

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika –matematika fakulteti

“Fizika” kafedrasi

5140200 - “Fizika” ta’lim yo’nalishi bo’yicha bakalavr darajasini olish uchun

Izzatov Eson Baxtiyor o’g’lining

“Navye-Stoks tenglamalarini FEMlab muhitida sonli modellashtirish”

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

“Ish ko’rildi va himoyaga
ruxsat berildi”

Ilmiy rahbar: _____ dotsent K.A.Samiev
“ _____ ” _____ 2014 y.

Kafedra mudiri _____ t.f.n.S.A. Boltayev

Taqrizchi: _____ BDU Axborot
texnologiyalari dots. O. I. Jalolov

“ _____ ” _____ 2015 y.

“ _____ ” _____ 2015 y.

“Himoya qilishga ruxsat berildi”

Fakultet dekani _____ prof.Sh.M.Mirzayev

“ _____ ” _____ 2015 y.

Buxoro-2015 y.

M U N D A R I J A

KIRISH

I. NAVYE-STOKS TENGLAMALARINI ISSIQLIK JARAYONLARI UCHUN QO'LLANILISHI

1.1. Navye-Stoks tenglamalarining tahlili

1.2. FEMLAB muhitida energiya tenglamasini chekli elementlar usulidan foydalanib yechish

II. NAVYE-STOKS TENGLAMALARINI FEMLAB MUHITIDA SONLI MODELLASHTIRISH

2.1. Issiqlik jarayonlarini Femlab muhitida Navye-Stoks tenglamalari yordamida sonli modellashtirish

2.2. Konveksiyaga oid sinov masalasini Femlab muhitida sonli modellashtirish.....

XOTIMA

ADABIYOTLAR

Kirish.

Bizga bitiruvchilar emas, maktab

ta'lim va tarbiyasini ko'rgan shaxslar kerak

I. A. Karimov

Prezidentimiz Islom Karimovning «Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari» kitobida elektroenergetika tizimini modernizatsiya qilish, energiya iste'molini kamaytirish va uni tejashning samarali tizimini joriy etish bilan bog'liq dolzarb vazifalar va ularning yechimlari atroflicha tahlil etilgan. Shundan kelib chiqqan holda mamlakatimizda noan'anaviy va qayta tiklanuvchan energiya manbalaridan foydalanish, tejamkor, zamonaviy texnologiyalarni qo'llash borasidagi ishlar ko'lami tobora kengaymoqda. Prezidentimiz Islom Karimovning 2008 yil 15 iyulda qabul qilingan «Innovatsion loyihalar va texnologiyalarni ishlab chiqarishga tatbiq etishni rag'batlantirish borasidagi qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida»gi qarori ilm-fanning boshqa sohalari singari fizika-texnika yo'nalishidagi ilmiy izlanishlarni ham yanada takomillashtirish, yaratilayotgan ixtirolarni ishlab chiqarishga keng joriy etishda o'z samaralarini berayotir. Ilm-fanimizning bu sohadagi yutuq va ixtirolari jamiyatimizning yanada taraqqiy etishi, xalqimiz farovonligining oshishi, ekologik barqarorlikni ta'minlashda o'zining yuksak samaralarini berishi shubhasiz.

Mavzuning dolzarbligi. Issiqlik jarayonlarini tavsiflovchi matematik ifodalarni analitik usullar bilan yechish, ko'p miqdorda tajribalar o'tkazmasdan nazariy jihatdan qurilmani tajribadan o'tkazish mumkinligini bildiradi. Ko'pchilik hollarda qaralayotgan qurilma murakkab geometrik tuzilishga ega bo'ladi. Bunda issiqlik jarayonini tavsiflovchi ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarga chegaraviy shartlarni qo'yish hamda uni shu chegaraviy shartlar asosida yechib bo'lmaydi. Issiqlik va massa alamashinish jarayonlarini tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasi Energiya, Navye-Stoks, uzluksizlik tenglamalarni sonli usullardan foydalanib yechiladi. Sonli usullarga misol qilib

chekli ayirmalar, chekli hajmlar va chekli elementlar usullarini misol qilish mumkin. U tenglamalarni yechish uchun chekli hajmlar usulida maxsus algoritmlar SIMPLE, SIMPLER va SIMPLEC lar taklif etilgan[2,3,4]. Shunga o'xshash murakkab algoritmlar asosida differensial tenglamalar sistemalarini ayirmali sxemalarga ajratish, hisoblash algoritmlarini kompyuter dasturlash tillariga o'tkazish va nazariy hisoblashlar o'tkazish juda uzoq vaqtni talab etadi.

Ayni paytda yuqoridagi muammolarni hal etish uchun dasturiy muhitlar (programma paketlari) ishlab chiqilgan. Bularga misol qilib Comsol Femlab Multiphysics chekli elementlar paketini olish mumkin.

Bunday turdagi dasturiy muhitlarning qulayligi shundaki, ulardan foydalanib juda qisqa vaqtda issiqlik va massa alamashinuviga oid masalalarni sifatli hal qilish mumkin.

Chekli hajm usuli 1970 yillarda Hind olimi S.Patankar va Spoldinglar tomonidan asoslangan. Chekli elementlar usuli ustida hozir ham tadqiqotlar olib borilmoqda. Bu usullarga mos FEMLAB, ANSYS, TRANSYS, FLOVENT kabi dasturiy ta'minotlar ham yaratilgan.

Yuqorida aytib o'tilgan usullarning asosiy kamchiligi ularning aynan bir jarayon uchun taklif etilganligidir. Qaysidir issiqlik jarayonini matematik modelini yechishda bu usullarning birini tanlash va uni tajribada sinash juda ko'p vaqt va mablag' talab etadi. Matematik model esa aynan shu ikki muammoni hal qilish uchun ishlab chiqiladi.

Ishning maqsadi. Issiqlik jarayonlarini Femlab dasturiy muhitida Navye-Stoks tenglamalari yordamida sonli modellashtirish.

Tadqiqot maqsadiga erishish uchun quyidagi ilmiy-texnikaviy vazifalar belgilab olindi:

Issiqlik jarayonlarini Navye-Stoks tenglamalari yordamida ishlash

FEMLAB dasturiy muhitida masalalarni chekli elementlar usulidan foydalanib yechish ketma-ketligini o'rganish.

Navye-Stoks tenglamalarini FEMLAB dasturiy ta'minotida sonli modellashtirish.

Bitiruv malakaviy ishining o'rganilganlik darajasi. Chekli elementlar usullarining imkoniyatlari batafsil yoritildi.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti. Femlab muhiti.

Tadqiqot obyekti. Navye-Stoks tenglamalari.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy farazi. Sonli usullardan foydalanish.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosi. Sonli usullar.

Tadqiqot usuli. Issiqlik jarayonlarini o'rganishda ko'p vaqt va mablag' talab etadi. Buning oldini olish maqsadida dasturiy ta'minotlar yordamida tezroq va osonroq tadqiq qilish. Tenglamalarni chekli elementlar va Femlab muhitida yechish.

Ilmiy yangiligi. Navye-Stoks tenglamalarini Femlab muhitida yechish imkoniyatlarini aniqlash va tavsiflash.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati: issiqlik qurilmalaridagi jarayonlarni tavsiflovchi Navye-Stoks tenglamalarini kompyuter texnologiyalaridan foydalanib yechish orqali tajribalar uchun ketadigan mablag'ni tejash.

Bitiruv malakaviy ishining tarkibi va hajmi. BMI kirish, 2 bob, 58 bet har bir bob yakunida xulosalar, xotima va adabiyotlardan tashkil topgan.

I. NAVYE-STOKS TENGLAMALARINI ISSIQLIK JARAYONLARI UCHUN QO'LLANILISHI

1.1. Navye-Stoks tenglamalarining tahlili

Suyuqliklar oqimi, oqim turlarini o'rganish va izohlashda, oquvchan muhitning o'zaro ta'sirini hamda qattiq jismning tashqi va ichki gidrodinamikasi masalasini yechishda va shunga o'xshash boshqa ko'plab masalalarni o'rganishda yopishqoq suyuqlikning harakat tenglamalari sistemasini va kuchlanishlarini tadqiq qilish talab etiladi. Uzoq vaqt mobaynida bu tenglamalarining analitik yechimi oddiy xususiy masalalarni yechishda ya'ni juda kichik Reynolds sonlarida ularning umumiy xossasi yechimi mavjudligi aniqlangan. Masalan: tekislikdagi yopishqoq oqimining yechimi $Re \ll 5,5$ uyurmali ip bilan ulanganda hosil bo'ladi. Boshqa masalalar uchun bu Reynolds sonlari judayam kichik. Issiqlik energiyasi va ko'plab boshqa sohalarda bunday Reynolds sonlari uchramaydi. Shu sababli ham natijada amaliy muhim masalalarni hisoblashning boshqa usullariga olib keladi va ular orasida shunday topamizki, natijada aniq yechimning imkoniyatlarini kengaytiradi. Yopishqoq oqimining aniq yechimini gidrodinamik va akustik oqimlariga qo'llash imkoniyati ko'rib chiqiladi. Bu usul muhandislik amaliyotida keng qo'llanilishiga olib kelmoqda, lekin taxminiy test hisob kitoblarini hisoblashda foydali hisoblanadi.

Navye-Stoks tenglamalari sistemasini qo'llashning boshqa yo'nalishi turbulent nazariyasining poliempirik tenglamalari yordamida shu sistemaning sonli yechimi hisoblanadi. Bu yo'nalish juda foydali bo'lib, ularni amalga oshirish uchun Fluent, Esi_CFDrc, Flow Vision va boshqa matematik dasturlar ishlab chiqiladi. Olingan natijalar o'zining yaxshi ko'rgazmaliligi bilan xarakterlanadi. Lekin shu vaqtning o'zida natijalar turg'un emas va natijalar qiyoslashni talab qiladi. Shu jumladan tajriba natijalarini ham. Shunday bo'lsa ham ushbu masalalar yechimlarining elektron bazalari doimiy to'ldirilib boriladi va loyihachilar tomonidan qo'llaniladi. Harakat tenglamalarini olishning boshqa yo'nalishini xususiy masalalarning hisob sxemasini tuzish hisoblanadi. Shunday masalalarga

misol sifatida turbulent oqimni keltirish mumkin. Shu yo'l bilan olingan natijaning o'ziga xosligi shundan iboratki, olingan yechimda barcha Reynolds sonlari uchun imkoniyat bo'ladi, ya'ni, turbulenlik hosil bo'ladigan qiymatlarda ham. Buning manosi shundan iboratki kichik Reynolds sonlari klassik yechimlarda fizik jarayon xossalari xarakterlamaydi va matematik modelning kamchiliklarini ko'rsatadi. Ushbu harakat tenglamalarini olish yo'li to'g'ri hisoblash sxemasini tuzish uchun xususiy jarayonni yaxshiroq tushunishni talab qiladi. Yuqorida qarab chiqilgan muammolar tahlili shuni ko'rsatadiki turli xarakterdagi oqimlarni hisoblash usullarining mavjudligi Reynolds soni bo'yicha chegaralanishning paydo bo'lish sababini, Navye-Stoks tenglamalari barcha xususiy yechimlari sababi mavjudligidan kelib chiqadi. Bu savolga mavjud sabablardan biri shunday farazlarning tahlili javob bo'ladi. Bu faraz assosida o'rtacha p bosim hisoblash uchun tenglamaga tegishli. p bosimni o'lchash uchun qabul qilingan chiziqli tenglama yordamida qiyoslanib aniqlanadi.

Navye-Stoks tenglamasi oquvchan muhitning eng ko'p tarqalgan xususiy holi bo'lgan oqimni bayon qilishga ya'ni yopishqoq Nyuton suyuqligini bayon qilishga mo'ljallangan. Bu tenglamani keltirib chiqishda asos bo'lib Navye kuchlanishlarida yozilgan harakat tenglamasi ya'ni uning kordinata ko'rinishdagi ko'rinishi asos bo'lib xizmat qiladi va u quyidagicha ko'rinishga ega. Navye-Stoks tenglamasi oqim muhitining ko'proq tarqalgan bo'linma xilining oqimini ko'rsatib berish uchun tayinlangan.

$$\begin{aligned} X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{du_x}{dt} \\ Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{du_y}{dt} \\ Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Bu tenglamaning asosiy xulosasi uchun asos bo'lib koordinatali ko'rinishga ega kuchlanishlarda harakat tenglamasi xizmat qiladi. Bu yerda X,Y,Z-solishtirma

massali kuch m^2/s , p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} -kordinata o'qida meyoriy kuchlanishning proyeksiyasi Pa, ρ -zichlik kg/m^3 , τ -urinma kuchlanish Pa,

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{du_x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

x ; u_x , u_y , u_z - o'qlar uzinasida parchalarning to'liq tezlanishi kordinata o'qida tezlik proyeksiyasi. (1.1) tenglama to'qqizta nomalumga ega va o'zining tugallanishi uchun yana oltita tenglama talab qiladi.

Navye-Stoksning tenglamasi noma'lum sonini qisqartirish maqsadida olingan edi va amaliy foydalanish uchun ko'proq foydalidir. Natijada siqiladigan Nyuton suyuqligi tenglamaning keyingi tartibi olingan edi :

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \Delta^2 u_x &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \Delta^2 u_y &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \Delta^2 u_z &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Bu yerda ρ_x , ρ_y , ρ_z , - kordinata o'qida bosim proyeksiyasi, ν -kinematik yopishqoqlik m^2/s . Tenglamaning bu tartibi to'rtta nomalumga ega va (1.1.1) sistema kabi ochiq emas. (1.1.1) va (1.1.2) tenglamalar o'ng qismida uchta konvektivlik tezlashtirish ishtirokiga ko'ra nochiziqli bo'lib hisoblanadilar.

(1.1.1) va (1.1.2) tenglamalar sistemasining tahlili.

1. Tartibli kuchlar qismida tartiblarning farqi tenglamalar yechimining har xil natijalardan iborat ekanligidir. (1.1.1) tenglamalar sistemasini yechib, biz ρ_{xx} , ρ_{yy} , ρ_{zz} tartibli kuchlanishning komponentlarini aniqlaymiz ya'ni hisoblashning oxirgi natijasini olamiz. (1.1.2) tartibni yechib, biz $\rho_x = -\rho_{xx}$, $\rho_y = -\rho_{yy}$, $\rho_z = -\rho_{zz}$ bosim komponentlarida ρ miqdorining qayta hisoblanish talab qilinadigan oraliqdagi natijasini olamiz. Bu qayta hisoblash quyidagi (1.1.1) chiziqli tenglama yordamida bajariladi:

$$\rho = \frac{\rho_x + \rho_y + \rho_z}{3} \quad (1.1.3)$$

Shunday qilib (1.1.3) tenglama ρ hisoblash miqdori bosimning komponentidan o'rtacha arifmetik bo'lib hisoblashi ko'rinib turibdi. Natijada, (1.1.2) tenglamaning nochiziqli xarakteri va hisoblash natijalarini o'rtalashtirishning chiziqli qonuni haqidagi taxmin o'rtasida qarama qarshilik o'ringa ega bo'ladi.

Umumiy vaziyatda bunga yo'l qo'yish noto'g'ri bo'lib hisoblanadi va oqim jarayonini hisoblashning ijobiy natijalariga olib kelmaydi. Bundan tashqari (1.1.3) tenglama faqat chiziqli tenglama uchun to'g'ri bo'lgan yechishlar superpozitsiyasining teoremasini aniq ifodalaydi.

Hisoblash natijalarini o'rtalashtirish masalasi fanning boshqa sohalarida ham mavjud. Masalan: mexanikaga oid, termodinamika va issiqlik almashtirish nazariyasida ko'pgina masalalar mavjud, ularda nochiziqli tenglamalarning yechish natijalari nochiziqli formulalar bo'yicha aniqlanadi.

Biroq, ba'zi bir masalalar uchun bunday yo'l noto'g'ri bo'lib hisoblanadi, lekin faqat qo'shimcha yo'l qo'yishdan foydalanishda (3) o'rtalashtirishning chiziqli qonuni nochiziqli funksiya uchun to'g'ri deb qabul qilib olish zarur. Bunday yo'l konvektiv tezlashtirish yoki o'rtalashtirish masofani qisqartirishda e'tiborsizlik qilish mumkin bo'lgan masalalar uchun bajariladi. Oxirgi amalning geometrik interpretatsiyasi to'g'ri chiziqni egri chiziqqa almashtiradi.

2. (1.1.3) tenglama semantik aniqsizlikka ega chunki yaqinlashgan bo'lib hisoblanadi. Ko'proq to'g'ri bolib (1.1.3) tenglamada yaqinlashish tengligining belgisini ishlatish hisoblanadi. Belgilangan qarama qarshilik yaqinlashishga aniqlikdan Navye-Stoks sistemasining o'zgarishiga olib keladi.

