1}{\alpha} A^{-1}.$$

2⁰ xossaning isboti. Agar $V^{-1} \cdot A^{-1}$ ni $A \cdot V$ ga o'ng tomonidan ko'paytirilsa

$$AV \cdot V^{-1} A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

Agar chap tomonidan ko'paytirsak:

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

bo'ladi. Demak, haqiqatdan $(AV)^{-1} = V^{-1}A^{-1}$ ekan.

3⁰ xossani isboti. A^T ni $\left(A^{-1}\right)^T$ ga chap tomonidan ko'paytiraylik, u holda 1§ dagi transponirlangan matritsalarning 3-xossasiga ko'ra

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$$

va A^T ni $\left(A^{-1}\right)^T$ ga o'ng tomondan ko'paytirsak quyidagi hosil bo'ladi:

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = E^T = E.$$

O'rta qiymat turlari va tengsizliklarni o'rganish.

Matematikada ishlatilishidan bog'liq ravishda o'rta qiymatning turli xil ta'riflari mavjud. Quyida biz shulardan birini bayon qilamiz.

R_+ orqali nomanfiy sonlar to'plamini belgilaymiz.

Agar $m: R_+ \times R_+ \to R_+$ funksiya ushbu

1) $m(a,b) = m(b,a)$;

2) $\min(a,b) \le m(a,b) \le \max(a,b)$;

3) barcha $\alpha > 0$ lar uchun $m(\alpha a, \alpha b) = \alpha m(a,b)$;

4) $a \le c \Rightarrow m(a,b) \le m(c,b)$;

5) m-uzluksiz;

shartlarni qanoatlantirsa, m funksiyaga **o'rta qiymat deyiladi.**

a va b musbat sonlar uchun maktab kursidan o'rgangan o'rta qiymat turlaridan biz bilgan „O'rta arifmetik", „O'rta geometrik", „O'rta garmonik" kabi o’rta qiymatlarni bir qator turlariga to’xtalib ularga misollarni ham ko’rib chiqamiz.

1.2.1-ta’rif. O’rta arifmetik qiymat.

Ushbu

$$A(a,b)=\frac{a+b}{2} \qquad (1.2.1)$$

songa a va b sonlarning **o’rta arifmetik** qiymati deyiladi.

Masalan, $A(2,8)=\frac{2+8}{2}=5$.

1.2.2-ta’rif. O’rta geometrik qiymat.

Ushbu

$$G(a,b)=\sqrt{ab} \qquad (1.2.2)$$

songa a va b sonlarning o’rta geometik qiymati deyiladi.

Masalan, $G(2,8)=\sqrt{2\cdot 8}=4$.

1.2.3-ta’rif. O’rta garmonik qiymat.

Ushbu

$$H(a,b)=\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} \qquad (1.2.3)$$

songa a va b sonlarning **o’rta garmonik** qiymati deyiladi.

Masalan, $H(2,8)=\left(\frac{2^{-1}+8^{-1}}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{10}{2*16}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{16}\right)^{-1}=\frac{16}{5}$.

Bizga ma’lumki, o’rta arifmetik, o’rta geometrik va o’rta garmonik qiymatlar matematikada ko’p uchrab turadi va ular orasida

$H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)$

kabi munosabatlar o’rinlidir.

Masalan, $H(2,8)\le G(2,8)\le A(2,8)=\frac{16}{5}\le 4\le 5$.

1.2.3. Koshi tengsizligi.

Teorema. $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n; p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ -musbat sonlar bo’lsin.

$$a_1^{p_1}, a_2^{p_2}, \ldots\ldots, a_n^{p_n} \le \left(\frac{a_1p_1+a_2p_2+\ldots.+a_np_n}{p_1+p_2+\ldots.+p_n}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_n}$$

ekanligini isbotlang, tenglik esa faqat $a_1 = a_2 = ... = a_n$ da bajariladi.

Isboti. $S = \dfrac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$ belgilash kiritamiz;

$e^{x-1} \geq x, \quad (x \geq 1)$ tengsizlikka ko'ra $S e^{\frac{(a_i - 1)}{s}} \geq a_i$, $i = 1,2,..., n$.

Bu tengsizliklarni barchasini ko'paytirib chiqamiz.

$$a_1^{p_1}, a_2^{p_2}, ..., a_n^{p_n} \leq s^{p_1 + p_2 + ... + p_n} \exp$$

$$\left(\frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n}{S} - p_1 + p_2 + ... + p_n \right) = s^{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

Tenglik faqat $S = a_1 = a_2 = ... = a_n$ da bajarilishi esa (1)-masaladagidek isbotlanadi.

Xulosa.

Bitiruv malakaviy ishining I-bobi matritsa haqida tushuncha va ta'riflar, musbat sonlar uchun o'rta qiymat turlari, musbat sonlar uchun tengsizlik munosabatlari va ularning tatbiqlari.

II Asosiy qism.

2.1. Musbat aniqlangan matritsalar uchun o'rta qiymat turlarini o'rganish va ularni misollarda tahlil qilish.

Musbat yoki manfiy aniqlangan matritsalar bilan bog'liq masalalar matematikaning ko'plab sohalarida uchrab turadi. Bunga oddiy misol keltiramiz. Ma'lumki, bir o'zgaruvchili $f(\cdot)$ funksiya uchun $f''(x)$ ning $x = x_0$ kritik nuqtadagi qiymati orqali x_0 nuqta berilgan funksiyaning minimum, maksimum yoki boshqa turdagi nuqtasi bo'lishini aniqlash mumkin. Bu tekshirish usulini $f(\cdot)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgan holga umumlashtirishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalaridan tuzilgan matritsaning kritik nuqtada musbat yoki manfiy aniqlangan ekanligini tekshirish zarurati paydo bo'ladi.

Musbat aniqlangan matritsalarning xossalarini o'rganish jarayonida musbat sonlar uchun o'rinli xossalardan qaysilarini musbat aniqlangan matritsalarga umumlashtirish mumkin degan tabiiy savol paydo bo'ladi. Masalan, bunday matritsalar uchun o'rta qiymat tushunchasi mavjudmi? Mazkur maqolada biz musbat aniqlangan $n \times n$ matritsalar uchun o'rta arifmetik, o'rta garmonik va o'rta geometrik qiymat tushunchalariga hamda ular orasidagi munosabatlarga to'xtalamiz. Soddalik uchun misollar $n = 2$ holda keltirilgan. Ta'kidlash joizki, musbat aniqlangan matritsalarning o'rta qiymatlari, xususan o'rta arifmetik, o'rta geometrik va o'rta garmonik qiymatlari hamda ular bilan bog'liq masalalar matrisalar nazariyasi, operatorlar nazariyasi, Riman va Finsler differensial geometriyalarida va ehtimollar nazariyasining ko'plab masalalarida uchrab turadi. Shu bilan birga fizika va muhandislikning radar ma'lumotlarini qayta ishlash, tibbiy vizualizasiya, egiluvchanlik, statistika va mashinasozlik kabi sohalarida keng tatbiqlarga egadir.

Musbat aniqlangan matritsalar va ularning o'rta qiymatlari haqidagi ma'lumotlar asosan ingliz tilidagi adabiyotlarda bayon qilingan. Bunday adabiyotlar sifatida [1-5] adabiyotlarni tavsiya qilishimiz mumkin. Ushbu maqolada biz bu ma'lumotlardan foydalanib ularni isbotlar bilan boyitib misollarda asoslashga harakat qildik. Matritsa qiymatli funksiyalarning qavariqlik va monotonlik xossalaridan foydalanib ba'zi tengsizliklar isbotlangan.

