

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I. UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR	
1.1. Asosiy funksiyalar sinfi.	12
1.2. Regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar.....	18
II. UMUMLASHGAN KOSHI MASALASINING QO'YILISHI VA TADQIQ ETILISHI .	
2.1 Umumlashgan Koshi masalasining qo'yilishi (tor tebranish tenglamasi misolida.Bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan hol uchun).....	29
2.2 Telegraf tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasining yechimining xossalari.....	42
XOTIMA.....	55
ADABIYOTLAR.....	56

Kirish

Ilm – ziyo salohiyati, bu – xalqning
vatanning ulkan boyligi, kelajak
poydevoridir.

I.A.Karimov

Xalqimizning qadimiy va shonli tarixini uzviy davom ettirishga, shu tarixning o‘chmas sahifalarini, ajdodlarimizning buyuk merosini, qadriyat va urf-odatlarini yoshlarimizga yetkazish, hayotimizni tobora poklash va fayzu barakali qilishda, bir so‘z bilan aytganda, uni ma’naviy yuksaltirishda, bugun Yaratganning bizga bergan har bir kunini ma’noli va sermazmun o‘tkazishda beqiyos hissa qo‘shayotgan ota-bobolarimizga har tomonlama hurmat, e’zoz va ehtirom ko‘rsatish barchamiz uchun ham qarz, ham farzdir. Bu borada yurtimizda bir qator ishlar olib borilmoqda. Bunga yorqin misol qilib Prezident Islom Karimovning O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganining 22-yilligiga bag‘ishlangan tantanali marosimdagi ma’ruzasida:

“Mamlakatimizda yaxshi an’ana va odatga aylanib qolgan tajribamiz asosida kirib kelayotgan yangi – 2015-yilga nom berish haqida siz, azizlar bilan maslahatlashib olsak, ayni muddao bo‘lardi.

Barchamizga yaxshi ma’lumki, o‘tgan davr mobaynida yurtimizda yillarga qanday nom bermaylik – bu “Oila” yoki “Ayollar” yili bo‘ladimi, “Sog‘lom avlod” yoki “Sog‘lom bola” yili bo‘ladimi, “Obod mahalla” yoki “Obod turmush” yili bo‘ladimi – bularning barchasi, hech shubhasiz, chuqur ma’no va mazmunga ega.

Boshqacha aytganda, bu kabi oliyjanob maqsadlarni ko‘zda tutib amalga oshirgan tadbirlarimiz avvalo jamiyatimizni yanada erkinlashtirish, hayotimizni

yanada obod va farovon qilish, tinchlik-osoyishtalikni mustahkamlashda, vatanimizning obro‘-e’tiborini xalqaro maydonda yuksaltirish yo‘lida muhim amaliy qadam bo‘lganini hech kim inkor etolmaydi.

Shu bilan birga, mana shunday ezgu tadbirlarni o‘tkazish tufayli xalqimizni yanada jipslashtirish, mehr-oqibat va hamjihatlikni, oilani yanada mustahkamlash, kattalarga hurmat, kichiklarga izzat, ayol zotiga, avvalambor, onalarga cheksiz mehr va ehtirom singari qadriyatlar aholimiz, xususan, yoshlarimizning qalbi va shuuridan chuqur o‘rin olayotganini hisobga oladigan bo‘lsak – bularning barchasining ahamiyati va mohiyatini baholash o‘zi qiyin, deb o‘ylayman. Lo‘nda qilib aytganda, bizning e’tiborimiz markazida turgan ayni shu xususiyat va fazilatlar, bugungi zamon va hayotimizning o‘zi talab qilayotgan o‘tkir va dolzarb masalalar kirib kelayotgan yangi yillarga nom berish bo‘yicha bizning ro‘yxatimizda tursa, hech shubhasiz, xalqimizning xohishi va talabiga javob beradigan ish bo‘lar edi.

Ayni shu shartlarni hisobga olgan holda, men kirib kelayotgan 2015-yilga mamlakatimizda Keksalarni e’zozlash yili, deb nom berishni taklif etaman.

Har qanday jamiyatning yoshi ulug‘ odamlarga bo‘lgan e’tibori va g‘amxo‘rligi uning madaniy darajasini belgilaydi, desak, yanglishmagan bo‘lamiz. Soddagina, o‘zbekona qilib aytganda, keksalarga hurmat-ehtirom, mehr-oqibat ko‘rsatish ma’naviy hayotimizning tom ma’noda ajralmas qismiga aylangan.

Bir o‘ylab ko‘raylik, “Qarisi bor uyning parisi bor”, “Qariyalar – xonadonlarimizning fayzi va farishtasi” degan maqol va hikmatli so‘zlarimizda qanday chuqur ma’no bor.

Haqiqatan ham, qaysi xonadonda nuroniy otaxon yoki onaxon bo‘lsa, bu oilada albatta fayzu baraka, farovonlik, ahillik bo‘lishini barchamiz yaxshi bilamiz.

Shu bois bugun turli sohalarda erishayotgan yutuqlarimizda ota-onalarimiz, mo'tabar qariyalarimizning unutilmas va ulkan xizmati borligini, biz ular oldida umrbod qarzdor ekanimizni unutmasligimiz, qo'limizdan kelganicha ularning og'irini yengil, umrini uzoq qilishni o'zimizning insoniy burchimiz, deb bilishimiz lozim.

Vatanimizning musaffo osmonini asrashda, har qanday ofatlarni ostonamizga yo'latmaslik, ona yurtimizni fashizm balosidan himoya qilishda keksa avlod vakillarining qanday jasorat ko'rsatgani, front ortida mehnat qilib, g'alabaga munosib hissa qo'shgani, mamlakatimizni tiklash, uning ham harbiy, ham iqtisodiy, ham madaniy-ma'naviy salohiyatini oshirishda nuroniy keksalarimiz namoyon etgan fidoyilikni biz hamisha katta minnatdorlik bilan eslaymiz.

Bugun faxriylarimizning hurmatini joyiga qo'yish, har qaysi keksa odamning yuragiga yetib borish, ko'nglini ko'tarish, shu bilan birga, ularning hayotini mazmunli qilish yo'lida olib borayotgan ishlarimizni kuchaytirish, samarasini oshirish zarur.

Bugungi kunda mamlakatimizda 60 yoshdan oshganlar soni 2 million 873 mingdan ko'proq kishini tashkil etadi. Mustaqillik yillarida xalqimizning o'rtacha yoshi 1990-yildagi 67 yoshdan 73,5 yoshga, ayollar o'rtasida esa 75,8 yoshga yetdi.

Ayni paytda yurtimizda 225 ming nafar 80 yoshdan, 44 ming nafar 90 yoshdan, 8 ming 700 nafar – shunga e'tibor bering – 100 yoshdan oshgan tabarruk qariyalar yashamoqda. Ular orasida 3 ming 109 nafar Ikkinchi jahon urushi qatnashchisi, 69 ming 994 nafar front ortida mehnat qilgan insonlar borligini alohida ta'kidlash lozim.

Bu nimaning isboti? Bu avvalo, istiqlol davrida xalqimizning turmush darajasi va sifati tobora ortib borayotganidan, yoshi ulug' odamlarimiz yaxshi

niyat, ertangi kunimizga katta umid bilan yashayotganidan, ularning qalbi sofligidan dalolat beradi.

Xonadonlarimiz ko‘rki bo‘lgan piri badavlat keksalarimizni har tomonlama qadrlash maqsadida mamlakatimizda katta ishlar amalga oshirilmoqda. Shu yilning o‘zida ularga davlat byudjeti hisobidan 11 trillion 618 milliard so‘mdan ortiq pensiya, 105 milliard so‘mdan ziyod nafaqalar to‘langani buning amaliy tasdig‘idir.

Dunyodagi kamdan-kam davlatlar qatorida bugungi kunda davlatimiz pensiyaga ajratadigan mablag‘ning miqdori o‘rtacha oylikning 41 foizdan ziyodini tashkil etishi ham shundan dalolat beradi.

Bu borada 2014-yil 13-oktabrda qabul qilingan “1941-1945-yillardagi urush va mehnat fronti faxriylarini ijtimoiy qo‘llab-quvvatlashni yanada kuchaytirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Prezident farmoniga asosan ularni ijtimoiy himoyalash, xususan, yilda bir marta o‘zlari uchun maqbul muddatlarda sanatoriy-sog‘lomlashtirish muassasalarida davlat hisobidan davolanish imkoni yaratilgani sizlarga yaxshi ma’lum, deb o‘ylayman.

Ayni vaqtda keksa avlod vakillariga nodavlat tashkilotlar, ijtimoiy tuzilmalar tomonidan ham moddiy va ma’naviy ko‘mak berilayotgani va bunday yordamning miqyosi kengayib borayotgani e’tiborga sazovor. Xususan, 2013-yilda “Nuroniylar jamg‘armasi tomonidan shu maqsadda 610 million so‘m, joriy yilning 9 oyida esa 553 million so‘mdan ortiq mablag‘ yo‘naltirilgani, “Mahalla” xayriya jamoat fondi tomonidan 2013-yilda 1 milliard 597 million so‘mdan ziyod, shu yilning o‘tgan 9 oyida esa 1 milliard 614 million so‘mlik yordam ko‘rsatilgani ham bunga misol bo‘la oladi.

Tabiiyki, an’anaga aylanib qolgan tartib bo‘yicha, 2015-yilga Keksalarni e’zozlash yili deb nom berishimiz munosabati bilan davlat dasturi qabul qilinadi va bu dasturni amalga oshirish uchun maxsus hukumat komissiyasi tuziladi.

Mazkur dasturni ishlab chiqishda bugungi kunda keksa avlod vakillarining hayotiga daxldor bo'lgan, hali-beri yechilmagan muammolarni hal qilish, bir so'z bilan aytganda, yilga shunday nom berganimiz o'zini amalda oqlashini dasturning asosiy maqsadi sifatida ko'rish kerak.

Barchamizni oq yuvib, oq taragan, ona yurtimizning og'ir yukini, uning quvonch va tashvishini umr bo'yi yelkasida ko'tarib kelgan mo'tabar bobolarimiz va momolarimizni, ota-onalarimizni rozi qilish, ularning duosini olish – dunyodagi eng ulug', eng savobli ish desam, o'ylaymanki, barchangizning fikringizni ifoda etgan bo'laman.

Kirib kelayotgan yangi yilga Keksalarni e'zozlash yili deb nom berib, uni mana shunday pok niyat va harakatlar bilan boshlayotganimiz 2015-yilning tinchlik va osoyishtalik, farovonlik va to'kinlik yili bo'lishiga, uning yanada mazmunli o'tishiga munosib hissa bo'lib qo'shiladi, inshoollo" kabi satrlarni o'qish mumkin.

Asrlar sinovidan o'tgan mana shunday o'lmas qadriyatlarga tayanib, o'z kuchi va qudratiga ishonib-inonib yashayotgan xalqimizni o'z tanlagan yo'ldan hech kim, hech qachon qaytara olmaydi. Biz o'z maqsadlarimizga albatta erishamiz va ko'zlagan marralarimizga albatta yetamiz.

Mavzuning dolzarbligi: Bitiruv malakaviy ishim matematik-fizika fanida muhim o'rin tutgan bo'lib, zamonaviy matematika masalalarini o'rganishda umumlashgan funksiyalar, xususiy hosilali diffirensial tenglama uchun boshlang'ich, boslang'ich- chegaraviy masalalarni o'rganish muhim hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi: Yuqorida ishning dolzarbligi qismida bayon qilingan mulohazalar ishning maqsadini aniqlab beradi va ular quyidagilardan iborat.

Telegraf tenglamasini o'rganish va tadbiq etish;

Umumlashgan funksiyalarni o'ranish va tadqiq etish;

Umumlashgan Koshi masalasining qo'yilishini o'rganish va matematika fizika tenglamalarini yechishda qo'llash.

Bitiruv malakaviy ishning vazifasi:Bu bitiruv malakaviy ishimizning vazifasi shundan iboratki, tebranuvchi tenglama dastlab $x \in R, t > 0$ sohada qaralgan bo'lsa, endi bu tenglamani $x \in R, t < 0$ sohada Koshi masalasi qanday qo'yilishini o'rganish va o'rganilgan natijalarni telegraf tenglamasiga qo'llash.

Bitiruv malakaviy ishning o'rganilganlik darajasi:Qo'yilgan mavzu to'liq o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning predmeti:Umumlashgan funksiyalar Koshi masalasi, telegraf tenglamasi.

Bitiruv malakaviy ishning obyekti: Telagraf tenglamasiga qo'yilgan umumlashgan Koshi masalasining yechimini xossalarini o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiy farazi:Ushbu B.M.I.refarativ xarakterga ega bo'lib,telegraf tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasi yechimi o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning yangiligi:Bitiruv malakaviy ish reforativ xarakterga ega bo'lib, xususiyl hosilali diffirensial tenglamalar uchun umumlashgan Koshi masalasining xususiyatlari telegraf tenglamasi misolida o'rganilgan.

Bitiruv malakaviy ishning amaliy ahamiyati:Ushbu bitiruv malakaviy ishidan matematika va amaliy matematika yuqori kurs talabalari va ushbu soha magistirlari o'zlarining sohalarida qo'llaydilar.

Bitiruv malakaviy ishning metodologik asosi:Matematik analiz, integral tenglamalar,matematika fizika masalalari usullari qo'llaniladi.

Bitiruv malakaviy ishning metodlari:diffirensial tenglama turlari,integral tenglama turlari.

Bitiruv malakaviy ishning tarkibi va hajmi:Mazkur bitiruv malakaviy ish kirish qismi, 2 ta bob, har bir bobda 2 tadan 4 ta paragraf, xulosa, xotima va foydalanilgan adabiyotlardan iborat.

I. UMUMLASHGAN FUNKSIYALAR.

Bu bobda bizning maqsadimiz umumlashgan funksiyalar haqida tushuncha berish va unga doir misollar keltirishdan iboratdir.

Bobning birinchi qismida asosiy funksiyalar sinfi ,ikkinchi qismida esa regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar haqida quyidagi ma'lumotlarga ega bo'lamiz.

Umumlashgan funksiyalar dastlab fizikaga doir ilmiy ishlarda uchragan. Mashhur fizik P.Dirak delta –funksiyasi deb ataluvchi va quyidagicha ta'riflanuvchi $\delta(x - x_0)$ funksiyani kiritgan: butun to'g'ri chiziqda aniqlangan $\delta(x - x_0)$ funksiya x_0 dan boshqa har bir nuqtada nolga teng va x_0 nuqtada esa qiymati cheksiz bo'lib, butun to'g'ri chiziq bo'yicha integrali mavjud va birga teng , ya'ni

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ +\infty, & x = x_0 \end{cases}$$

va

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

Umumlashgan funksiyalarning asosiy matematik nazariyasi S.L. Sobolev va L. Shvars tomonidan qo'yilgan.Keyinroq esa umumlashgan funksiya nazariyasi ko'plab matematiklar tomonidan intensiv rivojlantirilgan.

Kvant fizikasi , diffirensial tenglamalar nazariyasi va matematik fizika masalalari umumlashgan funksiyalarning jadal rivojlanishi va uning ilmiy asoslanishining poydevori bo'ldi.

Ma'lumki , uzluksiz funksiya diffirensiallanuvchi bo'lmasligi mumkin . Birorta ham nuqtada hosilaga ega bo'lmagan uzluksiz funksiyalarni birinchi marta K.Beyershtass tuzgan. Umumlashgan funksiyalar tushunchasi funksiya tushunchasining shunday kengaytirilishiki, bunda har qanday uzluksiz funksiya diffirensiallanuvchi va uning hosilasi umumlashgan funksiya bo'ladi.Shu bilan bir qatorda har qanday umumlashgan funksiyaning o'zi ham diffirensiallanuvchi bo'lib, uning hosilasi ham umumlashgan funksiya bo'ladi. Hozirgi vaqtda

umumlashgan funksiyalar nazariyasi fizikaning ko'p sohalarida qo'llanilishi va matematika faniga qo'llanilishi natijasida fizika matematika va injenerlik sohalarining ilgarilab kelishiga sabab bo'ldi.