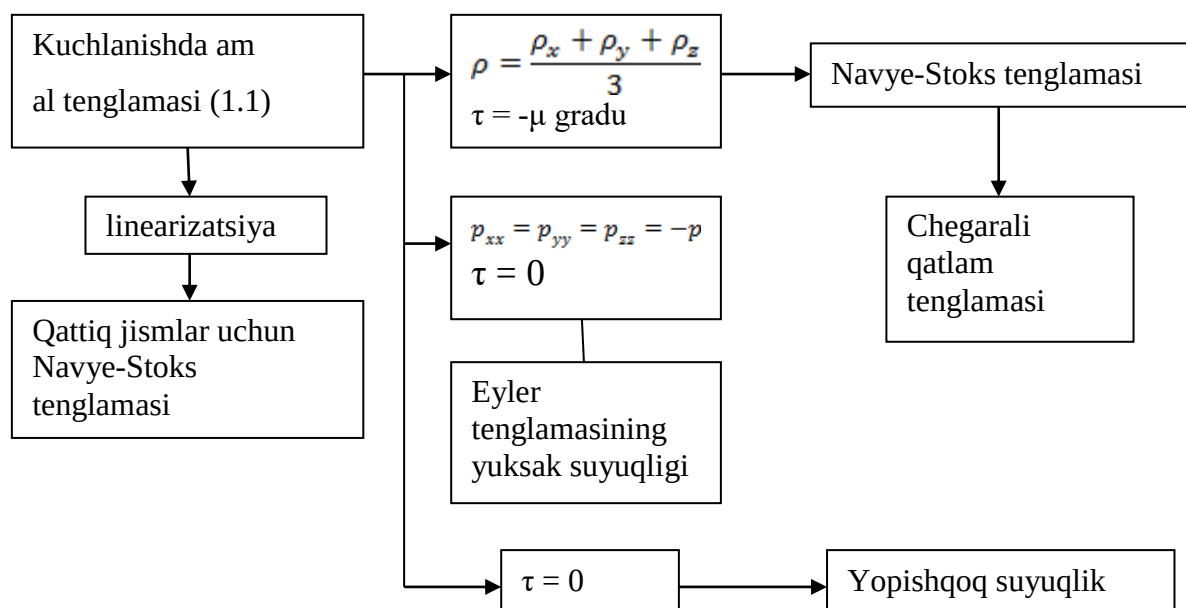
3. (1.1.3) tenglamaning to'g'riligi uchun o'rtalashtirish masofasining kamligini e'tiborga olish (1.1.2) sistema chiziqli bo'lishi kerakligini bildiradi, ya'ni o'ng qismida faqat bo'linma, vaqt bo'yicha hosila ishtirok etishi kerak, konvektiv

tezashtirishlar esa nolga intilishlari kerak. Bu esa agar tezlik komponentlari konvektiv tezashtirishlar uchun ifodalarda kichik bo'lib hisoblashni iloji bor.

Hozirgi vaqtda bu sistemaning ma'lum aniq yechimini ko'rsatilgan xulosalar tasdiqlaydilar. Chunki ular $Re \approx 10^{-3} 5,5$ bo'lganda to'g'ridir [2,7] to'g'ridir.

4. Hozirgi vaqtda oqim muhitining uchta modellari umumiy tan olingan bo'lib hisoblanadilar: benuqson, yopishqoqsiz va ko'proq yopishqoq suyuqlik. Bu modellarning hammasi shartlar sistemasi bilan o'zaro bog'langan va har qanday oxirgi o'ringa da'vogar qo'shimcha tenglamalar bu o'zaro bog'langanini hisobga olish kerak. 1.1.1-chizmada amallarning umumiy tenglamasidan kelib chiqadigan oquvchan muhitning matematik modellari va shartlarining o'zaro bog'lanishi ko'rsatilgan.

1.1.1-chizmaga ko'ra (1.1.1) tenglamadan oquvchan muhitning uchta modeli uchun tenglamalarining bo'linma hodisalarini olish mumkin. Shunda Eyler tenglamasi ikkita yo'l bilan yechilishi mumkin: Navye-Stoks tenglamasidan ($v=0$ sharti bo'yicha) va ikkinchi shart (1.1.1) tenglama yordamida yechiladi. Oxirgi yo'l ko'proq to'g'riroqdir, chunki u birinchi yo'ldan kelib chiqadi, Eylerning tenglamasiga yaqinlashdan emas, balki aniq ekanligi xulosasiga olib keladi.



1.1.1.-chizma. Oquvchan muhitlarning har xil modellari uchun yechish algoritmi va modellarning bog'liqligi sxemasi.

Yopishqoq suyuqlik modeli analitik usuldan foydalanib hisoblanishi kerak, chunki Navye-Stoks tenglamasi bilan hech qanday bog'langan emas, oltita nomalumga ega va oxirgi ifoda bo'lmagan hisoblanadi. Shunga qaramay berilgan model ba'zi bir masalalarini yechish uchun ishlatilishi mumkin.

Navye-Stoks tenglamasining tahlili.

1. Suyuqliklar va gazlar oqimi jarayonlarini hisoblash uchun hozirgi zamon amaliy dasturlari paketlari uchun Navye-Stoks tenglamasini yopiq holatga keltirishga imkon beradigan turbulentlik nazariyasining har xil yaqinlashgan (yarimemperik) tenglamalari bilan birga foydalanadilar. Natijada tenglamalar sistemasini yopiq holatga keltirganimiz va uni ayirmali sxemalarga aylantiramiz. Bunday sistemaning yechimini yaqinlashgan deb hisoblanishi kerak, bu esa aytib bo'lmaydigan natijalarda ko'rinishi mumkin.

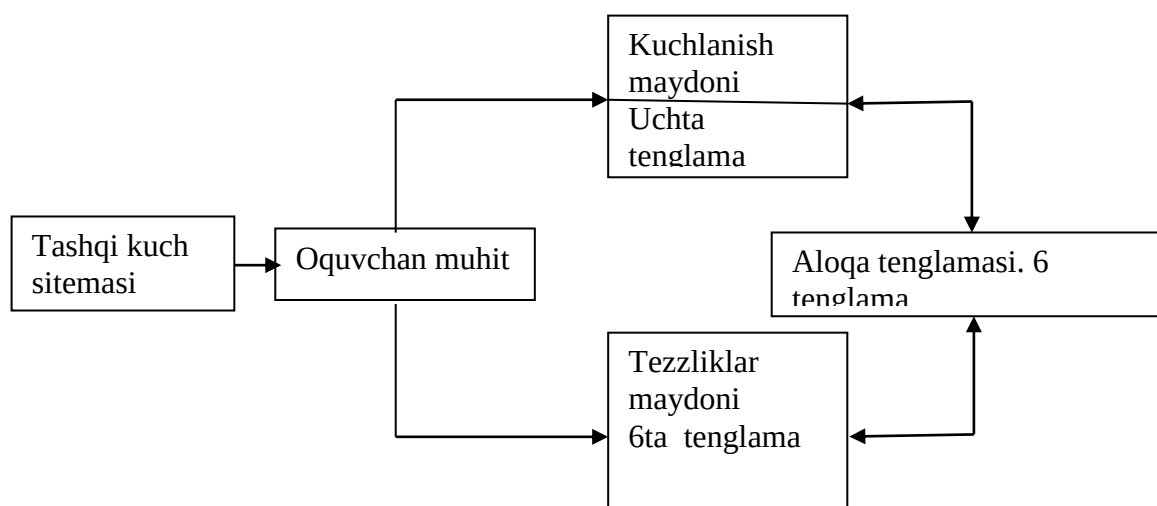
2. Yo'l qo'yilgan tahlillardan kelib chiqadiki, tenglamalar sistemasining imkoniyatlarini mohiyatini yaxshilashning iloji yo'q. O'xshashlik bo'yicha boshqa sohada tutash muhitlar mexanikasining tenglamalarida ishlatilgan taranglik nazariyasining boshqa tenglamalari bilan uni to'ldirib, (1.1.1) tenglama asosida tenglamaning yopiq sistemasini tuzish yo'lini ko'proq maqul deb hisoblash kerak.

3. Bunday sistemaning har xil tenglamalarining o'zaro bog'lanishini 1.1.2-chizma bilan illyustratsiya qilish mumkin. Taranglik maydoni uchta tenglamaga egadir, chunki kuch vektorini uchta tuzuvchiga taqsimlash mumkin. Deformatsiyalarning, tezliklarining maydoni oltita tenglamadan iborat, chunki chiziqli va burchakli deformatsiyalarning asosiy vektorlari taqsimlangan. Natijada yopiq sistemani hosil qiluvchi to'qqizta tenglamani olamiz. Sxemadan kelib chiqadiki, ba'zi bir bo'linma masalalarni aloqa tenglamalaridan foydalanib ikkinchi maydon parametrlarida keng natijalarni qayta hisoblash bilan har qanday maydon uchun tenglamalardan foydalanish bilan yechish mumkin.

4. Deformatsiyali amal nazariyasida keltirilgan oltita tenglamadan ma'lum sistema vektori qoidalari asosida chiqarilgan va oqim tezligining tushunchasidan foydalaniladi. Ayrim masalalarning taxminiy yechishi uchun tenglamalarning bu

sisitemasidan foydalanishida oqimning chiziqli va burchakli tezliklariga chegaralashtirish kiritilishi zarur. Shunday qilib, tenglamaning bunday tartibi nochiziqli mexanika sistemalari muammolarini ko'rsatib beradi. Tenglamalarning bu sistemalaridan foydalanishda amaliy natijalari yo'q, bu esa bo'linma masalalarining aniq yechilishi uchun undan foydalanish qonuniyligini bevosita ko'rsatadi.

5. Hozirgi vaqtda suyuqliklar oqimi masalalari bosimlar maydoni uchun (1.1) tenglamalardan foydalanish bilan yechiladi, bu esa oqimlarni ko'rsatib berish uchun hamda zarur bo'lgan tenglamalarning yo'qligi bilan tushuntiriladi.



1.1.2. -chizma. Fizikaviy maydonlar va ularni ko'rsatib berish uchun tenglamalarning maksimal soni

6. Navye-Stoks tenglamalarni yechish sxemasining tahlili natijasida yaqinlashish aniqligi bilan sistema statusini o'zgartirilishini talab qiladigan qarama-qarshilik topilgan.

Har qanday masalani asosida ikkita tenglamalar sistemasi yotgan uchta usullardan bittasini foydalanish bilan yechish mumkin:

1) Asosiy tenglama kuchli maydon va tezliklar maydonini ko'rsatib beradigan to'qqizta tenglamalarni kiritadi.

2) Qo'shimcha sistema kuchli maydon va aloqa tenglamalarini kiritadi.

3) Qo'shimcha sistema tezliklari maydonining tenglamalarini va aloqa tenglamalarini kiritadi.

Tenglamalarning yopiq sistemalarini tuzish uchun ularning yana ikkita sistemalaridan foydalanish usullarini yozish va ishlab chiqish zarur. Uzlüksizlik tenglamalari tezlik maydoni uchun umumiy tenglamalarni oxirgi sistemani harakatda bo'lgan suyuqlik mexanikasi tenglamalari tavsiflashi nuqtai nazardan keltirib chiqariladi.

1.2. Femlab muhitida energiya tenglamasini chekli elementlar usulidan foydalanib yechish.

Diskretlashtirish usullari Qo'yilgan masalani sonli yechish asosan uni diskretlashtirish usullariga asoslangan. Bunga ko'ra uzluksiz matematik model chekli sondagi erkinlik darajasiga ega diskret modelga ko'chiriladi.

Fazoviy diskretlashtirish usullari:

- chekli elementlar usuli;
- chegaraviy elementlar usuli;
- chekli ayirmalar usuli;
- chekli hajmlar usuli;
- spektral usullar;
- erkin to'rlar usuli.

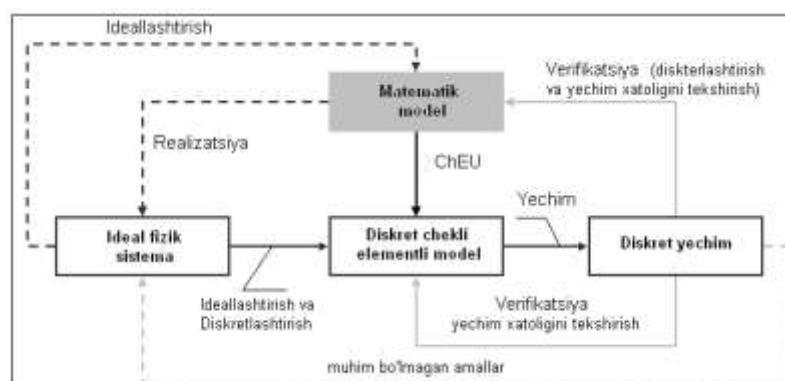
Bu usullar ichida eng ko'p va samarali qo'llanilib kelinayotgani bu chekli elementlar usulidir.

Chekli elementli tahlil jarayoni

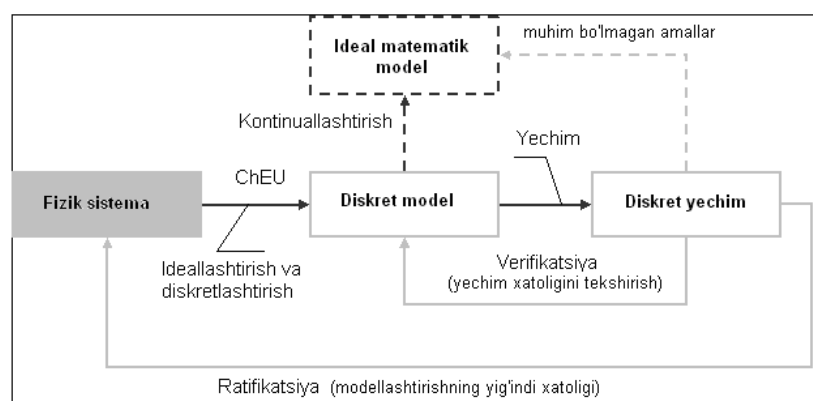
Bu jarayonni ikki qadamli deb qarash mumkin:

- matematik talqin;
- fizik talqin.

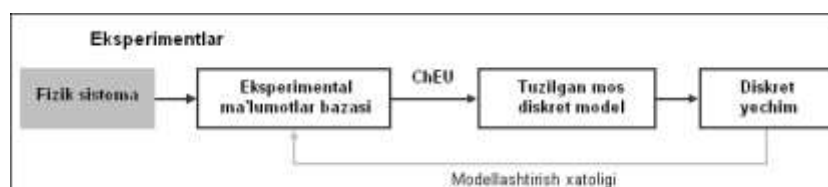
Bularni sxemalarda tushuntiramiz:



1.2.1-chizma. Chekli elementlar usulining matematik tamoyillari.

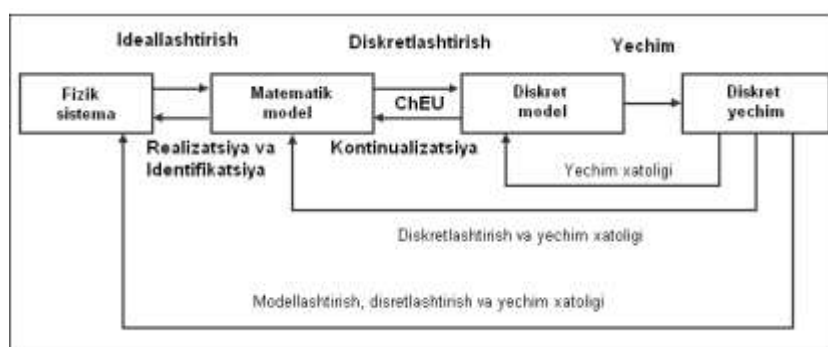


1.2.2-chizma. Chekli elementlar usulining fizik tamoyili.



1.2.3-chizma. Diskret modelni aniqlashtirish jarayoni tasviri.

Chekli elementlar usulining asosiy qadamlari – bu ideallashtirish, diskretlashtirish va yechish (1.2.4.-chizma.).



1.2.4-chizma. Sonli modellashtirishning asosiy qadamlari: ideallashtirish; diskretlashtirish; yechish.

Ideallashtirish – bu fizik sistemadan matematik modelga o'tish jarayoni. Masalan, deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasida tekis plastinka shaklidagi muhandislik qurilmasi – bu real fizik sistema, shu plastinkaning kuchlanishini tahlil qilish uchun yetarlicha nazariy bilimga ega bo'lgan muhandis quyidagi matematik modellardan foydalanishi mumkin:

- juda yupqa plastinkaning membrana egilishi nazariyasiga asoslangan modeli;
- yupqa plastinkaning Kirxgoff-Lyav klassik nazariyasiga asoslangan modeli;
- yetarlicha qalin plastinkaning Midlin-Reyssner nazariyasiga asoslangan modeli;
- juda qalin plastinkaning uch o'lchovli elastiklik nazariyasiga asoslangan model.

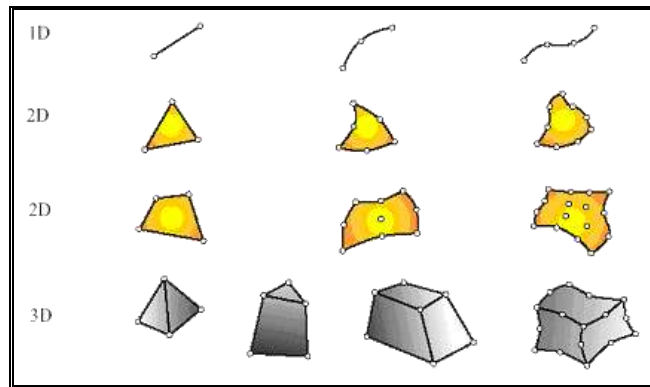
Diskretlashtirish – sonli modellashtirishni amaliyotga qo'llash mumkin bo'lishi uchun fizik sistemaning matematik modeli juda sodda bo'lishi shart emas, bunda eng asosiy maqsad vaqt va fazo bo'yicha berilgan xusisiy hosilali tenglamalar bilan ifodalangan modelning cheksiz erkinlik darajasiga ega bo'lishi va buni chekli songa keltirish. Bunday model diskret model deyiladi. Demak diskretlashtirish fazo va vaqt koordinatalari bo'yicha amalga oshiriladi. Analitik yechimni hamma vaqt ham olib bo'lmaydi.

Shartsiz (oshkor) modellastirish - bu buror tayyor universal matematik modelgan foydalanish.

Oshkormas modellastirish - bunda matematik modelni qurishga juda muhim holat deb yangidan qaraladi, maxsus chekli elementli algoritim va dasturlarga murojaat qilinadi.

Chekli elementlarning ajralmas xossalari (atributlari)

Chekli elementlarning asosiy turlari va ularning ajralmas xossalari (atributlari) deb ataluvchi xossalarini qaraylik (1.2.2-chizma.) bular ularning xos o'lchamlari, tugun nuqtalari, elementning geometriyasi, erkinlik darajasi.



1.2.5-chizma. Bir, ikki va uch o'lchovli masalalar uchun chekli elementlarning asosiy turlari.

