O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT TO’QIMACHILIK VA YENGIL SANOAT INSTITUTI

“OLIY MATEMATIKA”

FANINING

“CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI VA ANALITIK GEOMETRIYA”

BO’YICHA

USLUBIY MAJMUA

(Barcha yo’nalishdagi bakalavrlar uchun)

TOSHKENT – 2015

Annotasiya

Mazkur qo'llanmada "Chiziqli algebra elementlari " bo'limi va unga bog'liq bo'lgan mavzular batafsil bayon qilingan. Talabaning bilimini tekshirish uchun yetarli miqdorda misollar va test savollari berilgan. Qo'llanma to'rtta bo'limdan iborat bo'lib: nazariya, mustaqil ishlash uchun misoll va masalalar, test savollari hamda qoldirilgan darslarni o'zlashtirish uchun namunaviy savollardan iborat. Qo'llanma oily matematikaning shu bo'limini mustaqil o'rganuvchilar uchun mo'ljallangan.

Tuzuvchilar: t.f.d., professor A.Z.Mamatov
kafedra mudiri G'X.Djumabayev
assistent Sh.U.Ro'zmonov

Taqrizchilar: f.m.f.n., dotsent N.Jabborov – UzMU
f.m.f.n., dotsent M.Atamirzayev – TTYESI

Toshkent to'qimachilik va yengil
sanoat instituti ilmiy-uslubiy
kengashida tasdiqlangan
«__» __________ 2015 y
bayonnoma №

TTYESI bosmaxonasida «____» nusxada ko'paytirilgan

I - bo'lim
Mavzu: Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularning xossalari

***Reja*:**

1.Texnika oliy o'quv yurtlarida oliy matematika kursining vazifasi. Tabiiy fanlarda matematika fanining ahamiyati.
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar va ularni hisoblash.
3. Uchinchi tartibli determinantning minori va algebraik to'ldiruvchisi.
4. Determinantning xossalari.

Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. T.Sh. Shodiyev «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1984 y., 5-20 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-jild. T. «O'qituvchi». 1992. 23-30 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra» T. «O'qituvchi». 1990 y., 5-7, 8-14 betlar.
4.http;//docs.ttesi.uz/sim/htme.oily matematika, 2005y

.

1.1. Ikkinchi tartibli determinant.

To'rtta sondan iborat ushbu jadvalni qaraymiz va uni matritsa, aniqrog'i ikkinchi tartibli kvadrat matritsa deb ataymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ son (1) matritsaning determinanti yoki ikkinchi tartibli determinant deb ataladi. (1) – matritsa determinanti $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (2) kabi belgilanadi.

Shunday qilib determinant uchun quyidagiga egamiz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (3)$$

Matritsa bilan determinantni almashtirmaslik lozim. Matritsa sonlardan iborat jadval bo'lib, determinant esa shu jadvaldan (3)da ko'rsatilgan kabi hosil qilingan birgina sondir.

Determinantni tashkil qiladigan sonlar uning elementlari deb ataladi. Ikkinchi tartibli determinant ikkita satr va ikkita ustunga ega. Istalgan elementning belgilanishida birinchi indeks shu element turgan satr tartibini, ikkinchi indeks esa ustun tartibini ko'rsatadi. a_{11} va a_{12} lar birinchi satrni, a_{21} va a_{22} elementlari ikkinchi satrni tashkil etadi. a_{11}, a_{22} elementlar joylashgan diagonal determinantining bosh diagonali, a_{12} va a_{21} elementlar joylashgan diagonal esa yordamchi diagonal deb ataladi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonalda turgan elementlar ko'paytmasidan, yordamchi diagonalda turgan elementlar ko'paytmasini ayirish kerak.

1-misol. $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot 5 - 3\cdot(-1) = 40 + 3 = 43,$

2-misol. $\begin{vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$

2. Uchinchi tartibli determinant.

Uchinchi tartibli kvadrat matritsani, ya`ni 9 ta sondan iborat ushbu jadvalni qaraymiz.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Bu matritsaning uchinchi tartibli determinanti deb quyidagi $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$ songa aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

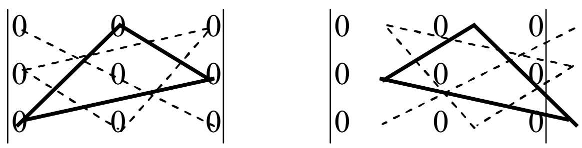
Shunday qilib,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{22}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (5)$$

3-chi tartibli determinantni hisoblash usullari:

a) Uchburchak usuli. Uchburchak usulida hisoblash sxemasi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$



(+)ishora bilan (-)ishora bilan

Uchinchi tartibli determinantni aniqlagan (hisoblaydigan) son bosh diagonal elementlari ko'paytmasi va har bir bosh uchburchak uchlaridagi elemenetlari ko'paytmasidan tuzilgan uchta son yig'indisidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasi va har biri yordamchi uchburchak uchlaridagi elementlari ko'paytmasidan tuzilgan uchta son yig'indisining ayirmasiga teng.

b) Sarrius usuli.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (7)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$$\begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (8)$$

3-misol.

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = 2\cdot 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 1 - (3\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot(-2)) =$$

$$= 0 - 6 + 3 - 18 - 2 - 0 = -23$$

в)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot(-2)\cdot 1 - (3\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 0)$$

$$= 0 + 3 - 6 - 18 - 2 - 0 = -23$$

1.2. Determinantning xossalari.

Determinantda mos satr va ustun elementlari o’rnini almashtirishga uni transponirlash deyiladi.

1-xossa. Transponirlash natijasida determinantning qiymati o’zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

2-xossa. Determinantda istalgan ikki satr yoki ikki ustunning o’rnini almashtirsak, uning qiymati o’z ishorasini o’zgartiradi, ammo absolyut qiymat o’zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{13} & a_{21} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{23} & a_{31} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

1-natija. Ikkita satri yoki ustuni bir xil bo’lgan (yoki proporsional) determinantning qiymati nolga teng.

3-xossa. Determinantning satri yoki ustunidagi elementlar umumiy λ ko’paytuvchiga ega bo’lsa, λ ni determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

2-natija. Determinantning biror satri ustuni boshqa satri yoki ustuniga parallel bo’lsa bunday determinantning qiymati nolga teng.

4-xossa. Agar determinantning biror qatorining har bir elementi ikki qo'shiluvchining yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda bu determinant ikki determinant yig'indisidan

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{11}$$

iborat bo'ladi.

5-xossa. Agar biror qator elementlariga boshqa parallel qatorning elementlari istalgan ko'paytuvchiga ko'paytirib qo'shilsa, determinant o'zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{12}$$

1.3. Algebraik to'ldiruvchilar va minorlar

1-ta`rif. Determinant berilgan elementining minori deb, shu element turgan satr va ustunni bir vaqtda o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi.

Masalan, ushbu $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinant a_{12} turgan satr va ustunni o'chirish natijasida hosil bo'lgan $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ 2-tartibli determinant a_{12} elementning minoridan iborat bo'ladi va M_{12} deb beriladi:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{13}$$

Shunday qilib yuqorida tuzilgan uchinchi tartibli Δ determinantning har bir $a_{i,j}(i, j = 1, 2, 3)$ elementiga mos minori $M_{i,j}$ bo'lib, ular ikkinchi tartibli va hammasi 9 ta bo'ladi.

Ta`rif. Determinant biror elementning algebraik to'ldiruvchisi deb uning bu determinantda juft yoki toq joy egallaganiga bog'liq ravishda musbat yoki manfiy ishora bilan olingan minoriga aytiladi:

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} \tag{14}$$

Masalan, a_{22} elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ son bo'ladi, chunki a_{22} juft joyda turibdi, a_{32} element algebraik to'ldiruvchisi $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$ son bo'ladi, chunki a_{32} toq o'rinda turibdi.

Nazorat savollari.

1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozing.
2. Uchinchi tartibli determinantning xossalarini aytib bering.
3. Uchinchi tartibli determinant biror elementining minori deb nimaga aytiladi?
4. Uchinchi tartibli determinant biror elementining algebraik to'ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?

Mavzu: Ikki va uch noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usuli yordamida yechish va uni tekshirish. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

***Reja*:**

1. Uchinchi tartibli determinantni yo'l va ustun elementlari bo'yicha yoyish.
2. Ikki noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimlari.
3. Ikki noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer qoidasi.
4. Uch noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer qoidasi.
5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimi.

Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. T.Sh. Shodiyev «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1984 y., 22-33 betlar.

2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-jild. T. «O'qituvchi». 1992. 55-60 betlar.

3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra» T. «O'qituvchi». 1990 y., 7-8, 14-20 betlar.

4. http;//docs.ttesi.uz./sim/ htme.Oliy matematika,2005y.

2.1. Laplas teoremasi

1-teorema (Laplas teoremasi)

Determinant qiymati uning biror satri (yoki ustun) elementlarini bu elementlarning mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirilgan yig'indisiga teng

Isbot. (5)determinantning ikkinchi ustuni uchun teoremaning tasdig'i quyidagicha $\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ (15) tenglikning to'g'riligidan iborat, ya`ni

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$
$$= a_{12}(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{32}(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) =$$
$$= a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} +$$
$$+ a_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}M_{32} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

4-misol.

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 5(4-1) - (4+3) + 4(2+6) = 15 - 7 + 32 = 40.$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}5\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(4-2) - (-3)(8-1) + 5(4-1) = 4 + 21 + 15 = 40.$$

2.2. Ikki noma`lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi.

Aytaylik bizga ushbu ikki noma`lumli chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Sistemaning yechimini topish uchun determinantlar nazariyasidan foydalanamiz. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish deganda, x va y sonlarning shunday to'plamini topish demakki, uni (1) tenglamadagi ayniyatga aylansin. Bu sonlar to'plamini sistemaning yechimi deb ataymiz. Kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistema birgalikdagi sistema yoki aniq sistema deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema aniqmas sistema deb ataladi. Bitta ham yechimga ega bo'lmagan sistema birgalikda bo'lmagan sistema deb ataladi.

Sistema koeffisiyentlaridan quyidagi determinantlarni tuzamiz va uni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Unga bosh determinant deyiladi. So'ngra bu determinantda mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlarni ozod hadlar bilan almashtirib, Δ_x, Δ_u bilan belgilanadigan ushbu yordamchi determinantlarni tuzamiz.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Agar Δ≠0 bo'lsa, (1) – sistemaning yechimini aniqlaydigan

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (2)$$

(2) formulani hosil qilamiz. Olingan bu qoida Kramer qoidasi deyiladi.

Bu yerda uch hol bo'lishi mumkin:

a) Agar Δ≠0 bo'lsa, (1) sistema birgalikda bo'lib, birgina yechimga ega bo'ladi.

b) Agar Δ=0, lekin Δ_x va Δ_y larning kamida bittasi nolga teng bo'lmasa, u holda (1) sistema birgalikda emas, ya`ni bitta ham yechimga ega bo'lmaydi.

v) Agar Δ=0 va $\Delta_ч = 0,\ \Delta_и = 0$ bo'lsa, (1) – sistema aniqmas, ya`ni cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

<u>1-misol.</u>

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$ sistema yechilsin.

<u>Yechish.</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

(2) – formuladan $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$

<u>2-misol.</u>

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 3 \end{cases}$$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Sistema birgalikda emas, yechimlari yo'q.

<u>3-misol.</u>

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Sistema aniqmas, cheksiz ko'p yechimlarga ega, ikkinchi tenglamani 2 ga qisqartirsak, sistema ushbu bitta tenglamaga keladi:

$$3x - y = 2$$

Noma`lum x ga ixtiyoriy qiymatlar berib y ning unga mos qiymatlari hosil qilinadi:

a) *x=0* bo'lsa, u holda *y=-2*

b) *x=1* bo'lsa, u holda *y=1* va hokazo.

2.3. Uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yechish.

Uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (3)$$

berilgan bo'lsin. Bu sistemaning yechimini topish uchun quyidagi determinantlarni tuzamiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Bu determinantlardan foydalanib (3) – sistemaning yechimlari $\Delta \neq 0$ bo'lganda quyidagi Kramer formulalaridan topiladi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (4)$$

a) Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, sistema bitta yechimga ega bo'ladi.

b) Agar $\Delta=0$, $\Delta \neq 0$, $\Delta \neq 0$, $\Delta \neq 0$ bo'lsa, (3) –sistema yechimga ega emas.

v) Agar $\Delta=0$, $\Delta=0$, $\Delta=0$, $\Delta=0$ (3) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

<u>4-misol.</u> $\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ x + 2y - 4z = -9 \\ 5x - 4y + 6z = 5 \end{cases}$

<u>Yechish.</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 60 - 4 - 10 - 32 + 18 = 56;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 60 - 4 - 10 - 32 + 18 = 56;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -60 + 60 + 36 - 10 + 80 - 162 = -56;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 135 + 20 + 50 - 72 + 15 = 16;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3.$$

Tekshirish.

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 3 = -2 - 6 + 3 = -5$$
$$-1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -1 + 4 - 12 = -9$$
$$5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = -5 - 8 + 18 = 5$$

Demak, $\{-1;2;3\}$ yechim bo'ladi.

Uch noma`lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasining o'ng tomoni nolga teng bo'lsa, unga bir jinsli sistemasi deb ataladi: bir jinsli sistema doim nol (trivial) yechimga ega, ya`ni (0;0;0) uchlik doim yechim bo'ladi.

<u>Teorema-1.</u> Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, u holda bir jinsli sistema yagona $x=y=z=0$ yechimga ega.

<u>Teorema-2.</u> Bir jinsli sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning koeffisiyentidan tuzilgan determinantning nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Nazorat savollari.

1. Kramer qoidasini aytib bering.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qaysi holda birgina yechimga ega? Ikkita va uchta tenglamalar sistemasi uchun buni geometrik nuqtai nazardan qanday talqin etish mumkin?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning boshqa yana qanday usullarini bilasiz?
4. Laplas teoremasini tushuntirib bering.

Mavzu: Matritsalar va ular yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechish

Reja:

1. Matritsalar va ular ustida amallar.
2. Teskari matritsa.
3. Matritsa tushunchasi yordamida sistemani yechish.

Adabiyotlar

1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nashr. 1984 yil. 30-36 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 64-73 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 35-40 betlar.
4. http:// docs. ttesi, uz/sim/, html. Oily matematika ,2005 y.

3.1. Matritsalar va ular ustida amallar

m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri to'rtburchak shaklida berilgan m·n ta sonlardan tuzilgan ushbu ifoda m·n o'lchovli matritsa deb ataladi. Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi va a_{ij} deb belgilanadi, bunda $i = \overline{I,m}$, $J = \overline{I,n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1}n \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2}n \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matritsalar lotin alfavitidagi bosh harflar bilan belgilanadi, ba`zida $(a_{ij}),\ \|a_{ij}\|,\ (i = \overline{I,m},\ \overline{I,n})$ ko'rinishlarda ham belgilanadi.

n=1 bo'lganda ustun matritsa deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

matritsaga, m=1 bo'lganda yo'l (satr) matritsa deb ataluvchi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \end{pmatrix}$ matritsaga ega bo'lamiz.

m=n bo'lganda hosil bo'lgan matritritsa kvadrat matritsa deyiladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinantni $\det A$, $|A|$ yoki Δ_A deb belgilanadi. Agar $\det A = 0$ bo'lsa, u holda A matritsa xos yoki maxsus matritsa, $\det A \neq 0$ bo'lsa xosmas yoki maxsusmas matritsa deyiladi. Kvadrat matritsani $a_{11}\ a_{22}...,a_{nn}$ elementlari joylashgan diagonali bosh diagonal, $a_{1n},\ a_{2n-1},...,a_{n1}$ diagonali esa yordamchi diagonal deyiladi.

Bosh diagonali 1 lardan, qolgan elementlari nollardan tuzilgan matritsani birlik matritsa deyiladi va E bilan belgilanadi:

$$E=\begin{pmatrix} 1\ 0\dots 0 \\ 0\ 1\dots 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0\ 0\dots 1 \end{pmatrix}$$

Barcha elementlari nollardan iborat matritsani nol matritsa deyiladi va Q bilan belgilanadi:

$$Q=\begin{pmatrix} 0\ 0\dots 0 \\ 0\ 0\dots 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0\ 0\dots 0 \end{pmatrix}$$

Endi matritsalar ustida amallar bilan tanishamiz.