C kompleks sonlar to'plami, $C^n = \underbrace{C \times ... C}_{n}$ - dekart ko'payma, $M_n(C)$ esa elementlari kompleks sonlar bo'lgan barcha $n \times n$ matritsalar to'plami bo'lsin. Maqolada ishlatiladigan ba'zi ta'riflarni keltiramiz [6]. Bizga $z = x + iy$ kompleks son berilgan bo'lsin. $x \in R$ soni z ning haqiqiy qismi deyiladi va $\operatorname{Re} z$ kabi belgilanadi; $y \in R$ soni esa uning mavhum qismi deyiladi va $\operatorname{Im} z$ kabi belgilanadi; $x - iy$ kompleks songa z ga qo'shma kompleks son deyiladi va $\bar{z}$ kabi belgilandi; $\sqrt{x^2 + y^2}$ songa z kompleks sonning absolyut qiymati yoki moduli deyiladi va $|z|$ kabi belgilandi; $\vec{a}(x, y)$ vektor va OX o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchakga z kompleks sonning argumenti deyiladi va $\arg z$ kabi belgilanadi. Quyidagi formula o'rinli:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & agar\, x > 0, y \geq 0 \; bo'lsa; \\ \dfrac{\pi}{2}, & agar\, x = 0, y > 0 \; bo'lsa; \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & agar\, x < 0 \; bo'lsa; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & agar\, x = 0, y < 0 \; bo'lsa; \\ 2\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & agar\, x > 0, y < 0 \; bo'lsa. \end{cases}$$

Bitiruv malakaviy ishida nol kompleks soni uchun uning argumenti aniqlanmagan. $(\cdot,\cdot)$ orqali C^n dagi odatdagi skalyar ko'paymani belgilaymiz, ya'ni $z^{(j)} = (z_{j1}, ..., z_{jn}) \in C^n, \;\; j = 1,2$ elementlar uchun ularning skalyar ko'paytmasi

$$(z^{(1)}, z^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} z_{1k} \bar{z}_{2k}$$

kabi aniqlanadi.

Agar $A \in M_n(C)$ matritsada istalgan $z \in C^n$ element uchun $(Az, z) \geq 0$ tengsizlik bajarilsa, A ga musbat aniqlangan matritsa (yoki qisqacha musbat matritsa) deyiladi. Agar barcha nolmas $z \in C^n$ elementlar uchun $(Az, z) > 0$

tengsizlik bajarilsa, $A \in M_n(C)$ ga qat'iy musbat aniqlangan matritsa (yoki qisqacha qat'iy musbat matritsa) deyiladi.

Agar $A-B$ musbat matritsa bo'lsa, u holda $A \geq B$ deyiladi.

Endi matritsaviy o'rta qiymat tushunchasi va uning ba’zi turlariga to’xtalamiz.

Ta’rif. Agar $m: M_n(C) \times M_n(C) \to M_n(C)$ akslantirish ushbu

1) $m(A,B) = m(B,A)$;

2) Agar $A \leq B$ bo'lsa, u holda $A \leq m(A,B) \leq B$;

3) $m(X^*AX, X^*BX) = X^*m(A,B)X$ tenglik barcha singulyar bo'lmagan X lar uchun bajarilsa;

4) $A \leq A' \Rightarrow m(A,B) \leq m(A',B)$;

5) m uzluksiz;

shartlar bajarilsa, u holda m akslantirishga matritsaviy o'rta qiymat deyiladi.

$A, B \in M_n(C)$ matritsalar uchun quyidagi

$$m_a(A,B) = \frac{A+B}{2}, \quad m_h(A,B) = \left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2} \right)^{-1}$$

akslantirishlar ta'rifda sanab o'tilgan beshta shartlarni qanoatlantirishini osongina tekshirish mumkin. Bu funksiyalar mos ravishda A va B matritsalarning o'rta arifmetik va o'rta garmonik qiymati deyiladi.

2.1.1-misol. Quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $m_a(A,B)$ va $m_h(A,B)$ larni hisoblaymiz:

$$m_a(A,B) = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

$m_h(A,B)$ ni hisoblash uchun avvalo A^{-1} va B^{-1} teskari matritsalarni topish zarur:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bundan esa

$$m_h(A,B) = \frac{6}{29}\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & 19 \end{pmatrix}$$

bo'lishi bevosita kelib chiqadi.

Tabiiy savol paydo bo'ladi: Musbat matritsalarning o'rta geometrik qiymati haqida nima deyish mumkin? Bu savolga javob topish maqsadida quyidagilarni qarayamiz:

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{A^p + B^p}{2}\right)^{1/p} \tag{2.1.1}$$

yoki

$$\exp\left(\frac{\ln A + \ln B}{2}\right) \tag{2.1.2}$$

Bu matritsalar musbat bo'lsada ta'rifdagi 3) va 4) xossalar bajarilmaydi. Bizga yaxshi ma'lumki, eksponensial akslantirish tartibni saqlamaydi, va $A \to A^t$ tartibni saqlovchi akslantirish bo'lishi uchun $0 \le t \le 1$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Eslatish joizki, (2.1.1) va (2.1.2) tasvirlar bir xil matritsani ifodalaydi. Ba'zi adabiyotlarda bu matritsa "o'rta geometrik qiymat" sifatida ishlatilgan.

Ushbu

$$A\# B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2} \tag{2.1.3}$$

belgilashni kiritamiz. Agar A va B kommutativlik xossasiga ega bo'lsa, u holda (2.1.3) tenglikning o'ng tomoni $A^{1/2}B^{1/2}$ ga teng bo'ladi. Ko'rsatish mumkinki, $m_g(A,B) = A\# B$ akslantirish ta'rifdagi beshta shartlarning barchasini qanoatlantiradi. Agar ta'rifning 3)-shartida $X = A^{-1/2}$ deb olsak, u o'rta geometrik qiymat formulasini beradi.

2.1.2-misol. $A\# B$ ni hisoblashga doir misol qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

U holda A va B musbat matritsalar bo'ladi,chunki (Ax,x)=4x

$$A^{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ A^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix},\ B^{1/2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

tengliklar o'rinlidir. Shu sababli (2.1.3)-formuladan foydalanib

$$A\# B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ni hosil qilamiz. Ko'rinib turibdiki, $A^{1/2}B^{1/2}$ ko'paytma ham aynan shu matritsani beradi.

O'rta geometrik qiymat

$$(A\# B)^{-1} = A^{-1}\# B^{-1}$$

xossaga ega bo'lib,

$$\det(A\# B) = (\det A \det B)^{1/2}$$

tenglik o'rinlidir.

(2.1.3)-tenglik bilan aniqlangan o'rta geometrik qiymatning ta'rifi birinchi marta Pusz va Woronowiczlarning [1] ishida matematik fizika va operatorlar algebrasi masalalarini hal qilish jarayonida paydo bo'lgan. Bunda (2.1.3)-tenglikdagi matritsa

$$XA^{-1}X = B \tag{2.1.4}$$

Rikkati tenglamasining yagona musbat yechimidir, bu esa o'rta geometrik qiymatning boshqa ta'rifini beradi. Boshqacha qilib aytganda, (2.1.4)-tenglama yagona musbat yechimga ega bo'lib, bu yechimga A va B musbat matritsalarning o'rta geometrik qiymati deyiladi. Muhandislikga oid adabiyotlarda [1] ishdan oldin ham o'rta geometrik qiymatning boshqa ta'riflari bo'lgan.

A va B musbat matritsalarning o'rta geometrik qiymati uchun

$$A\# B = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\left(tB^{-1} + (1-t)A^{-1}\right)^{-1}}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt;$$

va

$$A\# B = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\det(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B)}}(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B),\ \ \alpha = \sqrt{\det(A)},\ \ \beta = \sqrt{\det(B)}$$

formulalar ham o'rinlidir.