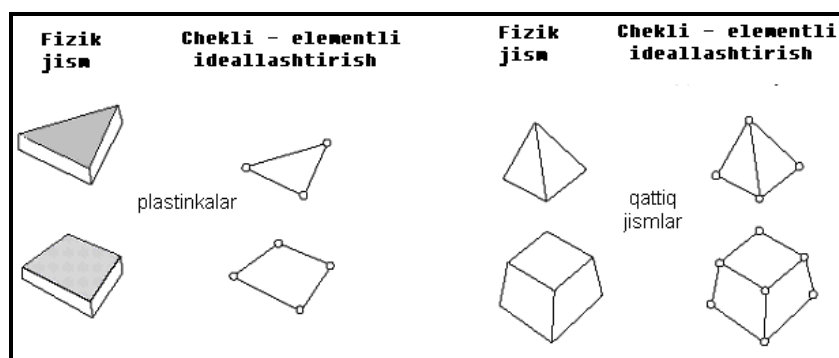
Chekli elementlar klassifikatsiyasi

1. Sodda konstruktiv elementlar. Sodda tuzilmaviy elementlarga misol qilib mexanikadan siljishga ishlaydigan sterjen, balka, quvur, to'sin, panellatni olish mumkin (1.2.6-chizma.). Bu elementlar tarixan dastlabki paytlardan qo'llanilib kelinmoqda. Ularni tavsiflovchi asosiy tenglamalar materiallar qarshiligi, elastiklik nazariyasi, qurilish mexanikasi fanlari nazariyalarida chiqarilgan.

Fizik qirilma (tuzilma)ning komponentalari	Matematik modelning nomi	Chekli elementli diskterlashtirish
	sterjen	
	balka	
	quvur	
	o'rtacha qalinlikdagi to'sin	
	panel	

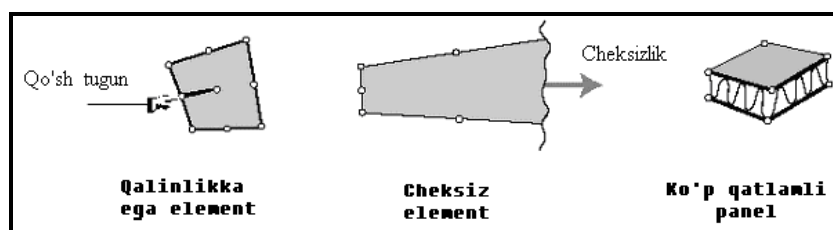
1.2.6-chizma.Sodda tuzilmaviy elementlar.

2. Kontinual chekli elementlar. Kontinual chekli elementlar tutash muhit (kontinuum)ning chekli hajmi yoki yuzasini ifodalaydi. Masalan, kontinual elementlarga plastinka, o'qqa nisbatan simmetrik elementlar, uch o'lchovli qattiq jisimli elementlar bularga misol bo'la oladi (1.2.7-chizma). Ularni tavsiflovchi asosiy tenglamalar tutash muhit mexanikasining umumiy munosabatlarida, xususan, elastiklik nazariyasida, chiqarilgan.



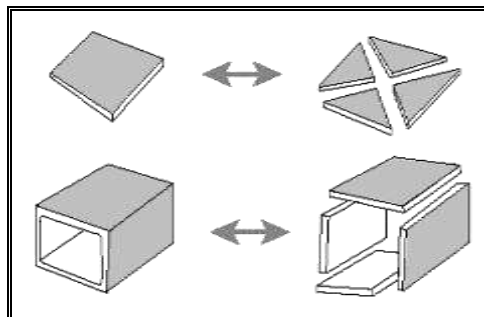
1.2.7-chizma. Kontinual chekli elementlar.

Maxsus chekli elementlar. Maxsus chekli elementlar ham konstruktiv va ham kontinual chekli elementlar xossalariga ega. Ular ham tutash muhit mexanikasining asosiy tenglamalaridan chiqariladi, ammo ular yechilayotgan masalaning fizik xususiyatlaridan bog'liq ba'zi xususiyatlarni o'z ichiga oladi. Masalan, yemirilish mexanikasida yoriqli element; ko'p qatlamli panel; chekli va cheksiz elementlar; tutash va jarimali elementlar; absolyut qattiq jisimli elementlar va hokazo (1.2.8-chizma.)



1.2.8-chizma. Maxsus chekli elementlar.

Makroelementlar. Makroelementlar chekli elementlar-ning ancha murakkab ko‘rinishidir. Ular soddaroq konstruktiv elementlarni terishdan hosil qilinadi. Odatda, makroelementga kiruvchi bunday chekli elementlar soni uncha katta bo‘lmaydi (1.2. 8-chizma.).



1.2.9-chizma. Makroelementlar.

Qism tuzilmalar. Qism tuzilmalar tuzilmaviy xususiyatlar yoki funksiyalar bilan ifodalangan makroelementlardan tashkil topadi. Odatda, ular to‘la qurilmani funksional komponentalarga bo‘lishdan kelib chiqadi. Masalan, samolyotning qanoti va fuzelyaji; osma ko‘prikning ravog‘i va arqonlari. Shuni ta’kidlash lozimki, hamma vaqt ham to‘la urilma, qism tuzilma va makroelementlar tushunchalari orasida farq bo‘lavermaydi. Shuning uchun superelement tushunchasi barcha turdagi makroelementlar va qism tuzilmalarning umumlashgan nomi sifatida sodda konstruktiv elementlar kombinatsiyasini ifodalashda qo‘llaniladi.

Quyidagi ko‘rinishdagi funksiyalar ketma-ketligining ba’zi asosiy xossalari va tushunchalarini qaraylik:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x). \quad (1.2.1)$$

Faraz qilaylik, bu funksiyalar mumkin bo‘lgan chegaraviy shartlar (yoki birgalikdalik sarflari) deb ataluvchi biror berilgan shartlarni qanoatlantirsin va ular shu chegaraviy shartlar va uzluksizlik darajasi bilan bog‘langan bo‘lsin.

Agar bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasini, masalan,

$$\phi = \alpha \phi_1 + \beta \phi_2 \quad (1.2.2)$$

kabi tuzish mumkin bo'lsa, u holda bunday funksiyalar biror R – chiziqli fazoning elementlari deb ataladi va ular uchun quyidagi xossalar o'rinli:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= \phi_2 + \phi_1 ; \\ (\alpha + \beta)\phi &= \alpha \phi + \beta \phi ; \\ \alpha(\phi_1 + \phi_2) &= \alpha \phi_1 + \alpha \phi_2 , \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

bu yerda α va β – sonli o'zgarmaslar.

ϕ_1 va ϕ_2 funksiyalarning skalyar ko'paytmasi $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle$ ular ustida bajarilgan quyidagicha operatsiyadan iborat:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x) \phi_2(x) dx. \quad (1.2.4)$$

ϕ funksiyaning o'lchovi (normasi) quyidagi formuladan topiladi:

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}. \quad (1.2.5)$$

(1.1.1) funksiyalar sistemasi chiziqli bog'lanmagan bo'ladi, agar faqat barcha $\alpha_k = 0$ bo'lgandagina quyidagi tenglik bajarilsa:

$$\alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots + \alpha_n \phi_n = 0. \quad (1.2.6)$$

Chiziqli bog'lanmagan funksiyalar ketma-ketligi to'la deyiladi, agar shunday N sonni va α_i o'zgarmaslarning jamlanmasini topish mumkin bo'lsaki, ularda o'sha R fazoda mumkin bo'lgan ixtiyoriy u funksiya uchun oldindan berilgan ixtiyoriy ε – kichik miqdor uchun quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$\left\| u - \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i \right\| < \varepsilon, \quad (1.2.7)$$

bu yerda ϕ_i – bazis funksiyalar, α_i – Furrye koeffitsiyentlari deb ataladi.

Agar normalashtirilgan bazis funksiyalar ortogonal bo'lsa, u holda

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \langle \phi_i, \phi_i \rangle = 1. \quad (1.2.8)$$

ϕ_i – chiziqli bog'lanmagan va to'la ketma-ketlikning har bir qo'shimcha hadi qo'shimcha α_i o'zgarmasning paydo bo'lishiga olib keladi. N -chi yaqinlashish uchun

$$u^N \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i$$

taqribiy tenglik o‘rinli.

Shunday qilib, $N \rightarrow \infty$ da

$$\|u^{(N)}\| \rightarrow \|u\|. \quad (1.2.9)$$

O‘zaro ortogonal ketma-ketlik uchun $u^{(N)}$ funksiyaning normasi quyidagicha:

$$\|u^{(N)}\| \rightarrow \sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \langle \phi_i, \phi_i \rangle \right\}}. \quad (1.2.10)$$

(1.10) dagi yig‘indining har bir hadi musbat, u holda N lar oshganda $\|u^{(N)}\|$ norma $\|u\|$ normaga quyidan yaqinlashadi, ya’ni $N < M$ da:

$$\|u^{(N)}\| \leq \|u^{(M)}\| \leq \|u\|. \quad (1.2.11)$$

L operatorni shunday aniqlaymizki, u biror p funksiyani yuzaga keltirad:

$$L(u) = p. \quad (1.2.12)$$

O‘zaro qo‘shma operatorning musbat aniqlanganlik xossasi bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi barcha notrevial u lar uchun ushbu

$$\langle L(u), u \rangle > 0 \quad (1.2.13)$$

talabdan aniqlanadi.

Vaznli tafovutlar usullari

Vaznli tafovutlar usulidan chekli elementlar usuliga o‘tishning matematik apparati global funksiyalar deb ataluvchi maxsus sinov funksiyalaridan foydalanishga asoslangan. Bu funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

- approksimatsiya tugunlarida funksiyalarning qiymati birga teng;
- approksimatsiya tugunlarini o‘z ichiga olgan chekli elementlardagina noldan farqli, butun sohaning qolgan barcha nuqtalarda esa nolga teng.

Vaznli tafovutlar usullari ushbu

$$F(u_0) = g, \quad x \in S, \quad (1.2.14)$$

chegaraviy shartlar bilan berilgan ushbu

$$L(u_0) = p, \quad x \in V, \quad (1.2.15)$$

differensial (yoki integral) tenglamalar sistemasining taqribiy yechimini qurishning sonli proseduralarini ifodalaydi, bu yerda x – ushbu x_1, x_2 va x_3 fazoviy koordinatalar; V – qaralayorgan soha; S – shu sohaning tashqi chegarasi; u_0 – aniq yechim.

Izlanayotgan u_0 – funksiya $\phi_k(x)$ – funksiyalar jamlanmasi orqali quyidagicha approksimatsiyalanadi:

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k, \quad (1.2.16)$$

bu yerda α_k – noaniq parametrlar; ϕ_k – to‘la ketma-ketlikka qarashli chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar.

Avvalambor bu funksiyalar barcha chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin va kerakli uzluksizlik darajasiga ega bo‘lsin, bunda tenglamaning o‘ng tarafi noldan farqli, deb talab qo‘yiladi. Chegaraviy shartni qanoatlantirish talabini yumshatish prosedurasini keyingi badda qarab chiqamiz.

ε – xatolik funksiyasi yoki tafovut funksiyasi:

$$\varepsilon = L(u) - p \neq 0. \quad (1.2.17)$$

Shuni ta’kidlaymizki, aniq yechimda ε nolga teng. O‘rtacha xatolik nolga teng bo‘lishiga erishish uchun biror vaznli funksiyalarli tafovutdan olingan integralni nolga teng deb faraz qilamiz:

$$\langle \varepsilon, w_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2.18)$$

bu yerda w_k – vazn funksiyalar jamlanmasi.

Vazn funksiyani tanlash yolidan bog‘liq quyida ba’zi vaznli tafovutlar usullarini qarab chiqamiz.

Kollokatsiya usuli. Bu usulga ko‘ra differensial tenglamalar ba’zi bir tanlangan nuqtalardagina qanoatlantiriladi. Berilgan approksimatsiyalovchi funksiyalar uchun

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k, \quad (1.2.19)$$

bu yerdan

$$\varepsilon = L(u) - p = \sum_{k=1}^N \alpha_k L(\phi_k) - p. \quad (1.2.20)$$

Agar sohaning N ta nuqtasida $\varepsilon = 0$ tenglikning bajarilishi talab qilinsagina noma'lum parametrlar aniqlanadi. Bu shartlarni xuddi (1.2.20) ko'rinishida yozish mumkin, agar $\Delta(x_k)$ – Dirak funksiyalarini $x_k \pm c$ intervaldan tashqaridagi x lar uchun $\Delta(x_i) = 0$ va

$$\int_{x_k - c}^{x_k + c} \Delta(x_i) dx = \int_{x_k - c}^{x_k + c} \Delta_i dx = 1, \quad (1.2.21)$$

bu yerda c – kichik miqdor (nuqtaviy kollokatsiya uchun $c \rightarrow 0$), deb kiritsak.

U holda kollokatsiya quyidagi operatsiyalarga ekvivalent:

$$\langle \varepsilon, \Delta_k \rangle = \langle L(u) - p, \Delta_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2.22)$$

Qism sohali kollokatsiya usuli. Bu usul xuddi kollokatsiya usuli kabi, faqat farq shundaki, bu usulda alohida nuqtalarda tafovut funksiyasini nolga tenglashtirish talabi o'rniga tafovut funksiyadan har xil sohalar bo'yicha olingan integralning nolga aylanishi sharti qabul qilinadi:

$$\int_{\Omega_i} \varepsilon d\Omega = 0.$$

Eng kichik kvadratlar usuli. Bu usulda xatolikning skalyar ko'paytmasi o'z o'ziga olinadi va natijada olingan biror F miqdor minimal bo'lishi talab qilinadi. Xatolik funksiyasini quyidagicha yozamiz:

$$\varepsilon = L(u) - p \quad (1.2.23)$$

Bunga ko'ra F funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$F = \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = \langle L(u) - p, L(u) - p \rangle. \quad (1.2.24)$$

Approksimatsiyalovchi funksiyani ushbu

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k, \quad (1.2.25)$$

ko'rinishda tanlab, F ni α_i bo'yicha

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2.26)$$

kabi differentsiallab, minimallashtiramiz. Bu quyidagini beradi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \langle \varepsilon, \varepsilon \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \{ \langle L(\Sigma \alpha_k \phi_k), L(\Sigma \alpha_k \phi_k) \rangle - \\ - 2 \langle L(\Sigma \alpha_k \phi_k), p \rangle + \langle p, p \rangle \}. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Agar L – chiziqli operator bo‘lsa, u holda (1.2.27) soddalashadi va u quyidagicha yoziladi:

$$2 \langle L(\Sigma \alpha_k \phi_k), L(\phi_k) \rangle - 2 \langle L(\phi_k), p \rangle = 0 \quad (1.2.28)$$

yoki

$$\langle L(\Sigma \alpha_k \phi_k) - p, L(\phi_k) \rangle = 0. \quad (1.2.29)$$

Momentlar usuli. Berilgan ushbu

$$\langle \varepsilon, w_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.30)$$

tenglamalar sistemasi uchun w_i – vazn funksiyalari sifatida to‘la ketma-ketlikdan iborat ixtiyoriy chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar jamlanmasidan foydalanish mumkin. Bir o‘lchovli masala uchun funksiyalarning sodda jamlanmasi – bu quyidagi qator:

$$1, x, x^2, x^3, \dots \quad (1.2.31)$$

Bunda yuqoriroq tartibli tafovutlar momentlarining nolga aylanishi ta’minlanadi:

$$\langle \varepsilon, x^i \rangle = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.32)$$

Bu protsedura momentlar usuli deb ataladi.

Galyorkin usuli. Galyorkin usuli vaznli tafovutlar usullarining xususiy holi bo‘lib, unda vazn funksiyalari bazis funksiyalari bilan mos tushadi.

Faraz qilaylik, quyidagi

$$L(u) - p = 0, \quad x \in V,$$

$$F(u) - q = 0, \quad x \in S$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k \quad (1.2.33)$$

approksimatsiyalovchi funksiya $F(u) = q(S)$, $x \in S$ – chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Ushbu tafovut

$$\varepsilon = L(\sum \alpha_k \phi_k) - p. \quad (1.2.34)$$

ϕ_i – bazis funksiyalarga nisbatan ortogonallashtiriladi:

$$\langle \varepsilon, \phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2.35)$$

Bu yerdan

$$\int \{L(\sum \alpha_k \phi_k) - p\} \phi_i dV = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Agar L – chiziqli operator bo'lsa, u holda (1.2.35) sistema α_k koeffitsiyentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasiga aylanadi. Ammo, shuni ta'kidlaymizki, Galyorkin usulini xuddi shu tartibda nochiziqli masalalarga ham qo'llash mumkin.

1-misol. Ushbu $0 \leq x \leq 1$ sohada $y(0) = 1$ chegaraviy shart bilan berilgan $dy/dx - y = 0$ differensial tenglama uchun Koshi masalasini vaznli tafovutlar usullari bilan yeching va natijalarni taqqoslang.

Yuqorida keltirilgan nazariy ma'lumotlarga asoslanib, approksimatsiya koeffitsiyentlariga nisbatan ushbu

$$\mathbf{MA} = \mathbf{B}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, masalan, Galerkin usuli uchun $\mathbf{M}$ va $\mathbf{B}$ matritsalarining elementlari quyidagicha:

$$m_{kj} = \frac{j}{j+m-1} - \frac{1}{j+m}; \quad b_m = \frac{1}{m}.$$

Misol uchun, elementlar sonini uchta olaylik, u holda

- Galyorkin usuliga ko'ra

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 1/6 & 5/12 & 11/20 \\ 1/12 & 3/10 & 13/30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{Bmatrix}.$$

- Eng kichik kvadratlar usuliga ko'ra

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/4 & 8/15 & 2/3 \\ 1/5 & 2/3 & 33/35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{Bmatrix}.$$

- Qism soha usuliga ko‘ra ((0.0;1/3), (1/3;2/3), (2/3;1.0) intervallar bilan)

$$\begin{bmatrix} 5/18 & 8/81 & 11/324 \\ 3/18 & 8/15 & 69/324 \\ 1/18 & 26/81 & 163/324 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix}.$$

- Kollokatsiya usuliga ko‘ra ($x=0.0; 0.5; 1.0$ nuqtalarda tafovut baholangan)

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.75 & 0.625 \\ 0.0 & 1.0 & 2.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{Bmatrix}.$$

Bu sistemalarni yechib, koeffitsiyentlar quyidagi jadvalda keltirilgan:

Usullar	Koeffitsiyentlar		
	α_1	α_2	α_3
Galyorkin	1.0141	0.4225	0.2817
Eng kichik	1.0131	0.4225	0.2797
kvadratlar	1.0156	0.4219	0.2813
Qism soha	1.0000	0.4286	0.2857
Kollokatsiya			

Chegaraviy masalaning $0 \leq x \leq 1$ sohadagi aniq yechimi $y=e^x$ ekanligidan, bu usullar yordamida olingan natijalarni quyidagi jadvalda keltiramiz (ε - yechimning o‘rtacha kvadratik xatoligi):

Bu yerdan ham ko‘rinadiki, Galyorkin usuli, hech shubhasiz, yuqori darajali aniqlikni berar ekan.