1. Matritsalarni qo'shish va ayrish.

Ikkita bir xil o'lchovli matritsalarning mos elementlari yig'indilari (ayirmalari)dan tuzilgan uchinchi matritsani berilgan matritsalarning yig'indisi (ayirmasi) deyiladi:

$$A=(a_{ij}),\ \ B=(b_{ij}),\ C=(c_{ij}),$$
$$i=\overline{I,m},\ J=\overline{I,n}$$

va $A \pm B = C \Leftrightarrow a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$

Misol; $A=\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix} va B=\begin{pmatrix} 2-1 \\ 3\quad 1 \end{pmatrix}$

A+B=?

$$A+B=\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2-1 \\ 3\quad 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+(-1) \\ 3+3 & 4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31 \\ 65 \end{pmatrix} \quad \text{javob: } \begin{pmatrix} 31 \\ 65 \end{pmatrix}$$

2. Matritsani songa ko'paytirish.

A matritsa bilan λ sonning ko'paytmasi λA deb A matritsaning har bir elementini λ soniga ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi. Misol:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$5A=5\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 5 & 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 3 & 5\cdot 4 & 5\cdot(-2)\\ 5\cdot 5 & 5\cdot 6 & 5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 20 & -10\\ 25 & 30 & 15\end{pmatrix}$$

Matritsalarni qo'shish va songa ko'paytirishning ushbu xossalari to'g'riligini tekshirish uncha qiyinchilik tug'dirmaydi:

1) $A+B=B+A$ 4) $\mu\cdot(\lambda A)=\lambda(\mu A)$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ 5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

3) $A+Q=A$ 6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

Bunda A, B, S – matritsalar, λ,μ - sonlar ,Q – nol matritsa.

3. Matritsalarni skalyar ko'paytirish.

*m*x*k* o'lchovli A matritsaning *k*x*n* o'lchovli B matritsa bilan ko'paytmasi deb, *m*x*n* o'lchovli shunday C matritsaga aytiladiki, uning har bir C_{ij} elementi A matritsa *i*-satri elementlarini B matritsa *j*-ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya`ni:

$$C_{ij}=a_{i1}b_{ij}+a_{i2}b_{2i}+\ldots+a_{ik}b_{kj}$$

C=A·B deb ko'paytmasi belgilanadi. Ta`rifdan ikki matritsaning ko'paytmasi mavjud bo'lishi uchun birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Shuningdek, A·B mavjud bo'lganda B·A umuman mavjud bo'lmasligi mumkinligini ko'rish mumkin. Demak, umuman olganda A·B≠B·A ekanligini ko'ramiz.

Misol:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 4-3\cdot 2 & -2\cdot 3-3\cdot 6\\ 5\cdot 4+1\cdot 2 & -5\cdot 3+1\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -24\\ 22 & -9\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -15\\ 34 & 0\end{pmatrix}$$

$A\cdot B\neq B\cdot A.$

Matritsalar ko'paytmasi uchun ushbu xossalarning o'rinliligini ko'rish mumkin:

1) $(A\cdot B)C=A(B\cdot C)$ 4) $A\cdot E=EA=A$

2) $(A+B)C=AC+BC$ 5) $A\cdot Q=QA=Q$

3) $(\lambda A)\cdot B=\lambda(AB)$ 6) $\det(AB)=\det A\cdot\det B.$

Bunda A, B, C – matritsalar, *Q* – nol matritsa, *E*-birlik matritsa, λ- ixtiyoriy son.

3.2. Teskari matritsa.

Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish.

1. A – kvadrat matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsa bilan ko'paytmasi birlik matritsadan iborat bo'lgan matritsani A matritsaga teskari matritsa deyiladi va A^{-1} deb belgilanadi, demak

$$A^{-1} \cdot A = E$$

Har qanday xosmas, ya`ni $\det A \neq 0$, bo'lsa matritsaga teskari matritsa mavjud bo'lib, uning ko'rinishi quyidagicha bo'lishini ko'rsatish mumkin:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \dots \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \dots \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \dots \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Bunda $\Delta = \det A$, A_{ij} – algebraik to'ldiruvchilar.

Bu tasdiqning to'g'riligini bevosita $A^{-1} \cdot A = E$ tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatish orqali isbotlash mumkin.

Teskari matritsani ushbu xossalarini mavjudligini aytib o'tamiz:

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
2. $A^{-1}A = AA^{-1} = E$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2. Endi chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa tushunchasi yordamida qanday yechish mumkinligini ko'rsatamiz.

n ta noma`lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots. \quad \dots\dots\dots. \quad \dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Ushbu belgilarni keltiramiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

U holda berilgan sistemani bu matritsalar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$AX = B \qquad (3)$$

Agar A matritsa xosmas, ya`ni $\det A \neq 0$ bo'lsa A^{-1} teskari matritsa mavjud bo'lib, quyidagi tengliklarning to'g'riligini ko'rish mumkin:

$$\begin{aligned}
&A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\
&(A^{-1}A)X = A^{-1}B \\
&EX = A^{-1}B \\
&X = A^{-1}B
\end{aligned} \qquad (4)$$

Shunday qilib, tenglamalar sistemasini yechish uchun A matritsaga teskari matritsani topib uni ozod xaddan tuzilgan B ustun matritsaga ko'paytirish yetarli ekan.

Sistemani yechishning bunday usulini matritsa usuli deyiladi.

Misol:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - z = 0 \\ -2x + y + z = -1 \end{cases} \quad \text{sistemani yeching.}$$

Yechish. Matritsalarni tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

demak, teskari matritsa mavjud ekan. Uni tuzish uchun barcha algebraik to'ldiruvchilarni topib olamiz.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Demak,

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

(4) formuladan foydalanib noma`lumlarni topamiz:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

Javob: *x=1, y=-1, z=2.*

Nazorat savollari.

1. Ikkita matritsani qanday qo'shamiz?
2. Matritsani songa ko'paytirish qanday amalga oshiriladi?
3. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi.
4. Matritsalarni o'zaro qanday ko'paytiriladi?
5. Teskari matritsa deb nimaga aytiladi?
6. Sistemani matritsa yordamida yechish uchun nimalar qilinadi?

Mustaqil ish № 1.

Chiziqli algebra.

Tenglamalar sistemasini Kramer va matrisalar usullarida yeching.

1. $\begin{cases}x+2y+z=8\\ 3x+2y+z=10\\ 4x+3y-2z=4\end{cases}$

2. $\begin{cases}x-2y+3z=6\\ 2x+3y-4z=20\\ 3x-2y-5z=6\end{cases}$

3. $\begin{cases}x_1+2x_2+5x_3=-9\\ x_1-x_2+3x_3=2\\ 3x_1-6x_2-x_3=25\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\ 3x_1+2x_2-5x_3=1\\ x_1+3x_2-2x_3=4\end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ 5x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ x + y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \\ -5x + 3y + 6z = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x - y - 6z = 4 \\ 5x + 7y + 11z = -7 \\ 4x + 3y + 8z = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + z = -2 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x + y + 2z = 8 \\ 3x - 2y - 3z = -4 \\ 5x + 4y + 5z = 18 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x + y + 2z = 6 \\ 2x - 5y + 2z = 2 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -11 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -13 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -13 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 3x + y + z = -2 \\ 2x - 3y - z = -9 \\ x + y - 3z = 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -8 \\ 2x + 4y - 5z = 17 \\ 3x + y - 2z = 4 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 3x + 2y + z = -6 \\ 2x + 5y + 3z = -11 \\ 3x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x - 2y - 3z = -7 \\ 5x + 5y - z = -11 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

Mavzu: Tekislikda va fazoda Dekart koordinatalar sistemasi. Skalyar va vektorlar kattaliklar. Kollinear va komplanar vektorlar. Ba`zis vektorlar

Reja:

1. Skalyar va vektor kattaliklar haqida tushuncha.
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
3. Kollinear va komplanar vektorlar
4. Ba`zis vektorlar.

Mustaqil o'qib o'rganishga tavsiya etilgan adabiyotlar ro'yhati:

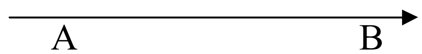
1. T.Sh. Shodiyev «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1984 y., 37-51 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-jild. T. «O'qituvchi». 1992. 5-13 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra» T. «O'qituvchi». 1990 y., 41-50, 55-58 betlar.
4. http:// docs. ttesi, uz/sim/, html. Oily matematika ,2005 y.

4.1. Skalyar va vektor kattaliklar haqida tushuncha.

Skalyar miqdor deb faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklarga aytiladi. Masalan: uzunlik, vaqt, hajm, yuza va boshqalar. Shunday miqdorlar ham borki, ular o'zlarining son qiymatlari bilan to'la aniqlanmaydi; ularni to'liq aniqlash uchun son qiymatlari bilan bir qatorda yo'nalishlari ham berilgan bo'lishi kerak. Masalan, harakat, kuch, tezlik, tezlanish kabi miqdorlar. To'g'ri chiziqda oddiy kesma bilan bir qatorda yo'nalgan kesma, ya`ni bir uchi uning boshi, ikkinchi uchi uning oxiri hisoblangan kesmaga qaraladi. Bunday kesma vektor deyiladi. Oddiy kesmada esa aniqlovchi nuqtalar teng huquqli bo'lib tartibining ahamiyati yo'q.

Boshlang'ich nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo'lgan vektor $\vec{AB}$ yoki qisqacha $\vec{a}$ shaklida belgilanadi. Shunday qilib, vektor miqdor geometrik usulda ma`lum uzunlikdagi va aniq yo'nalishdagi kesma yordamida tasvirlanadi:

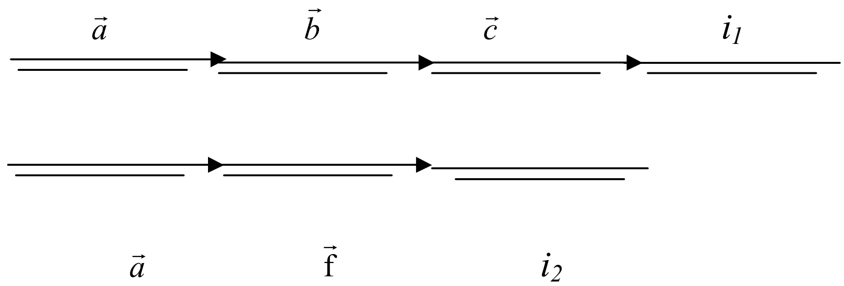
$$\vec{AB}=\vec{a}$$



Vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $\left|\vec{AB}\right|=|\vec{a}|$ ko'rinishida belgilanadi. Moduli nolga teng vektor nol vektor, moduli birga teng bo'lgan vektor birlik vektor deyiladi. Nol vektorining yo'nalishi aniqlanmagan bo'ladi.

<u>1-ta`rif.</u> Noldan farqli vektorlar bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ ko'rinishda belgilanadi



Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo'nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi belgilanadi.

<u>2-ta`rif.</u> Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan vektorlarga komplanar vektorlar deb ataladi.

4.2. Vektorlar ustida amallar.

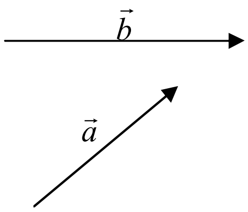
1. Vektorlarni qo'shish.

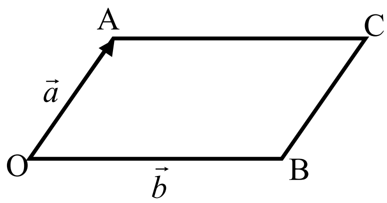
<u>3-ta`rif.</u> Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning yig'indisi deb istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxirida B ga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C nuqtada bo'lgan $\vec{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}$ bilan belgilanadi.

Vektorlarni qo'shish ta`rifidan istalgan A, B, C nuqtalar uchun $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ (1) tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

(1) – tenglik vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi.

Undan tashqari vektorlarni parallelogramm qoidasiga asosan ham qo'shish mumkin. Buning uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'z-o'ziga parallel ravishda bitta boshga ko'chiriladi va ularga parallelogramm yasaladi. Parallelogrammning katta diagonali shu ikki vektorning yig'indisidan, kichik diagonali esa ularning ayirmasidan iborat.





$$\vec{OC}=\vec{a}+\vec{b}=\vec{OA}+\vec{OB}$$

$$\vec{BA}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{OA}-\vec{OB}$$

Vektorlarni qo'shishning xossalari.

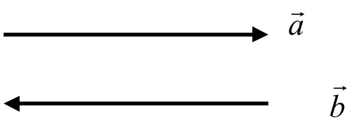
a) Qo'shishning gruppalash (assosiativlik) xossasi.

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

b) Qo'shishning o'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Agar $\vec{a}+\vec{b}=0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga o'zaro qarama-qarshi vektorlar deyiladi. Qarama-qarshi vektorlar modul jihatidan teng, yo'nalish jihatidan esa qarama-qarshi bo'ladi.



$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $-\vec{a}$ bilan belgilaymiz.

2. Vektorni songa ko'paytirish.

$\vec{a} \neq 0$ vektor va λ son berilgan bo'lsin, bu yerda λ∈ N.

4-ta`rif. $\vec{a}$ vektorning λ soniga ko'paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektoriga aytiladiki, λ>0 bo'lganda $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, λ<0 bo'lsa, $\vec{b}$ ning yo'nalishi teskari bo'lib, $\vec{b}$ vektorning uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan λ son moduli ko'paytmasiga teng va $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ shaklida belgilanadi.

Ta`rifdan ushbu xulosalar kelib chiqadi:

a) Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

b) Ixtiyoriy λ∈ R son uchun $\lambda \cdot \bar{a} = \lambda\bar{a}$

v) Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

g) $\vec{a}$ va $\lambda \cdot \vec{a}$ vektorlar o'zaro kollineardir.

Vektorni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

a) $a(\beta\vec{a}) = (a\beta)\vec{a}$ (gruppalash qonuni);

b) $a(\vec{a} + \vec{b}) = a\vec{a} + a\vec{b}$ (vektorlarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni)

v) $(a + \beta)\vec{a} = a\vec{a} + \beta\vec{a}$ (skalyarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni).

1-misol. *ABS* uchburchak berilgan. O nuqta uchburchakning og'irlik markazi (ya`ni uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi) bo'lsa, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$ ekanini isbotlang.

Isbot.

Tomonlari $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ vektorlardan iborat *AOBE* parallelogramm yasaymiz. Bu parallelogrammdan $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OE}$.

O nuqta uchburchakning og'irlik markazi bo'lgani uchun $\vec{OД} = (1/3)\vec{CД}$, chizmadan: $(\vec{OC} = -2\vec{OД}, \ \vec{OД} = \vec{ДE}) \quad \vec{OC} = \vec{EO}, \ \vec{OC} = -(\vec{OA} + \vec{OB})$ bundan

4.3. Chiziqli kombinatsiya. Ba`zis.

Bizga $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ vektorlar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin.

Ta`rif. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k$ ifoda $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_k$ vektorlarning chiziqli kombinatsiya deyiladi.

Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,...,\vec{a}_k$ koeffisiyenti chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalangan bo'lsa, $\vec{a}$ vektor shu vektorlar bo'yicha yoyilgan deyiladi, ya`ni quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k \qquad (5)$$

Agar kamida bittasi noldan farqli $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_k$ sonlar ma`lum tartibda tanlab olinganda

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (6)$$

tenglik bajarilsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3,...,\vec{a}_k$ vektorlar chiziqli bog'liq deyiladi. Agar (6) munosabat faqat $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$da o'rinli bo'lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3...$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan deyiladi yoki chiziqli erkli deyiladi. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Uchta vektor chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarur va yetarlidir.

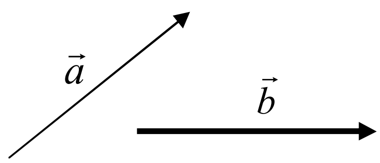
Ma`lum tartibda olingan $\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lib, boshqa har qanday vektorni $\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k$ lar orqali chiziqli ifodalansa bu vektorlar sistemasi bazis deyiladi va $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k\}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar bazisning har bir vektori birlik vektor bo'lib, ularning har ikkitasi o'zaro perpendikulyar bo'lsa, bunday bazis ortonormallangan bazis deyiladi. Bazis tashkil etuvchi vektorlar soni qaralayotgan fazoning o'lchovi deyiladi. Istalgan $\vec{a}$ vektorni berilgan $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2,....,\vec{e}_k\}$ bazis vektorlar bo'yicha yoyish mumkin:

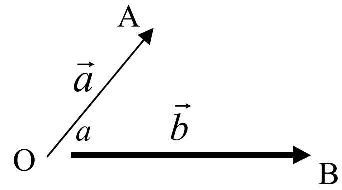
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \qquad (7)$$

(7) yoyilmadagi $a_1, a_2\ a_3$ sonlar $\vec{a}$ vektorning $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormal bazisiga nisbatan koordinatalari deyiladi. Bu qisqacha $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ko'rinishida belgilanadi.

4.4. Vektorlar orasidagi burchak. Vektorlarning o'qdagi proyeksiyasi.

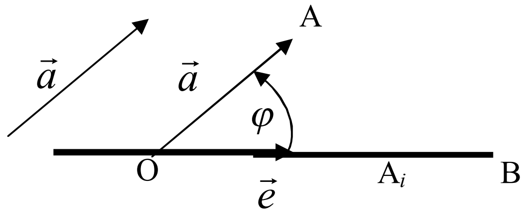
Ikki vektor hamda vektor va o'q orasidagi burchak tushunchalarini kiritamiz. Aytaylik $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar boshini biror O nuqtaga joylashtiramiz, boshqacha aytganda $\vec{OA} = \vec{a}$ va $\vec{OB} = \vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.