Ba'zi belgilashlarni kiritamiz.

R- haqiqiy sonlar to'plami .

C- kompleks sonlar to'plami.

R^n - n o'lchovli evklid fazosi; Bunda fazoning har bir nuqtasi $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ko'rinishida bo'lib, uzunligi esa $|x|=\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ko'rinishda bo'ladi.

$D(R^n)$ orqali n o'zgaruvchili finit va cheksiz diffirensiallanuvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz.

1.1-ta'rif. Funksiya finit deyiladi, agarda u biror chegaralangan to'plamdan tashqarida nolga teng bo'lsa.

1.2-ta'rif . $f: D(R^n) \rightarrow R$ — akslantirish $D(R^n)$ da funksional deyiladi, bu yerda R- haqiqiy sonlar maydoni.

Shu o'rinda aytib o'tish kerakki ,funktionalning funksiyadan farqli tarafi shundan iboratki funksional funksiyani songa akslantirdi funksiya esa to'plamni to'plamga akslantiradi.f funksionalning $\varphi \in D(R^n)$ funksiyadagi, qiymati (f, φ) bilan belgilanadi. Ta'rifga asosan (f, φ) — haqiqiy son.

1.3-ta'rif. Funksional $f: D(R^n) \rightarrow C$ chiziqli deyiladi , agarda f funksionalda additivlik va bir jinslilik shartlari o'rinli bo'lsa , ya'ni ixtiyoriy $\varphi, \psi \in D(R^n)$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun $(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi)$ tenglik o'rinli bo'lsa.

1.1-misol. $f: C[0, 1] \rightarrow C$, $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$ funksionalni chiziqli ekanligini ko'rsatamiz.

Integralning additivlik va bir jinslilik xossalaridan foydalansak quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$f(x + y) = \int_0^1 (x(t) + y(t))dt = \int_0^1 x(t)dt + \int_0^1 y(t)dt = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \int_0^1 (\alpha x(t)) dt = \alpha \int_0^1 x(t) dt = \alpha f(x)$$

Demak, $f: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ funksional chiziqli funksional ekanligi kelib chiqdi.

1.2-misol. Berilgan $f: R^3 \rightarrow R$, $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ funksionalni chiziqlilikka tekshiring.

Yuqoridagi integralni xossasidan foydalangan holda quyidagicha chiziqlilikka tekshiramiz.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= a_1(\alpha x_1 + \beta y_1) + a_2(\alpha x_2 + \beta y_2) + a_3(\alpha x_3 + \beta y_3) = \\ &= \alpha(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \beta(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3) = \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

1.4-ta'rif. Agar barcha $x \in X$ va barcha $\alpha \in \mathbb{C}$ lar uchun $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$ bo'lsa, f ga qo'shma bir jinsli funksional deyiladi. X —chiziqli fazo, $\mathbb{C}$ —kompleks sonlar maydoni.

1.3-misol $f: L_2[0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \int_0^\pi \cos t * \overline{x(t)} dt$ funksionalni qo'shma chiziqli funksional ekanligini ko'rsatamiz. $L_2[a, b]$ -kvadratlari bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi.

Integralni assosiy yuqorida keltirilgan xossalaridan foydalangan holda quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \int_0^\pi \cos t (\overline{x(t) + y(t)}) dt = \int_0^\pi \cos t \overline{x(t)} dt + \int_0^\pi \cos t \overline{y(t)} dt \\ &= f(x) + f(y), \end{aligned}$$

$$f(\alpha x) = \int_0^\pi \cos t (\overline{\alpha x(t)}) dt = \bar{\alpha} \int_0^\pi \cos t \overline{x(t)} dt$$

Demak, $f: L_2[0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ qo'shma chiziqli funksional ekan.

1.5-ta'rif. Chiziqli funksional $f: D(R^n) \rightarrow R$ uzluksiz deyiladi, agarda $D(R^n)$ da nolga intiluvchi ixtiyoriy funksiyalar ketma –ketligi $\{\varphi_k(x)\} \in D(R^n)$ uchun $k \rightarrow \infty$ da $(f, \varphi_k) \rightarrow 0$ bo'lsa.

1.1-teorema. Chiziqli funksional f uzluksiz bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

$|f(x)| \leq M\|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi M sonlar to'lamining aniq quyi chegarasi f funksionalning normasi deyiladi va $\|f\|$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

1.4-misol. $f: C[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$ funksionalni uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

$$1\text{-teoremaga asosan } |f(x)| = \left| \int_0^1 x(t)dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)|dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| = 1 \|x\|$$

1-teoremaga ko'ra $f: C[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ uzluksiz funksionalligi kelib chiqadi.

1.5-misol. Berilgan $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$. Funksionalni uzluksizlikka tekshiring.

Uzluksizlik teoremasiga ko'ra funksionalni uzluksizlikka tekshiramiz.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3| \leq a_1|x_1| + a_2|x_2| + a_3|x_3| \leq a_1 \max|x| + a_2 \max|x| + a_3 \max|x| = (a_1 + a_2 + a_3) \max|x| \\ &\leq C \|x\| \end{aligned}$$

$a_1 + a_2 + a_3 = C$ bilan belgilaymiz. Bunda $|f(x)| \leq C \|x\|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funksional uzluksiz.

1.5-ta'rif. Chiziqli, uzluksiz funksional $f: D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ umumlashgan funksiya deyiladi.

1.1 ASOSIY FUNKSIYALAR SINFI.

1.1.1-ta'rif. Asosiy funksiya deb, $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ oraliqda hamma hosilalari mavjud bo'lgan finit funksiyaqa aytiladi.

Demak, asosiy funksiyalar to'plamiga tegishli bo'lgan funksiyalar quyidagi 2 ta shartni qanoatlantirishi kerak.

1. Funksiya cheksiz diffirensiallanuvchi ya'ni funksiyaning o'zi aniqlangan sohada ixtiyoriy tartibli hosilalari ham shu sohaga tegishli bo'lishi kerak.

2. Funksiya finit funksiya ya'ni, u biror chegaralangan to'plamdan tashqarida nolga teng bo'lishi kerak.

Endi, asosiy funksiyalar to'plamini fazoga aylantiramiz. Buning uchun to'plamga yaqinlashish tushinchasini kiritamiz.

Agar asosiy funksiyalardan iborat $\{\varphi_n(x)\}$ ketma – ketlik quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa, u $\varphi(x)$ asosiy funksiyaga yaqinlashuvchi deyiladi.

1) Shunday $a > 0$ son mavjudki, har bir n natural son va x ($|x| > a$ ya'ni $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$) uchun $\varphi_n(x) = 0$ yoki $\text{supp}\varphi(x, a) = \{x \in [-a; a] \mid \varphi(x, a) \neq 0\}$

2) $\{\varphi_n(x)\}$ ketma- ketlik $\varphi(x)$ funksiyaga va har bir m natural son uchun $\{\varphi_n(x)\}$ ketma – ketlikning m - tartibli hosilalaridan iborat $\{\varphi_n^{(m)}(x)\}$ ketma – ketlik $\varphi^{(m)}(x)$ funksiyaga $R = (-\infty; +\infty)$ oraliqda tekis yaqinlashadi.

1) va 2) shartlar bajarilganda R da $\{\varphi_n(x)\} \rightarrow \varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$ kabi yoziladi. Asosiy funksiyalarning vektor fazosini kiritilgan yaqinlashish bilan birga qurilganda E bilan belgilaymiz.

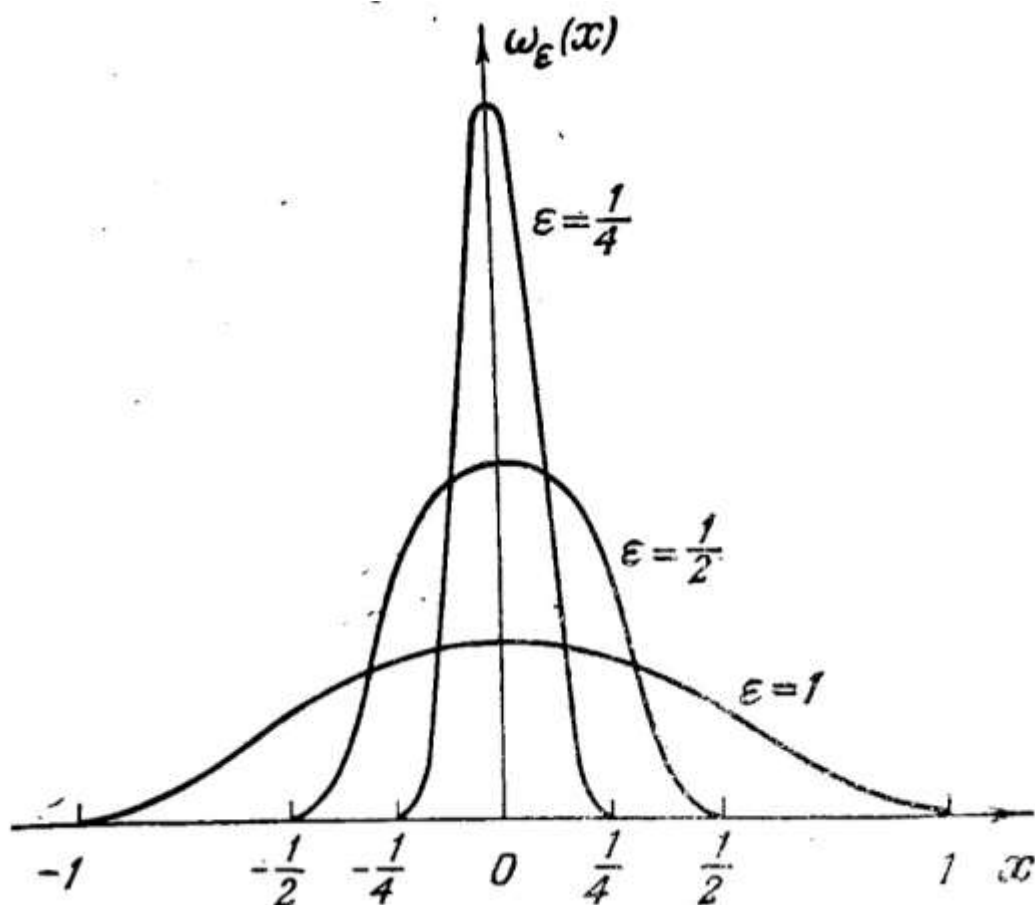
Asosiy funksiyaga misol tariqasida noldan farqli „shapkacha“ funksiyasini ko'rsatamiz.

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & , \text{agar } |x| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{agar } |x| > \varepsilon \end{cases}$$

C_ε doimiyni shunday tanlaymizki, $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - (x)^2}} dx = 1$
 e ning darajasini ε^2 ga bo'lib , quyidagi integralni hosil qilamiz.

$$c_\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{1 - (\frac{x}{\varepsilon})^2}} dx = \left| \frac{x}{\varepsilon} = t \quad x = \varepsilon t \quad dx = \varepsilon dt \right| = c_\varepsilon \int_{-1}^1 \varepsilon e^{-\frac{1}{1 - t^2}} dt = 1$$

$$c_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1 - t^2}} dt}$$



1.1.1-chizma.(shapkacha funksiyasi)

$x \in \mathbb{R}^2$ bo'lganda c_ε ni yuqoridagidek tanlaymiz. Agar $x \in \mathbb{R}^n$ bo'lganda c_ε quyidagicha tanlaymiz. $c_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-t^2}} dt}$ bundan osongina ko'rish mumkinki,

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ bo'ladi.}$$

Endi, $x \in \mathbb{R}^1$ deb „shapkacha“ funksiyani $\omega(x, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ ekanligini ko'rsatamiz.

Isbot. Ixtiyoriy tartibli bir tomonlama $x = -\varepsilon$ da o'ngdan va $x = \varepsilon$ da chapdan hosilalari nolga teng ekanligiga ishonch hosil qilish uchun $\varepsilon^2 - x^2 = y^2$ deb belgilab $f(y) = e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}}$ funksiyaning $y=0$ nuqtadagi barcha tartibli hosilalarining nolga teng bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Haqiqatdan ham, $y \neq 0$ da

$$f'(y) = \frac{2\varepsilon^2}{y^3} e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}},$$

$$f''(y) = -\frac{6\varepsilon^2}{y^4} e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}} + \frac{4\varepsilon^4}{y^6} e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}},$$

umuman,

$$P^{(n)}(y) = P_n\left(\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}}$$

bu yerda $P_n(z) - z$ ga bog'liq biror ko'phad, ya'ni $f^{(n)}(y)$ quyidagi formula bilan aniqlanadi;

$$f^{(n)}(y) = e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\lambda_k}{x_k} , m_n \in N , \lambda_k\text{-h ga bog'liq bo'lgan koeffisientlar.}$$

Quyidagi $\lim_{y \rightarrow 0} f^{(n)}(y)$ limitni hisoblaymiz.

$$\lim_{y \rightarrow 0} f^{(n)}(y) = \lim_{y \rightarrow 0} P^{(n)}\left(\frac{1}{y}\right) e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}} = 0$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas.

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{\varepsilon^2}{y^2}} = 0 = f(0)$$

tenglikdan $f(y)$ funksiyaning $y = 0$ nuqtada uzluksizligi va yuqoridagilarga asosan bu nuqtada diffirensiallanuvchanligi, $f'(0) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, f' funksiya $y = 0$ nuqtada uzluksizdir. Xuddi shunga o'xshash $f'(y)$ funksiya uchun yuqoridagi mulohazalarni takrorlab $y = 0$ nuqtada $f''(y)$

ning mavjud ekanligini va $f''(0) = 0$, hamda $f''(y)$ ning $y = 0$ da uzluksiz ekanligiga ega bo'lamiz. Bu jarayonni davom ettirib, ixtiyoriy $n = 1, 2, \dots$ lar uchun $f^{(n)}(y)$ funksiya yuqoridagi xossalarga ega bo'lishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Demak, $\omega_\varepsilon(x) \in C^\infty(R^1)$, $\text{supp } \omega_\varepsilon(x) = [-\varepsilon; \varepsilon]$ ekanligidan ω_ε funksiyaning finitligi va umuman, $\omega_\varepsilon(x) \in D(R^1)$, kelib chiqadi.

1.1.1-misol. Yuqorida ko'rilgan $\varphi(x, \varepsilon)$ asosiy funksiyaning olib, $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x, \varepsilon)$ ketma – ketlikni ko'ramiz.

Ravshanki ,bu ketma – ketlikning o‘zi va har qanday m natural son uchun $\{\varphi_n^{(m)}(x)\}$ ketma –ketlik aynan nolga teng funkiyaga $(-\infty; +\infty)$ oraliqda tekis yaqinlashadi. Demak , $\{\varphi_n\}$ ketma – ketlik E fazoda nolga yaqinlashadi.

1.1.2-misol. Endi yana o‘sha $\varphi(x, \varepsilon)$ asosiy funksiya yordamida tuzilgan $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(\frac{x}{n}, \varepsilon)$ funksiylardan iborat $\{\varphi_n(x)\}$ ketma – ketlikni olsak, bu ketma- ketlik va har bir m natural son uchun uning m -tartibli hosilalaridan iborat $\{\varphi_n^{(m)}(x)\}$ ketma- ketlik $(-\infty; +\infty)$ oraliqda aynan nolga teng funksiya tekis yaqinlashadi.

Ammo, $\{\varphi_n\}$ ketma- ketlik aynan nolga teng funksiya E fazoda yaqinlashmaydi , chunki bu ketma – ketlik uchun E fazoda yaqinlashishning birinchi sharti bajarilmaydi.