Musbat matritsalarning o'rta garmonik, o'rta geometrik va o'rta arifmetik qiymatlar orasida

$$\left(\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2}\right)^{-1} \le A\# B \le \frac{A+B}{2}$$

munosabatlar o'rinlidir.

2.2 Ermit matritsasi va uning xossalari.

Agar barcha $z \in C^n$ lar uchun $(Az, z) = (z, Az)$ tenglik bajarilsa, $A \in M_n(C)$ ga ermit (yoki o'z-o'ziga qo'shma) matritsa deyiladi.

Musbat matritsalarni tavsiflovchi bir qator tasdiqlar mavjud. Qulaylik uchun quyida biz ulardan ba'zilarini isbotsiz keltiramiz.

1-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun u ermit matritsa bo'lib, barcha xos qiymatlari nomanfiy bo'lishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun esa barcha xos qiymatlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

2-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun u ermit matritsa bo'lib, barcha bosh minorlari nomanfiy bo'lishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun esa barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

3-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun shunday B matritsa topilib, $A = B^* B$ bo'lishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun esa B singulyar bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

4-tasdiq. A musbat matritsa bo'lishi uchun shunday B musbat matritsa topilib, $A = B^2$ tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir. A matritsa qat'iy musbat bo'lishi uchun B ning qat'iy musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ta'kidlash lozimki, 4-tasdiqdagi B matrisa yagona bo'lib, unga A matritsaning kvadratik ildizi deyiladi va $B = A^{1/2}$ kabi belgilanadi.

Navbatdagi tasdiqni bayon qilish uchun L orqali Evklid fazosini, ya’ni skalyar ko’paytma kiritilgan chiziqli fazoni belgilaymiz.

5-tasdiq. $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ musbat bo'lishi uchun shunday $z_1, ..., z_n \in L$ elementlar topilib,

$$a_{ij} = (z_i, z_j), 1 \le i, j \le n$$

tengliklar bajarilishi zarur va yetarlidir. A qat'iy musbat bo'lishi uchun z_j, $1 \le j \le n$ elementlar chiziqli bog'lanmagan bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.2.1-misol. Faraz qilaylik, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ fiksirlangan haqiqiy musbat sonlar bo'lsin. Elementlari

$$a_{ij} = \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j}$$

kabi aniqlangan $m \times m$ o'lchamli A matritsani qaraymiz. Bu matritsaga Koshi matritsasi deyiladi. U holda quyidagi munosabatlar o’rinlidir:

$$\int_0^{\infty} e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-(\lambda_i+\lambda_j)t}dt = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}\lim_{R\to\infty}(1-e^{-(\lambda_i+\lambda_j)R}) = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j} = a_{ij}$$

Agar $f_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $1 \le i \le m$ deb olsak, u holda $f_i \in L_2([0;\infty))$ bo'lib, istalgan $i, j \in \{1,\dots,m\}$ uchun $a_{ij} = (f_i, f_j)$ tenglik o'rinlidir, bu erda $f, g \in L_2([0;\infty))$ elementlar uchun

$$(f, g) = \int_0^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$$

tenglik o’rinli. 5-tasdiqga ko'ra A musbat matritsadir.

Agar A va B matritsalar ermit (musbat) matritsalar bo'lsa, u holda $A+B$ ham ermit matritsa (musbat matritsa) bo'ladi. AB ko'paytma ermit matritsa bo'lishi uchun A va B matritsalar kommutativ (ya’ni o’rin almashinish xossasiga ega) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ushbu $S = AB + BA$ tenglik bilan aniqlangan matritsaga A va B larning simmetrik ko'paytmasi deyiladi. Agar A va B ermit matritsalar bo'lsa, u holda S ham ermit matritsa bo'ladi. Agar A va B musbat matritsalar bo'lsa, umuman olganda S musbat matritsa bo'lishi shart emas. Bunga misol keltiramiz.

2.2.2-misol. Istalgan $\alpha, \beta \in R$ sonlari uchun ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$$

ermit matritsalarni qaraymiz. Ko’rinib turibdiki, agar $\alpha > 0$ bo’lsa, u holda A musbat matritsa bo’ladi. Ixtiyoriy $z = (z_1, z_2) \in C^2$ element uchun

$$(Bz, z) = |z_1|^2 + 2\beta\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + \beta|z_2|^2$$

tenglik o’rinlidir. φ orqali $z_1\bar{z}_2$ kompleks sonning argumentini belgilaymiz. Agarda $0 < \alpha < 1$ bo'lganda musbatdir. U holda $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2|\cos\varphi$ tenglik o’rinlidir. Shu sababli (Bz, z) kvadratik formani

$$(Bz, z) = (|z_1| + \beta|z_2|\cos\varphi)^2 + \beta(1-\beta)|z_2|^2\cos^2\varphi$$

kabi tasvirlash mumkin. Shunday qilib, $\beta \in (0,1)$ bo'lganda B musbat matritsa bo'lar ekan.

S matritsaning aniqlanishiga ko'ra

$$S = \begin{pmatrix} 2 & \beta + \alpha\beta \\ \beta + \alpha\beta & 2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'lib, istalgan $z = (z_1, z_2) \in C^2$ element uchun

$$(Sz, z) = 2 | z_1 |^2 + 2\beta(1+\alpha)\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + 2\alpha\beta | z_2 |^2$$

tenglik o'rinlidir. Bunda α nolga yaqin, β esa 1 ga yaqin son bo'lsa, u holda S musbat matritsa bo'lmaydi.

Masalan, $z_0 = (1,-4) \in C^2$ element uchun $(Sz_0, z_0) = 2 - 8\beta(1+\alpha) + 32\alpha\beta$ tenglik o'rinlidir. Agar $\alpha = 1/32$ va $\beta = 32/33$ deb olinsa, u holda $(Sz_0, z_0) = -166/33 < 0$ bo'ladi.

1-lemma. Faraz qilaylik, A, B lar ermit matritsalar bo'lib, A qat'iy musbat matritsa bo'lsin. Agar S simmetrik ko'paytma musbat (qat'iy musbat) matritsa bo'lsa, u holda B ham musbat (qat'iy musbat) matritsa bo'ladi.

Isbot. B diagonal matritsa bo'ladigan ortonormal bazisni tanlaymiz, $B = diag(\beta_1, ..., \beta_n)$. U holda sodda hisoblashlar orqali S ham diagonal matritsa bo'lishini va uning s_{ii} diagonal elementi uchun $s_{ii} = 2\beta_i \alpha_{ii}$ tenglik o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Lemma shartiga ko'ra A musbat matritsa va shu sababli uning barcha diagonal elementlari musbatdir, ya'ni $a_{ii} > 0$. Demak $\beta_i = s_{ii} / (2a_{ii})$. Bu esa S musbat (qat'iy musbat) matritsa bo'lsa, u holda B ham musbat (qat'iy musbat) matritsa bo'lishini ta'minlaydi. 1-lemma isbotlandi.

2-lemma. Agar A, B lar musbat matritsalar bo'lib, ular orasida $A > B$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $A^{1/2} > B^{1/2}$ tengsizlik o'rinlidir.

Isbot. Bu tengsizlikni isbotlashda quyidagi

$$X^2 - Y^2 = \frac{(X+Y)(X-Y) + (X-Y)(X+Y)}{2}$$

ayniyatdan foydalanamiz. Agar X va Y matritsalar qat'iy musbat bo'lsa, u holda $X + Y$ ham qat'iy musbat bo'ladi. Shu sababli, 1-lemmaga ko'ra agar $X^2 - Y^2$

musbat matritsa bo'lsa, u holda $X-Y$ ham musbat bo'ladi. Bu mulohazalarda $X=A^{1/2}$ va $Y=B^{1/2}$ deb olib lemma isbotini yakunlaymiz.