U holda ΔAOB ning ichki AOB burchagi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deyiladi hamda $(\vec{a}\hat{\ }\vec{b})$ ko'rinishda yoki $\alpha, \beta, \gamma,...$ harflar bilan belgilanadi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb, vektorlardan birini soat strelkasiga teskari yo'nalishda ikkinchi vektor bilan ustma-ust tushguncha aylantirishdan hosil bo'lgan burchaklarning kichigiga aytiladi. Vektorlar orasidagi burchak, 0^0 dan 180^0 gacha oraliqda bo'ladi. Bundan ko'rinadiki bir xil yo'nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak 0^0ga, qarama-qarshi yo'nalishdagi kollinear vektorlar orasidagi burchak esa 180^0 ga teng bo'ladi. Agar vektorlar orasidagi burchak 90^0 ga teng bo'lsa, ular perpendikulyar yoki ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a} \perp \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, 1 o'q va uning birlik vektori $\vec{e}$ berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\vec{a} \neq 0$ vektorning birlik vektori $\vec{a}$ quyidagicha aniqlanadi: $\alpha_0 = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$. $\vec{\alpha} \neq 0$ tekislikdagi ixtiyoriy vektor bo'lsin. $\vec{\alpha}$ vektor bilan 1 o'q orasidagi burchak deganda, 1 o'qning birlik vektori $\vec{e}$ bilan $\vec{\alpha}$ vektor orasidagi burchak tushuniladi. $\vec{\alpha}$ vektor 1 o'q bilan φ burchak tashkil qilsin.



Ta`rif. Vektorlarning o'qdagi ortogonal proyeksiyasi deb vektor uzunligini shu vektor $\rightarrow$ bilan o'q orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng songa aytiladi.

$\vec{\alpha}$ vektorning 1 o'qdagi proyeksiyasi $\Pi p_i \vec{a}$ ko'rinishda belgilanadi. Ta`rifdan:

$$\Pi p_e \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi \qquad (2)$$

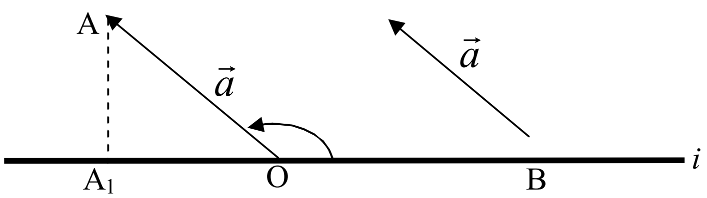
$\vec{\alpha}$ vektorni bu o'qdagi ortogonal proyeksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$OA_1 = \Pi P_i \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cos\varphi = OA_i$$

Bu yerda $\varphi = (\vec{e}, \vec{\alpha}), A_1$ nuqta A nuqtaning 1 to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasi.

Agar $\vec{\alpha}$ va $\vec{e}$ vektorlar orasidagi burchak o'tmas bo'lsa

$$\Pi p_\ell \vec{\alpha} = -|\vec{\alpha}| \cos(\angle BOA) = -|\vec{\alpha}| \cos(\angle A\, OA_1) = -OA_1 \qquad (3)$$



Agar $\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{t} = 90^0$ bo'lsa $(\vec{a} \perp \vec{e})$, $\Pi p_i \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cos 90^0 = 0$. Ixtiyoriy $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun

$$\Pi p_i (\vec{b} + \vec{c}) = \Pi p_i \vec{b} + \Pi p_i \vec{c} \qquad (4)$$

4.5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish va ayrish.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazisga nisbatan quyidagi koordinatalarga ega bo'lsin: $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$;
$\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$.

1) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo'shishda (ayirishda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayriladi):

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)+(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2+(a_3+b_3)\vec{e}_3$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)-(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=(a_1-b_1)\vec{e}_1+(a_2-b_2)\vec{e}_2+(a_3-b_3)\vec{e}_3$$

2) Vektorni songa ko'paytirishda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ bo'lsin. U holda $\lambda\vec{a}=\lambda(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)=$ $=(\lambda a_1)\vec{e}_1+(\lambda a_2)\vec{e}_2+(\lambda a_3)\vec{e}_3$ ga ega bo'lamiz.

2-misol. $\vec{a}=\{3;-2;1\}$; $\vec{b}=\{0;3;-2\}$ $\vec{c}=\{1;0;5\}$ bo'lsa a) $\vec{a}+\vec{b}$, b) $\vec{a}+\vec{c}$, s) $5\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlanadi.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\{3+0;\ -2+3;\ 1-2\}=\{3;\ 1;\ -1\}.$

b) $\vec{a}+\vec{c}=\{3-1;\ 2-0;\ 1-5\}=\{2;\ -2;\ -4\}.$

s) $5\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\{15+0-3;\ -10+6-0;\ 5-4-15\}=\{12;\ -4;\ -14\}.$

Nazorat savollari.

1. Qanday vektorlar kollinear, komplanar, teng deb ataladi?
2. Vektorning moduli nima?
3. Vektorlar ustidagi qaysi amallar chiziqli amallar deb ataladi.
4. Qanday vektorga chiziqli bog'liq va qanday vektorlar chiziqli erkli deb ataladi?
5. Fazoning bazisi va o'lchami nima?
6. Vektorning o'qdagi tashkil etuvchisi nima?
7. Vektorning o'qqa proyeksiyasi nima?
8. Vektorlar ustida chiziqli amallarga ularning koordinatalari ustida shunday amallar mos kelishini isbotlab bering.

Mavzu: Vektorlarning ko’paytmalari

Reja:

1. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi.
2. Vektorlarning vektor ko’paytmasi va uning xossalari.
3. Uchburchakni yuzi.

Adabiyotlar.

1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O’qituvchi» nash. 1984 yil. 52-57 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O’qituvchi». 1992 yil. 30-39 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O’qituvchi». 1990 yil. 59-61 betlar
4. http:// docs. ttesi, uz/sim/, html. Oily matematika ,2005 y.

5.1. Vektorlarning skalyar ko’paytmasi

Ta`rif: Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko’paytmasidan hosil bo’lgan son shu vektorlarning skalyar ko’paytmasi deyiladi.

Skalyar ko’paytma $\vec{a}*\vec{b}$ ko’rinishda belgilanadi:

Demak, $\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\varphi,\ \varphi=\vec{a}\hat{\ }\vec{b}$ (8)

(8) formula fizikada o’zgarmas $\vec{F}$ kuchning boshlang’ich B nuqtadan C nuqtagacha to’g’ri chiziqli harakati davomida bajargan ishi $A=|\vec{F}|*|\vec{BC}|*\cos\varphi$ ni ifodalaydi.

3-misol. $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3$ hamda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi 135^0$ ga teng bo’lsa, $\vec{a}*\vec{b}$ skalyar ko’paytma topilsin.

Yechish.

$$\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|*\cos\varphi=2*3*\cos 135^0=6*\cos(90^0+45^0)=-6*\sin 45^0=-6*\sqrt{2}/2=-3\sqrt{2}.$$

Xossalari

1. $\vec{a}*\vec{b}=\vec{b}*\vec{a}$ (9)
2. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}*\vec{b})$ (10)
3. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$ (11)
4. $\vec{a}*\vec{a}=|\vec{a}|^2$ (12)
5. Ortonormallangan $\mathrm{E}=\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazis uchun

$$\vec{e}_i\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j\end{cases}\quad i,j=\overline{1,2,3}.$$

Teorema. Nol bo'lmagan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi va aksincha.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortonormallangan $\mathrm{E} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ bazisda $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ va $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin.

U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i}, a_y \cdot \vec{j}, a_z \cdot \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i}, b_y \cdot \vec{j}, b_z \cdot \vec{k}$, yoyilmalarga ega bo'ladi.

Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi bu vektorlar mos koordinatalarri ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya`ni

$$\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \vec{a} * \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z, \qquad \vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad (12)$$

Ma`lumki,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}_x^2 + \vec{a}_y^2 + \vec{a}_z^2} \qquad (13)$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan a vektorning uzunligi uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng.

4-misol. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi hamda uzunliklari topilsin.

$$\vec{a} * \vec{b} = 2*3 - 3*1 + 1*(-2) = 6 - 3 - 2 = 1.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

Agar vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, skalyar ko'paytmadan foydalanib, vektorlar orasidagi burchakni, vektorlarning o'qidagi proyeksiyalarni hisoblash mumkin.

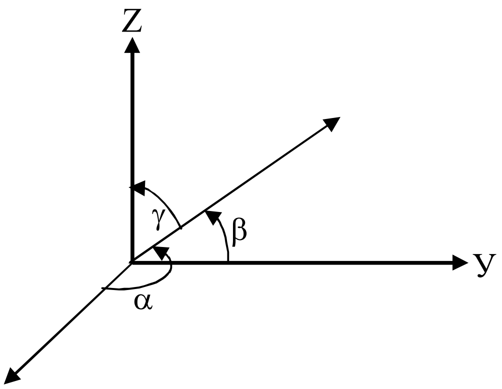
5-misol. Berilgan $\vec{a} = \{1;3;-2\}$ va $\vec{b} = \{3;1;3\}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish.

$$\cos\varphi = \frac{1*3 + 3*1 - 2*3}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} * \sqrt{3^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{19}} = 0$$

$$\varphi = \arccos 0 = 90^0.$$

Odatda vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α, β, γ burchaklarning kosinuslari uning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.



$\vec{a} = \{x, y, z\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari uning koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi.

$$Cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad Cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad Cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Birlik vektorning koordinatalari uning yo'naltiruvchi kosinuslaridan iborat, ya`ni agar $\left|\vec{a}^0\right| = 1$ bo'lsa, $\vec{a}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

bo'ladi.

5.2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uning xossalari. Uchburchakning yuzi.

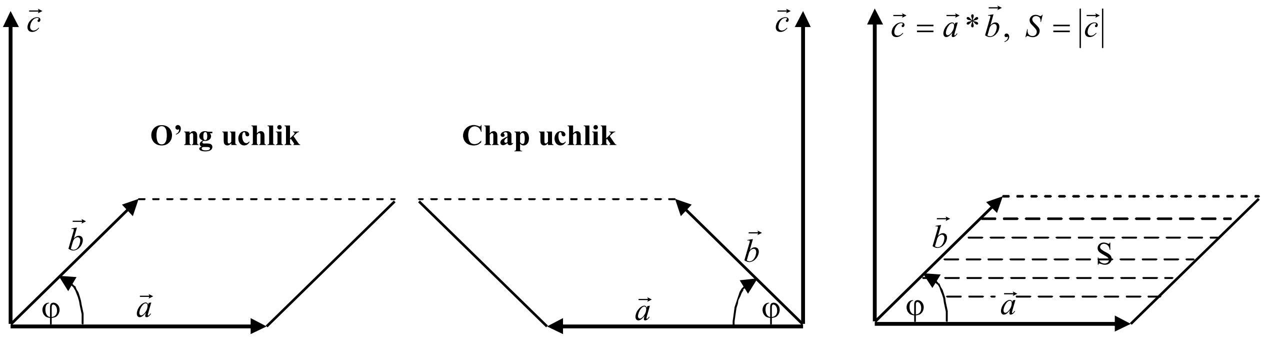
1-Ta`rif. Agar uchta nokomplanlar $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorni umumiy boshlang'ich nuqtaga keltirgandan so'ng $\vec{c}$ vektorlarning oxiridan (uchidan) qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga qarab π dan kichik burchakka burish soat miliga qarshi yo'nalishda ko'rinsa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar (o'ng uchlik) o'ng bog'lam tashkil etadi deyiladi. Aks holda chap uchlik deyiladi. Chap yoki o'ng uchlikni tashkil etadigan uchlik tartiblangan uchlik deb yuritiladi.

2-Ta`rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi.

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar (ortogonal);

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| * \left|\vec{b}\right| * \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning tartiblangan uchligi o'ng uchlikni tashkil etadi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ yoki $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ ko'rinishda yoziladi.



Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lmasa, u holda $|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ son $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuziga teng bo'ladi.

Vektor ko’paytmaning asosiy xossalari.

1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
2. $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$
3. $\left[(\lambda\vec{a}),\vec{b}\right]=\lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
4. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo’lsa, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0,$ xususiy holda $\left[\vec{a},\vec{a}\right]=0$ bo’ladi.

Ortlarning vektor ko’paytmalari:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=0,\qquad \vec{i}\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}\ \rightleftarrows\ \pm$$

Agar $\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}\{b_x;b_y;b_z\}$ bo’lsa ularning vektor ko’paytmasi:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Masala.

$\vec{F}\{6;-2;1\}$ kuchning $A(3;4;-2)$ nuqtadan to’g’ri chiziq bo’ylab $B(4;-2;-3)$ nuqtaga siljishdagi bajargan ishini hisoblang.

Yechish.

$\vec{AB}=\{x,y,z\}$ vektorning koordinatlarini aniqlaymiz. $x=x_2-x_1;\ y=y_2-y_1;\ z=z_2-z_1$ formulalarga A va B nuqtalarning koordinatalarini qo’ysak:

$$x=4-3=1;\ y=-2-4=-6;\ z=-3-(-2)=-3+2=-1.$$

Demak, $\vec{AB}=\{1;-6;-1\}.$ $\vec{F}$ kuch ta`siri ostida bajarilgan ish o’tilgan yo’l bilan $\vec{F}$ kuchning skalyar ko’paytmasiga teng bo’ladi, ya`ni $\vec{F}*\vec{AB}=A.$

$$A=\vec{F}*\vec{AB}=\left(6\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}\right)=6+12-1=17.$$

Uchburchak yuzi formulasi

Uchlari $A(x_1,y_1,z_1);$ $B(x_2,y_2,z_2);$ $C(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalarda bo’lgan uchburchak berilgan bo’lsin. $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarga ABC uchburchak yasalgan bo’lsin, u holda bu uchburchakning yuzi:

$$\vec{c}=\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.\quad S=\frac{1}{2}|\vec{c}|$$ formuladan topiladi.

Vektor ko’paytmani mexanikaga tadbiqini quyidagi misolda ko’rish mumkin.

Kuch momenti. Q qattiq jism berilgan bo’lsin va bu jismning bitta, masalan, O nuqtasi harakatlanmaydigan qilib mahkamlangan bo’lsin. Agar Q jismning boshqa R nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo’yilsa, u holda aylantiruvchii moment yoki kuch momenti hosil bo’ladi.

Kuch momenti $\vec{m}=\vec{r}\times\vec{F}$, bunda $\vec{r}=\vec{OP}.$

Nazorat savollari

1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Skalyar *ko'paytmaning* qanday xossalarini bilasiz?
3. Ikki vektor orasidagi burchakni skalyar ko'paytma yordamida qanday topish mumkin?
4. Vektorning perpendikulyar sharti nimadan iborat?
5. Vektor ko'paytma ta`rifini ayting.
6. «O'ng uchlik», «chap uchlik» deb nimaga aytiladi?
7. Vektor ko'paytma qanday xossalarga ega?
8. Vektor ko'paytma bilan shu vektorlar orqali yasalgan parallelogramm yuzi orasida qanday bog'lanish bor?
9. Vektor ko'paytmaning mexanikadagi qanday tadbiqlarini bilasiz?

Mavzu. Vektorlarning aralash ko'paytmasi.

Reja:

1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi.
2. Aralash ko'paytmaning xossalari.
3. Paralelopiped xajmi.

Adabiyotlar.

1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nash. 1984 yil. 52-57 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 30-39 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 59-61 betlar
4. http:// docs. ttesi, uz/sim/, html. Oily matematika ,2005 y.

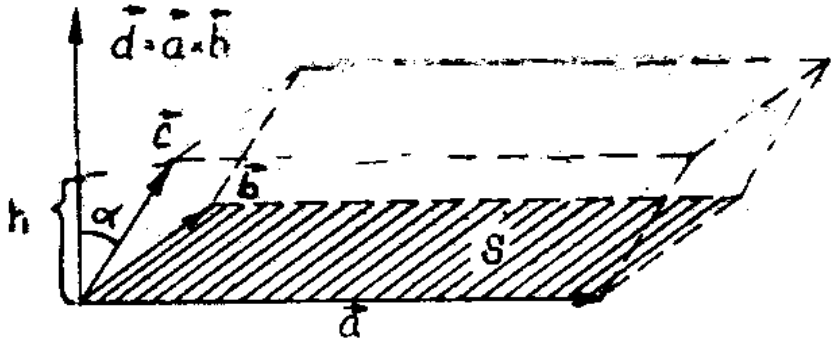
6.1. Aralash ko'paytma.

Ixtiyoriy $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni olamiz.

Ta`rif: Berilgan $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorning vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor hamda $\vec{c}$ vektorlarining skalyar ko'paytmasini shu uchta vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi. Aralash ko'paytma $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi.

Aralash ko'paytma oddiy geometrik ma`noga ega bo'lib, uning musbat ishora bilan olingan qiymati $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan yasalgan parallelopiped hajmidan iboratdir. Buning to'g'riligini ko'rsatish uchun $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni o'zaro komplanar bo'lmagan vektorlar deb faraz qilib ular orqali parallelopiped yasaymiz.