E fazoda aniqlangan haqiqiy chiziqli f funksionalni olamiz. Agar E fazoda φ ga yaqinlashuvchi har qanday $\{\varphi_n(x)\}$ ketma- ketlik uchun $f(\varphi_n)$ sonlar ketma- ketligi $f(\varphi)$ songa yaqinlashsa , bu funksional uzluksiz chiziqli funksional deyiladi. Qulaylik maqsadida f funksionalning φ dagi ($\varphi \in E$) qiymatini $(f(x), \varphi(x))$ bilan belgilagan edik.

E dagi uzluksiz chiziqli funksionallarga misol keltiramiz.

1.1.3-misol. $R = (-\infty; +\infty)$ oraliqda aniqlangan va bu oraliqning har qanday chekli oraliq’ida Lebeg integrali mavjud bo’lgan biror $f(x)$ funksiya qaraylik (bunday funksiyalar lokal integrallanuvchi deyiladi). U holda har qanday $\varphi \in E$ uchun,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx \quad (1.1.1)$$

integral mavjud , chunki $\varphi(x)$ aslida finit funksiya bo’lgani sababli integral chekli oraliq bo’yicha olingan. Integral ostidagi funksiyalar tekis yaqinlashganda integral ostida limitga o’tish mumkinligi uchun ko’rilayotgan funksional E da uzluksizdir.

Demak, Lebeg integrali mavjud bo’lgan funksiya lokal integrallanuvchi funksiya sifatida qarash mumkin.

1.1.2-ta'rif. $f(x):R^n \rightarrow R$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi deyiladi, agarda ixtiyoriy chegaralangan $Q \subset R^n$ to'plam uchun u Q da absolyut integrallanuvchi bo'lsa, ya'ni $\int_Q |f(x)| dx < \infty$ bo'lsa.

Quyidagi lemma orqali biz asosiy funksiyalarga „shapkacha“ funksiyasidan tashqari ko'plab misollar keltirish mumkinligini ko'rsatamiz.

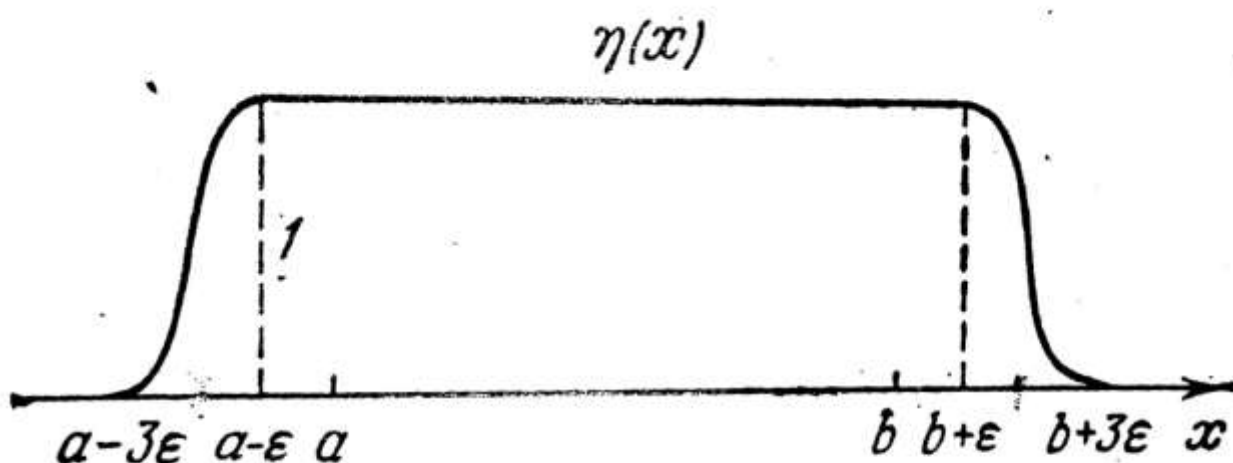
Lemma.

Ixtiyoriy G soha va $h > 0$ soni uchun $0 \leq \eta(x) \leq 1, \eta(x) = 1, x \in G_h, \eta(x) = 0, x \notin G_{3h}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\eta(x) \in C^\infty(R^n)$ funksiya mavjud.

Bunda $C^\infty(R^n)$ - ixtiyoriy tartibli uzluksiz hosilaga ega R^n da aniqlangan funksiyalar sinfi.

$G(a,b)$ - interval uchun $\eta(x)$ funksiya grafigi quyida keltirilgan.

$$G \subset G_h \subset G_{2h}$$



1.1.2-chizma. ($\eta(x)$ funksiyasi)

Isbot. $X(x) - G_{2h}$ to'plamning xarakteristik funksiyasi bo'lsin :

$$X(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_{2h} \\ 0, & x \notin G_{2h} \end{cases}$$

u holda $\eta(x) = \int_{R^n} X(x) * \omega(x-y) dy \in D(R^n)$ bunda $D(R^n)$ - R^n da asosiy funksiyalar fazosi.

Haqiqatdan ham,

$$\omega_h \in D, \quad 0 \leq \omega_h(x), \quad \text{supp} \omega_h(x) = [-h; h], \quad \text{ekanligidan}$$

$$\eta(x) = \int_{G_{2h}} \omega_h(x-y) dy \in C^\infty(R^n)$$

$$0 \leq \eta(x) < \int_{R^n} \omega_h(x-y) dy = \int_{R^n} \omega_h(\xi) d\xi = 1$$

$$\eta(x) = \int_{S(x,h)} X(y) * \omega_h(x-y) dy =$$

$$= \begin{cases} \int_{S(x,h)} \omega_h(x-y) dy = \int_{S(x,h)} \omega_h(\xi) d\xi = 1, & x \in G_h \\ 0, & x \in G_{3h} \end{cases} \quad S(x,h) = \{y \in R^n / |x-y| \leq h\}$$

ekanligi kelib chiqadi. Lemma isbotlandi.

1.2 Regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar.

$f(x)$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi bo'lsin.

$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx$, (1.1.1) bunda φ funksiya asosiy funksiyalar fazosidan olingan ya'ni, $\varphi \in E$.

(1.1.1) funksionalni qaraymiz. Integralni chiziqliligidan quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \int f(x) (\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)) dx = \lambda \int f(x) \varphi(x) dx + \mu \int f(x) * \psi(x) dx = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$$

Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teorema asosan $\varphi_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $\varphi_k \in E$ asosiy funksiyalar fazosidan olingan funksiyalar ketma-ketligi uchun

$$(f, \varphi_k) = \int_{u_R} f(x) * \varphi_k(x) dx \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

bo'ladi. Demak, $f(\varphi)$ chiziqli uzluksiz funksional.

1.2.1-ta'rif. R^n da lokal integrallanuvchi funksiyalar orqali aniqlangan (1.1.1) umumlashgan funksiyalar regulyar umumlashgan funksiyalar deyiladi.

Har bir lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiyaga (1.1.1) formula bilan aniqlangan umumlashgan funksiyani mos qo'yamiz. Bu moslikda turli lokal integrallanuvchi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga turli funksionallarning mos kelishini ko'rsatamiz.

Teskarisini faraz qilaylik. U holda har qanday $\varphi \in E$ uchun

$$\int f(x)\varphi(x) dx = \int g(x)\varphi(x) dx \text{ yoki}$$

$$\int (f(x) - g(x))\varphi(x) dx = 0$$

so'ng $f(x) - g(x) = h(x)$ belgilash kiritamiz va har qanday $\varphi \in E$ uchun o'rinli bo'lgan.

$$\int h(x)\varphi(x) dx = 0 \quad (1.2.1)$$

tenglikdan foydalanib, $h(x)$ ning deyarli hamma nuqtalarda nol ekanligini ko'rsatamiz. φ finit funksiya bo'lgani sababli shunday $[a, b]$ oraliq mavjudki, t ning $t \leq a$ va $t \geq b$ qiymatlarida $\varphi(t) = 0$. Shunga binoan,

$$\int h(x)\varphi(x) dx = \int_a^b h(x)\varphi(x) dx \quad (1.2.2)$$

ushbu

$$\int_a^t h(s)ds = H(x) \quad (1.2.3)$$

belgilash kiritib, (1.2.2) integralni bo'laklab integrallaymiz.

$$\int_a^b h(x)\varphi(x) dx = (H(b)\varphi(b) - H(a)\varphi(a)) - \int_a^b H(x)\varphi'(x) dx \quad (1.2.4)$$

bundan $\varphi(a) = 0$ va $\varphi(b) = 0$ ekanligini hisobga olgan holda (1.2.1) ga asosan quyidagini hosil qilamiz.

$$\int_a^b H(x)\varphi'(x) dx = 0 \quad (1.2.5)$$

endi, $\varphi'(x)$ funksiya ham $[a, b]$ dan tashqarida nol ekanligini hisobga olsak, har bir $\varphi \in E$ uchun

$$\int H(x)\varphi'(x) dx = 0 \quad (1.2.6)$$

agar bu munosabatdan $H(x)$ funksiyaning o'zgarmas ekanligi kelib chiqishini ko'rsatsak yuqoridagi tenglik isbotlanadi.

$$H'(x)h(x) = 0$$

Shunday qilib, tasdiqni isbotlash uchun quyidagi lemmani isbotlash kifoya.

Lemma (Dyu-Bua –Reymon lemmasi)

Agar biror uzluksiz $H(x)$ funksiya va $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\varphi \in E$ uchun

$$\int_a^b H(x)\varphi'(x) dx = 0 \quad (1.2.5)$$

bo'lsa, $H(x)$ funksiya $[a, b]$ da o'zgarmas.

Isbot. $H(x)$ funksiya o'zgarmas bo'lmasin. Bu holda E fazoda (6) tenglik bajarilmasligini ko'rsatamiz.

$H(x)$ o'zgarmas bo'lmagani uchun shunday $x_1, x_2 \in [a, b]$ nuqtalar mavjudki, $H(x_1) \neq H(x_2)$. Aniqlik uchun, masalan $H(x_1) < H(x_2)$ bo'lsin. Bu sonlar orasidagi biror C sonni olamiz. $H(x)$ uzluksiz bo'lgani uchun o'zaro kesishmaydigan shunday (a_1, b_1) va (a_2, b_2) oraliqlar mavjudki, har qanday $x' \in [a_1, b_1]$, $x'' \in [a_2, b_2]$ nuqtalar uchun

$$H(x') < C < H(x'')$$

Endi, $\varphi'(x)$ sifatida quyidagi to'rtta shartni qanoatlantiruvchi barcha xosilalari mavjud bo'lgan funksiyani olamiz:

- 1) (a_1, b_1) da musbat;
- 2) (a_2, b_2) da manfiy;
- 3) (a_1, b_1) va (a_2, b_2) oraliqlardan tashqarida nol;

4) Ushbu

$$\int_a^b \varphi'(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \varphi'(x) dx + \int_{a_2}^{b_2} \varphi'(x) dx$$

tenglik o'rinli.

Bunday $\varphi'(x)$ funksiyani, masalan, yuqorida ko'rilgan $\varphi(x, \varepsilon)$ asosiy funksiya yordamida ham tuzish mumkin.

Ushbu

$$\varphi(x) = \int_{\varepsilon}^x \varphi'(s) ds$$

funksiyani olsak, ravshanki, $\varphi \in E$ va $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Endi,

$$\int_a^b (H(x) - C) \varphi'(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} (H(x) - C) \varphi'(x) dx + \int_{a_2}^{b_2} (H(x) - C) \varphi'(x) dx < 0$$

chunki ikkala had ham manfiy. Bundan 4) shartga binoan

$$\begin{aligned} \int_a^b H(x) * \varphi'(x) dx &= \int_a^b (H(x) - C) \varphi'(x) dx + C \int_a^b \varphi'(x) dx = \\ &= \int_a^b (H(x) - C) \varphi'(x) dx < 0. \end{aligned}$$

Demak, topilgan $\varphi \in E$ uchun (1.2.5) tenglik o'rinli emas. Lemma isbotlandi.

Shunday qilib, har bir lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiyaga (1.1.1) formula bilan aniqlangan umumlashgan funksiya mos qo'yildi. Bu moslikda, yuqorida ko'rsatilgandek, turli lokal integrallanuvchi funksiyalarga turli umumlashgan funksiyalar mos keladi. Demak, barcha lokal integrallanuvchi funksiyalar to'plamini barcha umumlashgan funksiyalar to'plamining qismi deb qarash mumkin. Shu sababli umumlashgan funksiyalar uchun ham $f(x)$ belgini ishlatish qulay. Ammo bunda $f(x)$ umumlashgan funksiyaning ayrim nuqtalardagi qiymati manoga ega emas. Undan tashqari, bazan $(f, \varphi) = (f(x), \varphi(x))$ belgining o'rniga

$$\int f(x) \varphi(x) dx$$

belgini ham ishlatamiz, va holanki, klassik analiz nuqtai nazaridan bu integral ma'noga ega emas.

Umumlashgan funksiyalar ustida amallar.

1. $f(x)$ umumlashgan funksiyani α songa ko'paytmasi deb ushbu

$$(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi) = (f, \alpha \varphi)$$

uzluksiz chiziqli funksionalga aytiladi. Regulyar f funksional uchun bu amal lokal

integrallanuvchi $f(x)$ funksiyani α songa ko'paytirishdan iborat.

2. Ikki $f(x)$ va $g(x)$ umumlashgan funksiyani yig'indisi deb, ushbu

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi)$$

tenglik bilan aniqlangan $f + g$ funksionalga aytiladi. Agar f va g lar regulyar bo'lsa, u holda ularning yig'indisi ham regulyar bo'lib, lokal integrallanuvchi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'indisiga teng.

3. f umumlashgan funksiya va umumlashgan funksiyalarning $\{f_n\}$ ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar har bir $\varphi \in E$ uchun (f_n, φ) sonlar ketma-ketligi $n \rightarrow \infty$

da (f, φ) songa intilsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik f ga yaqinlashuvchi deyiladi.

Agar f_n funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo'lib, $\{f_n\}$ ketma-ketlik f uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda bu $\{f_n\}$ ketma-ketlik umumlashgan funksiyalar ketma-ketligi sifatida ham f ga tekis yaqinlashgani sababli har qanday $\varphi \in E$ uchun ushbu

$$\int f_n(x) \varphi(x) dx$$

integral ostida limitga o'tish mumkin.

Kiritilgan yaqinlashish ma'lum yaqinlashishlarga nisbatan kengroq manodagi yaqinlashish ekanligini misolda ko'ramiz.

Ushbu, $f_n(x) = \sin nx$ funksiyalar ketma-ketligi biror funksiyaga na tekis yaqinlashadi, va na har bir nuqtada yaqinlashadi. Ammo bu ketma-ketlik umumlashgan funksiyalar sifatida esa nolga yaqinlashadi. Haqiqatdan, ushbu

$$(\sin nx, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin nx \varphi(x) dx$$

son φ funksiyaning Fur'e koeffisienti sifatida $n \rightarrow \infty$ da nolga yaqinlashishi matematik analiz kursidan ma'lum.

4. $f(x)$ regulyar funksiya uning hosilasi mavjud va $f'(x)$ uzluksiz bo'lgan holni ko'raylik. Bu holda ushbu

$$(f'(x), \varphi) = \int f'(x) \varphi(x) dx$$

funksionalni olishimiz mumkin. Bu integralni bo'laklab integrallab, $\varphi(x)$ funksiyaning biror $[a, b]$ oraliqning tashqarisida nol ekanligini hisobga olsak,

$$(f'(x), \varphi(x)) = (f(x) \varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty}) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = (f(x), -\varphi'(x))$$

bu tenglikni umumlashgan funksiya hosilasining ta'rifi sifatida qabul qilamiz.

Shunday qilib, ushbu

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi')$$

tenglik bilan aniqlangan g umumlashgan funksiya f ning hosilasi deb ataladi va f' yoki $\frac{df}{dx}$ kabi belgilanadi.