E'tirof etish joizki, musbat aniqlangan matritsalarda musbat sonlardan farqli ravishda ko'plab xossalar o'rinli emas. Masalan, A va B musbat matritsalar uchun $A\geq B$ ekanligidan hamisha ham $A^2\geq B^2$ bo'lishi kelib chiqavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin:

2.2.3-misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

matritsalar musbat bo'lib, $A\geq B$ tengsizlik bajarilishini tekshirish qiyin emas, biroq $A^2\geq B^2$ tengsizlik bajarilmaydi. Masalan, $z_0\in(1,-2)\in C^2$ element uchun

$$((A^2-B^2)z_0,z_0)=-1<0\,.$$

Haqiqatan ham,

$$A\times A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot1 & 1\cdot2+1\cdot1\\ 2\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$B\times B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & 1+1\\ 1+1 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$S=A^2-B^2=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad z_0\in(1,-2)\in C^2$$

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{Re}(z_1z_2)}{|z_1||z_2|}=\frac{1\cdot(-2)}{1\cdot2}=-1$$

$$\left(Sz_0,z_0\right)=3|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1,z_2)+0\cdot|z_2|^2=3\cdot1+2\cdot1\cdot2(-1)+0=-1\,.$$

2.3 Musbat aniqlangan matritsalar uchun ba’zi tengsizliklar.

$H_n(C)$ orqali barcha $n\times n$ ermit matritsalar to'plamini, $H_n^+(C)$ orqali esa $H_n(C)$ dagi barcha musbat aniqlangan matritsalar to'plamini belgilaymiz. U holda $H_n(C)$, $H_n^+(C)\subset M_n(C)$.

Agar $f:H_n(C)\to H_n(C)$ matritsa qiymatli funksiya uchun istalgan $A,B\in H_n(C)$ va $0\leq\alpha\leq1$ larda

$$f((1-\alpha)A+\alpha B)\leq(1-\alpha)f(A)+\alpha f(B)$$

tengsizlik bajarilsa, f ga qavariq funksiya deyiladi. Agar f funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda f qavariq funksiya bo'lishi uchun

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \le \frac{f(A)+f(B)}{2} \tag{2.3.1}$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarlidir.

Agar $A \ge B$ bo'ladigan barcha $A, B \in H_n(C)$ matritsalar uchun $f(A) \ge f(B)$ tengsizlik bajarilsa, f ga monoton funksiya deyiladi.

Matrisaviy funksiyalar nazariyasidan yaxshi ma'lum bo'lgan quyidagi ikkita tasdiqni keltiramiz.

6-tasdiq. $H_n^+(C)$ to'plamda aniqlangan $f(A) = A^r$ funksiya $1 \le r \le 2$ bo'lganda qavariqdir.

7-tasdiq. $H_n^+(C)$ to'plamda aniqlangan $f(A) = A^r$ funksiya $0 \le r \le 1$ bo'lganda monotondir.

Keltirilgan ikkita tasdiq yordamida bir nechta ajoyib tengsizliklarni isbotlash mumkin. Masalan, 6-tasdiqga ko'ra $f(A) = A^2$ qavariq uzluksiz funksiya bo'lib, (2.3.1)-tengsizlik yordamida $A, B \in H_n^+(C)$ matritsalar uchun

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \le \frac{A^2+B^2}{2} \tag{2.3.2}$$

munosabatni hosil qilamiz.

(2.3.2)-tengsizlikning ikkinchi isboti: Agar A va B ermit matritsalar bo'lsa, u holda

$$(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$$

musbat aniqlangandir. Demak, hamisha $AB + BA \le A^2 + B^2$ tengsizlik o'rinlidir. Shu sababli

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \le 2A^2 + 2B^2$$

Tengsizlikning ikkala tomonini 4 ga bo'lib biz uchun kerakli (2.3.2)-tengsizlikni hosil qilamiz.

Xususiy holda

$$\left(\frac{A^{1/2}+B^{1/2}}{2}\right)^2 \le \frac{A+B}{2} \qquad (2.3.3)$$

tengsizlik o’rinlidir.

7-tasdiqga ko'ra $f(A)=A^{1/2}$ monoton funksiyadir. Shu sababli (2.3.3)-tengsizlikni hisobga olib

$$f\left(\left(\frac{A^{1/2}+B^{1/2}}{2}\right)^2\right) \le f\left(\frac{A+B}{2}\right),$$

ya'ni

$$\frac{A^{1/2}+B^{1/2}}{2} \le \left(\frac{A+B}{2}\right)^{1/2}$$

munosabatni hosil qilamiz.

2.3.1-misol. Agar $A\ge 0$, $B\ge 0$ va $AB=BA$ bo'lsa, u holda istalgan m natural soni uchun

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^m \le \frac{A^m+B^m}{2} \qquad (2.3.4)$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

(2.3.4)-tengsizlikni matematik induksiya usulidan foydalanib isbotlaymiz. (2.3.4)-tengsizlik $m=2$ uchun o'rinli ekanligi yuqorida ko'rsatildi. Faraz qilaylik,

(2.3.4)-tengsizlik $m=k$ uchun o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlikni $m=k+1$ uchun isbotlaymiz. $AB=BA$ shartni inobatga olib

$$\frac{A^k+B^k}{2}\cdot\frac{A+B}{2}=\frac{A+B}{2}\cdot\frac{A^k+B^k}{2}$$

tenglikga ega bo'lamiz. Shu sababli

$$\begin{aligned}\left(\frac{A+B}{2}\right)^{k+1} &\le \frac{A+B}{2}\cdot\frac{A^k+B^k}{2}=\frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{2}-\frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{4}+\frac{BA^k+AB^k}{4}=\\ &=\frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{2}-\frac{A^{k+1}+B^{k+1}-BA^k-AB^k}{4}=\frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{2}-\frac{(A^k-B^k)(A-B)}{2}\end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

Endi $A\ge 0$, $B\ge 0$ va $AB=BA$ shartlarni e'tiborga olsak,

$$\left(A^k-B^k\right)\left(A-B\right)=(A^{k-1}+A^{k-2}B+...+AB^{k-2}+B^{k-1})(A-B)^2$$

tenglikdan $AB\ge 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bundan esa

$$L:=A^{k-1}+A^{k-2}B+...+AB^{k-2}+B^{k-1}\ge 0$$

tasdiqni hosil qilamiz.

$L\cdot(A-B)^2=(A-B)^2\cdot L$ tenglikdan va yuqoridagi munosabatdan $\left(A^k-B^k\right)\left(A-B\right)\geq 0$ kelib chiqadi. (2.3.5)-tengsizlikga ko'ra

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^{k+1}\leq\frac{A^{k+1}+B^{k+1}}{2}.$$

(2.3.4)-tengsizlik isbotlandi.

H_n orqali barcha $n\times n$ Ermit matritsalar kompleks chiziqli fazosini belgilaymiz.Bu fazoda A va B matritsalar uchun ularning skalyar ko'paytmasi $<A,B>=Tr(B^*A)$ kabi aniqlanadi.Bunda Tr(.) musbat matritsalarning,, izini" bildiradi (sled).B* esa B matritsaga qo'shma matritsani bildiradi. U holda H_n chiziqli fazo kiritilgan skalyar ko'paytmaga nisbatan

Gilbert fazosi bo'ladi.