Hosil bo'lgan parallelopiped balandligini h, asosining yuzini S va hajmini V deb belgilasak, V=Sh ekanligi ma`lum. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi xossasiga ko'ra $|\vec{a}x\vec{b}| = S,\ \vec{a}x\vec{b}$ vektor bilan $\vec{c}$ vektorning skalyar ko'paytmasi ta`rifiga ko'ra $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c} = \left|\vec{a}x\vec{b}\right| \cdot |\vec{c}|\cos\alpha,$ bunda α-burchak $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)$ va $\vec{c}$ vektorlar orasidagi burchak (1-chizma).



1-chizma

Demak, $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c} = S \cdot |\vec{c}|\cos\alpha$.

1-chizmadan ko'rinadiki, parallelopipedning h balandligi $\vec{c}$ vektorning $\vec{a}x\vec{b}$ vektordagi proyeksiyasidan iborat, ya`ni $h = |\vec{c}|\cos\alpha$. U holda $(\vec{a}xb)\cdot \vec{c} = S \cdot h = V.$

Shaklda $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik hosil qilingan hol berilgan bo'lib, bunda $\cos\alpha > 0$ bo'ladi, agar bu vektorlar chap uchlikni tashkil etsa, u holda $\cos\alpha < 0$ bo'ladi, demak umuman $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c} = \pm V$ bo'lar ekan.

Aralash ko'paytmaning xossalari.

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b}x\vec{c}) = \left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c}$

Haqiqatan, $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \left(\vec{a}x\vec{b}\right)$ ekanligi skalyar ko'paytma xossasiga ko'ra ma`lum, shu bilan birga $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c} = \pm V$ va $\left(\vec{b}x\vec{c}\right)\cdot \vec{a} = \pm V$. Bunda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar qanday uchlikni tashkil etsa $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ vektorlar ham shunday uchlikni tashkil etadi, demak, $\left(\vec{b}x\vec{a}\right)\cdot \vec{c} = \left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c}$ yoki $\vec{a} \cdot \left(\vec{b}x\vec{c}\right) = \left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c}$ ekanligi kelib chiqadi. Bu xossaga ko'ra aralash ko'paytmadagi «•» va «x» belgilarining o'rinlarini almashtirish mumkinligi, ya`ni ularni qanday tartibda qo'shilishining ahamiyati yo'qligi kelib chiqadi. Shuning uchun, odatda $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot \vec{c}$ aralash ko'paytma $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ko'rinishda yoziladi.

2. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ ko'paytmada ikkita qo'shni ko'paytuvchilarning o'rnini almashtirish uning ishorasini almashtirishga olib keladi:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}) = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$$

Bu tenglikning to'g'riligi $\vec{a}x\vec{b} = -\vec{b}x\vec{a}$ xossadan bevosita kelib chiqadi.

Aralash ko'paytmani hisoblash

Agar

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$
$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

bo'lsa, u holda

$$\vec{a}\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Haqiqatan,

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Skalyar ko'paytma xossasiga ko'ra

$$\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Shunday qilib, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga yasalgan parallelopiped hajmi quyidagicha hisoblanar ekan:

$$Vn.n. = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Natija 1. Elementar geometriyadan ma`lumki, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar orqali yasalgan piramida hajmi parallelopiped hajmining 1/6 qismidan iborat, demak

$$V_{nup} = \pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Natija 2. Noldan farqli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan, $\vec{a}\vec{b}\,\vec{c} = 0$ bo'lsa, ya`ni

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & y_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Bundan determinantning kamida ikkita yo'li o'zaro proporsional ya`ni vektorlar kolleniar bo'lishi, bundan esa $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar komplanar bo'lishi kelib chiqadi.

Aksincha, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar komplanar vektorlar bo'lsa $\vec{a}x\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi, demak ,skalyar ko'paytma xossasiga ko'ra $\left(\vec{a}x\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = 0$ bo'ladi.

1-misol.

Uchlari A(-2; 0; 1), B(1; 2; 3), C(2; -1; 4) va D(-3; 1; 0) nuqtalarda bo'lgan piramida hajmini toping.

Yechish.

Piramidani $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar orqali yasalgan deb olamiz. U holda

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k},$$
$$\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Ularning aralash ko'paytmasini topamiz:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & - & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 6 + 8 - 2 + 8 - 9 = 19 - 17 = 2$$

Demak, $V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$ kub, birlik.

2-misol.

$\vec{a} = (-2;1;3)$, $\vec{b}(4;\ 7;\ 8)$ va $\vec{c}(4; -2; -6)$ vektorlarning komplanar ekanligini ko'rsating.

Yechish.

Aralash ko'paytmani topamiz:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga tengligidan ularning komplanarligi kelib chiqadi.

Nazorat savollar.i

1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi nima va u qanday hisoblanadi?
2. Aralash ko'paytma qanday geometrik ma`noga ega?
3. .Uchta vektorning aralash ko'paytmasi bilan ularning komplanarligi orasidagi bog'lanishni ayting.

Mustaqil ish№ 2.

Vektorlar algebrasi

1. $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(-5,-1)$, $\vec{c}(-1,3)$ vektorlar berilgan $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$, $16\vec{a} + 5\vec{b} - 9\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
2. $\vec{a}(3,0,-2)$, $\vec{b}(1,2,-5)$, $c(-1,1,1)$, $\vec{d}(8,4,1)$ vektorlar berilgan $-5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c} + \vec{d}$, $3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$ vektorlarning koordinatalarini toping.
3. $\vec{a} = \{12;-15;-16\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

4. $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ ва $\vec{b}=\{-2;1;0\}$ vektorlar berilgan **1)** $\vec{a}+\vec{b}$ **2)** $\vec{a}-\vec{b}$ **3)** $2\vec{a}$ vektorlarning koordinatalarini toping.

5. $\vec{c}=16i-15j+12k$ vector *i, j, k* bazislar bo'yicha yoyilgan bo'lsa, $\vec{c}$ ga parallel va qarama-qarshi yo'nalishda, $|\vec{d}|$=75 bo'lgan $\vec{d}$ vektorning shu bazislar bo'yicha yoyilmasini toping.

6. α va β ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=-2i+3j+\beta k$ va $\vec{b}=\alpha i-6j+2k$ vektorlar collinear bo'ladi.

7. Tekislikda $\vec{a}=\{3;-2\}$ $\vec{b}=\{-2;1\}$ $\vec{c}=\{7;-4\}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarni xar birini qolgan ikkitasi orqali yoyilmasini toping.

8. $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;7\}$ vektorlar berilgan. $\vec{P}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektorni $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ bazislarga yoyilmasini toping.

9. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ *=0* shartini qanoatlantiradi. Agar $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|c|=4$ bo'lsa $(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{c})+(\vec{c},\vec{a})$ ni hisoblang.

10. $\vec{a}=\{4;-2;-4\}$ $\vec{b}=\{6;-3;2\}$ vektorlar berilgan .

1) $(\vec{a},\vec{b})$ 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$ 3) $(2\vec{a}-3\vec{b},\vec{a}+2\vec{b})$ 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$ ni hisoblang.

11. Uchburchakning *A(-1;-2;4), B(-4;-2;0) va C(3;-2;1) uchlari berilgan*. Uning B uchidagi ichki burchagini toping.

12. To'rtburchakning *A(1;-2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1)* va *Д(-5;5;3) uchlari bo'lsa*, *AC* va *ВД* diogonallarining perependikulyarligini isbotlang.

13. $\vec{a}=\{2;-4;4\}$ $\vec{b}=\{-3;2;6\}$ vektorlar orasidagi burchakning kosinusini toping.

14. $\vec{a}=\{5;2;5\}$ vektorni $\vec{b}=\{2;-1;2\}$ vektorning o'qidagi proeksiyasini toping.

15. *A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6) nuqtalar berilgan ABC* uchburchakning yuzini toping.

16. Uchburchakning uchlari *A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)* bo'lsin. Uning *B* uchidan *AC* tomonga tushirilgan balandligini hisoblang.

17. $\vec{a}=\{2;-2;1\}$, $\vec{b}=\{2;3;6\}$ *vektorlar orasidagi burchakning sinusini toping..*

18. $\vec{a} = \{2;-3;1\}$ ва $\vec{b} = \{1;-2;3\}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan va $(\vec{x}, i+2j-7k)=10$ shartni qanoatlantiruvchi $\vec{x}$ vektorni toping.

19. $\vec{x}$ vektor $\vec{a} = \{4;-2;-3\}$ va $\vec{b} = \{0;1;3\}$ vektorlarga perpendikulyar va OX o'qi bilan o'tmas burchak tashkil etadi. $|\vec{x}| = 26$ bo'lsa $\vec{x}$ ning koordinatalarini toping.

20. $\vec{c}$ vector $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, $a^{\hat{}}b=30^0$ $|a|=6,$ $|b|=3,$ $|c|=3$ bo'lsa, $a\,b\,c$ aralash ko'paytmani hisoblang.

21. $\vec{a} = \{2;3;-1\}$ $\vec{b} = \{1;-1;3\}$ $\vec{c} = \{1;9;-1\}$ vektorlarni komplanarligini tekshiring.

22. *A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)* ва *D(2;1;3)* nuqtalar bir tekislikda yotishini isbotlang.

23. Uchlari *A(2;-1;1), B(5;5;4), C(-1;2;1)* va *D(2;1;3)* nuqtalarda bo'lgan tetraedrning xajmini hisoblang.

24. Tetraedrning uchlari *A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7)* va *D(-5;-4;8)* bo'lsin. Uning *D* uchidan tushirilgan balandligini hisoblang.

25. Tetraedrning xajmi *V=5* uning uchta uchlari *A(2;1;-1), B(3;0;1)* va *C(2;-1;3)*. Agar uning to'rtinchi *D* uchi *OУ* o'qida yotsa *D* ning koordinatalarini toping.

26. $\vec{a}$ *={3;-1;-2}* ва $\vec{b}$ *={1;2;-1}* vektorlar berilgan. **1)** $\vec{a}\times\vec{b}$ **2)** $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$ vektor ko'paytmaning koordinatalarini toping.

27. $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ ayniyatni isbotlang va uning geometric ma'nosini bfodalang.

28. $\vec{a} = \{2;-1;3\}$ $\vec{b} = \{-6;3;-9\}$ vektorlarning kolleniarligini isbotlang va ularning uzunliklarini va yo'nalishlarini taqqoslang.

29. *A(3;-1;2), B(1;2;-1) C(-1;1;-3)* ва *D(3;-5;3)* nuqtalar trapetsiyaning uchlari ekanini ko'rsating.

30. *A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7)* ва *D(5;-4;2)* nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar collinear ekanini isbotlang.

6. TESTLAR

Tenglamalar sistemasini determinant yordamida yechish. Kramer formulalari.

1. $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$ A)(3;2), B)(3;-2), C)(-3;2), D)(-3;-2), E(2,-3)

2. $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 4x-5y=-6 \end{cases}$ A)(1;2), B)(-1;2), C(1;-2), D)(2;1), E)(-2;-1)

3. $\begin{cases} 4x+y+3=0 \\ 5x-2y+7=0 \end{cases}$ A)(-1;-1), B)(-1;1), C)(1;1), D)(2;1), E)(1;2)

4. $\begin{cases} 3x-7y+6=0 \\ \dfrac{1}{2}x+5y+1=0 \end{cases}$ A)(2;0), B)(0;2), C)(-2;0), D)(0;-2), E)(2;-2)

5. $\begin{cases} 7x-2y=-1 \\ 3x-5y=12 \end{cases}$ A)(-1;3), B)(1;-3), C)(-1;-3), D)(1;3), E)(1;1)

6. $\begin{cases} 4x+y+5=0 \\ 3x+5y-9=0 \end{cases}$ A)(2;3), B)(3;2), C)(2;-3), D)(-2;3), E)(-2;-3)

7. $\begin{cases} 3x-y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ A)(-1;2), B)(2;-3), C)(-2;3), D)(-4;-3), E)(0;0)

8. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-2y=-7 \end{cases}$ A)(1;2), B)(-1;2), C)(2;-1), D)(2;1), E)(-2;-1)

9. $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+y=-1 \end{cases}$ A)(1;-2), B)(-1;2), C)(-1;-2), D)(2;-1), E)(1;2)

10. $\begin{cases} 4x-3y+5=0 \\ 3x+y-6=0 \end{cases}$ A)(3;1), B)(-3;1), C)(-1;3), D)(1;3), E)(2;1)

11. $\begin{cases} 2x+y-5z=3 \\ 3x-5y+2z=1 \\ 5x-6y+3z=6 \end{cases}$

A)(3;2;1), B)(2;3;1), C)(3;1;2), D)(1;2;3), E)(2;1;3)

12. $\begin{cases} 4x+3y+2z+3=0 \\ 7x+9y-3z+8=0 \\ 2x-5y+6z+3=0 \end{cases}$

A)(1;1;2) B)(1;-2;1) C)(-2;1;1) D)(1;1;-2) E)(-1;-2;1)

13. $\begin{cases} 5x+2y-3z-3=0 \\ 8x-3y+2z+7=0 \\ 2x+3y-5z-4=0 \end{cases}$

A)(3;1;0) B)(1;3;0) C)(0;1;3) D)(!;0;3) E)(0;3;1)

14. $\begin{cases} 7x+2y-8z-1=0 \\ 5x-3y+13z-14=0 \\ x+2y-9z+5=0 \end{cases}$

A)(0;1;3) B)(1;-3;0) C)(-3;1;0) D)(1;0;3) E)(3;-1;0)

15. $\begin{cases} y+2z=4 \\ 3x-2y+4z=19 \\ 2x+5y+z=-5 \end{cases}$

A) (1;2;3), B) (1;-2;3), C) (1;2;-3), D) (-1;2;3), E) (1;-2;-3)

16. $\begin{cases} 3x-4y+z=6 \\ 2x+6-3z=-10 \\ 5x-8y=1 \end{cases}$

A) (1;0,5;5) B) (1;5;0,5) C) (0,5;1;5) D) (5;0,5;1) E) (3;2;-1)

Determinantni hisoblang.

17. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ -8 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

A) 0 B) 3 C) 5 D) –4 E) 8

18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

A) –1 B) 0 C) 3 D) 2 E) 5

19. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ -6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

A) 4 B) 2 C)-4 D) 0 E) 1

20. $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

determinantning 1) a_{12}, 2) a_{23}, 3) a_{22}, a_{31}, 4) a_{32}, element-larning minorlari va algebraik to'ldiruvchilari topilsin.

1. A) –14 ;14 B) –24; 24 C) –34; 34 D) –44; 44 E) –54; 54
2. A) 45; -45 B) 35; -35 C) 25; -25 D) 15; -15 E) 5; -5
3. A) 25; 25 B) –25; -25 C) 35; 35 D) –35; -35 E) 0; 0
4. A) 5; 5 B) 10; 10 C) 15; 15 D) 20; 20 E) 25; 25
5. A) 10; -10 B) 20; -20 C) 29; -29 D) 30; -30 E) 39; -39

21.
$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Va $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matritsalar

berilgan: 1) $A+2B$, 2) $3A-B$, 3) $A \cdot B$ lar topilsin.

1. A) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

2. A) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} -7 & 13 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 7 & -13 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

3. A) $\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 18 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} -18 & -13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ E) $\begin{pmatrix} 18 & -13 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$

22. $\begin{cases} 3x-5y+7z=9 \\ 2x-4y-5z=6 \\ -5x+2y-3z=-15 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching.

A) (0; 3; 0) B) (-3; 0; 0) C) (0; 4; 4) D) (3; 0; 0) E) (0; 0; 3)

Vektorlar algebrasi bo'limi bo'yicha

1. $\vec{a}$ {3;2;7} va $\vec{b}$ {4;1;-5} vektorlarning yig'indisi va ayirmasi topilsin.

A) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k}$

B) $\vec{a}+\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

C) $\vec{a}+\vec{b}=5\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

D) $\vec{a}+\vec{b}=12\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

E) $\vec{a}+\vec{b}=7\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{a}-\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$

2. $\vec{r}$ *{0;2;-3}* radius vektorning ortlar bo'yicha yoyilmasini yozing va modulini hisoblang.

A) $\vec{r}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$ B) $\vec{r}=2\vec{j}+3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$

C) $\vec{r}=2\vec{j}+2\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$ D) $\vec{r}=2\vec{j}-\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$

E) $\vec{r}=\vec{j}-3\vec{k}$, $|\vec{r}|=\sqrt{13}$

3. AB kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A(-1;2;4)*. Uni teng ikkiga bo'luvchi esa C*(2;0;2*) bo'lsin. B uchning koordinatalarini toping.

A) (-5:0:2) B) (5:-2:0) C) (5:2:0) D) (5:0:-2) E) (5:1:2)

4. *m* va *p* ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}+\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}-6\vec{j}+n\vec{k}$ vektorlar kolliniar bo'ladi?