Shunday qilib, Galyorkin usuliga ko‘ra ushbu

$$y = 1 + 1.0141x + 0.4225x^2 + 0.2817x^3$$

taqribiy yechim aniq yechimga juda yaqin ekan.

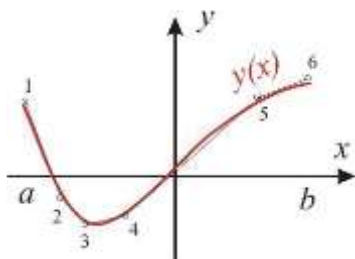
	Galyorkin usuli	Eng kichik kvadratlar usuli	Qism soha usuli	Kollo- katsiya usuli	Aniq yechim
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.2	1.2220	1.2219	1.2213	1.2194	1.2214
0.4	1.4913	1.4912	1.4917	1.4869	1.4918
0.6	1.8214	1.824	1.8220	1.8160	1.8221
0.8	2.2259	2.2260	2.2265	2.2206	2.2255
1.0	2.7183	2.7183	2.7187	2.7143	2.7183
	0.000458	0.000474	0.000576	0.004188	—

Chekli elementlarni qurish va ko‘chish funksiyasini tanlash. Aniqlik uchun balka 2-chizmada ko‘rsatilgandek ikkita chekli elementga (soddalik uchun, birinchi element 1 va 2 tugunlarga, ikkinchisi esa 2 va 3 tugunlarga ega) ajratilgan bo‘lsin, ya’ni 2-tugun qo‘shni ikkita elementlar uchun umumiy.

Aniq o‘lchamli masalani yechishda avval chekli elementning xossasini umumiy holda keltiraylik. i va j tugunli abstrakt chekli elementni qaraylik (1.2.1-chizma)

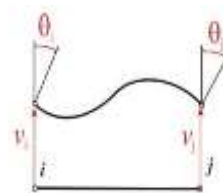
Qurilma elementining shunday qismini chekli element deb ataymizki, bunda yechimning aniqligi uchun uning ixtiyoriy nuqtasi ko‘chishini uning tugunlari ko‘chishlari orqali qiyinchiliksiz ifodalash mumkin bo‘lsin. Balkaning egilishi jarayonida ij tugunli chekli elementning har bir nuqtasi ikkita erkinlik darajasiga ega:

- nuqta vertikal bo‘ylab v masofaga ko‘chishi mumkin;
- nuqtadagi ko‘ndalang kesim biror θ burchakka burilishi mumkin.



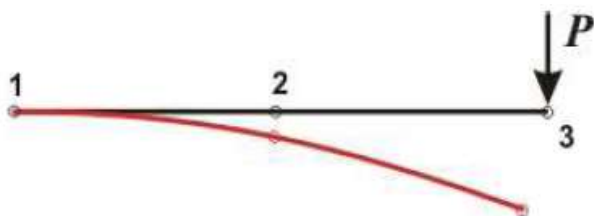
1.2.10-chizma.

Izlanayotgan funksiya analitik ifodasi va uning tugun nuqtalar orqali o'tuvchi siniq chiziqlar bilan ifodalangan grafiklari.



1.2.12-chizma.

Erkinlik darajasi ikkiga teng bo'lgan chekli element sxemasi.



1.2.11-chizma

Hisob obyekti va uning yuklanish sxemasi.

Chekli element ikkita tugun bilan ifodalangani uchun u to'rtta erkinlik darajasiga ega. Demak, element ichidagi x koordinatali har bir nuqtadagi ko'chish funksiyasini quyidagi to'rtta koeffitsiyentli ko'phad bilan ifodalash mumkin:

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3.$$

Bu yerda shunday savol tug'iladi: nima uchun aynan ko'phad bilan, axir haqiqatdagi ko'chish funksiyasi xoxlagan ko'rinishdagi murakkab funksiya bo'lishi mumkin-ku? Javob: shu tanlov eng soddasi. Biz har bir chekli elementning ichida $y(x)$ funksiyani birinchi darajali ko'phad (to'g'ri chiziqning kesmasi) orqali ifodaladik, bu esa 1.2. 11-chizmada tasvirlangan va aniqlik yetarlicha ekanligiga ishonch hosil qildik. Agar bundanda yuqori aniqlik zarur bo'lsa, u holda chekli elementlar sonini doimo oshirish imkoniyatiga egamiz.

Ma'lumki, masalan, materiallar qarshiligidan, kesimning burilish burchagi funksiyasi ko'chishdan koordinata bo'yicha birinchi tartibli hosilaga teng, ya'ni

$$\theta = dv/dx = \alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2.$$

Koordinatalar sistemasi boshini chekli elementning i -tuguniga qo'yamiz, x – koordinata o'qini esa o'ng tarafga yo'naltiramiz. U holda ko'phadning $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ koeffitsiyentlarini i va j tugunlar ko'chishlari orqali ifodalash mumkin, ya'ni $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$ lar orqali.

$x = 0$ da, ya'ni i -tugunda

$$v_i = \alpha_0; \quad \theta_i = \alpha_1.$$

Tenglamalar sistemasi va yechim. j -tugunda, ya'ni $x=x_j=l$ da ($l = x_j - x_i$ – chekli elementning uzunligi) va α_0, α_1 larning yuqoridagi qiymatlariga ko'ra

$$v_j = v_i + \theta_i x_j + \alpha_2 x_j^2 + \alpha_3 x_j^3;$$

$$\theta_j = \theta_i + 2\alpha_2 x_j + 3\alpha_3 x_j^2.$$

Bu tenglamalar sistemasini α_2 va α_3 koeffitsiyentlarga nisbatan yechib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\alpha_2 = [3l^2 (v_j - v_i - \theta_i l) - l^3 (\theta_j - \theta_i)]/l^4;$$

$$\alpha_3 = [l^2 (\theta_j - \theta_i) - 2l(v_j - v_i - \theta_i l)]/l^4.$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ koeffitsiyentlarning topilgan qiymatlarini v_i uchun yozilgan ifodaga qo'yamiz:

$$v = [1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3]v_i + [x - 2x^2/l + x^3/l^2]\theta_i + \\ [3x^2/l^2 - 2x^3/l^3]v_j + [-x^2/l + x^3/l^2]\theta_j.$$

Bu ifoda katta ko'rinadi, ammo natijaga erishdik, ya'ni chekli elementning ixtiyoriy nuqtasidagi ko'chishni uning tugunlaridagi ko'chishlari (masalaning asosiy noma'lumlari) oqrali ifodaladik, chunki qurilmani chekli elementlarga ajratish bilan izlanayotgan funksiyani faqat ba'zi nuqtalardagina hisoblaymiz, ular orasida esa uni taqribiy (approksimatsiyalab) ifodalaymiz. Endi elementning l uzunligini hamda chekli elementning tugunlardagi $v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$ ko'chishlarni va

biror x nuqtaning koordinatasini bilgan holda shu nuqtadagi v ko‘chishni yuqoridagi formula orqali topa olamiz.

Oxirgi formulaning juda katta ekanligidan uni soddalashtirish mumkin, masalan, uni matritsa ko‘rinishida ifodalaymiz. Chekli elementning tugunlari ko‘chishlari vektori $\{\delta^e\}$ ni quyidagicha yozamiz:

$$\{\delta^e\}^T = \{v_i, \theta_i, v_j, \theta_j\},$$

bu yerda $\{\dots\}^T$ – transponirlangan vektor yoki matritsa.

$\{N\}$ elementni vektor ko‘rinishda quyidagicha ifodalaymiz:

$$\{N\}^T = \{1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, x - 2x^2/l + x^3/l^2, \\ 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3, -x^2/l + x^3/l^2\}.$$

Bularga ko‘ra v – ko‘chish vektori uchun quyidagi ifodaga kelamiz:

$$v = \{N\}^T \{\delta^e\}.$$

Deformatsiya tushunchasi, chekli uzunlikdagi elastik namunaning cho‘zilishi va egilishi masalasini chekli elementlar usuli bilan yechish.

«Deformatsiya» so‘zining nimani anglatishini tushunib olaylik. Ingliz tilida rus tilidagi «деформация» so‘zi ikkita har xil ma’noni anglatadi: deformation va strain. Birinchi so‘z biror narsa geometric o‘lchamining o‘zgarishini, ya’ni rus tilidagi «деформация» so‘zining to‘g‘ridan to‘g‘ri ma’nosini anglatadi. Bu – umuman olganda cho‘zilish, siqilish, buralish, egilish, pachaqlanish va hokazolar. Ingliz tilida ikkinchi so‘z strain esa deformatsiya o‘lchami yoki deformatsiya darajasini anglatadi.

Masalan, biror materialdan tayyorlangan namuna L_0 uzunlikda bo‘lsin. Agar bu namuna, masalan, cho‘zilgan bo‘lsa, ya’ni uning uzunligi ΔL ga uzaytirilib, $L_1 = L_0 + \Delta L$ ga yetkazilgan bo‘lsa, u holda uning deformatsiylanish darajasi deb quyidagi o‘lchamsiz miqdorga aytamiz:

$$\varepsilon = \Delta L / L_0 = (L_1 - L_0) / L_0 .$$

ε miqdorni deformatsiya yoki nisbiy deformatsiya deb ataymiz. Nisbiy deformatsiyaning kamchiligi shundaki, u additiv emas – nisbiy deformatsiyalarni qo‘shib borganimizda xatolik yig‘iladi. Masalan, uzunligi 10 sm bo‘lgan namuna biror tajribada 1 sm ga cho‘zilgan bo‘lsin, ya’ni $\varepsilon_1 = 1/10$ miqdorga deformatsiyalandi. Endi namunaning uzunligi 11 sm bo‘ldi. Ikkinchi bir tajriba o‘kazayotgan kishi, bu haqda ma’lumotga ega bo‘lmasdan, namunani yana 1 sm ga uzaytirdi, ya’ni namuna $\varepsilon_2 = 1/11$ miqdorga deformatsiyalandi. Bularga ko‘ra yig‘indi nisbiy deformatsiya quyidagicha bo‘ladi:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1/10 + 1/11,$$

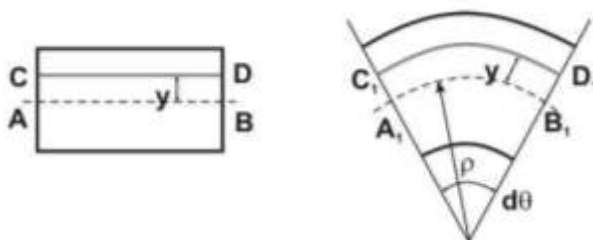
bu miqdor namunaning dastlabki holatiga nisbatan olgan $\varepsilon = 2/10$ deformatsiyasidan kichin ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi. Bunday holatdan chiqishning yo‘li bor, ammo bizning asosiy masalamiz kichik deformatsiyalar uchun foydalanish mumkin bo‘lgan nisbiy deformatsiyani aniqlash .

Biz tanlagan qurilma biror qalinlikka, faraz qilaylik, chekli element uzunligi bo‘ylab o‘zgarmas miqdorga ega bo‘lsin. Elementning dx uzunlikka ega bo‘lagi quyidagi 1.2. 11-chizmada chapda egilishgacha va o‘ngda egilgandan keyin tasvirlangan. Egilish jarayonida o‘rganilayotgan materialning tolasi (o‘q) AB o‘z uzunligin o‘zgartirmaydi, ya’ni $AB = A_1B_1$, uning egrilik radiusi ρ bo‘lsin. Ixtiyoriy CD tolaning nisbiy deformatsiyasi quyidagiga teng:

$$\varepsilon = \frac{C_1D_1 - CD}{CD}, \quad CD = AB = A_1B_1 = \rho d\theta, \quad C_1D_1 = (\rho + y)d\theta,$$

bu yerdan esa

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$



1.2.13-chizma. Namunaning nisbiy deformatsiyasi sxemasi.

Matematika kursidan ma'lumki, kesimning burchak bo'yicha kichik miqdori uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}} \approx \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Bunga ko'ra deformatsiya

$$\varepsilon = y \frac{d^2v}{dx^2}$$

yoki

$$\varepsilon = y \frac{d^2v}{dx^2} (\{N\}^T \{\delta^e\}) = y\{B\}\{\delta^e\},$$

bu yerda $\{B\}$ vektor quyidagicha

$$\{B\} = \{-6/l^2 + 6x/l^3, -4/l + 6x/l^2, 6/l^2 - 6x/l^3, -x/l + 6x/l^2\}.$$

Guk qonuniga ko'ra kuchlanish (kesim birliga ta'sir etuvchi kuch) deformatsiya bilan elastiklik moduli (Yung moduli) E orqali bog'langan:

$$\{\sigma\} = E\{\varepsilon\} = Ey\{B\}\{\delta^e\}.$$

Ma'lumki (materiallar qarshiligi kursidan), eguvchi moment kesimdagi kuchlanish bilan kesimning o'q bo'ylab inertsia momentini hisobga olgan holda bog'langan:

$$M = I\sigma / y,$$

bu yerdan esa tugun kuchlarining vektoriga ega bo'lamiz:

$$\{M^e\} = EI\{B\}\{\delta^e\}.$$

Endi biz chekli elementlar tugunlari ko'chishlarining vektori $\{\delta^e\}$ ga, chekli elementlar tugunlari kuchlari vektori $\{M^e\}$ ga, nisbiy deformatsiyalar vektori $\{\varepsilon\}$ ga va kesimdagi kuchlanish vektori $\{\sigma\}$ ga ega bo'ldik. Bunda $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ va $\{M^e\}$ vektorlar ko'chish vektori $\{\delta^e\}$ ning komponentalari orqali ifodalanadi, bu yerda $\{\delta^e\}$ – masalaning izlanayotgan noma'lumlari.

Agar chekli elementlar (chekli elementlarga o'xshash) to'ring biror tuguniga (yoki tugunlariga) tashqi kuchlarni qo'ysak yoki, xuddi shu kabi, ularga ma'lum bir ko'chishlar, masalan, biz tanlagan qurilma deformatsiyasi o'lchamidan kelib chiqib, berilsa, u holda qolgan tugunlarning haqiqiy ko'chishlari deformatsiyaning to'la energiyasi minimumini ta'minlovchi darajada bo'ladi.

To'la energiyani minimallashtirish – bu balkaning deformatsiyasini tavsiflovchi differensial tenglamalar sistemasini yechish bilan teng kuchli.

Ana shu to'la energiyani qanday hisoblash mumkin? Kuchlanishning unga mos deformatsiyaga ko'paytmasi birlik hajmga mos keluvchi deformatsiya solishtirma energiyasini beradi. Chekli elementlangan to'la hajm bo'ylab deformatsiya energiyasini hisoblash uchun chekli element hajmi bo'ylab deformatsiya solishtirma energiyasini integrallash (yig'indisini tuzish), keyin esa chekli elementlangan to'la hajm bo'ylab ularning yig'indisini topish zarur. Keyin esa tugunlardagi kuchlarning mos tugunlardagi ko'chishlarga ko'paytmasi tashqi kuchlarning ishini beradi. Deformatsiyaning to'la energiyasi chekli elementlangan to'la hajm barcha chekli elementlarining deformatsiya energisi bilan tashqi kuchlar ishi o'rasidagi farqqa teng. Uning minimumini topish uchun to'la energiyaning ifodasini yozish va uni har bir ko'chish bo'yicha integrallash lozim. Xususiylarining hosilalarning jamlanmasi quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini beradi:

$$[K] \{\delta\} = \{M\},$$

bu yerda $[K]$ – chekli elementlangan hajmning birlik matritsa-si; $\{\delta\}$ – chekli elementlangan hajmning chekli elementlari tugunlari ko'chishi vektori; $\{M\}$ – chekli elementlangan hajmning chekli elementlari tugunlaridagi kuchlar vektori.

Oxirgi formulaning ko'rinishi shuni ko'rsatadiki, chekli elementlangan hajmning deformatsiya energiyasi tashqi kuchlarning bajargan ishiga teng (ichki kuchlarning ishi tashqi kuchlarning ishiga teng).

Endi yuqoridagi belgilashlarimiz va ularning ifodasidan birlik matritsasining quyidagi ifodasiga kelamiz:

$$[K^e] = EI \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}.$$

Bu yerda ko‘rinadiki chekli elementning $[K^e]$ bikrlilik matritsasi 4×4 o‘lchamga ega va u o‘zining bosh diagonaliga nisbatan simmetrik. Chekli element tugunlarining i va j kabi belgilanishiga ko‘ra bu matritsani quyidagicha ifodalash mumkin:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix},$$

bu yerda $[k_{ii}]$, $[k_{ij}]$, $[k_{ji}]$, $[k_{jj}]$ – o‘lchamlari 2×2 bo‘lgan qism matritsalar; i va j larning o‘rniga chekli elementning tugunlari nomerlarini qo‘ysak, u holda chekli elementlangan hajmning har bir qism matritsasi va bikrlilikning bosh matritsasining o‘rnini aniqlagan bo‘lamiz.