Faraz qilaylik $A\in H_n$ bo'lsin.U holda A matritsaning izli normasi $\|A_1\|_1=\sum_i s_i(A)$ kabi aniqlanadi.Bu yerda $s_i(A)$ orqali A matritsaning singulyar sonlari, ya'ni $|A|=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ matritsani xos qiymatlari belgilangan. A matritsaning spektral normasi $\|A\|_2=\max\{s_i(A)\}$ tenglik orqali

aniqlanadi.

2.3.1–teorema. Faraz qilaylik, $A\in H_n$ musbat aniqlangan matritsa bo'lib, chekli izli normaga ega bo'lsin.U holda istalgan U unitary matritsa uchun $T_rUAU^{-1})=Tr(A)$ (1) tenglik o'rinli bo'ladi.

Quyidagi $Tr(AB)=Tr(A)$ (2) tenglik o'rinli bo'ladi.

Endi H chiziqli fazo chekli o'lchamli qaraymiz, ya'ni $\dim(H)<\infty$ holni qaraymiz.

2.3.2–teorema. (Koshi - Shvarts tengsizligi)

Agar A va B lar musbat aniqlangan chekli izga ega bo'lgan matritsalar bo'lsa u holda $|Tr(A^*B)|^2\leq Tr(A^*A)Tr(B^*B)$ tengsizlik o'rinlidir.

Koshi – Shvarts tengsizligini qo'llab quyidagi teoremani hosil qilamiz.

2.3.3–teorema.

Agar A va B lar musbat aniqlangan chekli izga ega bo'lgan matritsalar bo'lsa, u holda

$$Tr(AB) \le |Tr(AB)| \le \{Tr(A^* A)\}^{\frac{1}{2}} \{Tr(A^* A)\}^{\frac{1}{2}}; \qquad (2.3.8)$$

$$Tr(AB) < Tr(A)Tr(B);$$

tengsizliklar o'rinlidir.

2.3.1 – Lemma. H_n dan olingan $A \ge 0$ va $B \ge 0$ matritsalar uchun $Tr(AB) \le \|A\|_2 Tr$ tengsizlik o'rinlidir. Bu yerda $\|A\|_2$ orqali spektral norma yoki A matritsaning eng katta singulyar qiymati belgilangan.

2.3.2 – Lemma. H_n dan olingan istalgan musbat aniqlangan C,D va E matritsalar uchun

$|Tr(CDE)| \le \|D\|_2 \{Tr(C^* C)\}^{\frac{1}{2}} \{Tr(E^* E)\}^{\frac{1}{2}}$ tengsizlik o'rinlidir.

Isbot:

Sodda hisoblashlarga ko'ra $|Tr(CDE)| \le \|D\|_2 Tr(CE)$ tengsizlikni hosil qilamiz. (2.3.2) va (2.3.3) teoremalarni hamda Koshi – Shvarts tengsizligini qo'llab

$$|Tr(CDE)| \le \|D\|_2 Tr(CE) \le \|D\|_2 \{Tr(C^* C)\}^{\frac{1}{2}} \{Tr(E^* E)\}^{\frac{1}{2}}$$

munosabatlarni hosil qilamiz.Shu bilan 2.3.2 – lemmani isbotini tugatamiz. Endi yuqoridagi 2 ta lemmadan foydalanib quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2.3.4–teorema

H_n dan olingan chekli matrittsaviy normaga ega musbat aniqlangan $B_1, B_2, ..., B_n$ matritsalar va A musbat aniqlangan matritsa berilgan bo'lib, $A^{\frac{1}{n}}$ chekli izli normaga ega bo'lsin, u holda $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ shartni qanoatlantiruvchi $P_i \ge 0, i = 1,2,..., n$ lar uchun

$|Tr(B_1 A^{p_1} * B_2 A^{p_2} ***** B_n A^{p_n})| \le \prod_{i=1}^{n} \|B_i\|_2 Tr(A)$ tengsizlik o'rinlidir.

Isbot:

Teoremani matematik induksiya usulidan foydalanib isbotlaymiz.

$n=1$ uchun teorema tasdig'i 2.3.1 – lemmadan kelib chiqadi. $n=2$ uchun $P_1 \le \frac{1}{2}$ deb olamiz, u holda

$$\left|Tr(B_1A^{p_1} * B_2A^{p_2})\right| = \left|Tr(A^{\frac{p_1+p_2}{2}} B_1A^{p_1} * B_2A^{\frac{p_1-p_2}{2}})\right| \le \|B_1\|_2 Tr(A)^{\frac{1}{2}} Tr(A^{\frac{p_1-p_2}{2}} B_2^* A^{2p_1} * B_2A^{\frac{p_1-p_2}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

tengsizlik 2.3.2 – lemmaga ko'ra o'rinlidir.

Bu jarayonni davom ettirib n – qadamdan keyin $P_1 + P_2 = 1$ shartni qanoatlantiruvchi biror $P_1 \ge 0, P_2 \ge 0$ sonlar uchun

$$\left|Tr(B_1A^{p_1} * B_2A^{p_2})\right| \le \|B_1\|_2 \|B_2\|_2^{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} Tr(A)^{\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}} * Tr\left|B_2^* A^{p_1'} * B_2A^{p_2'})\right|^{\frac{1}{2^n}} \tag{2.3.9}$$

P_i lardan biri $\frac{1}{2}$ dan kichik bo'lganligi uchun

$Tr\left|B_2^* A^{p_1'} * B_2A^{p_2'})\right|^{\frac{1}{2^n}} \le \|B_2\|_2^{\frac{1}{2^n}} \|A\|_2^{\frac{1}{2^n}} Tr\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2^n}}$ $n \to \infty$ bo'lganda limitga o'tib teorema isbotini $n=2$ hol uchun hosil qilamiz. Endi teorema tasdig'i $n \le m-1$ uchun o'rinli deb faraz qilamiz. Teorema tasdig'ini $n=m$ hol uchun isbotlaymiz.

$P_1 + P_2 + \ldots + P_m = 1$ bo'lganligi uchun shunday j natural son topilib

$P_j + P_{j+1}(\bmod m) + \ldots + P_{j+\left[\frac{m}{2}\right]}(\bmod m) < \frac{1}{2}$ $P_j + P_{j+1}(\bmod m) + \ldots + P_{j+1+\left[\frac{1}{2}\right]}(\bmod m) \ge \frac{1}{2}$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda $\left[\frac{m}{2}\right]$ orqali $\frac{m}{2}$ dan oshmaydigan eng katta butun son, ya'ni uning butun qismi belgilangan.

Izning siklik xossasiga ko'ra $Tr(AB) = Tr(BA)$ tenglik o'rinli va B_j va P_j larni tanlash hisobiga $P_1 + P_2 + \ldots + P_{\left[\frac{m}{2}\right]} < \frac{1}{2}$ $P_1 + P_2 + \ldots + P_{\left[\frac{m}{2}\right]+1} \ge \frac{1}{2}\ldots$ (2.4.1) bajarilgan deb faraz qilamiz. Faraz qilaylik, $P' = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} P_i$ va $m' = \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ bo'lsin, u holda

$$2\left(\sum_{i=1}^{m'-1} P_i + P'\right) = 1$$

$$2\left(\sum_{i=m'+1}^{m} P_i + (P_{m'} - P')\right) = 1 \cdots \tag{2.4.2}$$

va

$$\left|Tr(B_1 A^{p_1} B_2 A^{p_2} \cdots B_m A^{p_m})\right| \le \left|Tr(A^{p'_m - p'} B_{m'+1} A^{p_{m'+1}} \cdots B_m A^{p_m} B_1 A^{p_1} \cdots B_{m'} A^{p'})\right| \le$$

$$\le \|B_1\|_2 Tr(A^{p'} B^*_{m'} A^{p_{m'-1}} B_{m'-1} \cdots B^*_2 A^{2p_1} B_2 A^{p_2} \cdots B_{m'} A^{p_1'})^{\frac{1}{2}}$$

munosabatlar o'rinlidir.