A)-4 va 1,5; B)4 va 1,5; C)-4 va –1,5; D)4 va –1,5; E)4 va 3

5. Uchlari *A(5;3;-10), B(0;1;4)* va *C(-1;3;2)* nuqtalarda bo'lgan uchburchak *AD* medianacining uzunligini toping.

A) $\frac{\sqrt{401}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{501}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{601}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{701}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{801}}{2}$

6. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasida burchak $\varphi=\frac{\pi}{4}$ ga teng va $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ **;** $|\vec{b}|$**=3** ekanligi ma'lum. $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning uzunligini hisoblang.

A) 5 *B) 25* *C)* $5\sqrt{5}$ *D)* $\sqrt{5}$ *E)* $3\sqrt{2}$

7. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasida burchak $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ga teng.

$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorning uzunligi topilsin.

A) $\sqrt{17}$ *B)* $\sqrt{29}$ *C)* $\sqrt{127}$ *D)* $\sqrt{217}$ *E)* $\sqrt{721}$

8. $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ vektor berilgan. Uning uzunligini toping.

A)7 *B)-1* *C)* $\sqrt{5}$ *D) 12* *E) 5*

9. $\vec{a}\{1;2;3\}$ va $\vec{b}\{-3;0;4\}$ vektorlar berilgan. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi topilsin.

A) 7 *B) -1* *C)* $\sqrt{5}$ *D) 9* *E) 5*

10. Koordinatalar boshidan *M(12;-3;4)* nuqtaga bo'lgan masofa topilsin.

A) $\sqrt{13}$ *B)13* *C)12* *D)5* *E)* $\sqrt{5}$

11. $\vec{a}\left\{\frac{3}{4};1\right\}$ bo'lsa $4\vec{a}$ vektorning uzunligi topilsin.

A) 5 *B)* $\sqrt{5}$ *C)* $3\sqrt{\frac{25}{4}}$ *D)* $\frac{5}{2}$ *E) 1*

12. C*(3;-5)* va *D(1;1)* nuqtalar berilgan. *CD* kesma o'rtasi koordinatasi topilsin.

A)(4;-4) *B)(4;-4)* *C)(2;-2)* *D)(-2;2)* *E)(0;0)*

13. $\vec{c}\ \{4;3;-1\}$ va $\vec{d}\ \{-1;2;2\}$ vektorlar berilgan $\vec{c} \cdot \vec{d}$ skalyar ko'paytma topilsin.

A) 0 *B) 1* *C)2* *D) 3* *E) 4*

14. Boshlang'ich nuqtasi *A(4;7)* va oxirgi *B(1;3)* bo'lgan vektor uzunligi topilsin.

A) 1 *B) 2* *C)3* *D) 4* *E) 5*

15. $\vec{a} = m \cdot \vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ vektorlar berilgan. *m* ning qanday qiymatlarida bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

A) 1 *B) 2* *C)3* *D) 4* *E) 5*

16. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro 60^0 li burchak tashkil qiladi va $[\vec{a}] = 5$, $[\vec{b}] = 8$ bo'lsa, $\vec{a} - \vec{b}$ vektorni uzunligini hisoblang.

A) 3 *B)9* *C)7* *D)5* *E)6*

17. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}+m\vec{k}$ vektorlar berilgan. m ning qanday qiymatida $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perendikulyar bo'ladi.

A) 7 *B)-7* *C)9* *D)-11* *E)-13*

*18. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$ **va** $\vec{b}=-2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}x\vec{b}$ vektor ko'paytma nimaga teng?*

A) $2\vec{i}-6\vec{j}$ B) $2\vec{i}+6\vec{j}$ C) $-2\vec{i}+6\vec{j}$ D) $-2\vec{i}-6\vec{j}$ E) $6\vec{i}$

19 . $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro 60^0 li burchak tashkil qiladi va $[\vec{a}]=5$, $[\vec{b}]=8$ bo'lsa $\vec{a}-\vec{b}$ vektorning uzunligi hisoblansin.

A) $\sqrt{127}$ B) $\sqrt{129}$ C) $\sqrt{137}$ D) $\sqrt{138}$ E)3

20. $\vec{a}$ (5;4) vektor boshining koordinatalari $A(-2:3)$ bo'lsa, uning oxirining koordinatalarini aniqlang.

A) (3; 7) B) (7; 3) C) (-3;7) D) (3;-7) E) (-3;-7)

21. Vektorlar $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ va $\vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ berilgan. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

A) –6 *B)-8* *C)-10* *D)-12* *E)-16*

22. $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuzini toping.

A)24 *B)32* *C)36* *D)42* *E)49*

23. $\vec{a}\{2;3;5\}$ va $\vec{b}\{1;2;1\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

A) $7\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ B) $7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ C) $7\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$

D) $-7\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ E) $7\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$

24. $\vec{a}=\{2;-1;-1\}$, $\vec{b}=\{1;3;-1\}$, $\vec{C}=\{3;-4;7\}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini toping.

A) 13 *B)23* *C)33* *D)43* *E)53*

25. $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+m\cdot\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{C}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ vektorlar m ning qanday qiymatida komplanar bo'ladi?

A)1 *B)2* *C)3* *D)4* *E)5*

26. Uchlari *A(1,2,3), B(2,4,1), C(7,6,3), D(2,-3,-1)* nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmi topilsin.

A)18 *B)40* *C)120* *D)30* *E)46*

27. $\vec{a}\,\{3;2;\sqrt{12}\}$ va $\vec{b}\,\{4;0\,;\,\sqrt{3}\}$ vektorlar berilgan $pr_a\vec{b}$ topilsin.

A)3,6 *B)2,6* *C)1,6* *D)4,6* *E)5,6*

28. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{k}+\vec{j}$, vektorlar berilgan $\vec{a}-\vec{b}$ vektorni toping .

A) $3\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ B) $3\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$ C) $3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

D) $3\vec{i}-4\vec{k}$ E) $3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

29. $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{j}-4\vec{k}$ vektorlar berilgan $\vec{a}+\vec{b}$ vektorni toping .

A) $3\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ B) $3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$ C) $3\vec{i}-4\vec{k}$

D) $3\vec{i}+2\vec{j}$ E) $3\vec{i}+4\vec{k}$

30. $\vec{a}=4\vec{i}+\sqrt{20}\vec{k}$ vektor berilgan. Uning uzunligini toping.

A)3 *B)4* C) $\sqrt{5}$ *D) 4,4* *E) 6*

II bo'lim

Analitik geometriya elementlari

Mavzu: Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalari.

Reja:

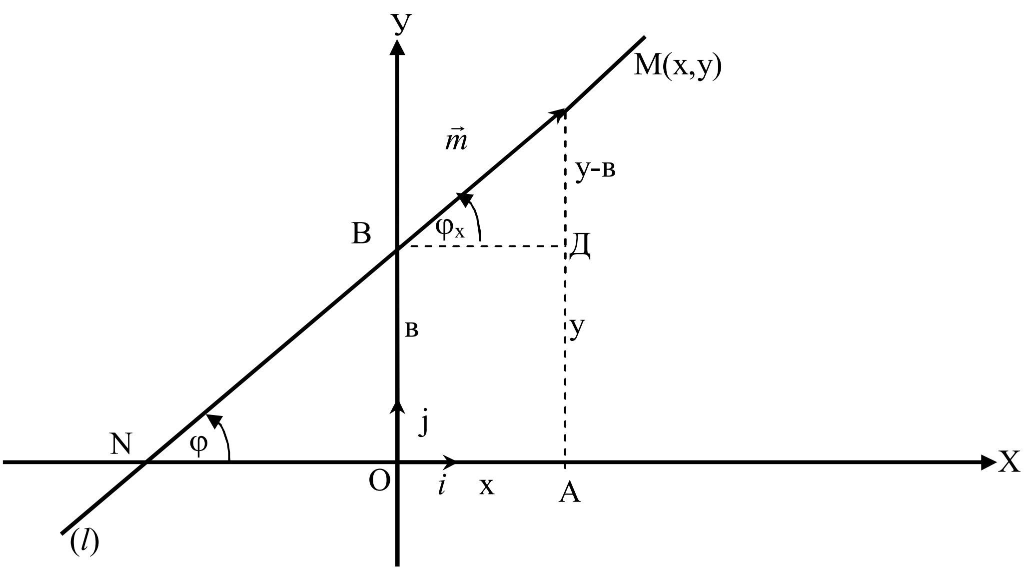
1.1 To'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti tenglamasi.
1.2 To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
1.3 To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi
1.4 Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
1.5 Bir va ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari.
1.6 To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
1.7 Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

Adabiyotlar

1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nash. 1984 yil. 56-61 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 48-55 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 59-62 betlar.
4. http;//docs.ttesi/uz/sim/htme/Oliy matematika,2005y.

1.1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lib, bu sistemada *Ox* o'qini *N* nuqtada kesib o'tuvchi ixtiyoriy *1* to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

Ox o’qini *N* nuqta atrofida soat strelkasi harakatiga teskari yo’nalishda 1 to’g’ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha aylantirishdan hosil bo’lgan $\varphi(0 \le \varphi \le 2\pi)$ burchak *1* to’g’ri chiziq bilan *Ox* o’qi orasidagi burchak deyiladi. Agar *1* to’g’ri chiziq *Ox* o’qiga parallel bo’lsa, u holda bu to’g’ri chiziq bilan *Ox* o’qi orasidagi burchak nolga teng deb hisoblanadi. Dastlab $\varphi \ne \pi/2$ holni qaraymiz.

Agar *1* to’g’ri chiziq *Ox* o’q orasidagi φ burchak va *1* to’g’ri chiziqning *Oy* o’q bilan kesishish nuqtasining ordinatasi *v* ma`lum bo’lsa, u holda *1* to’g’ri chiziq tekislikda bir qiymati aniqlangan bo’ladi.

M(x,y) to’g’ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. U holda

$$\vec{m} = \vec{B}\vec{M} = x\vec{e}_1 + (y-b)\vec{e}_2 = x\vec{i} + (y-b)\vec{i} \qquad (1)$$

vektor 1 to’g’ri chiziqda yotadi va $\varphi \ne \pi/2$ bo’lgani uchun tangensning ta`rifidan

$$tg\varphi = \frac{y-b}{x} \qquad (2)$$

(2) dan

$$y = tg\varphi\ x + b \qquad (3)$$

bo’lib, $tg\varphi = k$ desak,

$$y = kx + b \qquad (4)$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib *1* to’g’ri chiziqning ixtiyoriy *M(x,y)* nuqtasining koordinatalari (4) tenglamani qanoatlantiradi. $\mathrm{M} \in 1, \mathrm{M} \in \vec{m}$ bo’lganligi uchun $\vec{m} \in 1$ bo’ladi. Demak, $y = kx + b$ tenglama *1* to’g’ri chiziqning tenglamasidir. $k = tg\varphi$ miqdorni *1* to’g’ri chiziqning burchak koeffisiyenti, (4) tenglamaga esa to’g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi deyiladi. *v* soni to’g’ri chiziqning Oy o’qidan ajratgan kesmaning miqdorini anglatadi.

Agar to’g’ri chiziq Ox o’qiga parallel bo’lsa burchak koeffisiyent nolga teng ($k = tg\varphi = 0$) bo’lib uning tenglamasi

$$y=b \qquad (5)$$

dan iborat bo’ladi.

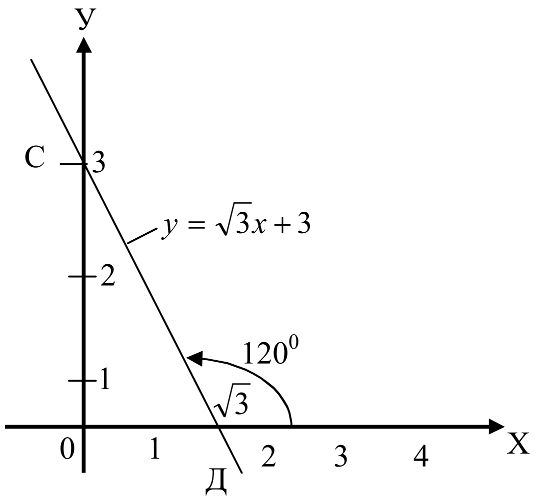
Agar $\varphi = \pi/2$ bo'lsa to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'lib, uning burchak koeffisiyentli tenglama bilan berib bo'lmaydi. Uning tenglamasi

$$x=a \qquad (6)$$

dan iborat bo'lib, a to'g'ri chiziqning Ox o'qidan ajratgan kesmaning miqdorini bildiradi.

1-misol: Ox o'qi bilan $\varphi = 120^0$ burchak tashkil qiluvchi va Oy o'qini (0;3) nuqtada kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin va grafigi yasalsin.

Yechish: $k = tg(120^0) = tg(90^0 + 30^0) = -ctg(30^0) = -\sqrt{3},\ b = 3.$ (4)-formuladan $y = -\sqrt{3}x + 3$ ni topamiz. x=0 bo'lsa y=3, y=0 bo'lsa $x = \sqrt{3}.$



$Д(\sqrt{3};\ 0)$
$C(0;3)$

1.2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. Birinchi tartibli chiziqlar haqida asosiy teorema.

1-Teorema. Tekislikdagi har qanday birinchi tartibli chiziq to'g'ri chiziqdir.

Isbot: Birinchi tartibli 1 chiziq

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (7)$$

tenglama bilan aniqlansin. Bunda ikki holni qaraymiz:

a) $B = 0,$ bu holda $A \neq 0.$ Shuning uchun (7) tenglama $x = -C/A$ tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Bu holda 1 to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'ladi.

b) $B \neq 0,$ bu holda (7)-tenglama

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (8)$$

tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Agar $k=-A/B,\ \ b=-C/B$ deb belgilasak, (8)-tenglamani quyidagicha yozish mumkin $y=kx+b$. Bu esa to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasidir. (7)-formula bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1.3. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

(7)-tenglamada C ni tenglmaning o'ng tomoniga o'tkazaylik, ya`ni $Ax+By=-C.$

$$-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1 \qquad (9)$$

ni hosil qilish mumkin. Bu yerda $-C/A=m$ va $-C/B=n$ deb belgilasak (9) dan

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \qquad (10)$$

ni hosil qilamiz.

(10) tenglama to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi. Bu yerda m va n mos ravishda to'g'ri chiziqning Ox va Oy o'qidan ajratgan kesmalari miqdori.

<u>2-misol.</u>

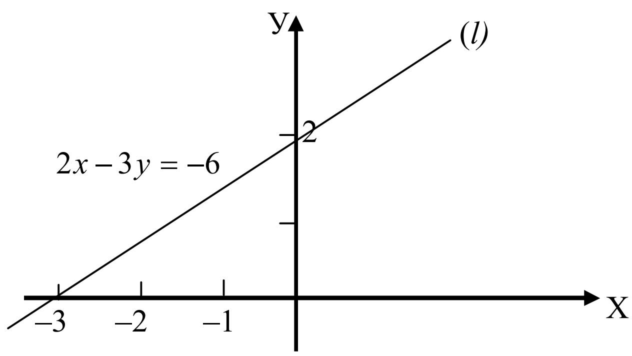
$2x-3y=0$ to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozing va yasang.

<u>Yechish:</u>

$$2x-3y=-6 \quad |:(-6)$$

$$-\frac{2}{6}x+\frac{3}{6}y=1$$

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$$



1.4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Tenglamalari bilan berilgan l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarni olaylik:

$$l_1 : y=k_1x+b_1$$

$$l_2 : y=k_2x+b_2$$

$k_1=tg\alpha_1, k_2=tg\alpha_2$ deb olaylik. Chizmadan ko'rinib turibdiki, agar Ox o'qini to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasiga parallel ko'chirsak, hamda l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasida hosil bo'lgan burchaklardan birini φ bilan belgilasak, $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ bo'ladi.

U holda $tg\varphi = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 * tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 * k_2}$

Shunday qilib, burchak koeffisiyentlari k_1 va k_2 bo'lgan ikki to'g'ri chiziqlar orasida hosil bo'lgan burchaklardan birini topish formulasi

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 * k_2} \qquad (11)$$

dan iborat bo'lib, ikkinchi burchak esa $180^0 - \varphi$ ga teng bo'lar ekan. Bu formuladan foydalanib ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini topish mumkin.

Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa $\varphi = 0$,ya`ni $tg\varphi = 0$ bo'ladi, bundan esa $k_1 - k_2 = 0$ yoki

$$k_1 = k_2 \qquad (12)$$

kelib chiqadi.

Agar to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa $\varphi = \frac{\pi}{2}, ctg\varphi = \frac{1}{tg\varphi} = \frac{1 + k_1k_2}{k_1 - k_2} = 0,$ demak, $1 + k_1k_2 = 0,$

yoki

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, burchak koeffisiyentlari k_1 va k_2 , bo'lgan ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti $k_1 = k_2$ va perpendikulyarlik sharti $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ dan iboratdir.

Misol.

$y = 2x + 1$ va $x - y - 2 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish:

l_1: y=2x+1 , k_1=2

l_2: x-y-2=0.