Xuddi shunday, chekli elementning $\{\delta^e\}$ – ko‘chishlari vektori va $\{M^e\}$ – tugunlari kuchlari vektorini ikkita qism vektorlar ko‘rinishida ifodalash, i va j larning o‘rniga chekli elementning tugunlari nomerlarini qo‘yish chekli elementlangan hajmning har bir $\{\delta\}$ – tugunlari ko‘chishlari vektorining va $\{M\}$ – tugunlari kuchlari vektorining qism vektorlari o‘rnini ko‘rsatadi:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_i\} \\ \{\delta_j\} \end{Bmatrix}, \quad \{M^e\} = \begin{Bmatrix} \{M_i\} \\ \{M_j\} \end{Bmatrix},$$

Misol. Chekli uzunlikdagi balkaning elastik egilishi masalasini o‘rganamiz, buning uchun 1.2. 1-chizmaga murojaat qilamiz. Faraz qilaylik №1 chekli element koordinatalari $x_1 = 0$ va $x_2 = 100$ mm bo‘lgan 1 va 2 tugunlarga, №2 chekli element esa koordinatalari $x_2 = 100$ mm va $x_3 = 200$ mm bo‘lgan 2 va 3 tugunlarga ega bo‘lsin, ya’ni har ikkala chekli elementning uzunligi bir xil: $l = 100$ mm. Har

ikkala chekli element uchun elastiklik moduli $E = 20000 \text{ kg/mm}^2$, kesimning o'q bo'ylab inertsia moment $I = 100 \text{ mm}^4$.

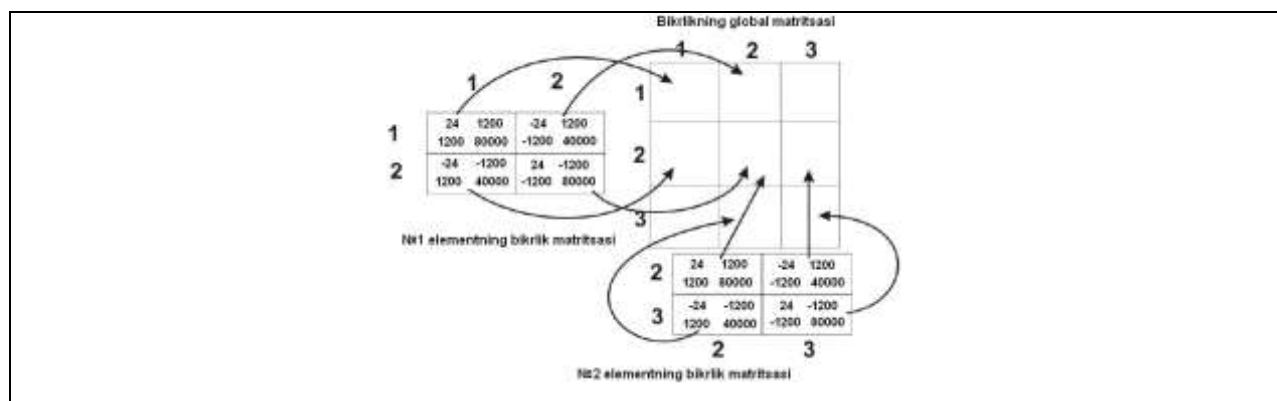
Yechish. Birinchi va ikkinchi chekli elementlarning bikrlilik matritsalarini komponentalarini hisoblaymiz, ular bir xil va o'zaro teng:

$$[K^1] = [K^2] = \begin{bmatrix} 24 & 1200 & -24 & 1200 \\ 1200 & 80000 & -1200 & 40000 \\ -24 & -1200 & 24 & -1200 \\ 1200 & 40000 & -1200 & 80000 \end{bmatrix}.$$

Endi bu matritsalarining, 1.2. 13-chizmada tugunlar nomerlariga mos bikrlilikning global matritsasi bo'yicha qism matritsalarini taqsimlaymiz.

Natijada o'lchamlari 6×6 bo'lgan quyidagi bikrlilikning global matritsasiga ega bo'lamiz:

$$[K] = \begin{bmatrix} 24 & 1200 & -24 & 1200 & 0 & 0 \\ 1200 & 80000 & -1200 & 40000 & 0 & 0 \\ -24 & -1200 & 48 & 0 & -24 & 1200 \\ 1200 & 40000 & 0 & 160000 & -1200 & 40000 \\ 0 & 0 & -24 & -1200 & 24 & -1200 \\ 0 & 0 & 1200 & 40000 & -1200 & 80000 \end{bmatrix}$$



1.2.14-chizma. Bikrlilikning global matritsasi va qism matritsalarini.

Tugunlardagi kuchlar hozircha berilmagan, tugunlardagi kuchlar global vektori nollar bilan to'ldirilgan:

$$\{M\}^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Tugunlar ko‘chishlarining global vektori komponentalar noma'lumlar:

$$\{\delta\}^T = \{v_1, \theta_1, v_2, \theta_2, v_3, \theta_3\}.$$

Bularga ko‘ra quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$[K] \{\delta\} = \{M\},$$

Bu sistemaning yechimi hozircha trivial, chunki yoki kuchlar yoki ko‘chishlar yoki, odatdagidek, chegaraviy shartlar berilgan emas.

1.2.14-chizmaga yana qaytamiz, balka №1 tugunda bikr mahkamlangan, ya'ni shu nuqtadagi ko‘chish va uning kesimi burilishi nolga teng yoki $v_1 = 0, \theta_1 = 0$. Shuning uchun bikrlik matritsasining birinchi va ikkinchi satri hamda birinchi va ikkinchi ustunini nollashtiramiz, faqat shu bosh diagonalga esa 1 larni qo‘yamiz. Natijada

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & -24 & 1200 \\ 0 & 0 & 0 & 160000 & -1200 & 40000 \\ 0 & 0 & -24 & -1200 & 24 & -1200 \\ 0 & 0 & 1200 & 40000 & -1200 & 80000 \end{bmatrix}$$

Endi tenglamalar sistemasining yechimida doimi $v_1 = 0, \theta_1 = 0$ bo‘ladi.

№3 tugunda balka pastga 10 mm ko‘chgan, ya'ni $v_3 = -10$ deb beramiz.

Uning uchun quyidagicha biror $\{R\}$ vektor tuzib olamiz:

$$\{R\}^T = \{0, 0, 0, 0, -10, 0\}.$$

Bularga ko‘ra quyidagi algoritmdan o‘zgargan $\{M\}$ ega bo‘lamiz:

$$\{M\} \leftarrow \{M\} - [K] \{R\},$$

yani $\{M\}$ matritsadan $[K] R\}$ ko‘paytmani ayiramiz, natijani esa yana $\{M\}$ vektorga joylaymiz. Endi $\{M\}$ vektor quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\{M\}^T = \{0, 0, -240, -12000, 240, -12000\}.$$

$[K]$ matritsaning beshinchi satri va beshinchi ustunini nollashtiramiz, beshinchi satrdagi bosh diagonalga esa 1 ni qo‘yamiz. $\{M\}$ vektorning beshinchi

satriga -10 ni qo'yamiz. Shunday qilib, chegaraviy shartlar kiritildi, matritsa va $\{M\}$ vektor quyidagi ko'rinishni oladi:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & 0 & 1200 \\ 0 & 0 & 0 & 160000 & 0 & 40000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1200 & 40000 & 0 & 80000 \end{bmatrix}$$

va

$$\{M\}^T = \{0, 0, -240, -12000, -10, -12000\}.$$

Endi chiziqli tenglamalar sistemasini yechsak bo'ladi. Uning yechimi quyidagicha:

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{M\},$$

ya'ni

$$\{\delta\}^T = \{0, 0, -3.125, -0.056, -10, -0.075\}.$$

yoki $v_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, $v_2 = -3.125$ mm, $\theta_2 = -0.056$ rad, $v_3 = -10$ mm, $\theta_3 = -0.075$ rad. Endi tugunlardagi ko'chishlarni bilgan holda ularni v – ko'chishning formulasiga qoyib, 1.2.14-chizmada tasvirlangan balkaning deformatsiyalanish grafigiga ega bo'lamiz.

Bu taqribiy yechimni analitik yechim bilan taqqoslab o'tirishga zarurat yo'q, u 100 % mos tushadi, chunki balkaning haqiqiy egilish chizigi uchinchi tartibli tenglama bilan ifodalanadi.

Dastlabki sistemani akslantirish natijasida bizda aslida uchta tenglama qoldi, bular №2 tugunning ko'chishi va shu tugundagi kesimning burilish burchagi hamda №3 tugundagi kesimning burilish burchagi. Tenglamalar sistemasini yechish natijasida bu noma'lumlar topildi va bu natijalar deformatsiyaga sarflangan energiyaning minimal bo'lishini ta'minlaydi, qolgan barcha hollar energiya sarfining o'sishiga olib keladi.

Xulosa

1. Navye-Stoks tenglamalari va ularning qo'llanish sohalari o'rganildi.

2. Navye-Stoks tenglamalarining chekli elementlar usulidan foydalanib yechish imkoniyatlari baholandi.

3. Turli chekli elementlar usulidan foydalanib olingan natijalar analitik usul bilan olingan natijalar orqali taqqoslandi.

II. NAVYE-STOKS TENGLAMALARINI FEMLAB MUHITIDA SONLI MODELLASHTIRISH

2.1. Issiqlik jarayonlarini Femlab muhitida Navye-Stoks tenglamalari yordamida sonli modellashtirish

FEMLAB muhitida issiqlik va massa almashinuv jarayonlarini matematik modellashtirish va natijada hosil bo'lgan tenglamalarni yechish uchun quyidagi ketma-ketlikka amal qilish kerak.

1. Jarayonni tavsiflovchi tenglamalarni tanlab olish. Havo harakati uchun Navye-Stoks tenglamlari.

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

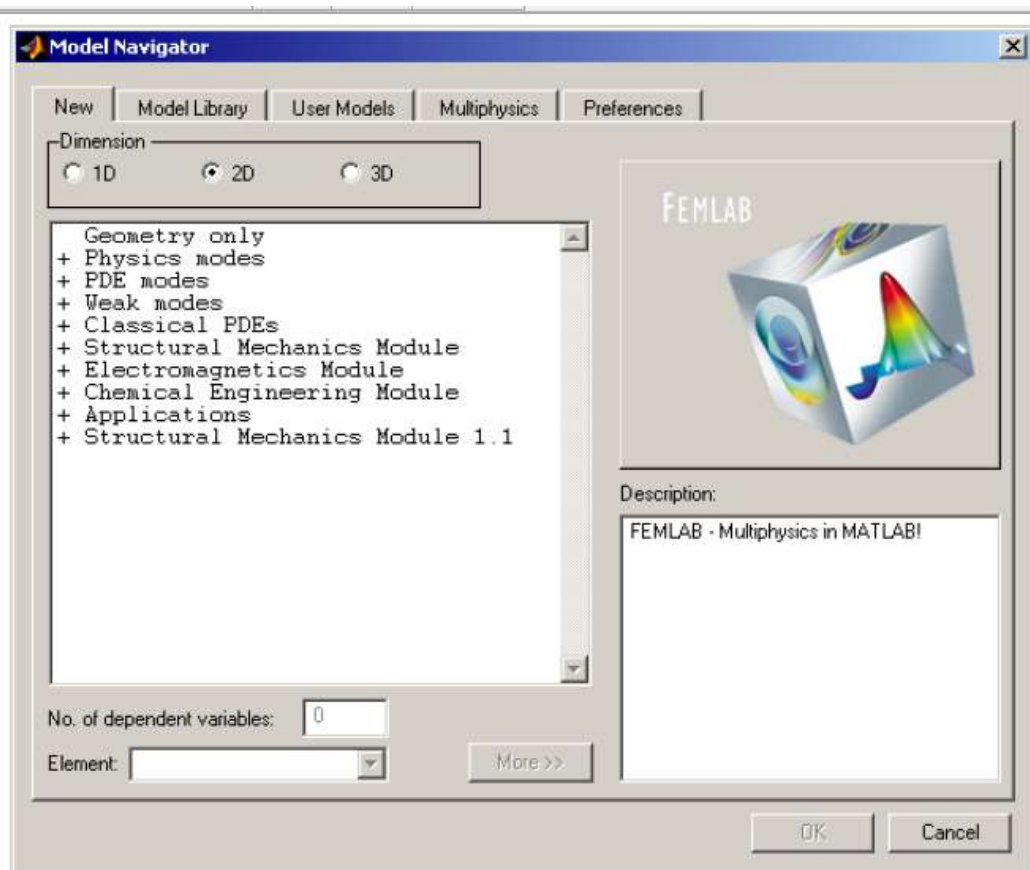
Gazlar, suyuqliklar va qattiq jismlarda issiqlik almashinuv tenglamasi

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-k \nabla T + \rho c_p T \mathbf{u}) = Q \quad (2.1.2)$$

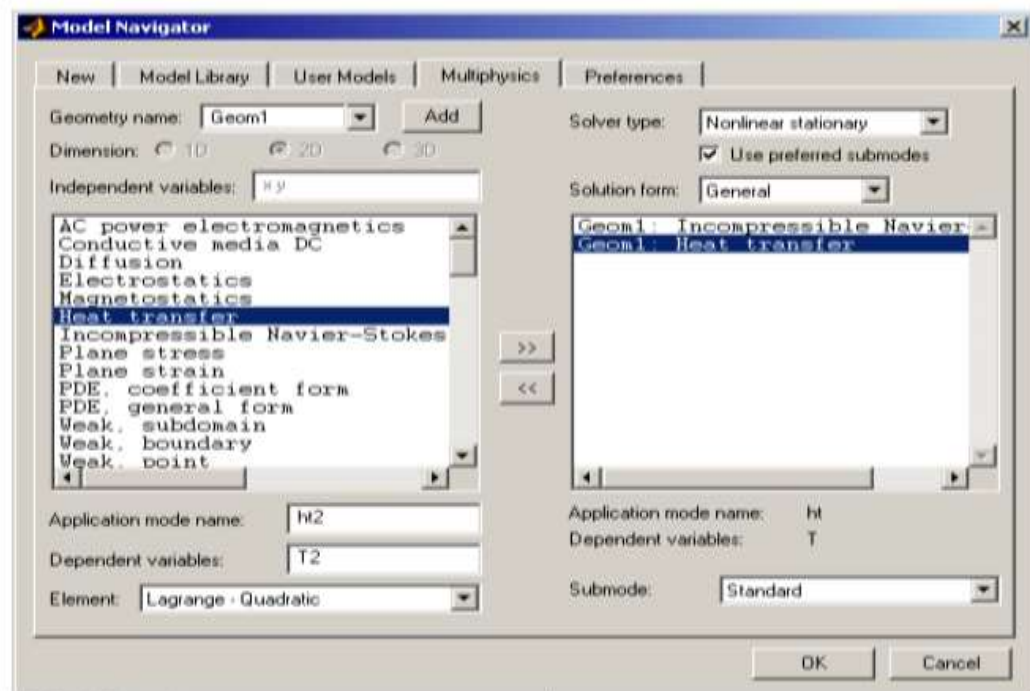
2. Jarayon necha o'lchamliligini aniqlab, FemLABning Model navigator ikkilamchi oynasiga kirish.

Chizmada ko'rsatilgandek 2D ni belgilash orqali masalaning 2 o'lchamli ekanligini e'lon qilamiz. Shu qismning o'zida birdaniga tanlangan tenglamalar turi va jarayon nomi tanlanadi.

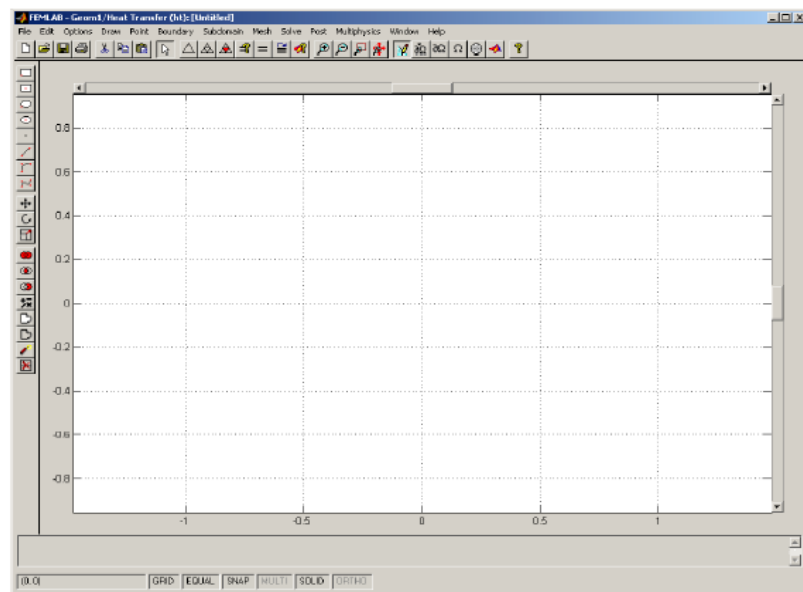
3. Model navigatoridan OK tugmasini bosib, FemLABning asosiy interfeysiga o'tamiz.



2.1.1-chizma. FemLABning Model Navigator qismi.

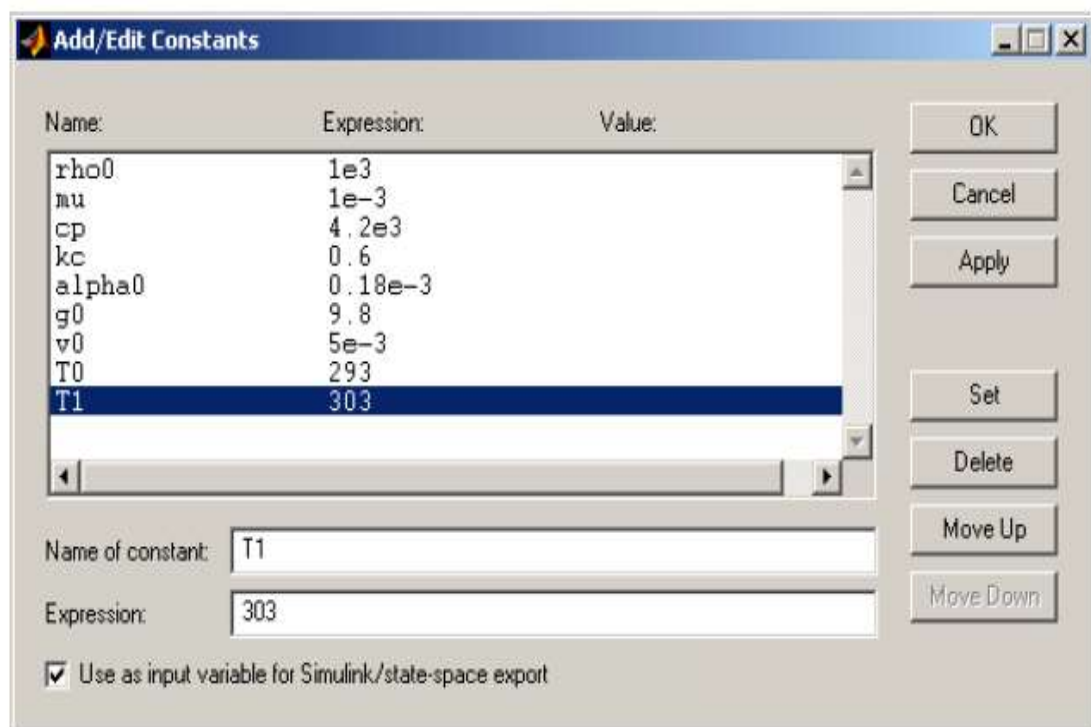


2.1.2-chizma. Tenglamalar turi va jarayon nomining tanlanishi.