Agar m toq son bo'lsa,u holda $2(m'-1) = m-1$ va $2(m-(m'+1)) = m-1$ bo'ladi.

Shunday qilib m toq butun son uchun teorema tasdig'i (2.4.2) tenglik va induksiya farazidan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, m juft bo'lsin.U holda $2(m'-1) = m$ va $2(m-(m'+1)) = m-2$

tengliklar o'rinlidir. Shunday qilib, induksiya faraziga ko'ra (2.4.3) qo'shiluvchi

$$\|B_1\|_2 \prod_{j=m'+1}^{m} Tr(A)^{\frac{1}{2}} Tr(B^*_{m'} A^{p_{m'-1}} B^*_{m-1} \cdots B^*_2 A^{2p_1} B_2 ... B_{m'} A^{2p'})^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots \tag{2.4.4}$$

bilan chegaralangandir.

Eslatib o'tish joizki (1) ga ko'ra yo

$$\sum_{j=2}^{m'-1} P_j < \frac{1}{2}$$

va

$$\sum_{j=2}^{m'-1} P_j + 2P' \ge \frac{1}{2} \cdots\cdots \tag{2.4.5}$$

yoki

$$\sum_{j=2}^{m'-1} P_j < \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=2}^{m'-1} P_j + 2P_1 \ge \frac{1}{2} \cdots\cdots \tag{2.4.6}$$

bajariladi.

Boshqa hollarda (2.3.1) va (2.3.2) ni hosil qilish uchun shu usuldan foydalanamiz.

$2(P_1'+...+P_m')=1$ shartni qanoatlantiruvchi biror $P_1',...,P_m'$ sonlari uchun

$$Tr(B_{m'}^{*}A_{m'}^{p}B_{m'-1}^{*}\cdots B_2^{*}A^{2p_1}B_2A^{p_2}\cdots B_{m'}A^{2p'})\le\prod_{j=2}^{m}\left\|B_j\right\|_2 Tr(A)^{\frac{1}{2}}Tr(A_{m'}^{p}B_{m'}^{p}\cdots B_2^{*}A^{2p_1'}B_2A^{p_2'}\cdots B_{m'}A^{2p_m'})$$

tengsizlik o'rinli va $P_1'....P_m'$ uchun (5) va (6) munosabatlarni bittasi bajariladi. Yuqoridagi jarayoning n – qadamida $2(q_1+...+q_{m'})=1$ shartni qanoatlantiruvchi biror $q_1,...,q_{m'}$ sonlari uchun

$$\left|Tr(B_1A^{p_1}\cdots B_mA^{p_m})\right|\le\left\|B_1\right\|_2(\prod_{j=m'+1}^{m}\left\|B_j\right\|_2)Tr(A)^{\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}}(\prod_{j=2}^{m'}\left\|B_j\right\|_2)^{\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\left|Tr(A_{m'}^{q}B_{m'}^{*}\cdots B_2^{*}A^{2q_1}B_2\cdots B_{m'}A^{q_{m'}})\right|^{\frac{1}{2^n}}\cdots \text{ (7) o'rinlidir.}$$

q_i lardan biri $\frac{1}{m}$ dan oshmaganligi sababli (7) dagi iz $((\prod_{j=2}^{m'}\left\|B_j\right\|_2^{\frac{1}{2^{n-1}}})\left\|A\right\|^{(1-\frac{1}{m})\frac{1}{2^n}}Tr(A^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{2^n}})$ bilan chegaralangan. Shu tufayli teorema tasdig'i (7) munosabatdan kelib chiqadi. Bu o'z navbatida teorema isbotini yakunlaydi.

2.1 – teorema. (Kantorovich tipidagi tengsizliklar)

Faraz qilaylik $A-n\times n$ musbat aniqlangan matritsa, λ_1 va λ_n esa mos ravishda uning eng katta va eng kichik xos qiymat bo'lsin. Agar $H-n\times r$ matritsa bo'lib $H*H=Ir$ bo'lsa u holda

$$H*A^2H\le\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}(H*AH)^2 \qquad (2.4.8)$$

$$H*A^2H-(H*AH)^2\le\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_n)^2 Ir \qquad (2.4.9)$$

$$H*A^2H-(H*AH)^2\le(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_n})^2H*AH \qquad (2.5.1)$$

tengsizliklar o'rinlidir.Yuqoridagi tengsizliklar ekvivalent tengsizliklar mos ravishda

$$H*AH\le\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}(H*A^{-1}H)^{-1} \qquad (2.5.2)$$

$$H*AH-(H*A^{-1}H)^{-1}\le\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_n)^2H*A^{-1}H \qquad (2.5.3)$$

$$H*AH-(H*A^{-1}H)^{-1} \le (\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_n})^2 Ir \quad (2.5.4)$$

Isbot:

$0 \le (\lambda_1 I_n - A)(A-\lambda_n I_n)$ bo'lganligi uchun $A^2 \le (\lambda_1+\lambda_n)A-\lambda_1\lambda_n I_n$ bo'ladi,

shu sababli $H*A^2H \le (\lambda_1+\lambda_n)H*AH-\lambda_1\lambda_n Ir$

tengsizlik hosil bo'ladi. Oxirgi tengsizlikni o'ng tomonini

$$(\lambda_1+\lambda_n)H*AH-\lambda_1\lambda_n Ir = \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}(H*AH)^2-(\sqrt{\lambda_1\lambda_n}Ir-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}H*AH)^2 =$$

$$=(H*AH)^2+\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_n)^2 Ir-(H*AH-\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}Ir)^2 =$$

$$=(H*AH)^2+(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_n})^2 H*AH-(\sqrt{\lambda_1\lambda_n}Ir-H*AH)^2$$

kabi tasvirlash mumkin.Bundan esa (2.4.8), (2.4.9), (2.5.1) lar hosil bo'ladi. (2.4.8), (2.4.9) va (2.5.1) larda mos ravishda H ni $A^{-\frac{1}{2}}H(H*A^{-1}H)^{-\frac{1}{2}}$ bilan almashtirib keyin o'ngdan va chapdan $(H*A^{-1}H)^{\frac{1}{2}}$ ga ko'paytirib mos ravishda (2.5.2), (2.5.3) va (2.5.4) larni hosil qilamiz. Aksincha (2.5.2), (2.5.3) va (2.5.4) larda mos ravishda H ni $A^{\frac{1}{2}}H(H*AH)^{-\frac{1}{2}}$ ga ko'paytirib mos ravishda (2.4.8), (2.4.9) va (2.5.1) larni hosil qilamiz. **Isbot tugadi.**

Endi yuqoridagi teoremani musbat yarim aniqlangan matritsalar holida umumlashtiramiz.