Avvalo l_2 to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentini aniqlaymiz, buning uchun uning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini burchak koeffisiyentli ko'rinishga keltiramiz:

$$l_2: y=x-2,\ k_2=1$$

Burchakni topamiz:

$$tg\varphi = \frac{2-1}{1+2*1} = \frac{1}{3} \qquad \varphi = arctg\frac{1}{3} \approx 18{,}5^0$$

1.5. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasi

$M(x_0\ ;\ y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. Tenglamasi $y=kx+b$ bo'lgan to'g'ri chiziq shu nuqtadan o'tadigan bo'lishi uchun $M(x_0;\ y_0)$ nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi lozim:

$$y_0=kx_0+b$$

To'g'ri chiziq tenglamasidan oxirgi tenglamani hadma-had ayirib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$y-y_o=k(x-x_0) \qquad (14)$$

Bu tenglamani berilgan $M(x_0;y_0)$ nuqta orqali o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi deyiladi.

Misol. $y=3x-4$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lib $M(2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentini to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidan foydalanib topamiz:

Berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti $k_1=3$ ga tengligidan izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti $k_2 = -\frac{1}{3}$ bo'ladi.

Ularni dasta tenglamasiga qo'yamiz:

$$y-(-3) = -\frac{1}{3}(x-2)$$

$$y+3 = \frac{1}{3}(x-2)$$

$$3y+9 = x-2$$

$$3y = x-11$$

$$javob: y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$$

1.6. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

$M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlash uchun avvalo $M_1(x_1;\, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini olamiz:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Bu to'g'ri chiziqlar orasidan $M_2(x_2;\, y_2)$ nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqni olish uchun $M_2(x_2;\, y_2)$ nuqta koordinatalarini bu tenglamaga qo'yamiz:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

Bu tengliklarni hadma-had bo'lib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (15)$$

Bu tenglama berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Izoh. $x_2=x_1$ va $y_2=y_1$ bo'lganda to'g'ri chiziq tenglamasi $x=x_1$ va $y=y_1$ ko'rinishda bo'lib birinchi holda u Oy o'qiga parallel, ikkinchi holda Ox o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Misol. $M_1(4; -2)$ va $M_2(3; -1)$ nuqtalarda o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan nuqtalarni koordinatalarini (15) tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{y+2}{-1+2} = \frac{x-4}{3-4}, \qquad \frac{y-2}{1} = \frac{x-4}{-1},$$

bundan $y=-x+2$. Javob: $y=-x+2$.

1.7. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. Berilgan nuqtadan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.

1. Faraz qilaylik, ixtiyoriy to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, unga koordinata boshidan $\vec{n}$ vektorni perpendikulyar holatda o'tkazamiz. Bu vektorni to'g'ri chiziqning normali deb ataymiz. Normalning to'g'ri chiziqni kesib o'tish nuqtasini P bilan, to'g'ri chiziq bilan hosil qilgan burchagini α bilan va OP=P deb belgilaylik.

Biz α burchak va r masofa ma`lum bo'lganda to'g'ri chiziq tenglamasi qanday bo'lishini aniqlaymiz. Shu maqsadda to'g'ri chiziqqa ixtiyoriy M(x;y) nuqtani olamiz. $\overrightarrow{OM}$ vektorning $\vec{n}$ vektordagi proyektsiyasi OP=P dan iborat (1-rasm). Ya`ni:

$$\Pi p_n \overline{OM} = p \qquad (16)$$

$\overrightarrow{OM}$ vektorning $\vec{n}$ normal bilan hosil qilgan burchakni φ deb, O bilan, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$ deb belgilab, trigonometriyadagi formulalar yordamida quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\prod p_{\vec{n}}\overline{OM} = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\alpha-\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) =$$
$$\rho\cos\alpha\cos\theta + \rho\sin\alpha\sin\theta = (\rho\cos\theta)\cos\alpha + (\rho\sin\theta)\cdot\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

demak,

$$\prod p_{\vec{n}}\overline{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad (17)$$

(16) va (17) tengliklardan $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho$ ekanligi, ya`ni

$$\ell: \quad x\,cos\alpha + Sin\alpha - p = 0 \qquad (18)$$

kelib chiqadi. Bu tenglik to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi.

2. Endi bu tenglama yordamida tekislikda berilgan ixtiyoriy nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish masalasini hal qilamiz.

ℓ to'g'ri chiziq o'zining normal tenglamasi (18) bilan va tekislikdagi ixtiyoriy M $(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtadan (18) to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani d bilan belgilaylik M $(x_0;y_0)$ nuqta va kordinata boshi to'g'ri chiziqning bir tomonida yoki ikki tomonida yotishi mumkin. (2-rasm)

M nuqtadan o'tib, ℓ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini bo'lishi mumkin bo'lgan ikki hol uchun yozamiz:

$$\ell_1: \quad x_0\,cos\alpha + y_0\sin\alpha - (p+d) = 0$$

bu tenglikdan d ni topamiz:

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - \rho$$

$$\ell_2: \quad x_0\,cos\alpha + y_0\sin\alpha - (p-d) = 0,$$

bundan, $d = -(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - \rho)$.

Ixtiyoriy hol uchun

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - \rho\right| \qquad (19)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish uchun berilgan nuqtaning koordinatalarini to'g'ri chizig'ini normal tenglamasidagi x va y o'zgaruvchilar o'rniga qo'yib, hosil bo'lgan sonining modulini olish kifoya ekan.

3. Yuqoridagilardan ma`lumki, nuqtaning berilgan to'g'ri chiziqdan qanchalik uzoqlashganligini to'g'ri chiziqning normal tenglamasi yordamida aniqlash qulay ekan. Shuning uchun to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishda berilgan tenglamasini normal ko'rinishga qanday keltirish mumkinligini ko'rib chiqamiz.

To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$Ax+By+C=0 \qquad (20)$$

Bu tenglamani (18) ko'rinishga keltirish lozim bo'lsin. (18) va (20) tenglamalar bitta to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lishi uchun ularning mos qo'shiluvchilari koeffisiyentlari proporsional bo'lishi lozim.

Demak biror μ soni uchun ushbu tenglamalarni yozish mumkin:

$$\begin{cases} \mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0 \end{cases}$$

yoki

$$\mu A = \cos\alpha,\ \ \mu B = \sin\alpha,\ \ \mu C = -\rho. \qquad (21)$$

(21) tenglamalarning birinchi ikkitasini kvadratga ko'tarib hadma-had qo'shib μ ni topamiz:

$$\begin{cases} \mu^2 A^2 = \cos^2\alpha \Rightarrow \mu^2 (A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ \mu^2 A^2 = \sin^2\alpha \end{cases}$$

demak,

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (22)$$

μ - sonini (20) to'g'ri chiziqning normallashtiruvchi ko'paytuvchisi deb ataladi. Uning ishorasini aniqlash uchun μC=-ρ tenglikni tekshiramiz.

Bu tenglik o'rinli bo'lishi uchun μ va C ning ishoralari o'zaro qarama-qarshi bo'lishi kerakligini ko'ramiz.

Shunday qilib, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normallashtirish uchun bu tenglamani $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ soniga ko'paytirish yetarli bo'lib, uning ishorasini (20) tenglamadagi ozod had C ning ishorasiga qarama-qarshi qilib olish lozim ekan.

Natija. M(x_0; y_0) nuqtadan *Ax+By+C=0* to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa (d)ni ushbu formula yordamida topiladi:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Misol. M(3; -1) nuqtadan 3x+4y-10=0 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.

Yechish:

$$d = \left|\frac{3\cdot 3 + 4\cdot(-1) - 10}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{9 - 4 - 10}{\sqrt{25}}\right| = \left|\frac{-5}{5}\right| = 1$$

Javob: d=1.

Nazorat savollari:

1. To'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti tenglamasini ayting.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday yoziladi?
3. Berilgan nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday topiladi?
5. Ikki to'g'ri chiziq orasida hosil bo'lgan burchak qanday topiladi?
6. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini ayting.
7. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb nimaga aytiladi?
8. To'g'ri chiziq tenglamasini qanday qilib normal ko'rinishga keltirish mumkin?
9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday topiladi?

Mustaqil ish № 3.

Tekislikdagi analitik geometriya

1. $6x-2y+5=0$ va $4x+2y-7=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

2. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Uning tomonlari tenglamalari tuzilsin.

3. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan $A(-3;-1)$, $B(2;1)$, $C(3;5)$. Uning B uchidan tushirilgan balandlik tenglamasi tuzilsin va balandlik uzunligi topilsin.

4. $A(2;1)$ nuqtadan o'tib $y=3x-4$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

5. $A(5;-4)$ nuqtadan o'tib $3x+2y-7=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

6. *Oy* o'qidan 2 birlik kesma ajratib, $x-2y+3=0$ to'g'ri chiziq bilan 45°li burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

7. $A(1;2)$ va $B(4;3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin, hamda bu to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari aniqlansin.

8. $x-y-4=0$ va $2x-11y+37=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan hamda koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

9. To'g'ri chiziq *OX* o'qini $A(-6;0)$ nuqtada, *OY* o'qini $B(0;7)$ nuqtada kesib o'tadi. Bu to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi tuzilsin.

10. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(-3;-1)$, $B(5;3)$, $C(6;-4)$. Uning C uchidan o'tkazilgan medianasining tenglamasi tuzilsin.

11. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: A(3;2), B(5;7), C(-5;0). Uning A uchidan BC tomonga tushirilgan balandligi tenglamasi tuzilsin.

12. *ABCД* to'g'ri to'rtburchak *AB* tomonining uchlari A(3;2) va B(-3;0) nuqtalarda yotadi. *AД* tomonning uzunligi 8 sm.ga teng. Bu to'g'ri to'rtburchak tomonlari tenglamalari tuzilsin.

13. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

14. $\begin{cases} \frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{18}=1 \end{cases}$.

15. *P(3;-4)* nuqta koordinatalar boshidan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi tuzilsin.

16. *A(2;5)* nuqtadan *6x+8y-6=0* to'gri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

17. *M(4;-1)* nuqtadan hamda *x-3y+2=0* va *y-4=0* to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

18. *3x-y+5=0 va 2x+3y+1=0* to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan hamda $7x-3y+5=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

19. *3x-y=0* va *x+4y-2=0* to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tib, *2x+7y=0* to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

20. *2x-3y-12=0* va *3x+2y-12=0* to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisalari tenglamalari tuzilsin.

21. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan:

A(12;-4) B(0;5), *C(-12;-11).* Uning tomonlari tenglamalari tuzilsin.

22. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan:*A(1;-3), B(3;-5), C(5;1).* Uning *A* uchidantushirilgan medianasi tenglamasi tuzilsin va uzunligi topilsin.

23. Quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{7}=1 \\ \frac{x}{7}+\frac{y}{3}=1 \end{cases}$$

24. *x-3y+10=0* va *x+4y-2=0* to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan va *(1;3)* nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

25. *2x+5y-3=0* ва *x-3y+7=0* to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tib, *2x-y+8=0* to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

26. *M(3;4)* nuqtaga *3x+4y-12=0* to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan nuqta topilsin.

27. Teng yonli uchburchakning asosi $x+2y=0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, uning yon tomonlaridan biri $x-y+5=0$ to'g'ri chiziq, ikkinchi yon tomoni Д$(4;2)$ nuqtadan o'tadi. Bu yon tomon tenglamasi tuzilsin.

28. $3x-4y+3=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib, undan 2 birlik masofada yotgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

29. Uchlari $A(1;2)$, $B(3;1)$ ва $C(-2;-3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari tenglamalari tuzilsin va uzunliklari topilsin.

30. $M(-1;2)$ nuqtadan o'tib $2x+3y+5=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

31. Uchburchak tomonlari tenglamalari bilan berilgan: $5x-2y-11=0$; $x+2y+5=0$ va $x-2y+1=0$. Uchburchakning burchaklari topilsin.

Mavzu: Tekislikdagi ikkinchi darajali chiziqlar

Reja:

1. Aylana va uning tenglamasi.
2. Ellips tenglamasi.
3. Giperbola tenglamasi.
4. Parabola tenglamasi.

Adabiyotlar.

1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nashr. 1984 yil. 63-66 betlar.
2. Ye.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 94-105 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 63-67 betlar.
4. http;//docs.ttesi.uz./sim/htme.Oliy matematika,2005y.

2.1. Ikkinchi darajali chiziqlar.

Tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

Bu yerda A,B,C,D,E,F lar o'zgarmas kooeffisyentlar bo'lib, A,B,C lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lishi zarur, aks holda to'g'ri chiziqqa ega bo'lamiz.

2.2. Aylana tenglamasi.

Ta`rif: Markaz deb ataluvchi M(a;b) nuqtalardan bir xil R masofada joylashgan nuqtalar to'plamiga markazi M(a;b) nuqtada bo'lgan va radiusi R ga teng aylana deyiladi. Aylana tekislikda o'z koordinatalari va radiusi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Markazi S(a;b) nuqtada va radiusi R bo'lgan aylana tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

dan iborat bo'ladi.

Bunda qavslarni ochib

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$$

ni hosil qilamiz. Agarda $-2a=2D$; $-2b=2E$; $a^2+b^2-R^2=F$ deb belgilash kiritsak, aylana tenglamasi:

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (3)$$

Markazi koordinata boshida radiusi R ga teng aylana tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (4)$$

1-misol. Markazi C(2:-3) nuqtada, radiusi R=4 ga teng aylana tenglamasi yozilsin.

Yechish:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$$

$$x^2+y^2-4x+6y-3=0$$

2-misol. $x^2+y^2-6x+8y=0$ aylananing markazi va radiusi topilsin.

Yechish:

$$x^2+y^2-6x+8y=0 \Leftrightarrow (x^2-6x)+(y^2+8y)=0$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)-9-16=0$$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$$

Demak, aylana markazi M(3;-4) va radiusi esa R=5

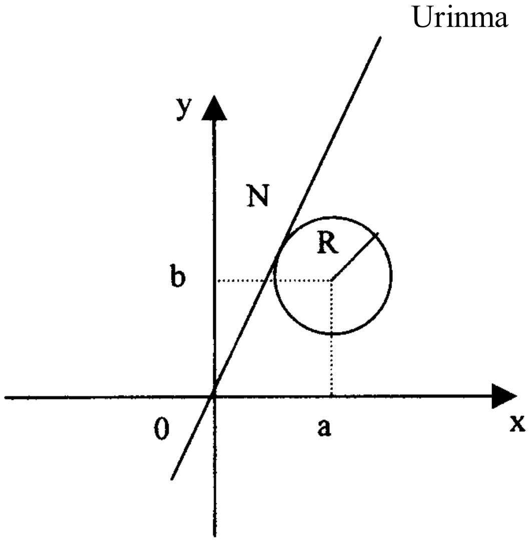
Agar N $(x_1;y_1)$ nuqta aylananing biror nuqtasi bo'lsa, u holda bu nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinma tenglamasi

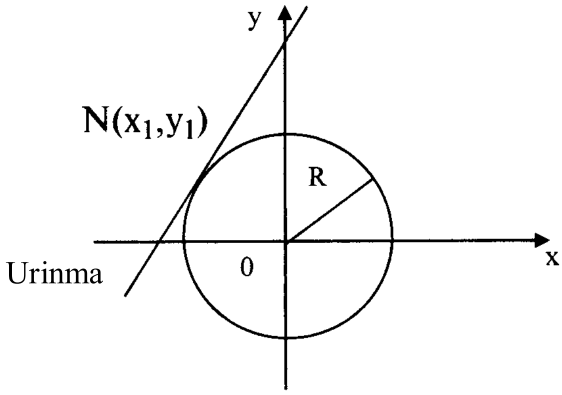
$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2 \qquad (5)$$

yoki

$$x*x_1+y*y_1=R^2 \qquad (6)$$

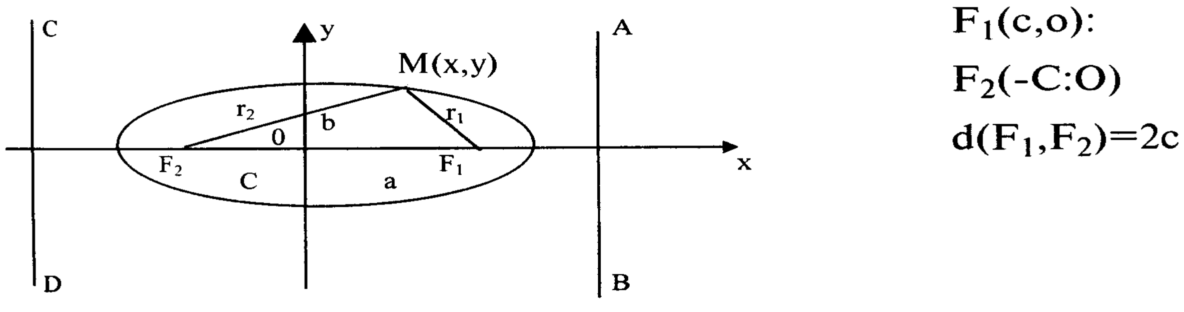
dan iborat bo'ladi.





2.3. Ellips

1-Ta`rif. Ellips deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalardan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas bo'lib, 2a ga tengdir.