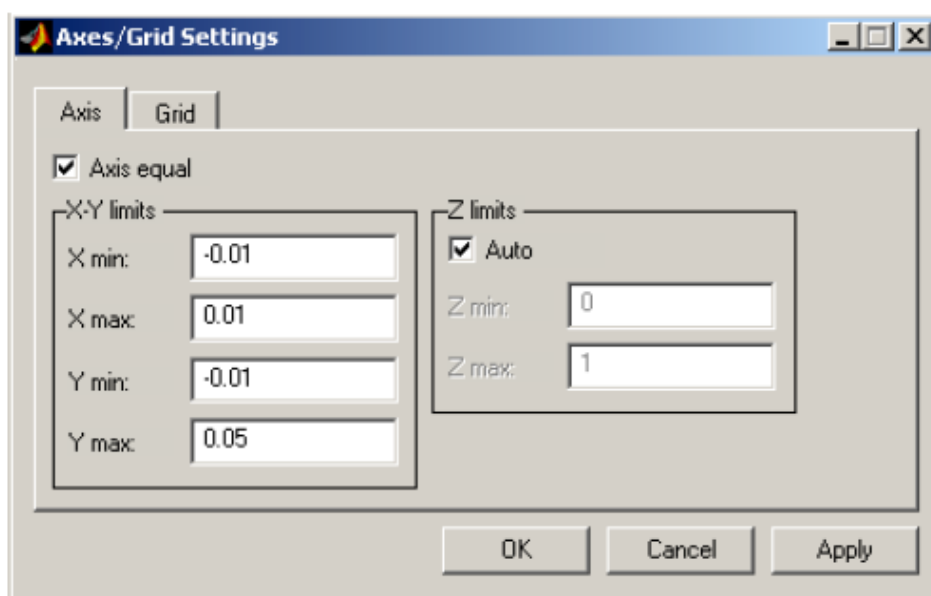
2.1.3-chizma.FemLAB interfeysining umumiy ko'rinishi.

4.Menyuning Options bandidagi Constants buyrug'i orqali tenglamalardagi doimiylar kiritiladi.



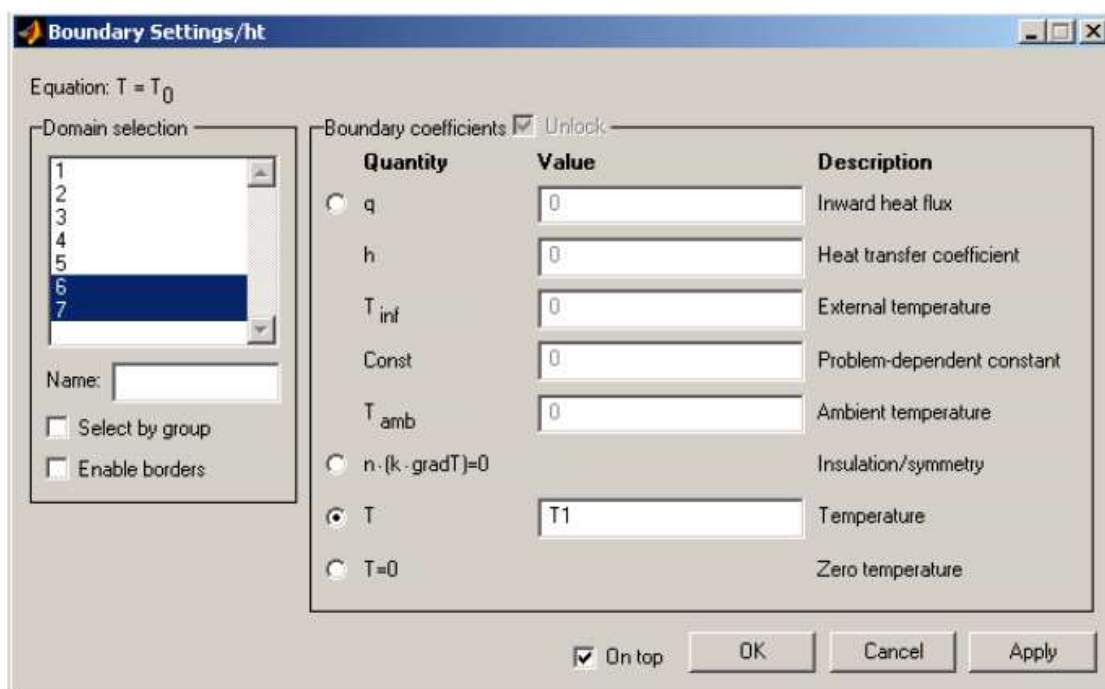
2.1.4-chizma.Doimiylarni kiritish.

1. Munyuning Options bandidagi Axes/Grid settings buyrug'i orqali to'r kattaligi kiritiladi.



2.1.5-chizma.To'r kattaligini kiritish.

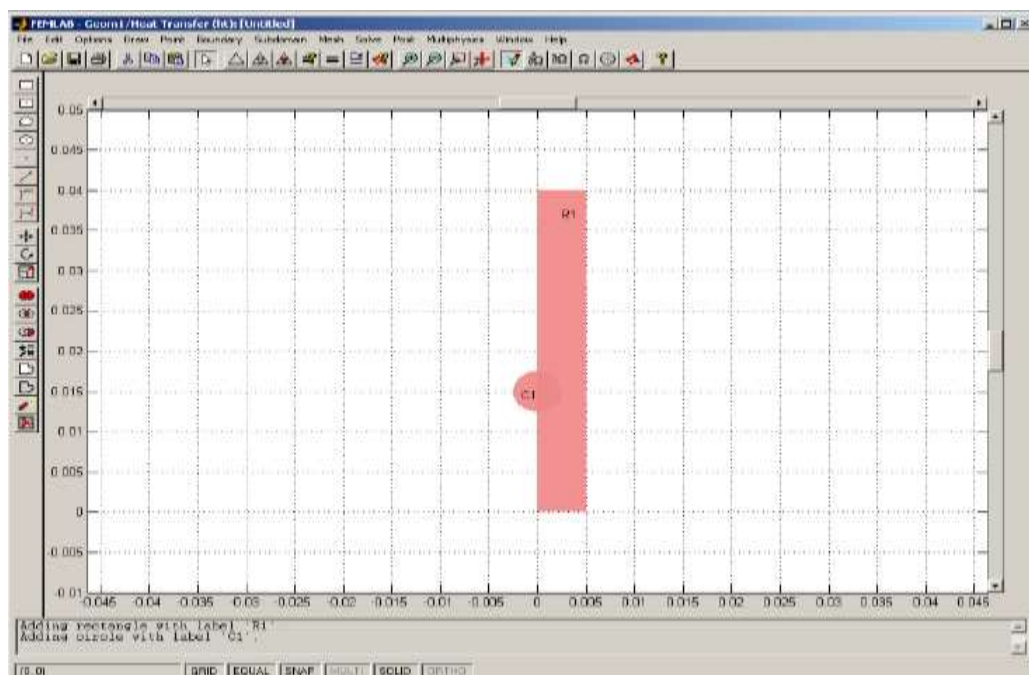
2. Chegaraviy shartlarni Menyuning Physics bandining Boundary settings buyrug'ini tanlash orqali bajariladi.



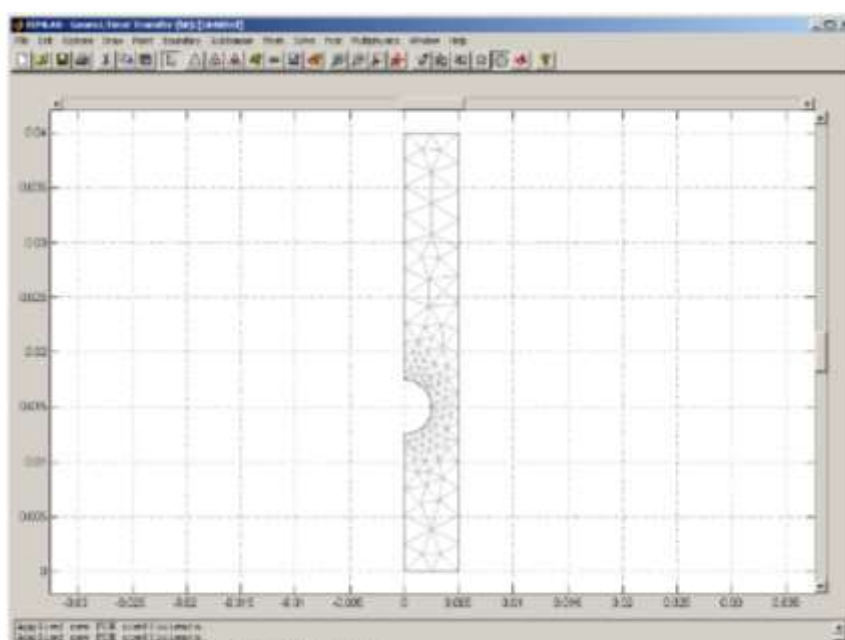
2.1.6-chizma.Chegaraviy shartlarni kiritish ikkilamchi oynasi.

Bir qiymatlilik shartlarini 2.1.6-chizmada keltirilgan chizmada ko'rsatilgandek kiritish mumkin. Bunda, q - issiqlik oqimining quvvati; h - issiqlik berish koeffitsiyenti; T_{inf} va T_{amb} - atrof temperaturasi; $Const$ - o'zgarmas son.

7.Geometrik o'lchamlarni yuqorida keltirilgan –chizma kabi kiritish mumkin. Buning uchun interfeysning chap tomonida joylashgan uchburchak, to'rtburchak, to'g'ri chiziq, yoy kabi figuralardan foydalanish mumkin.



2.1.7-chizma.Geometrik o'lchamlarni kiritish.



2.1.8-chizma. To'r hosil qilish.

8. Natijaviy shakl hosil bo'lganidan so'ng unda to'r hosil qilinadi.

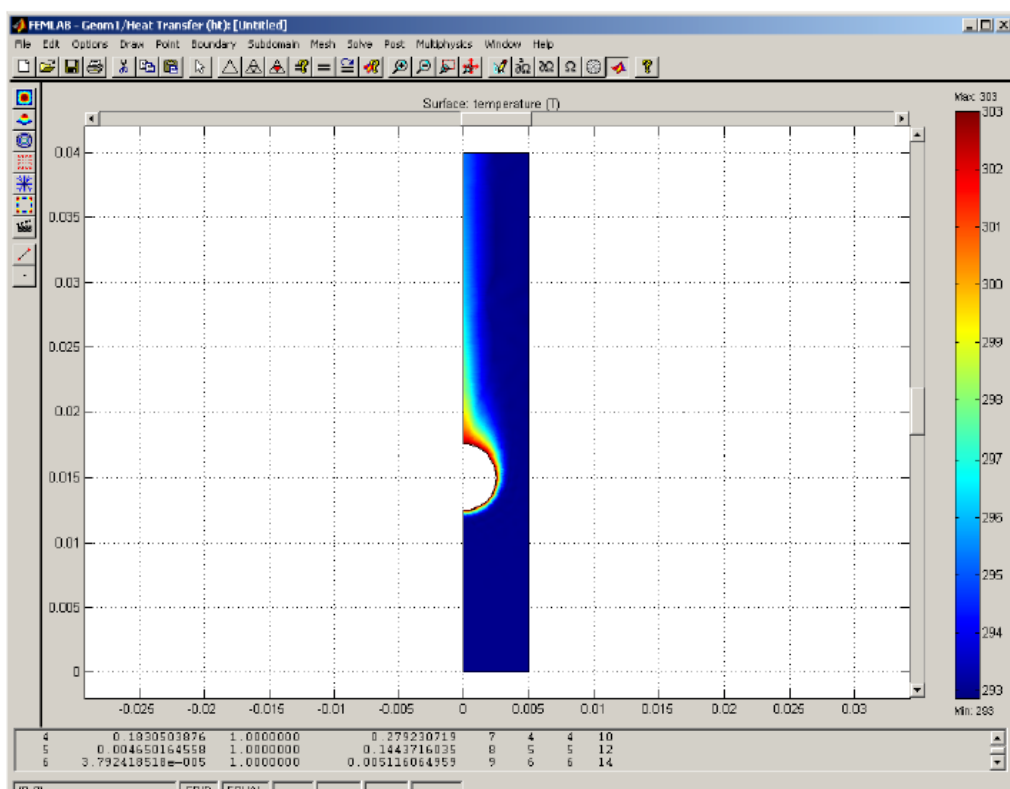
2.1.8-chizmada temperatura maydoni keltirilgan bo'lib, natijalarni havo oqim chiziqlari, izotermik chiziqlar, tezlik vektorlari ko'rinishida ham olish mumkin. Buning uchun interfeys chap tomonidagi shu nomli tugmachalarni bosish yetarli.

O'rtacha qiyinlikdagi masalalarga minemal konfiguratsiyali (Pentium IV) kompyuterlarda 1 min vaqt sarflanadi.

Grafikning o'ng tarafida natijada taqdim etilayotgan kattalik shkalasi keltiriladi.

2.1.9-chizmada temperatura shkalasi keltirilgan.

1. Interfeysda joylashgan tenglikni bosish orqali oxirgi natijani olish mumkin.

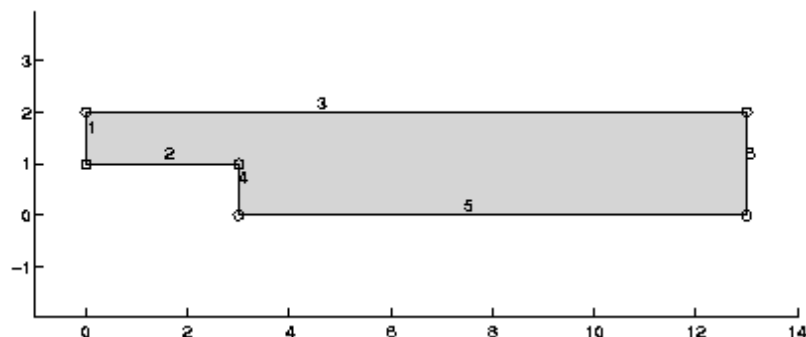


2.1.9-chizma. Natijaning umumiy ko'rinishi.

2.2. Konveksiyaga oid sinov masalasini Femlab muhitida sonli modellashtirish

Bu yerda siqilmagan suyuqlikning statsionar oqimining ikki o'lchovli modeli tadqiqot qilinyapti. Bu model hisoblash gidroaerodinamikasi sohasida

etalonli testga oid masalani tasvirlaydi. 2.10-chizmada tekis parallell kanalning uzunasiga kesimi tasvirlangan, unga suyuqlik chapdan tezlikning parabolik profili bilan oqib kiradi va o'ng chegara orqali oqib chiqadi



2.2.1-chizma. Suyuqlik bilan kanal.

Bu misolda 2.2.1-chizmada ko'rsatilgan (x,y) dekart kordinatalar sistemasida $u=1_x$ $u+1_y$ $v=(u \ v)$ tezlikning komponentlari va sohada suyuqlikning ρ bosimi hisoblanadi.

Siqilmagan suyuqlikning oqimi Navye-Stoks tenglamalarining sistemasi bilan ko'rsatib beriladi:

$$-div(\eta(\nabla u + grad \ u)) + \rho(u \nabla)u + grad \ p = F \quad div \ v = 0$$

Bu yerda η -dinamik yopishqoqlik, ρ -suyuqlikning zichligi, u -tezliklarning vektorli maydoni, p -bosim, F -suyuqlikka ta'sir etuvchi kuchning hajmli zichligi (haqiqiy kuchli maydonning misoli bo'lib og'irlik kuchi bo'lishi mumkin). Birinchi tenglama Nyutonning ikkinchi qonunining oqibati bo'lib hisoblanadi (kuchlar va impulslarning dinamik muvozanatligi). U suyuqlikning siqilmaydigan xususiyatini aks ettiradi.

Suyuqlik oqimi chiziqlarining shakli o'lchovsiz hajmga bog'liqdir.

$$Re = \frac{UL\rho}{\eta}$$

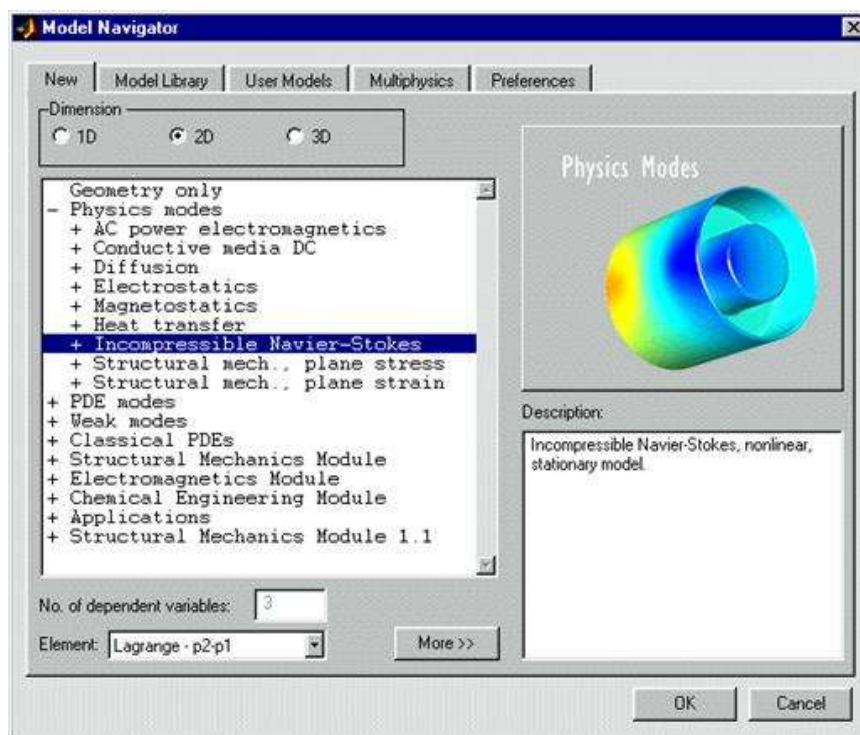
Bu tenglama Reynolds soni deb nomlanadi. Uzunligi L bo'shliqning qiziqtirgan sohasining kattaligiga mos keladi.