2.2 – teorema.(Umumlashgan Kantorovich tipidagi tengsizliklar)

Faraz qilaylik A-$n\times n$ musbat yarim aniqlangan matritsa, λ_1 va λ_k lar mos ravishda ularning eng katta va eng kichik nolmas xos qiymatlari bo'lsin, bu yerda $k=rank(A)$. U holda istalgan $n\times p$ o'lchamli X matritsa uchun

$$X*A^2X \le \frac{(\lambda_1+\lambda_k)^2}{4\lambda_1\lambda_k}X*AX(X*P_AX)^+X*AX \quad (2.5.5)$$

$$X*A^2X-X*AX(X*P_AX)^+X*AX \le \frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_k)^2 X*P_AX \quad (2.5.6)$$

$$X*A^2X-X*AX(X*P_AX)^+X*AX \le (\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_k})^2 X*AX \quad (2.5.7)$$

tengsizliklar o'rinlidir. Yuqoridagi tengsizliklarni har biriga ekvivalent bo'lgan tengsizliklar mos ravishda quydagi ko'rinishlarga ega:

$$X^*AX \le \frac{(\lambda_1+\lambda_k)^2}{4\lambda_1\lambda_k} X^*P_AX(X^*A^+X)^+X^*P_AX \quad (2.5.8)$$

$$X^*AX - X^*P_AX(X^*A^+X)^+X^*P_AX \le \frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_k)^2 X^*A^+X \quad (2.5.9)$$

$$X^*AX - X^*P_AX(X^*A^+X)^+X^*P_AX \le \left(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_k}\right)^2 X^*P_AX \quad (2.5.10).$$

Isbot:

Faraz qilaylik $A = U\wedge U^*$ bu A ning singulyar qiymat bo'yicha yoyilmasi bo'lsin. Bunda $\wedge - k\times k$ o'lchamli diagonal elementlari musbat bo'lgan diagonal matritsa va $k = rank(A)$, U esa $n\times k$ o'lchamli matritsa bo'lib $U^*U = I_k$ tenglik o'rinlidir. So'ngra U^*X ning singulyar qiymat bo'yicha yoyilmasini qaraymiz, ya'ni $U^*X = H\Delta G^*$ bu yerda $H^*H = G^*G = I_r$ va $r = rank(U^*X)$ shu sababli $P_A = UU^*$ va $X^*P_AX = G\Delta^2G^*$ ga ega bo'lamiz. (2.4.8), (2.4.9) va (2.5.1) larda mos ravishda $A=\wedge$ deb olib so'ngra ularni chapdan va o'ngdan $G\Delta$ va ΔG^* larga ko'paytirib hamda $G\Delta(H^*\wedge^2H)\Delta G^* = X^*A^2X$,

$G\Delta(H^*\wedge H)\Delta G^* = X^*AX$,

$G\Delta(H^*\wedge H)^2\Delta G^* = G\Delta(H^*\wedge H)\Delta G^*G\Delta(G\Delta^2G^*)^+$,

$G\Delta(H^*\wedge H)\Delta G^* = X^*AX(X^*P_AX)^+X^*AX$

tengliklarni hisobga olib (2.4.8), (2.4.9) va (2.5.1) larni hosil qilamiz. (2.4.8),(2.4.9) va (2.5.1) larda X ni $A^{+\frac{1}{2}}X$ bilan almashtirib mos ravishda (2.5.2),(2.5.3) va (2.5.4) larni hosil qilamiz.Aksincha (2.5.2), (2.5.3) va (2.5.4) larda X ni $A^{\frac{1}{2}}X$ bilan almashtirib (2.4.8),(2.4.9) va (2.5.1) larni hosil qilamiz.

2.3- teorema

Faraz qilaylik $A - n\times n$ o'lchamli musbat yarim aniqlangan matritsa bo'lsin. Agar X va Y lar mos ravishda $n\times p$ va $n\times q$ o'lchamli matritsalar bo'lib, $X^*P_AY = 0$ bo'lsa, u holda

$$X^*AY(Y^*P_AY)^+Y^*AX \le X^*A^2X - X^*AX(\alpha^*P_AX)^+X^*AX \quad (2.6.1)$$

tengsizlik o'rinlidir. (2.6.1) tengsizlikda tenglik bajarilishi uchun

$$R(AX) \subseteq R(P_A(X,Y)) \qquad (2.6.2)$$

munosabat o'rinli bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu yerda (X,Y) orqali $n\times(p+q)$ o'lchamli bo'laklangan matritsa belgilangan.

(2.6.1) tengsizlikning boshqa ekvivalent shakli

$$X*AY(Y*AY)^{+}YAX \le X*AX - X*P_AX(X*A^{+}X)^{+}X*P_AX \qquad (2.6.3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Isbot:

$X*P_AY=0$ shartdan $P_{P_AX}P_{P_AY}=P_{P_AY}P_{P_AX}=0$ va P_{P_AX},P_{P_AY} lar Ermit idempatent matritsa ekanligidan $P_{P_AX}+P_{P_AY}$ ham Ermit idempatent matritsa bo'lishi kelib chiqadi. Ermit idempatent matritsa bo'lishi faqat 0 va 1 dan iborat xos qiymatlarga ega bo'lganligi uchun $\boldsymbol{I_n \ge P_{P_AX} + P_{P_AY}}$ tengsizlik bajariladi. Oxirgi tengsizlikni chapdan va o'ngdan $X*A$ va AX ga ko'paytirib

$$\begin{aligned} &X*AX \ge X*A(P_{P_AX}+P_{P_AY})AX = X*AX(X*P_{P_A}X)^{+}X*AX+ \\ &+X*AY(Y*P_AY)^{+}Y*AY \end{aligned} \qquad (2.6.4)$$

ni hosil qilamiz.

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishining II – bobi musbat aniqlangan matritsalar uchun o'rta qiymat turlarini o'rganish va ularni misollarda tahlil qilish, Ermit matritsasi va uning asosiy xosssalarini o'rganish. Musbat aniqlangan matritsalar uchun muhim tengsizliklar.

XOTIMA.

Ushbu bitiruv malakaviy ishim musbat aniqlangan matritsalar uchun ba'zi tengsizliklar va ularning asosiy xossalarini o`rganishga bag`ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi kirish, asosiy tushunchalar va asosiy qismdan iborat. Kirish qismi 2 banddan iborat bo`lib, 1-bandida O`zbekiston Respublikasi Prezidentining ilm-fan taraqqiyotga bag`ishlangan nutqidan olingan ba`zi ma`lumotlar kiritilgan. 2-bandida esa bitiruv malakaviy ishi mavzusining dolzarbligi, asosiy maqsadi va vazifalari, tadqiqot obyekti va predmeti, tadqiqot usuli va uslubiyoti, bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va asosiy natijalari bayon qilingan. Ishning I-bobida matritsa haqida tushuncha, matritsalar ustida amallar, matritsa turlari va hisoblash usullari, o'rta qiymat turlari va ular orasidagi bog'lanishlar haqida tushuncha ta'riflar keltirilgan.

II-bobida musbat aniqlangan matritsalar uchun o'rta qiymatlar, ermit matritsasi va uning xossalari, musbat aniqlangan matritsalar uchun ba'zi tengsizliklar misollardagi ba`zi tadbiqlari o`rganilgan.

Glossariy

Matritsa- lotincha *,,matrix``* so`zidan olingan bo`lib, *,,bosh``, ,,manba``* degan ma`noni anglatadi. Bu qator va ustunlardan tashkil topgan bir necha to`plamlar orqali ifodalanadigan to`g`ri burchakli jadvaldir. Buni birinchi bo`lib Gamilton va IXX asr o`rtalarida A. Keli va J.Silvestrlar fanga kiritishgan. Ikki vertikal to`g`ri chiziq orqali zamonaviy ifodalanishini 1841 yilda A.Keli fanga kiritgan.

Diagonal- grekcha so`zdan olingan bo`lib, *,,dia``-orqali* va *,,gonium``-burchak* degan ma`noni anglatadi. Bu ko`pburchakning bir tomonda yotmaydigan ikki uchini tutashtiruvchi to`g`ri chiziqdir. Bu atama eramizdan avvalgi 3 asrda yashab o`tgan qadimgi grek olimi Evklidning asarlarida uchraydi.