M(x,y) nuqta – ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ellipsning ta`rifiga ko'ra

$$d(F_1,M)+d(F_2,M)=2a \qquad (1)$$

$$d(F_1,M)=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$d(F_2,M)=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

bularni (1) ga qo'yib

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (2)$$

soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2x\cdot c+c^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2x\cdot c+c^2$$

$$a\ (x-c)^2+y^2=a^2-cx$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2)+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

$$a^2-c^2=b^2 \qquad (3)$$

deb belgilaymiz:

$b^2\cdot x^2+a^2y^2=a^2b^2 \ \Big|\ (a^2\cdot b^2)$ ga bo'lasak:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

Bu ellipsning kanonik tenglamasidir. Bu yerda

a – ellipsning katta yarim o'qi,

b – ellipsning kichik yarim o'qi deyiladi.

Ellipsning ekssentrisiteti ε deb, fokuslari orasidagi (2c) masofaning, ellipsning katta o'qi (2a) nisbatiga aytiladi, ya`ni

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}\Rightarrow \qquad \varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (5)$$

bundan $0\leq\varepsilon<1$

Ekssentrisitet ellipsning cho'ziqligi darajasini xarakterlaydi.

Ellipsning ixtiyoriy nuqtadan (F_1 va F_2) fokuslarigacha bo'lgan masofalar uning fokal radius-vektorlari (r_1 va r_2) deyiladi.

Ixtiyoriy M (x,y) nuqta uchun

$$r_1=a-\varepsilon x, \qquad r_2=a+\varepsilon x, \qquad r_1+r_2=2a. \qquad (6)$$

Ellipsning kichik o'qiga parallel bo'lgan va undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofadan o'tgan ikki to'g'ri chiziq ellipsning direktrisalari deyiladi:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{va} \quad x = \frac{a}{\varepsilon} \qquad (7)$$

Ellipsning ixtiyoriy M (x,y) nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

ko'rinishda bo'ladi.

<u>1-misol.</u> Katta o'qi 10 ga teng va ekssentrisiteti ε=0,8 ga teng bo'lgan ellipsning sodda tenglamasini tuzing.

<u>Yechish:</u>

$2a=10 \Rightarrow a=5$ (5)-formuladan

$C=\varepsilon\, a=4.$ (3)- formulalardan

$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9 \Leftrightarrow b=3.$

Bu tenglamalarni (4) ga qo'yib ellipsning sodda tenglamasi $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ni hosil qilamiz.

<u>2-misol.</u> $4x^{2+}9y^{2=}16$ ellipsning katta va kichik yarim o'qlarini, fokuslarini hamda ekssentrisitetini toping.

<u>Yechish:</u>

$$\frac{4x^2}{16} + \frac{9y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

Bundan $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ $\quad b^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$

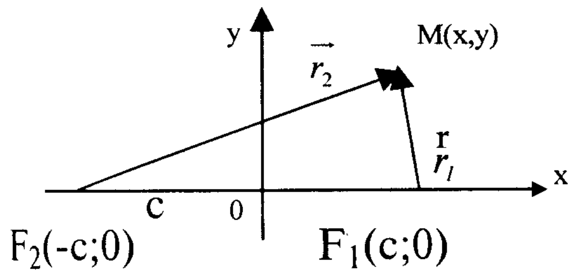
$$C = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$F_1\left(+\frac{2\sqrt{5}}{3};0\right), \quad F_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3};0\right),$$

2.4. Giperbola

Ta`rif: Giperbola deb, shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, bu nuqtalardan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absalyut qiymati o'zgarmas bo'lib, 2a ga teng.



$|F_1F_2|=2$

$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

ta`rifdan $\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$ yoki

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=\pm 2a.$$

Ellips tenglamasini keltirib chiqaradigan ishlarni bajarib

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \qquad (1)$$

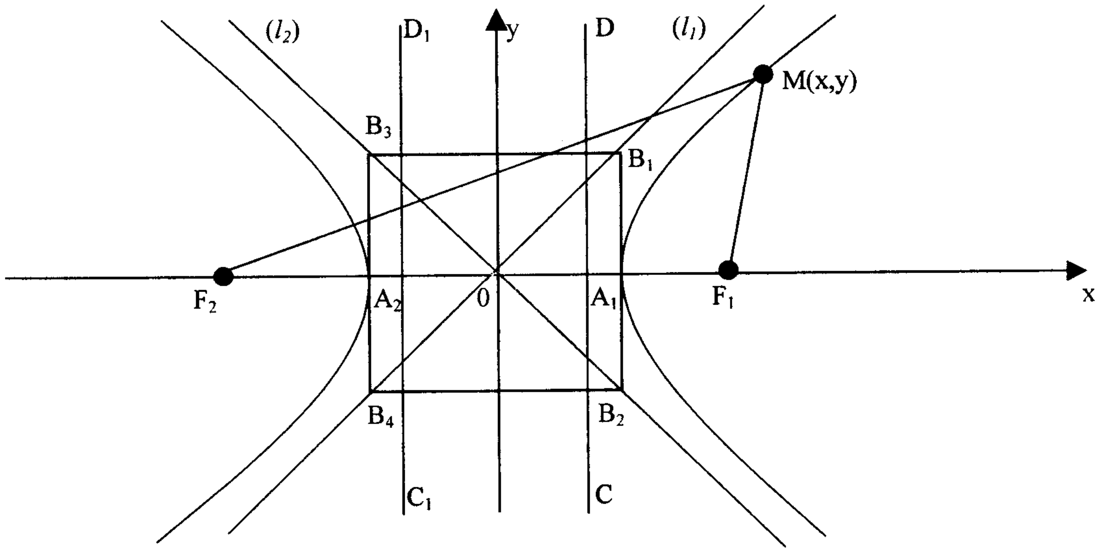
tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerda

$$b^2=c^2-a^2 \qquad (2)$$

deb belgilab,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

giperbolaning kanonik tenglamasini hosil qilamiz.



A_1 (a:0) va A_2 (-a:0) nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi.

[A_1A_2] kesmaga giperbolaning haqiqiy o'qi deyiladi.

[B_1B_2] kesmaga giperbolaning mavhum o'qi deyiladi.

a - haqiqiy yarim o'q, в – mavhum yarim o'q deyiladi.

Mos ravishda

$$y=\pm\frac{в}{a}\,x \qquad (4)$$

formula bilan aniqlanuvchi ikki (L_1) va (L_2) to'g'ri chiziqlarga asimptotalar deyiladi. Formula

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (5)$$

bilan aniqlanuvchi kattalikka giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi. $s>a$ bo'lganligidan ε>1. Agar ε birga yaqin bo'lsa, giperbola tarmoqlari shuncha siqiq va ε birdan qancha katta bo'lsa, giperbola tarmoqlari shuncha yoyiq joylashgan bo'ladi.

Giperbolaning istalgan M(x,y) nuqtasidan uning F_1(c;0) va F_2(-c;0) fokuslarigacha bo'lgan r_1=d(F_1;M), r_2=d(F_2;M) masofalar shu M nuqtaning fokal radiuslari deyiladi va ular quyidagi formulalardan topiladi:

$$X<0 \text{ da } \left.\begin{matrix} r_1 = a - \varepsilon x \\ r_2 = -a - \varepsilon x \end{matrix}\right\} \text{(chap tarmoq uchun).} \qquad (6)$$

$$X>0 \text{ da } \left.\begin{matrix} r_1 = -a + \varepsilon x \\ r_2 = a + \varepsilon x \end{matrix}\right\} \text{(o'ng tarmoq uchun).} \qquad (6^1)$$

Giperbolaning direktrisalari deb, uning markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ masofada fakol o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadigan ikki to'g'ri chiziqqa ((SD) va (C_1D_1)) aytiladi va

$$x=\frac{a}{\varepsilon} \text{ va } x=-\frac{a}{\varepsilon} \qquad (7)$$

formuladan topiladi.

Yarim o'qlari teng (a=$в$) bo'lgan giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi va

$$x^2\text{-}y^2=a^2 \qquad (8)$$

formula bilan ifodalanadi.

Giperbolaning (x_1;y_1) nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi:

$$\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}=1 \qquad (9)$$

formuladan aniqlanadi.

<u>1-misol</u>.

Fokuslari orasidagi masofa 2c=8 bo'lgan, uchlari orasidagi masofa 2a=6 bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

<u>Yechish:</u>

$$2c=8\Rightarrow c=4,$$

$$2a=6\Rightarrow a=3$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\Rightarrow b^2=7$$

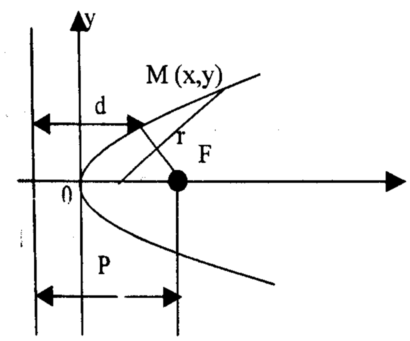
(3) formuladan $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ hosil qilamiz.

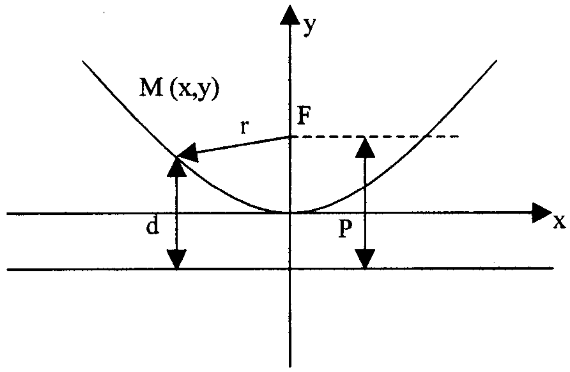
2.5. Parabola

<u>Ta`rif:</u> Parabola deb, shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, ularning har biridan o'zgarmas bir nuqtasigacha parobolaning fokusigacha va o'zgarmas to'g'ri chiziqqacha parabolaning direktrisasigacha bo'lgan masofalar o'zaro tengdir. Koordinatalar boshidan o'tib Ox o'qiga simmetrik bo'lgan parabola tenglamasi

$$y^{2=}2px \qquad (1)$$

dan iborat bo’ladi.





1-chizma 2-chizma

Direktrisa tenglamasi:

$$x = -\frac{P}{2} \qquad (2)$$

(1) formula bilan ko’rsatilgan parabola fokusi: $F\left(\frac{P}{2};0\right)$

Parabolaning M(x,y) nuqtasining fokal radiusi

$$r = x + \frac{P}{2} \qquad (3)$$

formuladan topiladi.

Agar parabola koordinata boshidan o’tib Oy o’qiga simmetrik bo’lsa uning tenglamasi:

$$x^2=2py \qquad (4)$$

Uning direktrisasi tenglamasi:

$$y = -\frac{P}{2}, \qquad (5)$$

Fokusi $F\left(0;\frac{P}{2}\right)$ nuqtada, M(x,y) nuqtasining fokal radiusi

$$r = y + \frac{P}{2} \qquad (6)$$

formula yordamida aniqlanadi.

(1) va (4) formulalar bilan aniqlanuvchi parabolaning $A(x_1,y_1)$ nuqtasiga o’tkazilgan urinma tenglamalari mos ravishda

$$yy_1=p(x+x_1) \qquad va \qquad xx_1=p(y+y_1) \qquad (7)$$

formulalar bilan ifodalanadi.

2-misol.

$y=\frac{1}{4}x^2$ parabola fokusining koordinatalarini toping va direktriasining tenglamasini tuzing.

Yechish:

$y=\frac{1}{4}x^2$ ni kanonik ko'rinishda yozamiz:

$y=\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x^2=4y$ buni (4) bilan solishtirsak 2p=4⇒p=2 ekanligi kelib chiqadi. Direktrisa tenglamasini $y=-\frac{P}{2}$ dan topamiz. $y=-\frac{P}{2}=-\frac{2}{2}=-1 \Rightarrow y=-1$ bo'ladi. Parabola fokusining koordinatasi: $F\left(0;\frac{P}{2}\right)$ yoki F(0;1).

Nazorat savollari:

1. Tekislikdagi ikkinchi darajali chiziqlar. Umumiy tenglamasi.
2. Aylana va uning tenglamasi.
3. Ellipsning kanonik tenglamasi.
4. Ellipsning ekssentrisiteti , direktrisasi.
5. Ellipsga o'tkazilgan urinma tenglamasi.
6. Giperbola tenglamasi va uning belgilari.
7. Parabola tenglamasi va uning belgilari.

Mustaqil ish № 4

Ikkinchi tartibli chiziqlar

1. $4x-3y-10=0$, $3x-4y-5=0$, $3x-4y-15=0$ to'g'ri chiziqlarga urinuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.
2. Markazi $2x+y=0$ to'g'ri chiziqda yotib, $4x-3y+10=0$ va $4x-3y-30=0$ to'g'ri chiziqlarga urinuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.
3. *A(-1;5)* nuqtadan o'tib $3x+4y-35=0$ va $4x+3y+14=0$ to'g'ri chiziqlarga urinuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.
4. *A(1;1) B(1;-1) C(2;0)* nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasi tuzilsin.

5. $(x-3)^2-(y-7)^2=169$ aylananing *M(8,5;3,5)* nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi vatari tenglamasi tuzilsin.

6. $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ aylananing *A(1;2)* nuqtada teng ikkiga bo'linuvchi vatari tenglamasi tuzilsin.

7. $x^2+y^2-10x-10y=0$, $x^2+y^2+6x+2y-40=0$ aylanalarning umumiy vatari uzunligi topilsin.

8. *A(1;6)* nuqtadan $x^2+y^2+2x-19=0$ aylanaga o'tkazilgan urinmalar tenglamasi tuzilsin.

9. *A(4;2)* nuqtadan $x^2+y^2=10$ aylanaga o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchak topilsin.

10. $x^2+y^2+10x-2y+6=0$ aylananing $2x+y-7=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmasi tenglamasi tuzilsin.

11. Ikkita uchi $x^2+5y^2=20$ ellipsning fokuslarida, qolgan ikkitasi kichik yarim o'qlarining oxirlarida bo'lgan to'rtburchakning yuzini toping.

12. $M_1\left(2;-\dfrac{5}{3}\right)$ nuqta $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ ellipsda yotadi. M_1 nuqtaning fokal radiuslari yotadigan to'g'ri chiziqlarning tenglamalari tuzilsin.

13. *M(-4;2,4)* nuqtani $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ellipsda yotishini tekshirib, shu nuqtaning fokal radiuslarini toping.

14. O'ng fokusidan 14birlik masofada joylashgan $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ ellipsning nuqtasini toping.

15. Quyidagi tenglamalarni har biri ellipsni ifodalashini ko'rsating.

1) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$

Ularning yarim o'qlari va ekssentrisitetini toping.

16. *x+2y-7=0* to'g'ri chiziqni $x^2+4y^2=25$ ellips bilan kesishish nuqtalari topilsin.

17. m ning qanday qiymatlarida y=-x+m to'g'ri chiziq $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

a) ellips bilan kesishadi;

b) ellipsga urinadi;

c) ellipsdan tashqarida yotadi.

18. $\frac{x^2}{10}+\frac{2y^2}{5}=1$ ellipsning $3x+2y+7=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalari topilsin.

19. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ ellipsning $4x-2y+23=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalari topilsin.

20. *A(4;-1)* nuqtadan o'tuvchi *x+4y-10=0* to'g'ri chiziqqa urinuvchi ellipsning tenglamasi yozilsin. Ellipsning o'qlari koordinata o'qlari bilan ustma-ust tushadi.

21. $M_1(10;-\sqrt{5})$ nuqta $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$ giperbolada yotadi. M_1 nuqtaning fokal radiuslari yotgan to'g'ri chiziqlarning tenglamasi tuzilsin.

22. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ giperbolaning o'ng fokusidan 4,5 birlik masofada yotuvchi nuqtalari topilsin.

23. Quyidagi tenglamalar qanday chiziqlarni ifodalashini aniqlang.

1) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$

2) $y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$

3) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$

4) $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$

24. Agar giperbolaning ekssentrisiteti $E=\sqrt{5}$ fokusi $F(2;-3)$ va unga mos direktrisasi $3x-y+3=0$ bo'lsa, uning tenglamasi tuzilsin.

25. $2x - y - 10 = 0$ to'g'ri chiziq va $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ giperbolaning kesishish nuqtalari topilsin.

26. *E(0;-3)* fokusga ega bo'lib, koordinatalar boshidan o'tuvchi parabolaning tenglamasini, *Oy* o'qi parabolaning simmetriya o'qi ekanligini hisobga olib, tuzilsin.

27. Quyidagi tenglamalar qaysi chiziqlarni ifodalaydi.

1) $y = +2\sqrt{x}$

2) $y = -2\sqrt{x}$

3) $x = +\sqrt{5y}$

4) $x = -\sqrt{3y}$

28. *M* nuqtaning ordinatasi 7 ga teng bo'lib, $y^2 = 20x$ parabolada yotadi. *M* ning fokal radiuslari topilsin.