5. Ixtiyoriy ikkita umumlashgan funksiyaning ko'paytmasi tushunchasi umumiy holda kiritilmagan. Ammo ixtiyoriy umumlashgan funksiyaning barcha hosilalari mavjud $h(x)$ funksiya ko'paytmasini tariflash mumkin. Barcha hosilalari mavjud $h(x)$ funksiyaning $f(x)$ umumlashgan funksiya ko'paytmasi deb, ushbu

$$(hf, \varphi) = (f, h\varphi)$$

tenglik bilan aniqlangan hf funksionalga aytiladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi funksional manoga ega, chunki har qanday $\varphi(x)$ finit funksiyaning $h(x)$ funksiya ko'paytmasi yana finit funksiya. Undan tashqari, E fazoda φ_n ketma-ketlik nolga intilsa, shu fazoda $h\varphi_n$ ham nolga intiladi. Bundan ta'rifdagi hf funksionalning uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, barcha tartibli hosilalari mavjud bo'lgan $h(x)$ funksiyaning $f(x)$ umumlashgan funksiya ko'paytmasi aniqlanadi. Agar $f(x)$ regulyar bo'lsa, uning $h(x)$ ga ko'paytmasi bu funksiyaning odatdagi ko'paytmasiga teng. Ushbu

$$(hf)' = hf' + h'f$$

qoida o'rinli ekanligi oson tekshiriladi.

1.2.2—misol. Ushbu Xevisayd funksiyasi

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \geq 0 \\ 0, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

ning hosilasini hisoblaymiz. Xosilaning ta'rifiga ko'ra ;

$$\begin{aligned} (\theta'(x), \varphi(x)) &= (\theta(x), -\varphi'(x)) = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) * \varphi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \end{aligned}$$

del'ta funksiyaning ta'rifiga muvofiq $\theta'(x) = \delta$

Endi, $\theta''(x)$ ni hisoblaymiz.

$$\theta''(x) = \delta'(x), \quad (\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$$

Shunga o'xshash

$$(\delta^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (\delta, \varphi^{(m)}) = (-1)^m \varphi^{(m)}(0)$$

munosabatlar isbotlanadi.

Tayinlangan t_0 uchun $\theta(t - t_0)$ funksiyaning hosilasi yuqoridagiga o'xshash hisoblanadi:

$$\theta'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$$

1.2.2-ta'rif. Regulyar bo'lmagan umumlashgan funksiyalar singulyar umumlashgan funksiyalar deyiladi.

Ushbu ta'rifga ko'ra singulyar umumlashgan funksiyaning lokal integrallanuvchi birorta ham funksiya mos qo'yib bo'lmaydi. Singulyar umumlashgan funksiya oddiy misol Dirakning $\delta(x)$ -funksiyasidir.

Dirakning delta-funksiyasi xossalari.

$$1). \delta(-x) = \delta(x), \quad x \in R^n;$$

Isbot. Ixtiyoriy $\varphi \in D(R^n)$ uchun

$$(\delta(-x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(-x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

ekanligidan yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

$$2). \text{Agar } a(x) - x = x^0 \text{ da uzluksiz funksiya, } x \in R^n, x^0 \in R^n \text{ bo'lsa,}$$

$$a(x)\delta(x - x^0) = a(x^0)\delta(x - x^0) \quad \text{bo'ladi;}$$

Isbot. $\delta(x - x^0), x^0 \in R^n$ funksiyaning aniqlaymiz. Ixtiyoriy $\varphi \in D(R^n)$ funksiya uchun

$$(\delta(x - x^0), \varphi(x)) = (\delta(y), \varphi(y + x^0)) = \varphi(x^0)$$

tenglik o'rinli, ya'ni $\delta(x - x^0)$ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi.

$$(\delta(x - x^0), \varphi(x)) = \varphi(x^0), \forall \varphi \in D$$

$$3) (R^n) t^n \delta^n(t) = (-1)^n n! \delta(t), t \in R^n, n = 1, 2, \dots, \dots, \dots;$$

Isbot. Ixtiyoriy $\varphi \in D(R^n)$ uchun

$$\begin{aligned} (x^n \delta^{(n)}(x), \varphi(x)) &= (\delta^{(n)}(x), x^n \varphi(x)) = (-1)^n (\delta(x), \frac{d^n}{dx^n} (x^n \varphi(x))) = \\ &= (-1)^n \frac{d}{dx^n} (x^n \varphi(x))|_{x=0} = (-1)^n n! \varphi(0) = ((-1)^n n! \delta(x), \varphi(x)). \end{aligned}$$

4) $y(x): R^n \rightarrow R^n$ - cheksiz diffirensiallanuvchi akslantirish, $x = \omega^{-1}(y)$ – teskari akslantirish mavjud va $\det \frac{\partial \omega}{\partial x} \neq 0$, $\omega^{-1}(0) = x^0$ bo'lsin. U holda

$$\delta(\omega(x)) = \frac{\delta(x - x^0)}{\left| \det \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x=x^0}}$$

Isbot. $f(x) - R^n$ da lokal integrallanuvchi funksiya va $y = \omega(x)$ – cheksiz diffirensiallanuvchi maxsus bo'lmagan ($\det \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} \neq 0$) R^n ni o'ziga akslantiruvchi vektor funksiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varphi \in D(R^n)$ uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\begin{aligned} (f(\omega(x)), \varphi(x)) &= \int_{R^n} f(\omega(x)) \varphi(x) dx = \int_{R^n} f(y) \varphi(\omega^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial \omega^{-1}(y)}{\partial y} \right| dy = \\ &= \left(f(y), \varphi(\omega^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial \omega^{-1}(y)}{\partial y} \right| \right) \end{aligned}$$

ya'ni

$$(f(\omega(x)), \varphi(x)) = f(y) \varphi(\omega^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial \omega^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

va

$$\varphi(\omega^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial \omega^{-1}(y)}{\partial y} \right| \in D(R^n)$$

ekanligi sababli bu tenglikni berilgan $f(x)$ funksiya bo'yicha umumlashgan $f(\omega(x))$ funksiyani aniqlash uchun ishlatish mumkin. Xususan ,

$x = Ay + b, \det A \neq 0$ – maxsus bo'lmagan R^n ni o'ziga akslantiruvchi chiziqli almashtirish bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varphi \in D$ lar uchun

$$\begin{aligned}(f(Ay + b), \varphi) &= \int_{R^n} f(Ay + b) \varphi(y) dy = \frac{1}{|\det A|} \int_{R^n} f(x), \varphi[A^{-1}(x - b)] dx = \\ &= \frac{1}{|\det A|} (f, \varphi[A^{-1}(x - b)])\end{aligned}$$

shunday qilib,

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|} \right), \forall \varphi \in D(R^n).$$

5) Agar $x \in R^n$ bo'lsa,

$$\delta(x - x^0) = \frac{2(-1)^{n-1}}{\omega_n(n-1)!} \delta^{(n-1)}(r), \text{ bu yerda } r = |x - x^0|,$$

$\omega_n - R^n$ da birlik sferanig yuzi.

R^n da markazi x^0 nuqtada bo'lgan sferik koordinatalar sistemasini qaraymiz:

$$x = x^0 + rv, r = |x - x^0|, \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n), \quad |v| = 1$$

$$v_1 = \cos \theta_1,$$

$$v_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n-2$$

$$v_3 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \quad 0 < \theta_{n-1} < 2\pi$$

.....

$$v_{n-1} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1},$$

$$v_n = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}.$$

Delta funksiya uchun quyidagi tenglik o'rinli :

$$\delta(x - x^0) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{\omega_n \cdot (n-1)!} \delta^{n-1}(r),$$

bu yerda $\omega_n - R^n$ da birlik sfera sirti yuzi.

Isbot. $\delta(t)$ funksiyaning juftligidan ixtiyoriy $\varphi \in D(R')$ uchun

$$\int_0^\infty \delta(t) \cdot \varphi(t) dt = \frac{1}{2} \int_{R^1} \delta(t) \varphi(|t|) dt = \frac{1}{2} \varphi(0)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ma'lumki, hajm elementi sferik koordinatalar sistemasida quyidagicha aniqlanadi:

$$dx = r^{n-1} dr d\omega_v,$$

bu yerda $d\omega_v$ — birlik sfera sirt elementi. Quyidagi tengliklar ketma- ketligi asosiy formulaning to'riligini ko'rsatadi:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(-1)^n \cdot 2}{\omega \cdot (n-1)!} \delta^{(n-1)}(|x - x^0|), \varphi(x) \right) = \\
& = \left(\frac{(-1)^n \cdot 2}{\omega_n \cdot (n-1)!} \int_0^\infty r^{n-1} \delta^{(n-1)}(r) \int_{|v|=1} \varphi(x^0 + rv) dr \cdot d\omega_v = \right. \\
& = \frac{2}{\omega_v} \int_0^\infty \delta(r) \int_{|v|=1} \varphi(x^0 + rv) d\omega_v = \frac{1}{\omega_v} \int_{|v|=1} \varphi(x^0 + rv) d\omega_v|_{r=0} = \\
& = \varphi(x^0) = (\delta(x - x^0), \varphi(x))
\end{aligned}$$

6) Agar $x \in R^n$, $t \in R'$ bo'lsa, quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$a) \delta(x, t) = -\frac{1}{2a} \delta'(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \delta(\Gamma), n=3, \\ \frac{1}{\pi} \frac{\theta(\Gamma)}{\sqrt{\Gamma}}, n=2, \\ \theta(\Gamma), n=1 \end{pmatrix} \quad b). 0 = -\frac{1}{2a} \delta(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \delta(\Gamma), n=3, \\ \frac{1}{\pi} \frac{\theta(\Gamma)}{\sqrt{\Gamma}}, n=2, \\ \theta(\Gamma), n=1 \end{pmatrix}$$

bu yerda $\Gamma = a^2 t^2 - |x|^2$, $a = \text{const} > 0$.

6) xossaning birinchi tengligini isbot qilamiz.

$\forall \varphi(x, t) \in D(R^4)$, $x \in R^3$ uchun

$$\begin{aligned}
& (-\delta'(t) \delta(a^2 t^2 - |x^2|), \varphi(x, t)) = K - \int_{R^3} \delta'(t), \delta(a^2 t^2 - |x^2|) \varphi(x, t) dx dt = \\
& = (\delta'(t), \int_{R^3} \delta(a^2 t^2 - |x^2|) \varphi(x, t) dx) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta(a^2 t^2 - r^2) \right. \\
& \left. \varphi(rv, t) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \right]_{t=0}, (v = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi))
\end{aligned}$$

tengliklar o'rinli. Oxirgi tenglik bo'laklab integrallash yordamida hosil bo'ladi.

$\omega(r) = r^2 - a^2 t^2$ deb 4) xossadan foydalanamiz:

$$\delta(a^2 t^2 - r^2) = \frac{\delta(r - at)}{2r}, r > 0.$$

bu formulani e'tiborga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \delta(a^2 t^2 - r^2) \varphi(rv, t) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \right]_{t=0} = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\delta(r - at)}{2r} \varphi(rv, t) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \right]_{t=0} = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{at}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(atv, t) \sin \theta d\theta d\varphi \right]_{t=0} = \frac{a}{2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(atv, t) \sin \theta d\theta d\varphi \right] + \\
& + \left[\frac{at}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(atv, t) \sin \theta d\theta d\varphi \right]_{t=0} = 2\pi a \varphi(0, 0) = (2\pi a \delta(x, t), \varphi(x, t))
\end{aligned}$$

bu tengliklar 6 a) ning birinchi formulasini isbot qiladi. 6 a) ning ikkinchi formulasini asoslaymiz. Ixtiyoriy $\varphi(x, t) \in D(R^3)$, $x \in R^2$ uchun quyidagi munosabatlar o'rinli :

$$\begin{aligned} \left(-\delta'(t) \frac{\theta(a^2 t^2 - |x|^2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(x, t) \right) &= -(\delta'(t) \int_{R^2} \frac{\theta(a^2 t^2 - |x|^2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(x, t) dx) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{R^2} \frac{\theta(a^2 t^2 - |x|^2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(a^2 t^2 - |x|^2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(vr, t) r dr d\varphi \right]_{t=0} \end{aligned}$$

bu yerda $v = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Oxirgi tenglikda o'zgaruvchini almashtiramiz:

$$r = at \cdot z:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(a^2 t^2 - |x|^2)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(vr, t) r dr d\varphi \right]_{t=0} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[at \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(1 - z^2)}{\sqrt{1 - z^2}} \varphi(atzv, t) z dz d\varphi \right]_{t=0} = \\ &= a\varphi(0,0) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\theta(1 - z^2)}{\sqrt{1 - z^2}} z dz d\varphi = \\ &= 2\pi a\varphi(0,0) \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{1 - z^2}} = 2\pi a\varphi(0,0) = (2\pi a\delta(x, t), \varphi(x, t)) \end{aligned}$$

6 a) ning oxirgi tengligini asoslashga o'tamiz. Ixtiyoriy $\varphi(x, t) \in D(R^2)$, $x \in R^1$, $x \in R^1$, $t \in R^1$ uchun :

$$\begin{aligned} (-\delta'(t)\theta(a^2 t^2 - x^2), \varphi(x, t)) &= -(\delta'(t), \int_{R^2} \theta(a^2 t^2 - x^2) \varphi(x, t) dx) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-at}^{at} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t) dx \right]_{t=0} = 2a\varphi(0,0) = (2a\delta(x, t), \varphi(x, t)). \end{aligned}$$

6 b) tengliklar quyidagicha isbot qilinadi. 6 a) tengliklari t ga ko'paytiriladi. $t\delta(x, t) = t\delta(t) \delta(x) = 0 \delta(x) = 0$,
 $-t\delta'(t) = \delta(t)$ ekanligini hisobga olsak 6 b) tengliklar kelib chiqadi.

E fazoda ushbu $(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$ chiziqli funksionalni ko'ramiz. Bu funksionalning uzluksizligi ravshan.

Bu funksionalni (1.1.1) ko'rinishda ifodalab bo'lmaydi. Haqiqatdan biror lokal integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun

$$\int f(x) \cdot \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

o'rinli bo'lsin .Xususan yuqorida ko'rilgan $\varphi(x, \varepsilon)$ asosiy funksiya uchun

$$\int f(x) \cdot \varphi(x, \varepsilon) dx = \varphi(0, \varepsilon) = a^{-1}$$

ammo $a \rightarrow 0$ da chapdagi integral nolga intiladi , bu esa yuqoridagi tenglikka zid.

II. UMUMLASHGAN KOSHI MASALASINING QO'YILISHI VA TADQIQ ETILISHI.

Ushbu bobda umumlashgan funksiyalar nazariyasi to'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimini qurishda tadbiq etiladi .Bunda boshlang'ich

shartlarni oniy tasir etuvchi manbalar ko'rinishida qaralib Koshi masalasi umumlashgan ko'rinishida tadqiq etiladi. Shunday yo'l bilan Koshi masalasi, berilgan tenglamaning $t < 0$ da nolga aylanadigan yechimini topishga olib kelinadi.

2.1. Umumlashgan Koshi masalasining qo'yilishi (bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasi misolida).

Ma'lumki, torning erkin tebranishi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{yoki} \quad U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad (2.1.1)$$

tenglama bilan tasvirlanadi.

(2.1.1) tenglama uchun Koshi masalasi quyidagicha qo'yiladi. $C^2(t > 0) \cap C'(t \geq 0)$ sinfga tegishli $t > 0$ yarim fazoda (2.1.1) tenglamani va $t = 0$ da

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2.1.2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya topilsin.

$U(x, t)$ — Koshining klassik masalasi deyiladi. Bu yerda $\varphi(x), \psi(x)$ berilgan funksiyalar. $n = 1$ da $\varphi(x) \in C^2(R')$ $\psi(x) \in C'(R')$ bo'ladi. U vaqtda Koshining klassik masalasining yechimi mavjud va yagona bo'ladi.