Faktorial (k)- lotincha *,,factor``* so`zidan oligan bo`lib, *,,ko`paytma``* degan ma`noni anglatadi. Birinchi bo`lib bu atama fransuz matematigi Lui Arbogastanining asarlarida uchraydi. *k* deb belgilanishini esa nemis matematigi Kretyan Kramp fanga kiritgan.

Formula- lotincha *,,formula``* so`zidan olingan bo`lib,-*,,forma`` , ,,qoida``* degan ma`noni anglatadi. Bu birorbir masalani ifodalovchi matematik belgilarning kombinatsiyasi hisoblanadi.

Funksiya- lotincha *,,function``* so`zidan olingan bo`lib, *,,bajarish`` , ,,qilish``* degan ma`noni anglatadi. Bu bir o`zgaruvchi kattalikni boshqasiga bog`liqligini ifodalovchi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. Birinchi bo`lib bu atama 1692 yilda nemis olimi G.Leybnitsning asarlarida uchragan. Uning ko`rinishi hozirgi zamonaviy ko`rinishda emas edi. Hozirgi zamonaviy ko`rinishga o`xshash ko`rinish shvetsariyalik olim I.Bernulli (1718 y)ning asarlarida uchraydi. Funksiyaning f(x) deb belgilanishini esa rus olimi L.Eyler (1734 y) fanga kiritgan.

Logarifm- grekcha so`zdan olingan bo`lib, *,,logos``-,,munosabat`` , ,,arithmos``-,,son``* degan ma`noni anglatadi.*m* daraja ko`rsatkichlini N ni hosil qilish uchun a darajaga ko`tarish zarur. Buni fanga Neper taklif qilgan edi.

Maksimum- lotincha *,,maximum``* so`zidan olingan bo`lib, *,,eng katta``* degan manoni anglatadi. To`plamdagi funksiyaning eng katta qiymati funksiyada aniqlangan.

Minimum- lotincha so`zdan olingan bo`lib, *,,eng kichik``* degan ma`noni anglatadi. To`plamdagi funksiyaning eng kichik qiymati fuksiyada aniqlangan.

Modul- lotincha *,,modulus``* so`zidan olingan bo`lib, *,,o`lchov``, ,,kattalik``* degan ma`noni anglatadi. Bu haqiqiy sonning absolyut kattaligini Nyutonning shogirdi R.Kots fanga kiritgan.

Multiplikativlik- lotincha *,,multiplicato``* so`zidan olinagan bo`lib, *,,ko`paytma``* degan ma`noni bildiradi. Bu esa Eyler funksiyasining xossasidir.

Nul- lotincha *,,nullum``* so`zidan olingan bo`lib, *,,hech nima``, ,,hech qanday``* degan ma`noni anglatadi. Nolning belgilanishi eramizdan avvalgi 1 mingyillikning o`rtalarida paydo bo`lgan.

Numeratsiya- lotincha so`zdan olingan bo`lib, *,,hisoblayman``* degan ma`noni anglatadi.

Qo`shish- lotincha *,,plus``* so`zidan olingan bo`lib, *,,ko`p``* degan ma`noni anglatadi. Bu belgi qo`shishni ifodalashda, yana musbat sonlarni ifodalashda ishlatiladi. Bu belgini chexiyalik olim Ya.Vidman (1849 y) fanga kiritgan.

Skalyar- lotincha *,,scalaris``* so`zidan olingan bo`lib *,,……..``* degan ma`noni anglatadi. Bu kattalik har bir qiymatni bitta son bilan ifodalanadi. Bu belgini irlandiyalik olim U.Gamilton(1843 y) fanga kiritgan.

Xarakteristika- grekcha *,,character``* so`zidan olingan bo`lib, *,,belgi`` , ,,o`ziga xos xususiyat``* degan ma`noni anglatadi. O`nli logarifmning butun qismini avstriyalik olim G.Brigs (1624 y) fanga kiritgan.

O`rin almashtirishlar- har biriga berilgan n ta elementning hammasi kiradigan birlashmalarga aytiladi. Bir o`rin almashtirish boshqasidan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladi. Masalan:

a,b,c elementlaridan *abc, acb, bac, bca, cab, cba* 6 ta o`rin almashtirish tuzish mumkin.

Kompleks sonlar- deb, $Z=a+bi$ ko`rinishidagi sonlarga aytiladi. Bu yerda *a,b€R* haqiqiy sonlar, *i* alohida turdagi yangi son bo`lib, uning kvadrati minus birga teng, ya`ni $i^2=-1$. $Z=a+bi$ kompleks sonda *a*-uning haqiqiy qismi, *b* soni esa uning mavhum qismi deyiladi.

Inglizcha – O’zbekcha.

Matrix – matritsa.

Inequalities – tengsizlik.

Positive matrix – Musbat matritsa.

Hilbert space – Gilbert fazosi.

Unitary matrix – Unitar matritsa.

Singular value – Singulyar qiymat.

Idempotent matrix – Idempotent matritsa.

Mean – O’rta qiymat.

Arithmetic – O’rta arifmetik.

Harmonic mean – O’rta garmonik.

Geometry mean – O’rta geometrik.

Eucledian space – Evklid fazosi.

Operator – Operator.

Induction – Induksiya.

Spectral norm – Spektral norma.

Cartesian product – Dekart ko’paytma.

Scalar product – Skalyar ko’paytma.

Complex number – Kompleks sonlar.

Linear space – Chiziqli fazo.

Symmetric product – Simmetrik ko’paytma.

Orthonormal basis – Ortonormal bazis.

Exponential map – Eksponensial akslantrish.

Couchy – Schwartz inequality – Koshi Shvartz tengsizligi

Quadratic form - kvadratik forma

Positive definite - musbat aniqlangan

Negative definite - manfiy aniqlangan

Determinant - determinant

Inverse matrix - teskari matritsa

Transpose matrix - transponirlangan matritsa

Index - indeks

Diagonal – diagonal

Definition – ta`rif

Teorem – teorema

Property – xossa

Equation – tenglama

Equality – tenglik

System – sistema

Symmetric matrix – simmetrik matritsa

Coefficient – koeffitsiyent

Function – funksiya

Complex - kompleks

Proof – isbot

System of equations – tenglamalar sistemasi

Formula – formula

Example – misol

Elementary matrix – elementar matritsa

Unknown – noma`lum

Linear form – chiziqli forma

Rank of matrix – matritsa rangi

Canonic form – kanonik ko`rinish

Root – ildiz

Characteristic – xarakteristika

Theory – nazariya

Element – element

Column – ustun

Line – satr

Coordinate – koordinata

Real – haqiqiy

Affinor – chiziqli almashtirish

Adabiyotlar

1. I. A. Karimov “Keksalarni e’zozlash yili” davlat dasturi to’g;risida **(“**O‘zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to‘plami, 2015 - y, 8-son, 91-modda”).

2. Karimov I.A “Yuksak ma’naviyat-yengilmas kuch” Toshkent-2008 yil

3. Karimov I.A “Barkamol avlod dasturi” Toshkent-2010

4. R. Bhatia. Matrix analysis. Springer-Verlag, New York, 1997.

5. R. Bhatia. Positive definite matrices. In: Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, 1997.

6. F. Nielsen, R. Bhatia. Matrix Information Geometry. Springer, XII, 2013, 454.

7. Г. Худойберганов, А. К. Ворисов, Х. Т. Мансуров. Комплекс анализ. Т. Университет, 1998.

8. W.Pusz, S.L Woronowicz “Functional calcules for sesqui-linear forms and purification map.Reports on Mathematicall.Physics.Vol.8,1975,P.159-170.

9. www.google.com.

10. www.ziyonet.uz

11. www.exponenta.ru

12. www.eknigu.com/lib/mathematics/

13. www.wikipediya.com