Tezligi U suyuqlik oqimining bir xususiyatga ega tezlikka mos keladi. Chegarali shartlarni shunday beramizki, oqimga kirishga (2.2.1-chizmada chegarali

segment) tezlik profili $U=4S(1-S)$, $V=0$ tenglamalari bilan ko'rsatib berilishi kerak, kanal devorlarida(chegarali segmentlari p-2,3,4,5) tezlik nolga teng ($U=0$, $V=0$) . Oqimning chiqishida (chegarali segment -6) bosim nolga teng ($P=0$). Bu yerda S-yerdan 0 gacha chegaralarda bo'lak uchun o'zgaradigan egrilikning parametri.

Tezliklar maydonining chegarali qatlamining eni kanal devorlarining yaqinida Reynolds sonining ildiziga teskari proporsional. Tezliklar maydonining katta gradient bilan oqimni modellashtirish uchun kanalning ko'ndalang kesimi minimum 10 oxirgi elementlarga bo'lingan bo'lishi kerak. Reynoldsning katta sonli oqimi uchun kanalning ichki joylarida elementlari devor oldidan ko'ra ancha katta tezliklarda bo'lishlari mumkin. Reynolds sonining (1000 va undan ko'p) katta qiymatlarida Navye-Stoks tenglamalarini yechishda sonli usulning aniqligini oshirish uchun ma'lumot beradigan qo'llanmada yo'naltirilgan diffuzionl barqarorlik ishlatilishi ko'rsatib berilgan.

2.1 paragrafda keltirilgan ketma-ketlikdan foydalanib ushbu masalani ko'rib chiqamiz.

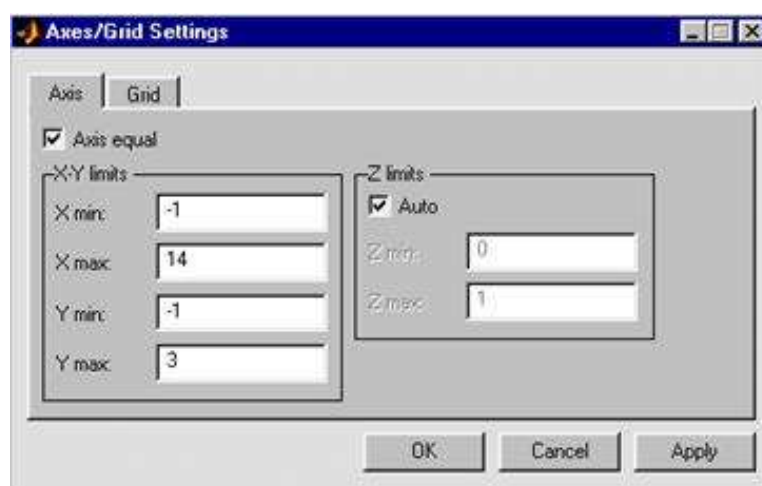


2.2.2-chizma. Tanlangan amaliy tartib bilan modellar novigatori oynasining ko'rinishi.

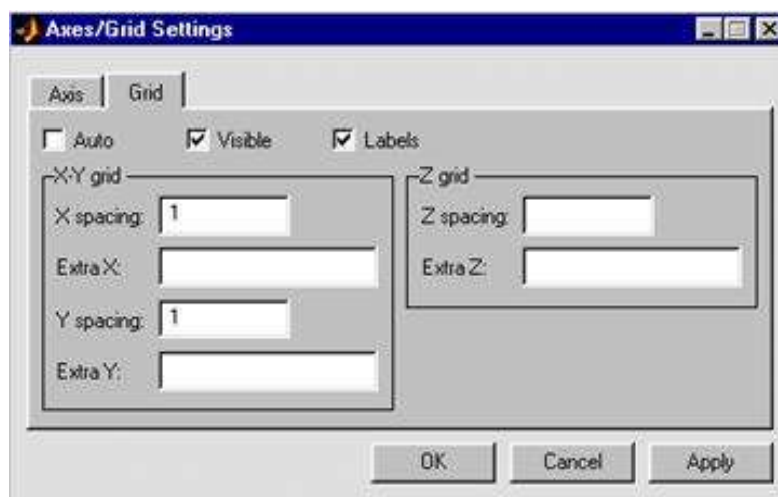
Modellar Novigatorining New kiritilishi femlab GUI-ishga solishni qo'yib yuborish natijasida yoki File/New menyu komandasini bajarish natijasida ochiladi. Modellar Novigatorining New kiritilishda Physics Modes/Inkompisible Navier-Stokes (2.2.2.-chiama) amaliy tartibni tanlaymiz. Bu amaliy tartiblarnig guruhi siqilgan suyuqlik oqimlarining o'rnatilgan tartiblarni modellashtirish uchun tayinlangan. Umumiy vaziyatda yopishqoqlik ko'pgina omillarga bog'liqdir, shu jumladan, tezliklar maydonining differensial operatorlariga ham. Oxirgi vaziyatda suyuqlik Nyutonli emas (Неньютоновский) deb nomlanadi (m-n, yogurt, qog'ozli pulpa, poshmerli eritmalar va emulsiyalar) ko'rib chiqilayotgan misolda yopishqoqlik doimiydir, bu esa nyutonli suyuqlikka mos keladi.

Parametrlar va sozlashlar. Koordinatli to'r parametrlarni sozlash uchun Options/Axes/Orid Settings komandasini bajaramiz. Ochilgan diologni derazaning Axis 2.2.3-chizma chizmada ko'rsatilgan ahamiyatni o'rnatamiz. 2.-chizmaga ko'ra Orid kiritishda ahamiyatni o'rganamiz.

Options/Add/Edit Constans menyu komandasini bajaramiz, 10ga teng Re nomi bilan konstantani yaratamiz (konstantni yaratish bo'yicha harkatning ketma-ketligi ko'proq batafsil 2.2.2chizma, 2.2.3-chizmada ko'rsatilgan). Bu konstanta keyinchalik suyuqlik yopishqoqligining vazifasida ishlatiladi.



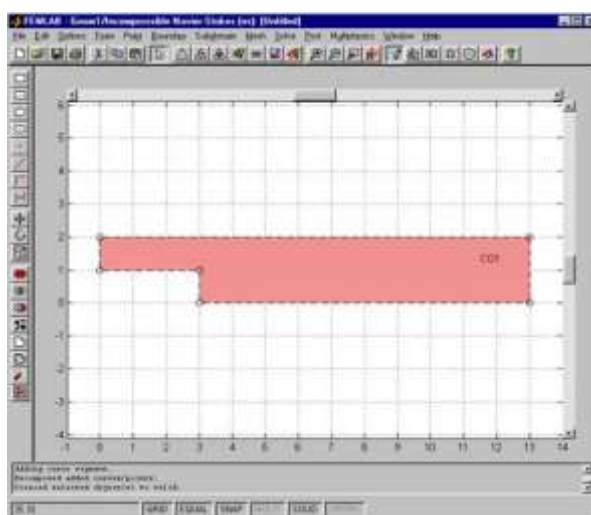
2.2.3-chizma. Axes/Orid Settings diologni derazaning Axis kiritish.



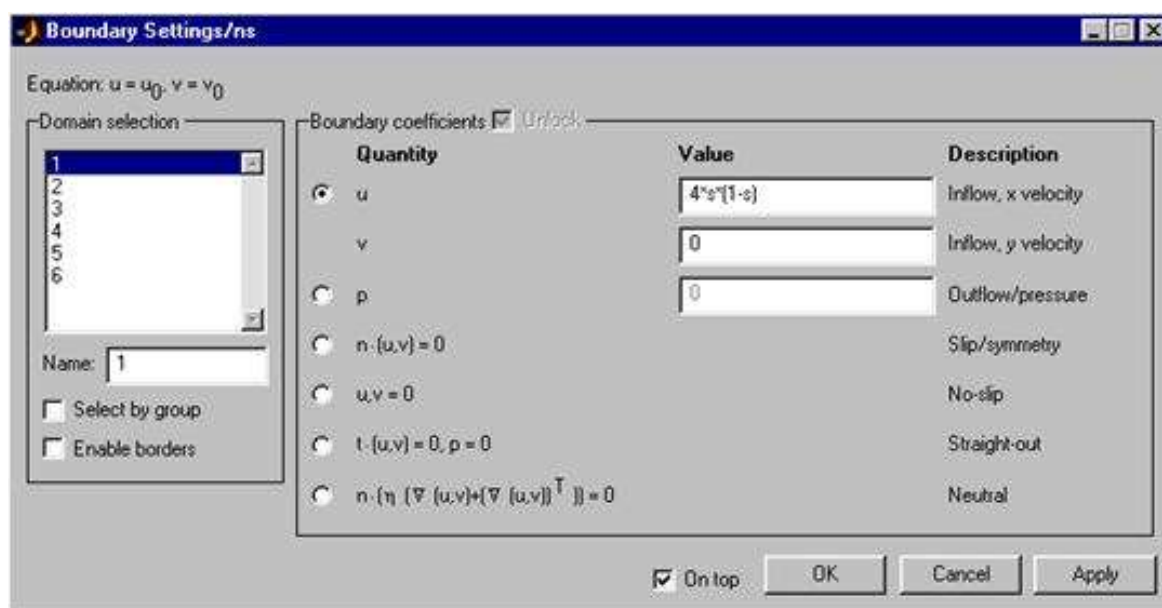
2.2.4-chizma. Axes/Orid Settings dioloni derazaning Orid kiritish.

Geometriyaning aniq chiziqlarini ravshan qilib chizish tartibi: hisoblash joylarining geometriyasini aniq chiziqlarini ravshan qilib chizish uchun chizishni instrumentalli panelidan foydalanamiz.  tugmachasini bosamiz. Sichqoncha ko'rsatgichini (0,1) nuqtasiga joylashtiramiz. Keyin chap tugmachani bosib yurib sichqoncha ko'rsatgichini (0,2) nuqtaga ketma-ket boshqa joyga ko'chiramiz.

Bu nuqtalarda sichqonchani qo'yib yuborish kerak. Ko'p burchakni qurish-  tugmachasini qo'yib yuborish yoki sichqonchanning o'ng knopkasini bosish orqali tugatiladi. Bu harakatlar natijasida salmoqli ikki o'lchamli SO1 nomli obyekt yaratiladi (2.2.5-chizma).



2.2.5-chizma. Hisob-kitob sohasi chizilgan geometriyasining femlab figurasi
Vazifaning chegara shartlari rejimi



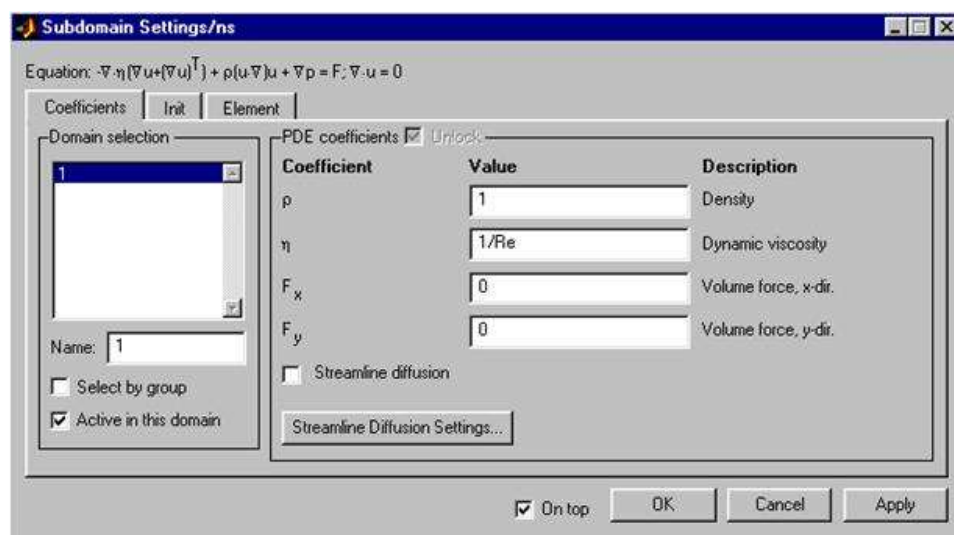
2.2.6-chizma. Kiritishning dialogli oynasini chegara shartlari (1 segment uchun).

Menyudagi Boundary/ Boundary Setting buyrug‘i bajarilishi avtomatik ravishda femlab GUI-ilovani Boundary Mode rejimiga o‘tkazadi va kiritishning dialogli oynasini chegara shartlarini ochib tashlaydi

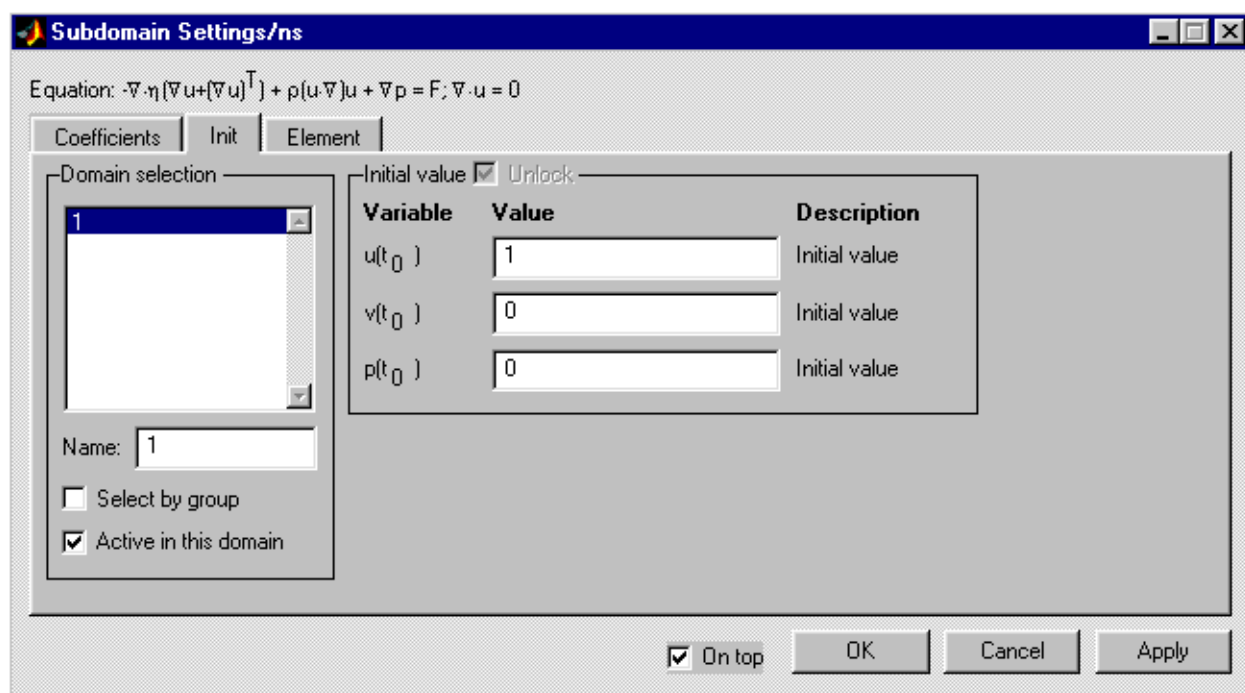
Dialogli oynada taqdim etilgan 2,3,4,5 segmentlar uchun $u, v = 0$ (No-slip) radioknopkani yoqish kerak. 6-segment uchun p Outflow/pressure knopkasini yoqish kerak va shunga mos tahrir etish chizig‘iga 0 ifodasini kiritish kerak.

Moddiy xususiyatlar parametrlarining berilish rejimi. Menyudagi Subdomain Setting buyrug‘i bajarilishi avtomatik ravishda femlab GUI-ilovani Subdomain Mode rejimiga o‘tkazadi va moddiy xususiyatlar parametrlarini kiritishning dialogli oynasini ochib tashlaydi. Bu oynaning o‘rnatilgan parametrlari: majbur etuvchi kuchning egiluvchanligi, zichligi va hajmiy zichligi bilan ko‘rinishi- 2.16-chizmada ko‘rsatilgan. Streamline diffusion bayrog‘ini o‘rnatish qarorni yo‘naltirilgan diffuzion stabilashtirishning mexanizmini yoqadi. Navye-Stoks tenglamalari tizimi chiziqli emas, shuning uchun uni yechishda chiziqli bo‘lmagan yechuvchi ishlatiladi. Bu yechuvchining dastlabki yaqinlashuvi boshlang‘ich shartlardan olinadi.

Demak, boshlang'ich shartlar tanlovi iteratsion jarayonning kirishimlilikiga ta'sir qiladi. Boshlang'ich shartlarni berish uchun Subdomain Setting dialogli oynasida unit zakladkasi mavjud. Bu zakladkani ochib, boshlang'ich shartlarni beramiz.