Quyida shuni ko'rsatamiz.

(2.1.1) tenglamaning xarakteristikalarini tenglamasi $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$ $(dx - a dt) * (dx + a dt) = 0$ dan iborat. Bundan (2.1.1) tenglamaning xarakteristikalarini $x - at = c_1$, $x + at = c_2$ $c_1, c_2 = \text{const}$ to'g'ri chiziqlardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

Umumiy nazariyaga asosan

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

deb belgilab olamiz. (2.1.1) tenglamani ξ, η o'zgaruvchilarga nisbatan kanonik ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} U_{tt} = \xi_t^2 U_{\xi\xi} + 2\xi_t \eta_t U_{\xi\eta} + \eta_t^2 U_{\eta\eta} + \xi_{tt} U_\xi + \eta_{tt} U_\eta \\ U_{xx} = \xi_x^2 U_{\xi\xi} + \xi_x \eta_x U_{\xi\eta} + \eta_x^2 U_{\eta\eta} + \xi_{xx} U_\xi + \eta_{xx} U_\eta \end{cases} \quad (2.1.3)$$

shunga asosan, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} \xi_x = 1 & \xi_{xx} = 0 & \xi_t = -a & \xi_{tt} = 0 \\ \eta_x = 1 & \eta_{xx} = 0 & \eta_t = a & \eta_{tt} = 0 \\ & \xi_{xt} = 0 & \eta_{xt} = 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

(2.1.4) $\rightarrow$ (2.1.3) bo'lganda quyidagi tengliklar hosil bo'ladi.

$$U_{tt} = a^2 U_{\xi\xi} - 2a^2 U_{\xi\eta} + a^2 U_{\eta\eta}$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

natijada quyidagi tenglamaga kelimiz.

$$U_{\xi\eta} = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.1.5) \quad \text{tenglamaga kelimiz.}$$

Bu tenglamani $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = 0$ ko'rinishida yozib olamiz. Bundan $\frac{\partial U}{\partial \eta} = f(\eta)$ ni hosil qilamiz bu yerda $f(\eta)$ — ixtiyoriy funksiya. Hosil bo'lgan tenglamani, ξ ni parameter deb qarab, η bo'yicha integrallaymiz, u holda

$$U(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + f_1(\xi)$$

Ushbu $\int f(\eta) d\eta = f_2(\eta)$ belgilashni kiritib, $U(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ formulani hosil qilamiz. Bunda $f_1(\xi), f_2(\eta)$ — ixtiyoriy funksiyalar. Dastlabki x va t o'zgaruvchilarga qaytsak, avvalgi formula

$$U(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (2.1.6)$$

ko'rinishida yoziladi.

Agar f_1, f_2 ikki marta uzluksiz diffirensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, (2.1.6) formula bilan aniqlangan $U(x, t)$ funksiya (2.1.1) tenglamaning yechimi ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas (2.1.1) tenglamaning (2.1.6) yechimi D'alamber yechimi deyiladi.

Bu yechimdan foydalanib, chegaralanmagan tor uchun Koshi masalasini, ya'ni ushbu $U(x, 0) = \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$

Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi (2.1.1) tenglamaning yechimini topish qiyin emas.

Bu masalaning yechimi mavjud deb, faraz qilamiz. U holda, bu yechim (2.1.6) formula bilan aniqlanadi (chunki u umumiy yechim) (2.1.6) formuladagi f_1 va f_2 funksiyalarni shunday topamizki, natijada (2.1.2) boshlang'ich shartlar qanoatlantirilsin, ya'ni

$$U(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x)$$

$$U_t(x, 0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x) \quad (2.1.7)$$

$$(2.1.7) \text{ tenglikni integrallab } -f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + c \quad (2.1.8)$$

ni hosil qilamiz, c — biror o'zgarmas.

(2.1.7) tenglikning birinchisidan va (2.1.8) dan

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{c}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s)ds + \frac{c}{2}$$

f_1 va f_2 ning bu qiymatlarini (2.1.6) formulaga qo'yib, ushbu

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \quad (2.1.9)$$

formulaga ega bo'lamiz. (2.1.9) ni D'alamber formulasi deyiladi

Bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasi.

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t) & x \in R & t > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x) \\ U_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (2.1.10)$$

(2.1.10) sistemaning yechimi $U = V + W$ (2.1.11) ko'rinishida qidiramiz.

V - bir jinsli tor tebranish tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasining yechimini beradi ya'ni;

$$V(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds \quad (2.1.12)$$

W - esa

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2 W_{xx} + f(x, t) & x \in R & t > 0 \\ W(x, 0) = 0 & W_t(x, 0) = 0 & x \in R \end{cases} \quad (2.1.13)$$

(2.1.13) sistemaning yechimi bo'ladi. Unda sistemaning yechimi quyidagi formula orqali aniqlanadi.

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau$$

Endi, (2.1.10) sistemaning yechimini quyidagi formula orqali aniqlaymiz

$$U(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}$$

2.1.1-misol.

$$U_{tt} = 9U_{xx} + \sin x \quad U|_{t=0} = 1 \quad U_t|_{t=0} = 1$$

Bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasiga qo'yilgan Koshi masalasini quyidagicha yechamiz.

Bunda $a = 3$ $f(x, t) = \sin x$ $\varphi(x) = 1$ $\psi(x) = 1$ ekanligidan.

$$U(x, t) = 1 + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} 1 ds + \frac{1}{6} \int_0^t \int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} \sin s ds = 1 + t -$$

$$\frac{1}{6} \int_0^t \cos s|_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + t - \frac{1}{6} \int_0^t \cos(x + 3(t - \tau)) - \cos(x - 3(t - \tau)) d\tau = \\
&= 1 + t - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3} \sin(x + 3(t - \tau)) - \frac{1}{3} \sin(x - 3(t - \tau)) \right) \Big|_0^t = \\
&= 1 + t - \frac{1}{6} \left(-\frac{2}{3} \sin x - \left(-\frac{1}{3} \sin(x + 3t) - \frac{1}{3} \sin(x - 3t) \right) \right) = \\
&= 1 + t + \frac{1}{9} \sin x - \frac{1}{9} \sin x \cos 3t = 1 + t + \frac{1}{9} \sin x (1 - \cos 3t)
\end{aligned}$$

2.1.2-misol.

$$U_{tt} = U_{xx} + e^x \quad U|_{t=0} = \sin x \quad U_t|_{t=0} = x + \cos x$$

$$\text{bu yerda } a = 1 \quad f(x, t) = e^x \quad \varphi(x) = \sin x \quad \psi(x) = x + \cos x$$

Dalamber formulasiga asosan hisoblaymiz.

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \frac{1}{2} (\sin(x - t) + \sin(x + t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (s - \cos s) ds + \\
&\frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t-\tau}^{x+t+\tau} e^s ds d\tau = \\
&= \sin x \cos t + \frac{1}{2} \left(\frac{s^2}{2} + \sin s \right) \Big|_{x-t}^{x+t} + \frac{1}{2} \int_0^t e^s \Big|_{x-t-\tau}^{x+t+\tau} d\tau = \\
&= \sin x \cos t + xt + \cos x \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{x+t-\tau} - e^{x-t+\tau}) d\tau = \\
&= xt + \sin(x + t) + \frac{1}{2} (-2e^x + e^{x+t} + e^{x+t}) \\
&= xt + \sin(x + t) - e^x \left(1 - \frac{e^t + e^t}{2} \right) = \\
&= xt + \sin(x + t) - e^x (1 - \cosh t)
\end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamalari $x \in R \quad t > 0$ sohada qaralgan edi. Endi, biz bu tenglamalarni umumiy holda $x \in R \quad t > 0$ sohada ham qaraymiz.

$n = 1$ da quyidagilar o'rinli bo'ladi.

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x, t) & x \in R \quad t > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x) & U_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (2.1.15)$$

Bunda $f \in C'(t \geq 0)$, $\varphi \in C^2(R^1)$ $\psi \in C'(R^1)$ deb hisoblaymiz.

(1) va (2) Koshi masalalari uchun $U(x, t) \in R_+^2 = \{(x, t): x \in R, t > 0\}$ funksiyaning klassik yechimi mavjud va $C^2(t > 0) \cap C'(t \geq 0)$ sinfga tegishli, $t > 0$ yarim fazoda (1) tenglamani va $t = +0$ da (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi. U va f funksiyalarni $t < 0$ bo'lganda

$$\tilde{U} = \begin{cases} U, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \tilde{f} = \begin{cases} f, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

ni qanoatlantiruvchi $\tilde{U}(x, t) \in R^2$ funksiyani topish talab qilinadi. Endi, $\tilde{U}(x, t)$ funksiya R^2 da quyidagi tebranuvchi tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - a^2 \tilde{U}_{xx} = \tilde{f}(x, t) + \varphi(x) \cdot \delta'(t) + \psi(x) \cdot \delta(t) & (2.1.16) \\ \tilde{U}|_{t < 0} = 0 & (2.1.17) \end{cases}$$

Buning uchun quyidagi tenglikdan foydalanamiz. Bizga $h(x, t)$ va $g(x, t)$ umumlashgan funksiyalar va $\forall \lambda(x, t) \in D(R^2)$ ($D(R^2) - 2$ o'lchovli finit va cheksiz diffirensiallanuvchi funksiyalar fazosi) berilgan bo'lsin. Unda , $h(x, t) = g(x, t) \Leftrightarrow (h(x, t), \lambda(x, t)) = (g(x, t), \lambda(x, t))$ ya'ni $h(x, t)$ va $g(x, t)$ umumlashgan funksiyaning $\lambda(x, t)$ funksiyadagi qiymatlari tengligidan $h(x, t) = g(x, t)$ ekanligi kelib chiqadi yoki aksinchasi ham o'rinli.

Shunga asosan, (2.1.16) tenglamani tengligini isbotlaymiz.

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= \int_R f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi(x) \in D(R') \text{ ga asosan} \\ (\tilde{U}_{tt} - a^2 \tilde{U}_{xx}, \lambda(x, t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{U}_{tt} - a^2 \tilde{U}_{xx})(x, t) \lambda(x, t) dx dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{U}_{tt}(x, t) \lambda(x, t) dx dt - a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{xx}(x, t) \lambda(x, t) dx dt] \\ &= \end{aligned}$$

bo'laklab integrallaymiz $\int U dv = Uv - \int v dU$ dan foydalangan holda $\int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{U}_t(x, t) \lambda(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_t(x, t) \lambda_t(x, t) dt] dx - a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{U}_x(x, t) \lambda(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_x(x, t) \cdot \lambda_x(x, t) dx] dt =$
 $\lambda(x, t) - \text{finit funksiya ekanligidan } (-\infty; +\infty) \text{ oraliqda uning qiymati nolga teng}$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\tilde{U}(x, t) \cdot \lambda_t(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(x, t) \lambda_{tt}(x, t) dt \right] dx - a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{U}(x, t) \cdot \lambda_x(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(x, t) \cdot \lambda_{xx}(x, t) dx] dt = \end{aligned}$$

Ma'lumki, $\lambda(x, t)$ asosiy funksiyaning hosilasi ham asosiy funksiyaadir. Bundan uning $(-\infty; +\infty)$ oraliqdagi qiymati nolga tengligi kelib chiqadi .

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(x, t) (\lambda_{tt} - a^2 \lambda_{xx}) dx dt =$$

Endi, $\tilde{U}(x, t)$ funksiya dan $U(x, t)$ funksiya ga o'tib olamiz. Buning uchun integralning chegarasini o'zgartiramiz.

$$= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t)(\lambda_{tt} - a^2 \lambda_{xx}) dx dt =$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ ga limitga o'tib olamiz .

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t)(\lambda_{tt} - a^2 \lambda_{xx}) dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} U(x, t)(\lambda_{tt}(x, t) dt dx - \\ a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t) \lambda_{xx}(x, t) dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (U(x, t) \lambda_t|_{\varepsilon}^{+\infty} - \\ \int_{\varepsilon}^{+\infty} U_t(x, t) \lambda_t(x, t) dt) dx - a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (U(x, t) \lambda_x(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} - \\ \int_{-\infty}^{+\infty} U_x(x, t) \lambda(x, t) dx) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (-U(x, \varepsilon) \lambda_t(x, \varepsilon) - U_t(x, t) \lambda(x, t)|_{\varepsilon}^{+\infty} + \\ \int_{\varepsilon}^{\infty} U_{tt}(x, t) \lambda(x, t) dt) dx - a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (U_x(x, t) \lambda(x, t)|_{-\infty}^{+\infty} - \\ \int_{-\infty}^{+\infty} U_{xx}(x, t) \lambda(x, t) dx) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (-U(x, \varepsilon) \lambda_t(x, \varepsilon) + \\ U_t(x, \varepsilon) \lambda(x, \varepsilon) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [U_{tt}(x, t) - a^2 U_{xx}(x, t)] \lambda(x, t) dx dt &= \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (-U(x, 0) \lambda_t(x, 0) + U_t(x, 0) \lambda(x, 0)) dx + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [U_{tt}(x, t) - \\ a^2 U_{xx}(x, t)] \lambda(x, t) dx dt &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) \lambda(x, t) dx dt + \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (-\varphi(x) \lambda_t(x, 0) + \psi(x) \lambda(x, 0)) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x, t) \lambda(x, t) dx dt + \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) \lambda_t(x, 0) + \psi(x) \lambda(x, 0)) dx &= \end{aligned}$$

Dirakning delta-funksiyasi xossalariidan foydalangan holda .

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) = (f(t), \delta(t))$$

2.

$$\begin{aligned} (\delta'(t), f(t)) &= -f'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x, t) \lambda(x, t) dx dt + \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x, t) \delta(t) dt dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x, t) \delta'(t) dt dx &= \end{aligned}$$

bundan

$$(\widetilde{U}_{tt} + a^2 \widetilde{U}_{xx}, \lambda(x, t)) = (\tilde{f}(x, t) + \varphi(x) \delta'(t) + \psi(x) \delta(t), \lambda(x, t))$$

ekanligidan

$$\widetilde{U}_{tt} + a^2 \widetilde{U}_{xx} = \tilde{f}(x, t) + \varphi(x) \delta'(t) + \psi(x) \delta(t)$$

tengligi kelib chiqadi.

Endi , bu tenglamaning .

$$\begin{cases} \widetilde{U}_{tt} - a^2 \widetilde{U}_{xx} = \tilde{f}(x, t) + \varphi(x) \delta'(t) + \psi(x) \delta(t) \\ U|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

yechimini quyidagicha qidiramiz.

$$U(x, t) = \varepsilon(x, t) * F(x, t)$$

Bu yerda.

$\varepsilon(x, t)$ to'liqin tenglamasining fundamental yechimi bo'ladi. Quyida biz fundamental yechim tushunchasi va to'liqin tenglamasining fundamental yechimi haqida ma'lumot beramiz.

Fundamental yechim.

L – doimiy koeffisientli diffirensial operator bo'lsin. $a_\alpha(x) = a_\alpha$:

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha, \quad L * (D) = L(-D) \quad (2.1.18)$$

$L(D)$ operatorning $L(D)\varepsilon = \delta(x)$ tenglamani R^n da qanoatlantiruvchi fundamental yechimi (ta'sir etuvchi funksiya) deb umumlashgan $\varepsilon \in D'$ ga aytiladi.

$L(D)$ operatorning $\varepsilon(x)$ fundamental yechimi umumiy olganda yagona emas, $L(D)\varepsilon_0 = 0$ bir jinsli ixtiyoriy tenglamaning $\varepsilon_0(x)$ aniqlikdagi qo'shiluvchisi hisoblanadi.

Haqiqatdan ham, $\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x)$ umumlashgan funksiya $L(D)$ operatorning fundamental yechimidir.

$$L(D)(\varepsilon + \varepsilon_0) = L(D)\varepsilon + L(D)\varepsilon_0 = \delta(x)$$

Lemma.

Umumlashgan funksiya $L(D)$ operatorning J' dan olingan fundamental yechimi bo'lishi uchun uning Fur'e $F[\varepsilon]$ almashtirishi $L(-i\xi)F[\varepsilon] = 1$, tenglamani qanoatlantirishi zarur va yetarli bunda $L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha$.

Isbot.

Aytaylik, $\varepsilon \in J'$ $L(D)$ opertorning fundamental yechimi bo'lsin. $L(D)\varepsilon = \delta(x)$ tenglikning ikkala qismiga Fur'e almashtirishidan foydalanib

$$F[L(D)\varepsilon] = F[\delta] = 1$$

ni hosil qilamiz. $F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f]$ formulani qo'llab quyidagini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned} F[L(D)\varepsilon] &= F\left[\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha \varepsilon\right] = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha F[D^\alpha \varepsilon] = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (-i\xi)^\alpha F[\varepsilon] = L(-i\xi)F[\varepsilon] \end{aligned}$$

bundan va $F[L(D)\varepsilon] = F[\delta] = 1$ dan kelib chiqadiki $F[\varepsilon] L(-i\xi)F[\varepsilon] = 1$, tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha, agar $\varepsilon \in J' L(-i\xi)F[\varepsilon] = 1$ tenglamani qanoatlantirsa, u vaqtda

$$\begin{aligned} F[L(D)\varepsilon] &= F\left[\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha \varepsilon\right] = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha F[D^\alpha \varepsilon] = \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (-i\xi)^\alpha F[\varepsilon] = L(-i\xi)F[\varepsilon] \end{aligned}$$

ni inobatga olib $\varepsilon F[L(D)\varepsilon] = F[\delta] = 1$ qanoatlantiradi, bundan kelib kelib chiqadiki $\varepsilon L(D)\varepsilon = \delta(x)$ ni qanoatlantiruvchi $L(D)$ operatorning fundamental yechimi bo'ladi. Lemma isbotlandi.

Lemmaning isbotidan doimiy koeffisientli chiziqli diffirensial operatorning J' dagi fundamental yechimini hosil qilish $P(\xi)X = 1$ algebraik tenglamani yechishga olib keladi, bunda P –ixtiyoriy ko'phad $P(\xi)X = 1$ tenglamadan ko'rinadiki, uning D' (agar u mavjud bo'lsa) dagi har bir yechimi $\frac{1}{P(\xi)}$ bilan bir xil bo'lishi kerak, u esa N_p to'plamdan olinmagan nolinni $P(\xi)$ ko'phad bo'lib, $N_p = [\xi: P(\xi) = 0]$

ni qanoatlantiradi.

Bundan kelib chiqadiki $N_p \neq \emptyset$ bo'lsa, $P(\xi)X = 1$ tenglamaning yechimi yagona emas. Uning har xil yechimlari bir-biridan N_p dagi umumlashgan funksiyalar bilan farq qiladi.

Masalan, $\xi X = 1$ tenglamaning turli yechimlari

$$\frac{1}{\xi + i0}, \frac{1}{\xi - i0} \text{ va } \mathcal{P} \frac{1}{\xi}$$

Umumlashgan funksiya bo'lib ular bir-biridan $\text{const } \delta(\xi)$ ifoda ko'rinishida (soxotskiy formulalariga ko'ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+i0} &= -i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \quad \text{va} \\ \frac{1}{x-i0} &= i\pi\delta(x) + \mathcal{P} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

farq qiladi.

Agar $\frac{1}{P(\xi)}$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi bo'lsa, u vaqtda (aniqroq qilib aytganda uning aniq regulyar funksionali bo'lsa) $P(\xi)X = 1$ tenglamaning J' dagi yechimi hisoblanadi.

Agar $\frac{1}{P(\xi)}$ lokal integrallanuvchi bo'lmasa R^n da u vaqtda $P(\xi)X = 1$ tenglamani J' dagi yechimini qurishga to'g'ri keladi.

L.Xyormanderom [2] da ko'rsatilishicha $P(\xi)X = 1$ tenglama hamma vaqt J' da yechimga ega, agar $P(\xi) = 0$ bo'lsa, $P(\xi)X = 1$ tenglamaning J' dan olingan qaysidir yechimini $reg \frac{1}{P(\xi)}$ bilan belgilaymiz. Bu yechimni hosil qilish N_p to'plam tuzilishida yoki P ko'phadga almashtirishdan hosil bo'ladi.

Shunday qilib, $L(-i\xi)F[\varepsilon] = 1$ tenglama J' da hamma vaqt yechimga ega

$$F[\varepsilon] = reg \frac{1}{L(-i\xi)}$$

Shunday qilib, har qanday doimiy koeffisientli $L(D)$ chiziqli diffirensial operator fundamental yechimga ega bo'lib, u quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$\varepsilon = F^{-1} \left[reg \frac{1}{L(-i\xi)} \right] = \frac{1}{(2\pi)^n} F \left[reg \frac{1}{L(i\xi)} \right]$$

Tebranuvchi operatorning fundamental yechimi.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varepsilon(x, t) = \delta(x, t) \quad (2.1.19)$$

(2.1.19) tenglikka Fur'e F_x almashtirishni qo'llab

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}(\xi, t)}{\partial t} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\varepsilon}(\xi, t) = 1(\xi) \delta(t) \quad (2.1.20)$$

(2.1.20) tenglama bilan birgalikda umumlashgan $F_x[\varepsilon_n] = \tilde{\varepsilon}_n(\xi, t)$ uchun

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(\xi, t)}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \tilde{\varepsilon}(\xi, t) = 1(\xi) \delta(t)$$

tenglamani hosil qilamiz a ni $a|\xi|$ ga almashtirib, $\varepsilon(t) = \theta(t) \frac{\sin at}{a}$ formuladan foydalanib (2.1.20) tenglamaning J' yechimi $\tilde{\varepsilon}_n(\xi, t) = \theta(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}$ funksiya ekanligini hosil qilamiz.

$$\text{Bundan kelib chiqadiki } \varepsilon_n(x, t) = F_\xi^{-1}[\widetilde{\varepsilon}_n(\xi, t)] = \theta(t)F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right] \quad (2.1.21)$$

tenglik o'rinli.

Aytaylik $n = 3$ bo'lsin. U vaqtda $F[\delta_{S_R}] = 4\pi R \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}$ formulaga ko'ra

bundan va

$$\varepsilon_n(x, t) = F_\xi^{-1}[\widetilde{\varepsilon}_n(\xi, t)] = \theta(t)F_\xi^{-1}\left[\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|}\right] \quad \text{dan}$$

$$\varepsilon_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x) \equiv \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(a^2 t^2 - |x|^2) \text{ ni hosil qilamiz. Umumlashgan } \varepsilon_3$$

$$\text{funksiya } (\varepsilon_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty (\delta_{S_{at}}, \varphi) \frac{dt}{t} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS_x dt, \quad \varphi \in J(R^4)$$

qonun bo'yicha tadbiq etiladi.

$$F[\theta(R - |x|)] = \int_{-R}^{+R} e^{ix\xi} dx = 2 \frac{\sin R\xi}{\xi} \quad \text{va}$$

$$F\left[\frac{\theta(R - |x|)}{\sqrt{R^2 - |x|^2}}\right] = 2\pi \frac{\sin R|\xi|}{|\xi|}, \quad n = 2$$

formulalardan foydalanib

$$\varepsilon_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|)$$

$$\varepsilon_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$$

ni hosil qilamiz. $\varepsilon_2(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$ ni fundamental yechimini olish

uchun. x_3 o'zgaruvchi bo'yicha

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = f(x)\delta(t), \quad f \in D'(R^n), \quad \text{bunda}$$

$$L\left(D, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{q=1}^p \frac{\partial q}{\partial t^q} L_q(D) + L_0(D)$$

ishga tushirish metodidan foydalanamiz. Buning uchun esa $\varepsilon_3(x, x_3, t)$

$$(u_0, \varphi) = (u, \varphi(x)1(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \varphi(x)\eta_k(t)), \quad \varphi \in D(R^n) \text{ ni davomi va}$$

$$\varphi(x, t) 1(x_3),$$

$\varphi \in D(R^3)$ ko'rsatish kerak.

$\eta_k \in D(R^1)$ va $\eta_k(x_3)$, $k = 1, 2, \dots, \dots, R^1$ da 1 ga intilsin deylik. U vaqtda

$$(\varepsilon_3, \varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty (\delta_{S_{at}}, \varphi) \frac{dt}{t} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS_x dt, \quad \varphi \in J(R^4)$$

dan foydalanib barcha $\varphi \in D(R^3)$ uchun quyidagini hosil qilamiz

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon_3, \varphi(x, t) \eta_k(x_3)) &= \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) \eta_k(x_3) dS dt = \\
&= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt = (\varepsilon_3, \varphi(x, t) 1(x_3)),
\end{aligned}$$

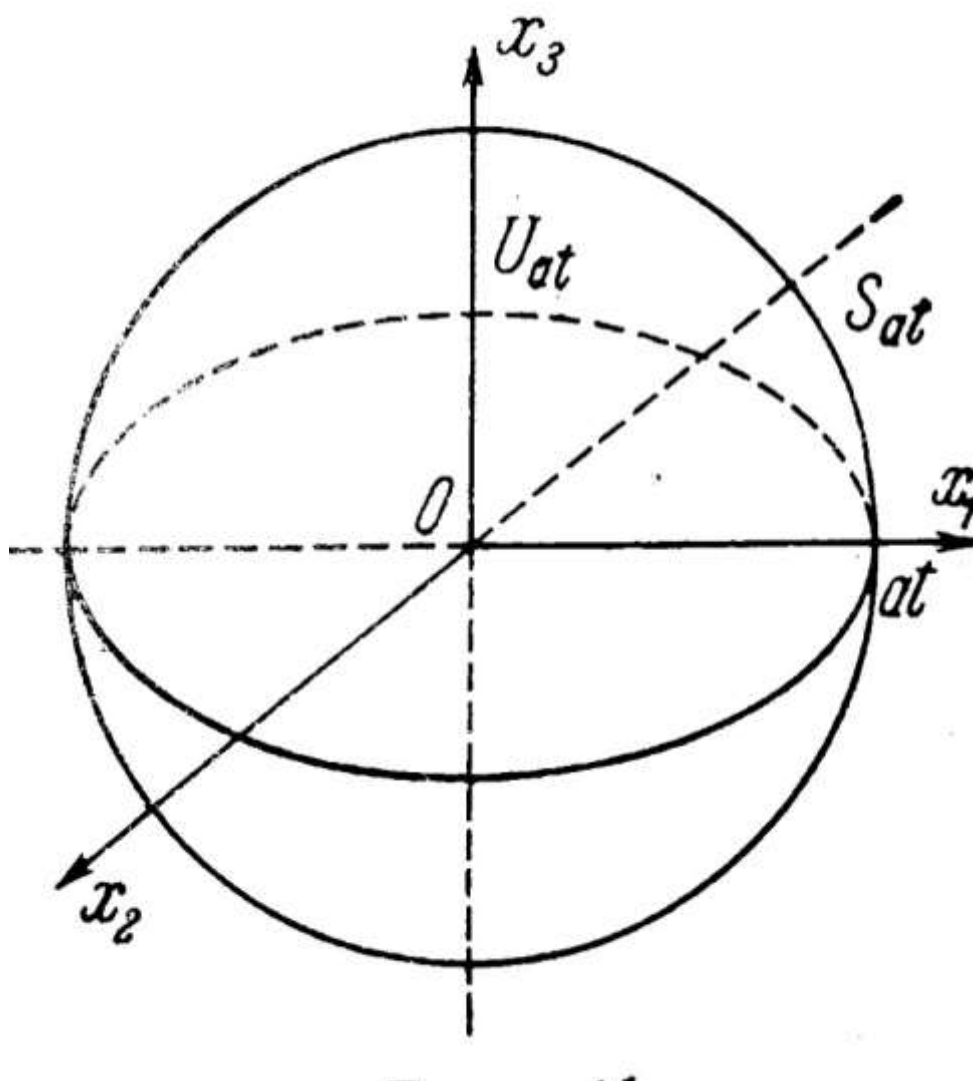
Bu limit mavjud va u $\{\eta_k\}$ ketma –ketlikka bog'liq emas .Bundan

$$(\varepsilon_0, \varphi) = (\varepsilon, \varphi(x) 1(t)), \quad \varphi \in D(R^n)$$

formulani qo'llab barcha $\varphi \in D(R^3)$ uchun quyidagilarni hosil qilamiz.

$$(\varepsilon_2, \varphi) = (\varepsilon_3, \varphi(x, t) 1(x_3)) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x, t) dS dt.$$

Oxirgi integralni almashtiramiz. φ x_3 ga bog'liq bo'lmasin , u vaqtda sirtli integralni $S_{at} = [|x|^2 + x_3^2 = a^2 t^2]$ sfera bo'yicha va ikkilangan integralni $|x| < at$ aylana bo'yicha hisoblab (rasmga qarang) quyidagini hosil qilamiz .



2.1.1-chizma. ($S_{at} = [|x|^2 + x_3^2 = a^2 t^2]$ sfera)

bundan esa $\varepsilon_2(x, t)$ uchun

$$\begin{aligned} (\varepsilon_2, \varphi) &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty \int_{|x| < at} \frac{\varphi(x, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} dx dt \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int \frac{\theta(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \varphi(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$$

formula hosil bo'ladi.

Odatdagidek $\varepsilon_o(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x, t) dt$ formuladan foydalanib x_2 o'zgaruvchi bo'yicha

$$\varepsilon_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|)$$

$$\varepsilon_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$$

formulaga ishga tushirish usuli qo'llab $\varepsilon_1(x, t)$ fundamental yechimni hosil qilamiz .

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2(x, x_2, t) dx_2 = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(at - \sqrt{x^2 + x_2^2})}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2 - x_2^2}} dx_2 = \\ &= \frac{\theta(at - |x|)}{\pi a} \int_0^{\sqrt{a^2 t^2 - x^2}} \frac{dx_2}{\sqrt{a^2 t^2 - x^2 - x_2^2}} = \\ &= \frac{\theta(at - |x|)}{\pi a} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|) \end{aligned}$$

Demak, $n = 1$ da to'liq tenglamasining fundamental yechimi

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a}, \quad a = 1 \text{ bo'lganda } \varepsilon(x, t) = \frac{\theta(t - |x|)}{2} \text{ bo'ladi yoki}$$

$$\varepsilon(x - \xi, t - \tau) = \frac{\theta(t - \tau - |x - \xi|)}{2} \text{ bo'lganda ham o'rinli .}$$

$$n = 2 \text{ bo'lganda esa } \varepsilon_2(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \text{ ekanligi ma'lum bo'ldi.}$$

$\theta(t)$ – Xevisayda funksiyasi. U quyidagicha bo'ladi.

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\text{yoki } \theta(t - |x|) = \begin{cases} 1, & t - |x| \geq 0 \\ 0, & t - |x| < 0 \end{cases}$$

$F(x, t)$ esa yig'ma u yuqoridagi to'liq tenglamasi uchun quyidagicha bo'ladi.

$$F(x, t) = \tilde{f}(x, t) + \varphi(x)\delta'(t) + \psi(x)\delta(t)$$

Yuqoridagilardan foydalangan holda $U(x, t)$ yechim bir jinsli bo'lmagan to'liq tenglamasini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Undan oldin esa umumlashgan funksiyaning yig'masi haqida quyidagilarni keltirib o'tamiz.

Umumlashgan funksiyaning yig'masi.

Faraz qilaylik, $f(x), g(x) - R^n$ da lokal integrallanuvchi funksiyalar.

2.1.1-ta'rif. $f(x): R^n \rightarrow R$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi deyiladi, agarda ixtiyoriy chegaralangan $Q \subset R^n$ to'plam uchun u Q da absolyut integrallanuvchi bo'lsa.