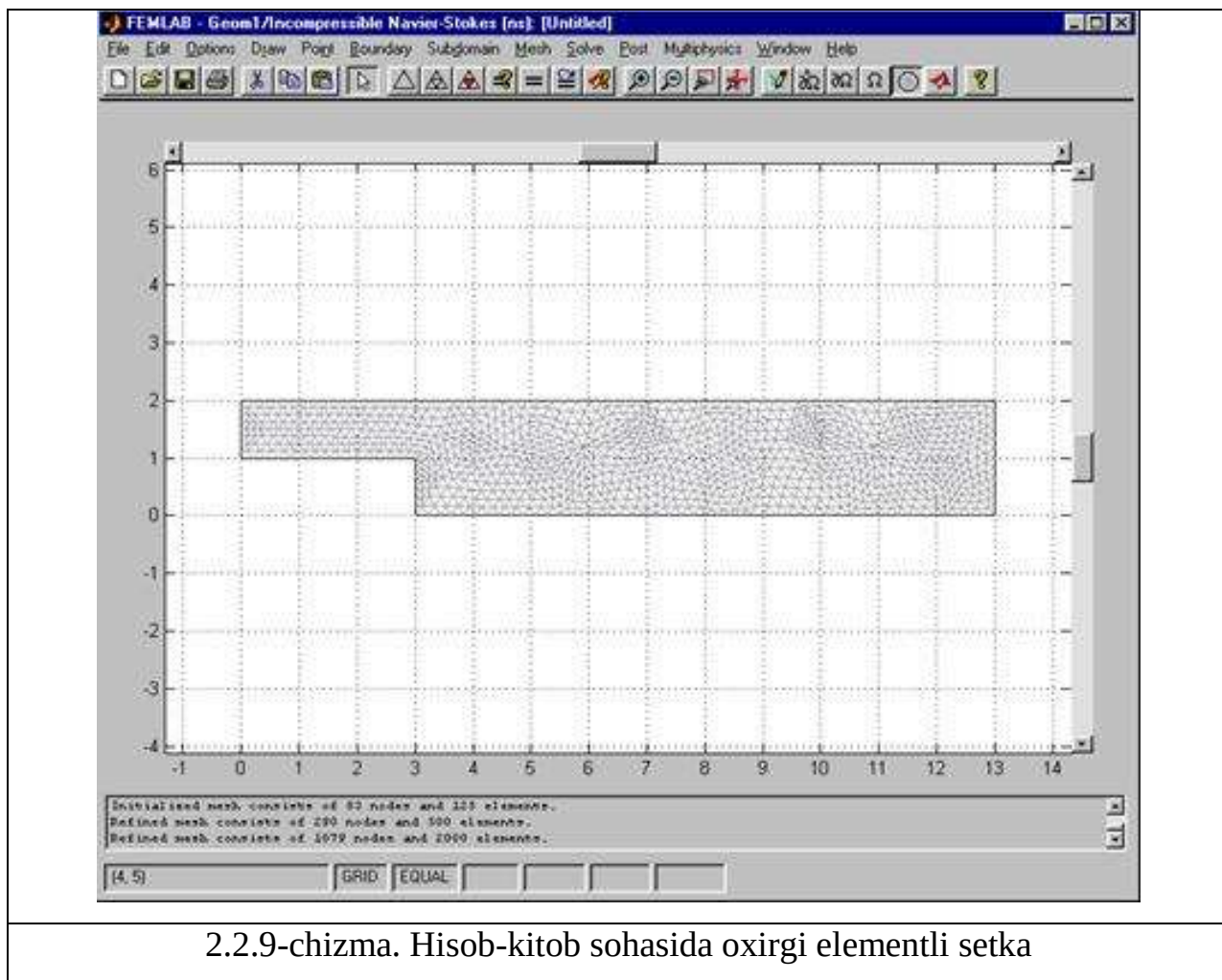
2.2.7-chizma. Moddiy xususiyatlar parametrlarini kiritishning dialogli oynasi.



2.2.8-chizma. Subdomain Setting dialogli oynasining unit zakladkasi

Oxirgi elementli setkaning generatsiyasi rejimi. Kerakli sifatdagi setkani qurish uchun asosiy instrumental panelning  va  tugmachalarini bosish kifoya (oxirgi tugmani ikki marta bosish kerak). Bu holda, tor joyda oqim - 8

elementga, keng joyda esa - 16 elementga bo'linadi. Femlab figurasining oxirgielement setkali oynasining ko'rinishi 2.2.9-chizmada berilgan.



2.2.9-chizma. Hisob-kitob sohasida oxirgi elementli setka

Yechish: Masalani yechish uchun, asosiy instrumental panelning tugmachasini bosish kifoya.

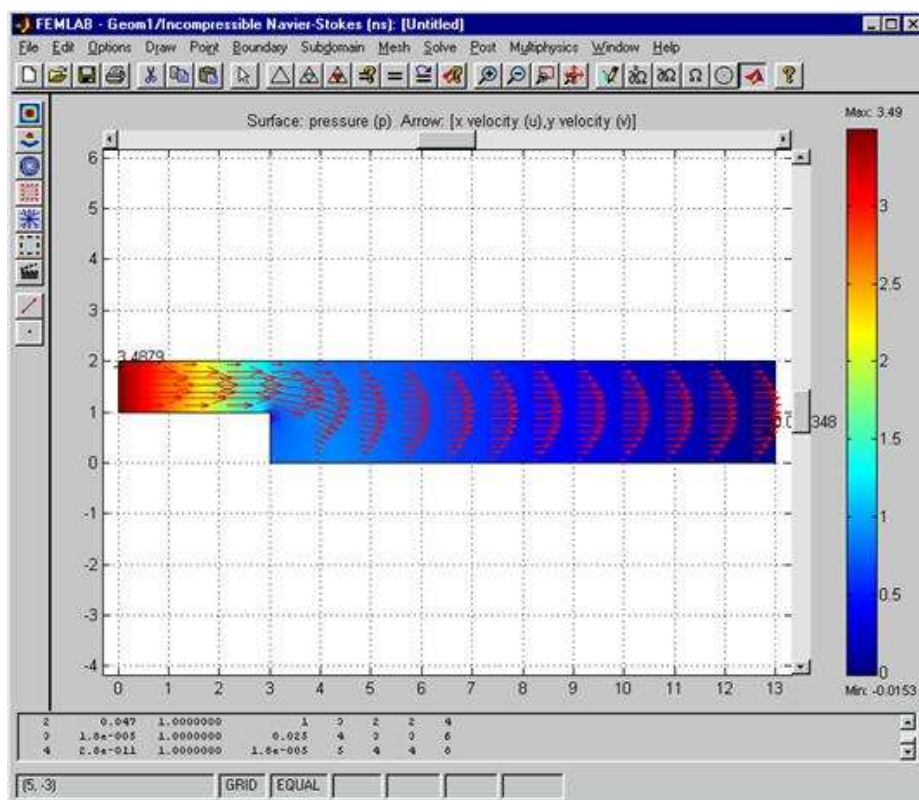
Yechish davomida xabarlar protokolida, iteratsiya jarayonida hisob-kitob xatoliklari qanday kamayishining yozuvlari paydo bo'lib turadi.

Postprotessorli ishlov berish va yechim vizualizatsiyasi. Yechish jarayoni tamom bo'lishi bilanoq, femlab figurasining axes maydonida tezliklar moduli maydoni taqsimlanishining rangli tasviri quriladi. (2.19-chizma).

Tezliklar maydoni va bosimlar maydonining bir vaqtda ko'rsatish imkoni bor. Menyudagi Post/ Plot Parameters komandasini bajaramiz. Plot Parameters dialogli oynasi ochiladi. Bu oynada Surfase zakladkasini ochamiz. Pastga tushayotgan menyu Surfase expression da pressure (p) punktini tanlab,

Max/min marker bayrog'ini o'rnatamiz. Arrow zakladkasida Arrow plot bayrog'ini o'rnatamiz. OK tugmachasini bosish- dialogli oynani yopish va 11 chizmadagi tasvir qurilishiga olib keladi.

2.2.10-chizma. Tezlik modulining skalyar maydonining rangli tasviri ko'rinishi



2.2.10-chizma. Tezliklar maydoni va bosimlar maydonining bir vaqtda ko'rsatilishi.

2.2.10-chizmadan ko'rinib turibdiki, $Re=10$ bo'lganda, masalaning yechimi barqaror bo'ladi. Masalani, $Re=1000$ bo'lganda yechishga urinib ko'ramiz.

Menyudagi Option/ Add/ Edit Constants komandasini bajaramiz. Ochiq dialogli oynada Re konstanta ifodasini 1000 ga almashtiramiz. Oynani yopish uchun Set, OK tugmachalarini bosamiz.

Menyudagi Post/ Plot Parameters komandasini bajaramiz. Ochiq dialogli oynaning General zakladkasida Contour plot bayrog'ini o'rnatamiz. Contour zakladkasida pastga tushayotgan menyu Contour expression da velocity field (U) punktini tanlaymiz va Max/min marker bayrog'ini o'rnatamiz. Contour

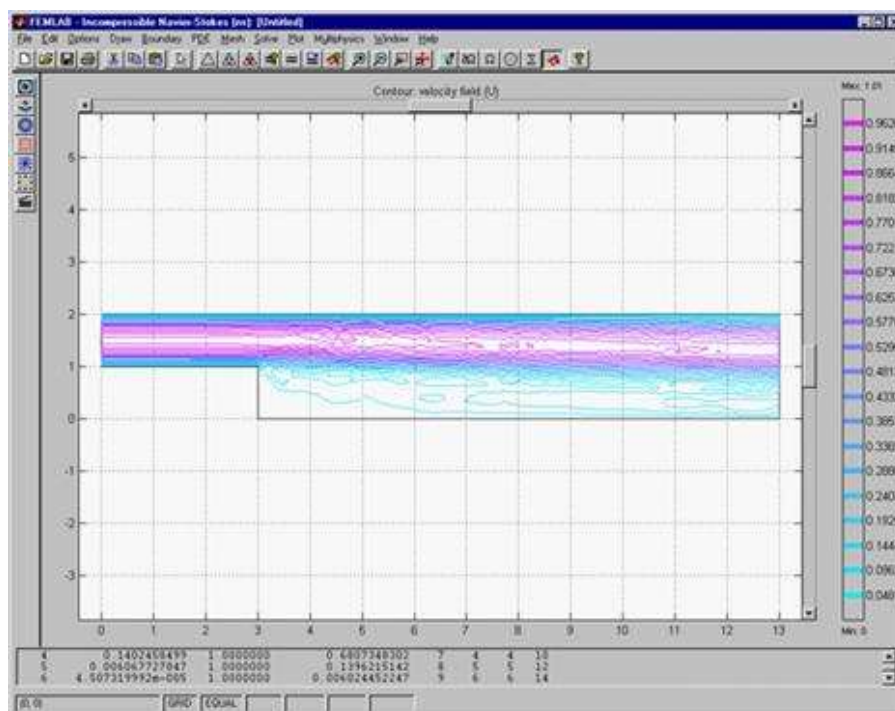
levels tahrir chizig'ida 19 sonini kiritamiz. OK tugmachasini bosish orqali femlab GUI – ilovasini vizualizatsiyaning kerakli rejimiga o'tkazamiz va dialogli oynani yopamiz.

Masalani yechishni asosiy instrumental panelning  tugmachasini bosish orqali yurgizib yuboramiz. Yechim natijasida 2.2.10-chizmada tasvirlangan tezliklar maydonining ko'rinishi quriladi. Yechim restartini asosiy instrumental panelning  tugmachasini bosish orqali yechish mumkin. Restart deb, boshlang'ich yaqinlashuvi oldingi yechim natijasi bo'lgan yechimning takroriy yurgizib yuborilishiga aytiladi.

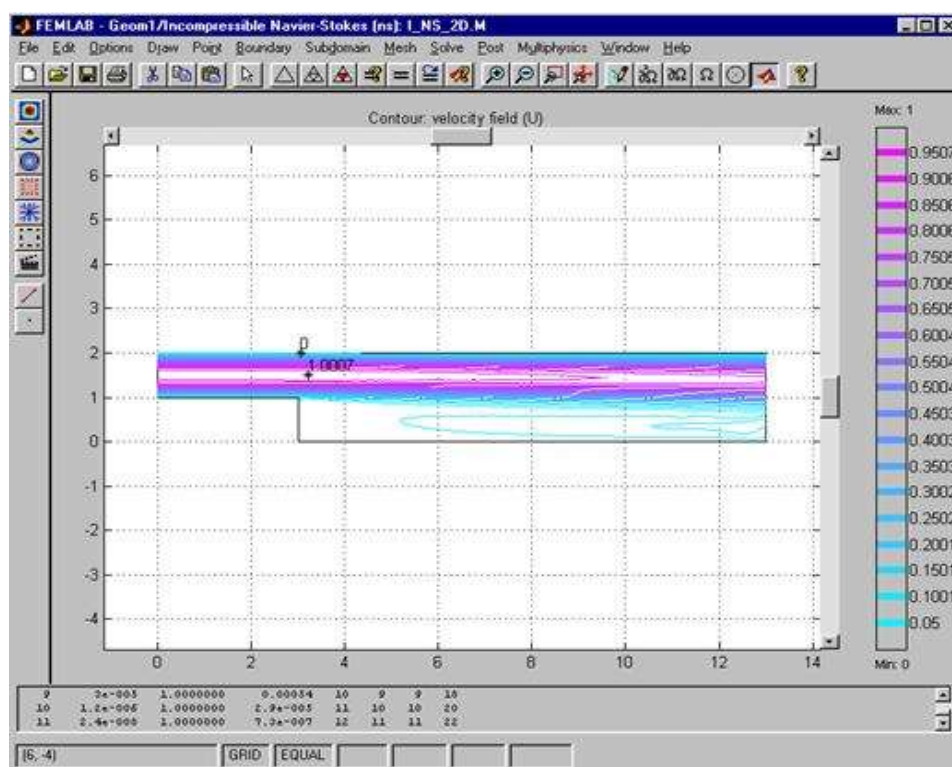
 tugmachasini ko'p marta bosish va hisob-kitob jarayonini yakunlanishini kutib, shuni kuzatamizki, tezliklar maydoni tasviri har gal o'zgaraveradi. Bu o'zgarish Raynolds sonlari katta ifodalari oqimini modellashtirishning noustuvorligini ko'rsatadi. Bu hisoblash effekti Kelvin-Gelmgols noustuvorligi ifodasini oldi.

FEMLAB tizimida bunga o'xshash effektlar, Yechimning yo'naltirilgan diffuzion stabilizatsiyasi orqali yo'qotiladi.

Menyudagi Subdomain /Subdomain Setting komandasini bajaramiz va ochiq dialogli oynada Stremlin diffusion bayrog'ini o'rnatamiz. OK tugmachasini bosish orqali dialogli oynani yopamiz. Menyudagi Solve/ Parameters komandasini bajaramiz. General zakladkasida Stremlin diffusion bayrog'ini o'rnatamiz. OK tugmachasini bosish orqali dialogli oynani yopamiz va = tugmachasi bilan Yechimni kiritamiz. Hisoblash jarayoni tugashi bilan 2.1. 13-chizmada ifodalangan tezliklar maydoni tasviri olamiz.



2.2.11-chizma. Stabillashtirmay hisoblangan $Re=1000$ bo'lgandagi tezliklar maydoni



2.2.12-chizma. Stabillashtirib hisoblangan, $Re=1000$ bo'lgandagi tezliklar maydoni

Yo‘naltirilgan diffuzion stabilizatsiyani qo‘llab olingan yechim etarlicha barqarorlikka ega bo‘ladi. Restart natijasida olingan tezliklar maydoni tasviri, amalda 2.12-chizmada ifodalanganidan farq qilmaydi.

Oqim tizimi ko‘rinishidagi yechim vizualizatsiyasi jiddiy qiziqish uyg‘otadi. Menyudagi Post/ Plot Parameters komandasini bajaramiz. Ochiq dialogli oynaning General zakladkasida Contour bayrog‘ini olib tashlab, Flow lines bayrog‘ini o‘rnatamiz. OK tugmachasini bosish orqali dialogli oynani yopamiz.

Xulosalar

1. Navye-Stoks tenglamalarini Femlab muhitida yechish algoritmi keltirildi.
2. Suyuqlik va gazlar mexanikasining ikkita test masalasi keltirilgan algoritm yordamida yechildi va natijalar muhokama qilindi.
3. Femlab muhitining natijalarni namoyish qilish imkoniyatlari ko‘rsatildi.

XOTIMA

1. Navye-Stoks tenglamalari va ularning qo'llanish sohalari o'rganildi. Navye-Stoks tenglamalarining chekli elementlar usulidan foydalanib yechish imkoniyatlari baholandi.
2. Turli chekli elementlar usulidan foydalanib olingan natijalar analitik usul bilan olingan natijalar orqali taqqoslandi.
3. Navye-Stoks tenglamalarini Femlab muhitida yechish algoritmi keltirildi. Suyuqlik va gazlar mexanikasining ikkita test masalasi keltirilgan algoritm yordamida yechildi va natijalar muhokama qilindi.
4. Femlab muhitining natijalarni namoyish qilish imkoniyatlari ko'rsatildi.

ADABIYOTLAR

1. Karimov I.A. Barkamol avlod orzusi. –T. “O’zbekiston milliy entsiklopediyasi” davlat ilmiy nashriyoti, 2000, 245b.
2. Versteeg H.K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. England. Longman Group Ltd, 1995. -257p.
3. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А. Тепломассобмен: учебное пособие для вузов. –М.: Издательство «МЭИ»,2005. -550с.
4. Цветков Ф.Ф., Керимов Р.В., Величко В.И. Задачник по тепломассобмену. –М.: Издательство «МЭИ»,2008. -195с.
5. Holman J.P. Heat Transfer. New York. McGraw-Hill, 1997. 697p.
6. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. –М.: Энергоиздат, 1975. -488с.
7. Михеев М.А. Михеева И.М. Основы теплопередачи. –М.: «Энергия», 1977. -344с.
8. Крейт Ф., Блэк У. Основы теплопередачи. –М.: «МИР», 1983. -512с.
9. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер.Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. – М.: Мир, 1990. -728с.
10. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х т. –М.: Мир, 1991. -504с.
11. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. –М.: «Энергия», 1980. -288с. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамика жидкости: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152с.
12. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. –М.: Издательство МЭИ, 2003. 311с.
13. Бирюлин Г.В. Теплофизические расчеты в конечно-элементном пакете COMSOL / FEMLAB. – М.: СПбГУИТМО, 2006. -78с.
14. www.matlab.exponenta.ru

15. Duffie J., Beckman W. Solar engineering of thermal processes. New York. Wiley, 1991. -919p.