Agar $\int_{R^n} f(y)g(x-y)dy$ integral mavjud bo'lib, R^n da lokal integrallanuvchi funksiyani aniqlasa, u holda bu funksiyaga $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'masi deyiladi va $f * g$ kabi belgilanadi. Yig'maning ta'rifidan uning kommutativligi ya'ni

$$f * g = g * f$$

kelib chiqadi. Haqiqatdan ham,

$$f * g = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{R^n} f(x-y')g(y')dy' = g * f$$

Lokal integrallanuvchi f va g funksiyalardan aqalli bittasi finit bo'lsa, ularning yig'masi mavjud bo'ladi.

2.1.2-ta'rif. Funksiya finit deyiladi, agarda u biror chegaralangan to'plamdan tashqarida nolga teng bo'lsa.

$D(R^1)$ orqali bir o'zgaruvchili finit va cheksiz diffirensiallanuvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz.

Masalan, $\text{supp} f(x) \in S_M$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $k > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq k} |(f * g)(x)| dx &\leq \\ &\leq \int_{|y| \leq M} |f(y)| \int_{|x| \leq k} |g(x-y)| dx dy = \\ &= \int_{|y| \leq M} |f(y)| \int_{|y+\xi| \leq k} |g(\xi)| d\xi dy = \int_{|y| \leq M} \int_{|y+\xi| \leq k} |f(y)g(\xi)| d\xi dy \end{aligned}$$

Bu tengsizlikda integrallash sohasi R^{2n} da chegaralangan sohasidan iborat. Shu sababli $f * g$ yig'ma R^n da lokal integrallanuvchi funksiya bo'ladi va u $D(R^n)$ da regulyar umumlashgan funksiyani aniqlaydi:

$$\begin{aligned} (f * g, \varphi) &= \int_{R^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{R^n} \varphi(x) \int_{R^n} f(y)g(x-y) dy dx \\ &= \int_{R^{2n}} (f(x)g(y)\varphi(x+y)) dx dy \end{aligned}$$

bu yerdan ixtiyoriy $\varphi \in D(R^n)$ uchun

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x+y))$$

bunda $f(x) \times g(y)$ umumlashgan funksiyaning Dekart ko'paytmasi deyiladi.

$$\begin{aligned}
 U(x,t) &= \varepsilon(x,t) * F(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x-\xi, t-\tau) * F(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varepsilon(x-\xi, t-\tau)}{\partial t^2} \tau * F(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 U_{tt} - a^2 U_{xx} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varepsilon(x-\xi, t-\tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\
 \left| \varepsilon(x-\xi, t-\tau) = \frac{\theta(t-\tau-|x-\xi|)}{2} \right. &\text{ ekanligidan va } \theta'(x-\xi, t-\tau) = \\
 &= \delta(x-\xi, t-\tau) \text{ tenglikdan quyidagini hosil qilamiz.}
 \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi, t-\tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau = F(x, t)$$

Shunday qilib, $F(x, t)|_{t < 0} = 0$ dan $U(x, t)|_{t < 0} = 0$ kelib chiqadi. Demak, $U(x, t)$ yechim bir jinsli bo'lmagan to'lqin tenglamasining $(x, t) \in R^2$ sohadagi yechimi bo'ladi.

2.2 Telegraf tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasining yechimining xossalari.

Ushbu $x \in R, t < 0$ sohada telagraf tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasining yechimini quramiz.

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{xx} = p(x)U(x, t) + \delta(x, t) \\ U|_{t < 0} = 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

(2.2.1) sistemaning yechimini quyidagi ko'rinishda qidiramiz.

$$U(x, t) = \varepsilon(x, t) + v(x, t)$$

bunda $\varepsilon(x, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operatorning fundamental yechimi, $v(x, t)$ esa regulyar funksiya hisoblanadi.

Yechimni yig'indi ko'rinishida qidirishimizdan maqsad shundan iboratki, bunda berilgan tenglamaning o'ng qismida umumlashgan funksiya ishtirok etgan biz yechimni bu ko'rinishda izlash natijasida umumlashgan funksiya dan holi bo'lgan quyidagi tenglamaga kelimiz. Bazi hisoblashlarni bajarib

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon(x, t) + v(x, t)) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon(x, t) + v(x, t)) - p(x)(\varepsilon(x, t) + v(x, t)) = \delta(x, t)$$

quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = p(x)(\varepsilon(x, t) + v(x, t)) \\ v|_{t < 0} = 0 \end{cases}$$

fundamental yechim $\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|)$ ekanligidan Xevesayda funksiyasini

$$\theta(t - |x|) = \begin{cases} 1, & t \geq |x| \\ 0, & t < |x| \end{cases}$$

hisobga olib olib.

1. $t < |x|$ da fundamental yechimi nol ekanligi kelib chiqadi $\varepsilon(x, t) = 0$

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} - p(x)v(x, t) = 0 \\ v|_{t < 0} = 0 \end{cases}$$

bundan bir jinsli tenglamaga keladi. $v(x, t) = 0$ yechim bu tenglamani qanoatlantiradi. Endi yechimni $t > |x|$ sohada qaraymiz.

2. $t > |x|$ da fundamental yechimi noldan farqli ya'ni $\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi. Bunda tenglama bir jinsli bo'lmagan quyidagi tenglama ko'rinishida bo'ladi.

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = p(x)(\frac{1}{2} + v(x, t)) \\ v|_{t < 0} = 0 \end{cases}$$

Endi, (2.2.1) tenglamaning yechimi $v(x, t)$ ni butun sohada ya'ni R^2 da izlaymiz.

2.2.1-teorema. Aytaylik $F \in D'(R^{n+1})$ bo'lsa, unda $F = 0$ va $t < 0$ bo'lganda umumlashgan Koshi masalasining yechimi mavjud bo'lib u yagona va u

$$u = \varepsilon_n * F$$

To'lqin potentsiali ko'rinishida bo'lib, bu yechim uzluksiz ravishda D' da F dan bog'liq bo'ladi.

Umumlashgan funksiyaning yig'masi.

Faraz qilaylik, $f(x), g(x) - R^n$ da lokal integrallanuvchi funksiyalar.

2.2.1-ta'rif $f(x): R^n \rightarrow R$ funksiya R^n da lokal integrallanuvchi deyiladi, agarda ixtiyoriy chegaralangan $Q \subset R^n$ to'plam uchun u Q da absolyut integrallanuvchi bo'lsa.

Agar $\int_{R^n} f(y)g(x-y)dy$ integral mavjud bo'lib, R^n da lokal integrallanuvchi funksiyaning aniqlasa, u holda bu funksiya $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'masi deyiladi va $f * g$ kabi belgilanadi. Yig'maning ta'rifidan uning kommutativligi ya'ni

$$f * g = g * f$$

kelib chiqadi. Haqiqatdan ham,

$$f * g = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{R^n} f(x-y')g(y')dy' = g * f$$

Lokal integrallanuvchi f va g funksiyalardan aqalli bittasi finit bo'lsa, ularning yig'masi mavjud bo'ladi

2.2.2-ta'rif. Funksiya finit deyiladi, agarda u biror chegaralangan to'plamdan tashqarida nolga teng bo'lsa.

$D(R^1)$ orqali bir o'zgaruvchili finit va cheksiz diffirensiallanuvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz.

Masalan, $\text{supp} f(x) \in S_M$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $k > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq k} |(f * g)(x)| dx &\leq \\ &\leq \int_{|y| \leq M} |f(y)| \int_{|x| \geq k} |g(x-y)| dx dy = \\ &= \int_{|y| \leq M} |f(y)| \int_{|y+\xi| \geq k} |g(\xi)| d\xi dy = \int_{|y| \leq M} \int_{|y+\xi| \geq k} |f(y)g(\xi)| d\xi dy \end{aligned}$$

Bu tengsizlikda integrallash sohasi R^{2n} da chegaralangan sohasidan iborat. Shu sababli $f * g$ yig'ma R^n da lokal integrallanuvchi funksiya bo'ladi va u $D(R^n)$ da regulyar umumlashgan funksiyaning aniqlaydi:

$$\begin{aligned}
(f * g, \varphi) &= \int_{R^n} (f * g)(x) \varphi(x) dx \\
&= \int_{R^n} \varphi(x) \int_{R^n} f(y) g(x - y) dy dx \\
&= \int_{R^{2n}} (f(x) g(y) \varphi(x + y)) dx dy
\end{aligned}$$

bu yerdan ixtiyoriy $\varphi \in D(R^n)$ uchun

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \varphi(x + y))$$

bunda $f(x) \times g(y)$ umumlashgan funksiyaning Dekart ko'paytmasi deyiladi.

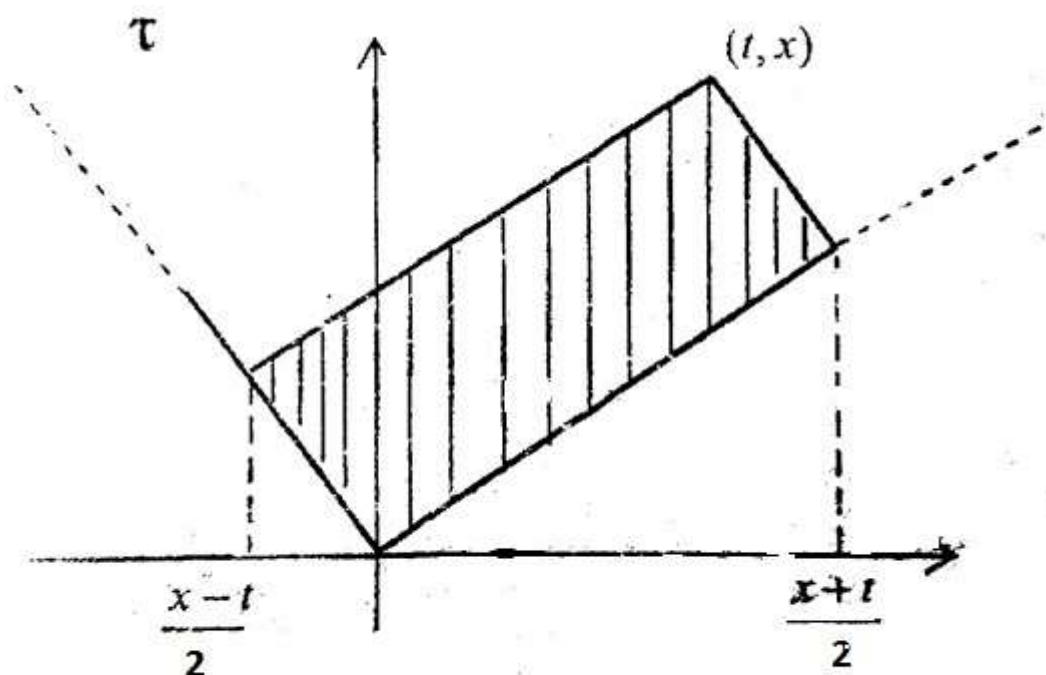
$$U(x, t) = \varepsilon(x, t) * F(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x - \xi, t - \tau) * F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$f(x, t) = p(x)(\varepsilon(x, t) + v(x, t))$ –yuqoridagi tenglamaning yig'masi.

$$\begin{aligned}
v(x, t) = \varepsilon(x, t) * f(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t - \tau - |x - \xi|) p(\xi) \left[\frac{1}{2} \theta(\tau - |\xi|) + \right. \\
&\quad \left. + v(\xi, \tau) \right] d\tau d\xi =
\end{aligned}$$

$$\theta(\tau - |\xi|) = \begin{cases} 1, & \tau > |\xi| \\ 0, & |\xi| \leq \tau \end{cases} \quad \theta(t - \tau - |x - \xi|) = \begin{cases} 1, & t - \tau > |x - \xi| \\ 0, & t - \tau \leq |x - \xi| \end{cases}$$

Integralning noldan farqli yechimi yuqoridagi ikkita funksiyaning kesishish sohasida bo'ladi chunki bu soha 2 ta funksiya uchun umumiy bo'lgan soha bo'lib bu sohadan tashqarida integralning qiymati nolga teng bo'ladi. Buni quyidagi chizmada ham ko'rish mumkin (rasmga qarang).



2.2.1-chizma $(\theta(\tau - |\xi|$ va $\theta(t - \tau - |x - \xi|)$) grafigi)

$$= \frac{\theta(t - |x|)}{2} \iint_{\Delta(x,t)} p(\xi) \left(\frac{1}{2} + v(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi =$$

Bu integralni hisoblash Volterraning ikkinchi tur tenglamalarni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechishga keladi. Endi shu yaqinlashish usuli bilan tanishib o'tamiz.

$$a) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt, \quad (2.2.3)$$

b) $f(x) \not\equiv 0$ haqiqiy va $I(a \leq x \leq b)$ kesmada uzluksiz,

v) $K(x, t) \not\equiv 0$ haqiqiy va $\Delta(a \leq x \leq b, a \leq t \leq x)$ sohada uzluksiz ,

g) λ parametr (o'zgarmas son).

Berilgan (2.2.3) tenglamaning yechimini ushbu

$$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots \quad (2.2.4)$$

Funksional qator ko'rinishida izlaymiz. Noma'lum $u_0, u_1, u_2, \dots$ funksiyalarni topish maqsadida (2.2.4) ni (2.2.3) tenglamaga qo'yamiz, u holda ushbu ayniyat hosil bo'ladi:

$$u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \lambda^3 u_3(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)[u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots] dt \equiv \\
&\equiv f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u_0(t)dt \\
&\quad + \lambda^2 \int_a^x K(x, t)u_1(t)dt + \lambda^3 \int_a^x K(x, t)u_2(t)dt + \dots
\end{aligned}$$

Bu ayniyatning ikki tomonidagi bir xil darajali λ larning koeffisientlarini tenglab quyidagi

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \int_a^x K(x, t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x) = \int_a^x K(x, t)u_1(t)dt, \quad (2.2.5)$$

.....

$$u_n(x) = \int_a^x K(x, t)u_{n-1}(t)dt,$$

.....

munosabatlarni olamiz. Bundagi $u_0(x) = f(x)$ ma'lum bo'lgani uchun boshqa $u_t(x)$

lar (2.2.5) dan ketma-ket kelib chiqaveradi. So'nra ularni (2.2.4) ga qo'yilsa, izlanayotgan yechim kelib chiqadi.

Endi (2.2.4) qatorning I kesmada absolyut va tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz. Uning uchun, biror musbat hadli yaqinlashuvchi qatorning hadlari bilan (2.2.4) qatorning mos hadlarini solishtirib ko'rish kerak. Yuqorida berilgan b) va v) shartlarga ko'ra

$$|f(x)| < N, \quad |K(x, t)| < M, \quad N > 0, \quad M > 0$$

bo'lgani sababli, quyidagi tengsizliklarni yoza olamiz:

$$|u_0(x)| = |f(x)| < N,$$

$$|u_1(x)| \leq \int_a^x |K(x, t)||u_0(t)|dt \leq NM(x - a) \leq NM(b - a),$$

chunki, $a \leq x \leq b$;

$$\begin{aligned}
|u_2(x)| &\leq \int_a^x |K(x, t)||u_1(t)|dt \leq NM^2 \int_a^x (t - x)dt = NM^2 \frac{(x - a)^2}{2!} \leq \\
&\leq NM^2 \frac{(b - a)^2}{2!}
\end{aligned}$$

va hokazo ,shu xilda davom etilsa

$$|u_n(x)| \leq NM^n \frac{(x-a)^n}{n!} \leq NM^n \frac{(b-a)^n}{n!}, \dots$$

endi tengsizliklarning o'ng tomonidagi hadlarga asoslanib, quyidagi musbat hadli qatorni tuzib olaylik:

$$\begin{aligned} N + N[|\lambda|M(b-a)] + \frac{1}{2!}N[|\lambda|M(b-a)]^2 + \frac{1}{3!}N[|\lambda|M(b-a)]^3 + \dots = \\ = N + N\alpha_1 + N\alpha_2 + N\alpha_3 + \dots \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Bu qatorning yaqinlashuvchi ekanini Dalamber alomati yordamida ko'rsatish mumkin:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1} = \frac{1}{n!} [|\lambda|M(b-a)]^n : \frac{1}{(n-1)!} [|\lambda|M(b-a)]^{n-1} = \frac{|\lambda|M(b-a)}{n},$$

bundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1} = 0 < 1.$$

Demak, (2.2.6) qator yaqinlashuvchi ekan. Shu sababli yuqoridagi tengsizliklarga asosan (2.2.4) qator I sohada absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, absolyut va tekis yaqinlashuvchi (2.2.4) qator berilgan (2.2.3) Volterra tenglamasining yechimidir. Bundan boshqa yechimi yo'q ekanini isbot qilish mumkin. Buning uchun aksincha faraz qilamiz, ya'ni (2.2.3) tenglamaning yana bitta uzluksiz $v(x)$ yechimi bor deb faraz qilamiz. U holda

$$v(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)v(t)dt.$$

buni (2.2.3) dan ayiramiz :

$$u(x) - v(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)[u(t) - v(t)]dt.$$

$$u(x) - v(x) = \alpha(x)$$

deb belgilab olaylik. U holda yuqoridagi tenglikni

$$\alpha(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\alpha(t)dt$$

ko'rinishida yozish mumkin. Ma'lumki, $\alpha(x)$ ayirma I kesmada uzluksiz bo'lgani uchun chegaralangan bo'ladi ya'ni,

$$|\alpha(x)| < A, \quad A > 0$$

shunga asosan:

$$|\alpha(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x, t)| |\alpha(t)| dt \leq |\lambda| M A (b - a)$$

bundan foydalanib $\alpha(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \alpha(t) dt$ tenglikdan quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| &\leq |\lambda| \int_a^x |K(x, t)| |\alpha(t)| dt \leq \\ &\leq |\lambda| \int_a^x M |\lambda| M A (b - a) dt = A |\lambda|^2 M^2 (b - a)^2. \end{aligned}$$

buni yana

$\alpha(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \alpha(t) dt$ ga qo'yish natijasida

$$|\alpha(x)| \leq A |\lambda|^3 M^3 (b - a)^3$$

hosil bo'ladi. Umuman, shu jarayonni n marta takrorlasak,

$$|\alpha(x)| \leq A [|\lambda| M (b - a)]^n$$

hosil bo'ladi.

$$q = |\lambda| M (b - a) < 1$$

bo'lgani uchun, n cheksizlikka intilganda, $|\alpha(x)| \leq A [|\lambda| M (b - a)]^n$ ning o'ng tomoni nolga intiladi. Shu sababli $\alpha(x) \equiv 0$, ya'ni $v(x) \equiv u(x)$ bo'ladi. Demak, ikkala yechim aslida bitta ekan.

Konkret tenglamalarni yechishda

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \int_a^x K(x, t) u_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_a^x K(x, t) u_1(t) dt,$$

.....

$$u_n(x) = \int_a^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt,$$

.....

munosabatlarga asoslanib u_i larni ($i = 0, 1, 2, \dots$) topish va ularning ifodalarini $u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots$ qatorga qo'yib chiqish kifoya.

2.2.1-misol. Ushbu tenglamani ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yeching

$$u(x) = x + \int_0^x (t - x) u(t) dt,$$

bunda,

$$f(x) = x \text{ va } \lambda = 1.$$

endi (2.2.5) munosabatlardagi hadlarni hisoblab chiqamiz:

$$u_0(x) = f(x) = x$$

$$u_1(x) = \int_0^x (t-x)t dt = \left[\frac{t^3}{3} - x \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^t = x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{3!};$$

$$u_2(x) = \int_0^x (t-x) \left(-\frac{t^3}{3!} \right) dt = \frac{x^5}{5!};$$

$$u_3(x) = \int_0^x (t-x) \frac{t^5}{5!} dt = -\frac{x^7}{7!}$$

va hokazo. Bu ifodalarning hosil bo'lishidagi qonuniyat ko'rinib turibdi. Ularni

$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots$ qatorga qo'ysak izlanayotgan yechim hosil bo'ladi:

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x$$

2.2.5-misol. Tenglamani yeching.

$$u(x) = -2 \cos x + x + 2 + \int_0^x (t-x)u(t)dt.$$

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \int_a^x K(x,t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x) = \int_a^x K(x,t)u_1(t)dt,$$

.....

$$u_n(x) = \int_a^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt,$$

.....

munosabatlarga asosan

$$u_0(x) = f(x) = -2 \cos x + x + 2$$

$$u_1(x) = 2 \int_0^x (t-x)(-\cos t + t + 2)dt = -2 \cos x + 2 - x^2 - \frac{x^3}{3!};$$

$$u_2(x) = - \int_0^x (t-x)(2 \cos t - 2 + t^2 +)dt = -2 \cos x + 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{15}$$

va hokazo .Bulardagi $\cos x$ o'rniga

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Qatorni qo'yamiz, so'ng $u_0, u_1, u_2, \dots$, larning ifodasini

$u(x) = u_0(x) + \lambda u_1(x) + \lambda^2 u_2(x) + \dots + \lambda^n u_n(x) + \dots$ qatorga qo'yib uni soddalashtirsak,

$$u(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) =$$

$$= \sin x + x \sin x = (x + 1) \sin x$$

kelib chiqadi.

Endi, yuqoridagi ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalangan holda

$$\frac{\theta(t - |x|)}{2} \iint_{\blacksquare(x,t)} p(\xi) \left(\frac{1}{2} + v(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi$$

integralni hisoblaymiz.

$$t \leq |x| \text{ da } \frac{\theta(t - |x|)}{2} \iint_{\blacksquare(x,t)} p(\xi) \left(\frac{1}{2} + v(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi = 0 \text{ chunki,}$$

$$\theta(t - |x|) = \begin{cases} 1, & t > |x| \\ 0, & t \leq |x| \end{cases} \text{ ekanligidan kelib chiqadi.}$$

$t > |x|$ da integralni qiymati noldan farqli bo'ladi. Shu sohada yuqoridagi integralni hisoblaymiz.

$$v(x, t) = \frac{1}{4} \iint_{\blacksquare(x,t)} p(\xi) d\tau d\xi + \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x,t)} p(\xi) v(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

Yuqoridagi integrallarning yig'indisidagi birinchi qo'shiluvchi integralni belgilab soddalashtiramiz.

$$F(x, t) = \frac{1}{4} \iint_{\blacksquare(x,t)} p(\xi) d\tau d\xi = \frac{1}{4} \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} p(\xi) \int_{|\xi|}^{t-|\xi-x|} d\tau d\xi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} p(\xi) (t - |\xi - x| - |\xi|) d\xi$$

shunday qilib,

$$v(x, t) = F(x, t) + \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x,t)} p(\xi) v(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

Bu tenglamani $\blacksquare(0, t), t > 0$ sohada qaraymiz ya'ni absissasi nolga teng, ordinatasi t ga teng bo'lgan nuqtalar joylashgan soha. Bunda t — fiksirlangan son.

$$v(x, t) = F(x, t) + \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

integral tenglamani ketma- ket yaqinlashish usuli bilan yechamiz. Bunda ba'zi belgilashlarni kiritamiz $p_0 = \max_{x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} |p(x)|$ kabi belgilaymiz ya'ni $p(x)$ ning $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

segmentdagi maxsimal qiymatini p_0 bilan belgilaymiz.

$$v(x, t) = F(x, t) + \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

integralning yechimini quyidagi qator ko'rinishida izlaymiz. Bu yerda $v_n (n = 1, 2, 3..)$ lar quyidagicha aniqlanadi:

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_n(x, t)$$

$$v_0(x, t) = F(x, t)$$

$$v_1(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v_0(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v_1(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

.....

$$v_n(x, t) = \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v_{n-1}(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

endi, yuqoridagilardan foydalangan holda quyidagi baholashlarni bajaramiz.

$$|v_0(x, t)| = |F(x, t)| = \left| \frac{1}{4} \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} p(\xi) (t - |\xi - x| - |\xi|) d\xi \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4} p_0 t \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} d\xi = \frac{1}{4} p_0 t \xi \bigg|_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} = \frac{1}{4} p_0 t \left(\frac{x+t}{2} - \frac{x-t}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} p_0 t \left(\frac{x+t-x+t}{2} \right) = \frac{1}{4} p_0 t^2 \end{aligned}$$

bunda, $(x, t) \in \blacksquare(0, t)$ sohaga tegishli bo'lib hisoblanadi.

$$\begin{aligned} |v_1(x, t)| &= \frac{1}{2} \left| \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v_0(\xi, \tau) d\tau d\xi \right| \leq \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} |p(\xi)| |v_0(\xi, \tau)| d\tau d\xi \leq \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} p_0^2 \iint_{\blacksquare(x, t)} \tau^2 d\tau d\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} p_0^2 \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} d\xi \int_{|\xi|}^{t-|\xi-x|} \tau^2 d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot p_0^2 \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \frac{t^3}{3} \bigg|_{|\xi|}^{t-|\xi-x|} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot p_0^2 \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} [(t-|\xi-x|)^3 - |\xi|^3] d\xi \leq \end{aligned}$$

$|\xi-x|$ va $|\xi|$ larni nol deb olsak, tengsizlikning ishorasi yanada mustahkamlanadi.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_0^2 \cdot t^3 \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} d\xi \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_0^2 \cdot t^3 \cdot \left(\xi \bigg|_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_0^2 \cdot t^3 \left(\frac{x+t}{2} - \frac{x-t}{2} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_0^2 \cdot t^4; \\ |v_2(x, t)| &= \frac{1}{2} \left| \iint_{\blacksquare(x, t)} p(\xi) v_1(\xi, \tau) d\tau d\xi \right| \leq \frac{1}{2} \iint_{\blacksquare(x, t)} |p(\xi)| |v_1(\xi, \tau)| d\tau d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot p_0^2 \iint_{\blacksquare(x, t)} t^4 d\tau d\xi \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot p_0^3 \int_{\frac{x-t}{2}}^{\frac{x+t}{2}} d\xi \int_{|\xi|}^{t-|\xi-x|} t^4 d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot p_0^3 t^6; \end{aligned}$$

.....

$$|v_n(x, t)| \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot p_0^{n+1} \cdot t^{2n+2}}{(2n+1)!!}$$

Hisoblangan baholashlardan foydalanilgan holda yechimni yuqorida ko'rsatilgan yig'indi ko'rinishida izlaymiz.

$$|v(x, t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |v_n(x, t)| \leq \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_0^{n+1} \cdot t^{2n+2}}{(2n+1)!!} \leq \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p_0 \cdot t^2)^{n+1}}{(2n+1)!!}$$

Yuqoridagi sonli qator yaqinlashuvchi buni Dalamber alomati bilan ko'rsatamiz.

Agar sonli qator uchun Dalamber alomatiga asosan quyidagi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

shart o'rinli bo'lsa, unda bu sonli qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(p_0 t^2)^{n+2}}{(2n+3)!!}}{\frac{(p_0 t^2)^{n+1}}{(2n+1)!!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0 t^2}{2n+3} = 0 < 1$$

Demak, qator yaqinlashuvchi. Bundan bu $v(x, t)$ sonli qator integral tenglamaning yechimi bo'lishi kelib chiqadi.

XULOSA.

Bitiruv malakaviy ishning birinchi bobi umumlashgan funksiyalar deb nomlanib, unda funksional, chiziqli funksional, chiziqli uzluksiz funksional va umulashgan funksiyalarning ta'riflari ularga doir misollar bilan birgalikda P.Dirakning delta-funksiyasi va xossalari isboti bilan keltirib o'tilgan. Bob ikki qismdan iborat.

Birinchi qismda asosiy funksiyalar sinfi haqida ma'lumot berilgan. Bunda asosiy funksiyaning ta'rif, asosiy funksiyalar to'plamini, asosiy funksiyalar fazosiga aylantirish masalasi va asosiy funksiya „shapkacha“ funksiyasidan tashqari ko'plab misollar keltirish imkonini beradigan Lemma kabilar batafsil yoritilgan.

Ikkinchi qismda esa regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar to'g'risida ma'lumotlar berilgan. Bunda ularning ta'riflari va ularga doir misollar keltirib o'tilgan.

Ikkinchi bobni umumlashgan Koshi masalasining qo'yilishi va tadqiq etilishi deb nomladik bu bob ham ikki qismdan iborat bo'lib, bu qismlar bitiruv malakaviy ishning mohiyatini ochishga xizmat qiladi. Birinchi qismda bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamalariga $x \in R, t > 0$ sohada Koshi masalasini qo'yish natijasida D'alamber formulasi keltirib chiqarilgan va tebranuvchi tenglama uchun umumlashgan Koshi masalasining yechimini qurish yig'ma operatsiyasi yordamida ko'rsatilgan.

To'lqin operatorining fundamental yechimi $n = 1$ va $n = 2$ bo'lganda isboti bilan keltirilgan.

Bobning ikkinchi qismida bitiruv malakaviy ishning asosiy qismi yoritib berilgan ya'ni telegraf tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasining yechimini hosil qilish bayon etilgan.

XOTIMA

Mazkur bitiruv malakaviy ishi „Telegraf tenglamasi uchun umumlashgan Koshi masalasining yechimi” deb nomlanib kirish qismi, 2 ta bob , 4 ta paragraf, xulosa, xotima va adabiyotlar ro’yxatidan iborat.

Birinchi bob umumlashgan funksiyalar bo’lib, ikki paragrafdan iborat. Bu bobda asosiy funksiyalar sinfi, regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalar haqida umumiy ma’lumotlar keltirilgan. Asosiy funksiyaga, regulyar va singulyar umumlashgan funksiyalarga doir misollar yechib ko’rsatilgan.

Ikkinchi bob malakaviy bitiruv ishining asosiy qismi bo’lib, „Umumlashgan Koshi masalasining qo’yilishi va tadqiq etilishi” deb nomlangan. Bu bobda quyidagi ishlar amalga oshirilgan.

$x \in R \quad t < 0$ sohada telegraf tenglamasiga qo’yilgan umumlashgan Koshi masalasining yechimini

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = p(x)U(x,t) + v(x,t) \\ U|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

$$U(x,t) = \varepsilon(x,t) + v(x,t)$$

(bu yerda $\varepsilon(x,t)$ tor tebranish operatorining fundamental yechimi) ko’rinishida qidirib, bu yechim tenglamani qanoatlantirishini va no’malum funksiya $v(x,t)$ Volterranning 2-tur integral tenglamasini qanoatlantirishi ko’rsatilgan. Bu integral tenglama ketma-ket yaqinlashish usuli bilan tadqiq etilgan.

Adabiyotlar

1. I.A.Karimov, Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch, Toshkent, "Ma'naviyat" 2009. B 61-65.
2. Б.С.Владимиров, Уравнения математической физики, Москва Мир.1981 г.
3. В.Я.Арсенин, Методы математической физики и специальные функции, "Наука" 1974 г
4. D.Q.Durdiyev, Matematik fizikada umumlashgan funksiyalar, Buxoro "O'qituvchi" 2006 y.
5. Д.В.Беклемишев, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М.: "Наука" 1987 г
6. Ж.Адамар, Задача, Коши для уравнений с частными производными гиперболического типа, М.: Наука,1978 г
7. В.Г.Раманов, Обратные задачи математической физики, М.:1984г, 264 с
8. А.Н.Тихонов. А.А.Самарский, Уравнение математической физики, 1972г, 724 с
9. Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.3.М.: Физматгиз, 1963г, 656 с
10. M.S.Salohiddinov, Matematika fizika tenglamalari, Toshkent, "Ma'naviyat" 2002 y
11. www.ZiyoNet.uz
12. www.Google.uz

13. www.yandex.ru

14. www.exponenta.ru