29. *F(-7;0)* fokusga va *x-7=0* direktrisaga ega bo'lgan parabola tenglamasi tuzilsin.

30. $y^2 = 16x$ parabolada fokal radiusi 13 ga teng bo'lgan nuqtani toping.

Mavzu. Fazodagi tekislik va to'g'ri chiziq tenglamalari

Reja:

1. Fazodagi tekislik tenglamalari.
2. Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari.
3. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyatlari.
4. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.

Adabiyotlar

1. T.Sh. Shodiyev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi» nash. 1984 yil. 70-77 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika» 1-j. T. «O'qituvchi». 1992 yil. 43-54 betlar.
3. F. Rajabov, A. Nurmatov. «Analitik geometriya va chiziqli algebra». T. «O'qituvchi». 1990 yil. 69-74 betlar.
4. http;//docs.ttesi.uz./sim/htme.Oliy matematika,2005y.

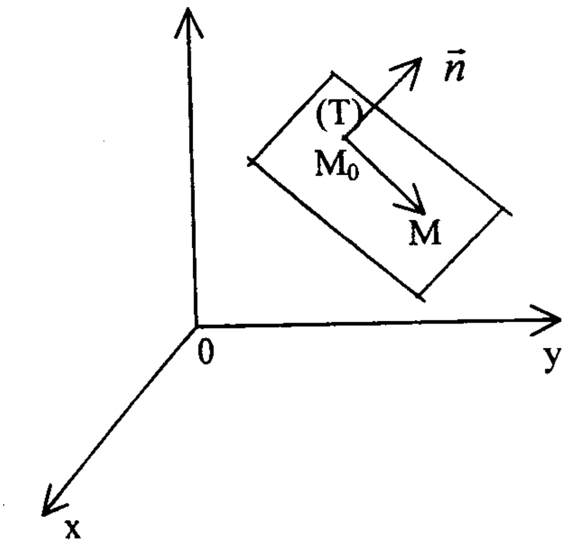
3.1. Fazoda tekislik

<u>Teorema.</u> Fazoda har qanday tekislik x,y,z o'zgaruvchi koordinataga nisbatan birinchi darajali algebraik tenglama bilan tasvirlanadi va aksincha, x,y,z o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali har qanday algebraik tenglama fazoda tekislikni ifodalaydi.

$$(T): \quad Ax+By+Cz+D=0 \qquad (1)$$

bunda A,B,C,D o'zgarmas sonlar.

Isbot: *(T)* tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\bar{n} \neq 0$ vektorni *(T)* tekislikning normali deymiz. Tekislikning tayin bir $M_0(x_0,y_0,z_0) \in (T)$ nuqtasini olaylik. Agar $\bar{n}$ normalning shu koordinatalar sistemasidagi koordinatalari $\bar{n} = \{A,B,C\} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$



bo'lib, *M(x,y,z)* fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda $M \in (T)$ bo'lish uchun $\vec{M_0M}$ vektor $\bar{n}$ vektorga perpendikulyar, ya`ni ularning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \qquad (2)$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

$\vec{M_0M}$ vektorning koordinatalari:

$$\vec{M_0M} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k} \qquad \text{bo'lgani uchun}$$

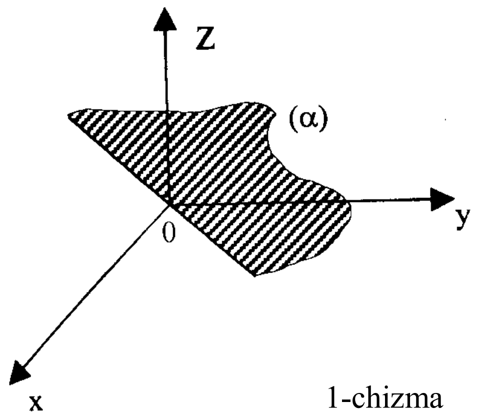
$$M_0\vec{M} \cdot \vec{n} = A(x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Bundan $\quad Ax+By+Cz+(-Ay_0-By_0-Cz_0)=0$

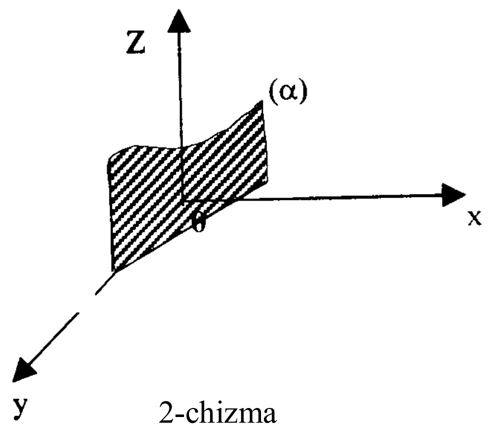
bu yerda $\quad D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

3.2. Tekislikning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvi

1) $D=0$ bo'lsin, (1)-tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama koordinatalar boshidan o'tgan tekisliklarni ifodalaydi. (1-chizma)



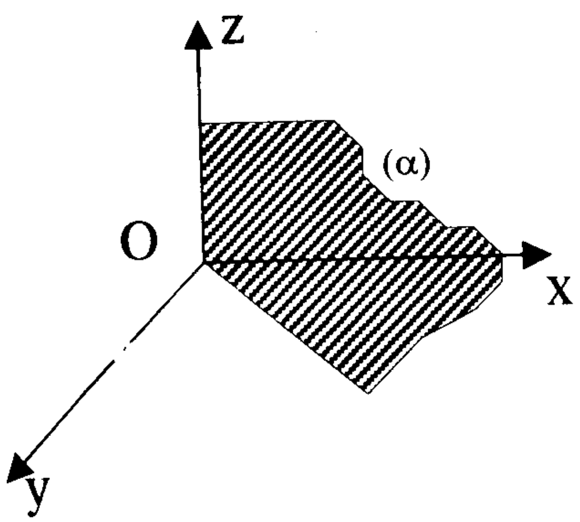
1-chizma



2-chizma

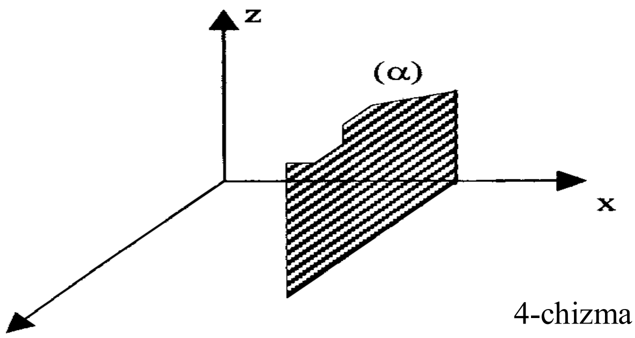
2) Agar *(T)* tekislik $\bar{n} = \{A, B, C\}$ normalining koordinatalaridan biri 0 ga teng bo'lsa, u holda $\bar{n}$ vektor mos o'qqa perpendikulyar bo'ladi. Masalan $C=0$ bo'lsa, u holda $Ax+By+D=0$ tekislik Oz o'qiga parallel bo'ladi. (2-chizma). (α) || Oz.

3) Agar $C=D=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ tenglama Oz o'qidan o'tgan tekislikni ifodalaydi. (3-chizma)



Agar $A=D=0$ bo'lsa, tekislik Ox o'qidan o'tadi. Agar $B=0,\ D=0$ bo'lsa, tekislik Ox o'qidan o'tadi. Agar $B=0,\ D=0$ bo'lsa, tekislik Oy o'qidan o'tadi.

4) Agar $A\neq O,\ B=0,\ C=0,\ D\neq 0$ bo'lsa, bu holda $Ax+D=0$ yoki $x=-\frac{D}{A}$ tenglama (yOz) koordinatalar tekisligiga parallel yoki undan $k=\left|-\frac{D}{A}\right|$ ga teng masofada yotgan tekislikni ifodalaydi.

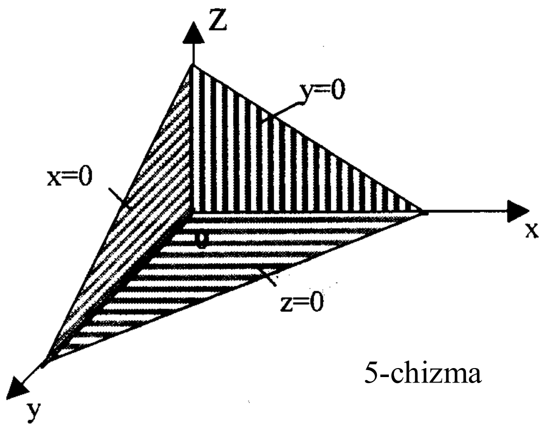


4-chizma

Quyidagi: $A\neq 0,\ B=C=D=0;$

$A=0,\ B\neq 0,\ C=0,\ D=0;$

$A=0,\ B=0,\ C\neq 0,\ D=0$ hollarda mos ravishda $Ax=0,\ By=0,\ Cz=0$ yoki $x=0,\ y=0,\ z=0$ tenglamalarga kelamiz. Ular esa mos ravishda $(xOy), (xOz), (yOz)$ koordinatalar tekisliklarini ifodalaydi:



5-chizma

(1) tekislik tenglamasini $Ax+By+Cz=-D$ yoki $\frac{A}{-D}x+\frac{B}{-D}y+\frac{C}{-D}z=1$ ko'rinishda yozamiz.

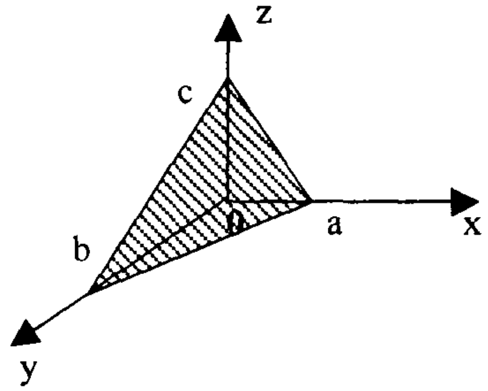
Bunda $\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$

Agar $-\frac{D}{A}=a;\qquad -\frac{D}{B}=в;\qquad -\frac{D}{C}=c$ deb belgilasak,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3)$$

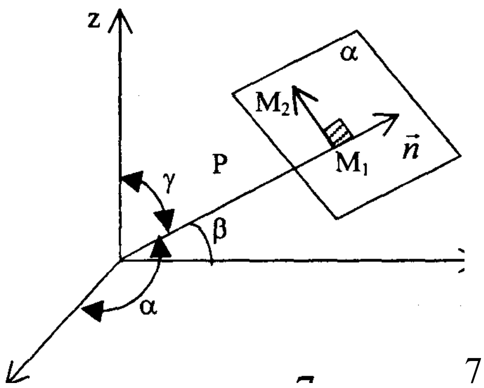
tenglamaga ega bo'lamiz.

(3)-tenglama tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb ataladi.



6-chizma

Agar koordinata boshidan (α) tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi P ga teng bo'lsa (7-chizma)



7-chizma

bu perpendikulyarning yo'naltiruvchi kosinuslari, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ larni parametr deb qabul qilsak, tekislikning normal tenglamasini hosil qilamiz:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (4)$$

(1)-umumiy tenglamani normal holga keltirish uchun uni hadma-had normallovchi ko'paytuvchi

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (5)$$

ga ko'paytirish kerak.

Bu holda

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$
$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \rho = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \qquad (6)$$

bo'ladi. Agar $D>0$ bo'lsa (-) ishora, agarda $D<0$ bo'lsa (+) ishora olinadi.

Fazoning ixtiyoriy $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasidan (1)-tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|A\cdot x_1 + B\cdot y_1 + C\cdot z_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (7)$$

formula bilan, agar tekislik normal tenglama bilan berilgan bo'lsa,

$$d = |x_1\cdot\cos\alpha + y_1\cdot\cos\beta + z_1\cdot\cos\gamma| \qquad (7')$$

formula bilan hisoblanadi.

Berilgan ikkita

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2 + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

tekisliklar orasidagi burchak

$$\cos\alpha = \pm\frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (9)$$

formula bilan aniqlanadi.

Ikki tekislikning parallellik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (10)$$

kabi, tekisliklarning perpendikulyarlik sharti esa

$$A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2 = 0 \qquad (11)$$

bilan ifodalanadi.

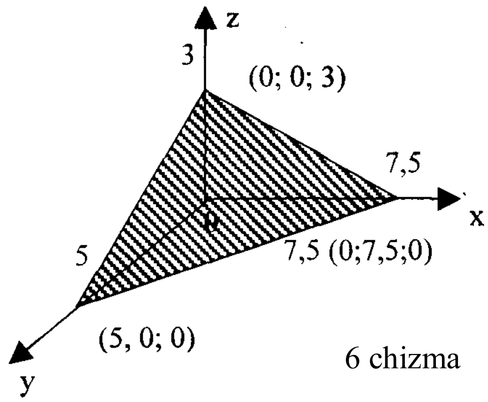
Berilgan uchta $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

1-misol. $3x+2y+5z-15=0$ tekislikni yasang

$$\frac{3x}{15}+\frac{2y}{15}+\frac{5z}{15}=1$$

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{7{,}5}+\frac{z}{3}=1$$



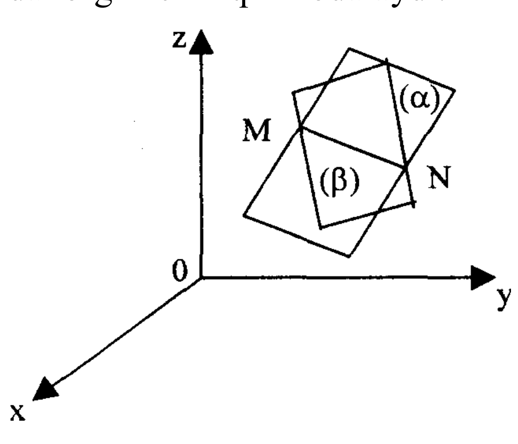
6 chizma

3.3. Fazoda to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziq bilan tekislik.

Fazoda to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i deb qarash mumkin. Agar $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ nisbatlar bajarilmasa ikkita

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (1)$$

tenglama birgalikda fazoda to'g'ri chiziqni ifodalaydi.



(1)- tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi.

To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Bu yerda x_0, y_0, z_0 – to'g'ri chiziqda yotuvchi aniq M_0 nuqtaning koordinatalari;

$\bar{s}$ (m;n;p) – to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori;

t-o'zgaruvchan parametr.

(2)-tenglamadan parametr t-ni chiqarib,

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (3)$$

ega bo'lamiz. (3) tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ko'pgina masalalarda to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamalaridan foydalanish qulay bo'ladi. Shuninng uchun umumiy ko'rinishdagi (1)-tenglamalar sistemasini bu shaklga keltirish juda muhim.

(3)-tenglamadagi *m, n, p* lar o'rniga bularga proportsional miqdorlarni quyidagi formuladan topiladi:

$$m:n:p=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Agar (3)-tenglamalarda m, n va p maxrajlardan birortasi 0 nolga teng bo'lib qolsa, u holda moc kasrning suratini nol deb faraz qilish kerak.

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \quad \text{va} \quad \frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}$$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak.

$$\cos\varphi=\pm\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (5)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Bu to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (6)$$

munosabatidan, perpendikulyarlik sharti esa

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0 \qquad (7)$$

munosabatidan iborat.

Ixtiyoriy $M_1(x_1;u_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}; \qquad (8)$$

dan iborat bo'ladi.

Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tib, berilgan $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \qquad (9)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Ikki $(l_1): \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ va $(l_2): \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$

to'g'ri chiziqlarning kesishishi uchun

$$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (10)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

<u>1 -misol.</u> $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=9 \end{cases}$ to'g'ri chiziq tenglamasi kanonik ko'rinishga keltirilsin.

Yechish. $z=0$ $\begin{cases} 2x-3y-9=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}\begin{vmatrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{vmatrix}$ $-\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$ $y=15$

$x=2\cdot 15-3=27$. Demak, to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtani- M(27;15;0) deb olishimiz mumkin. (4) formuladan esa

$$m:n:p=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

bundan $m:n:p=(-9):(-5):(-1)$, $\overline{S}\{9;5;1\}$. Natijada

$$\frac{x-27}{9}=\frac{y-15}{5}=\frac{z}{1}$$

hosil qilamiz.

To’g’ri chiziq bilan tekislik.

Quyidagi to’g’ri chiziq

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (11)$$

bilan

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (12)$$

tekislikning kesishish nuqtasi topish uchun bu uch tenglamani birgalikda yechish kerak.

Agar (11) - tenglikni uchta nisbati o’rniga ularning har biriga teng bo’lgan t parametr ishlatilsa, ish osonlashadi. U holda $x=mt+x_0;$ $y=nt+y_0;$ $z=pt+z_0$ - qiymatlarini (12) - tekislik tenglamasiga qo’yib, t ning qiymatlarini hosil qilamiz, so’ngra izlagan koordinatalarini topamiz. (11) – to’g’ri chiziq bilan (12)- tekislik orasidagi burchak ushbu formulada hisoblanadi:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (13)$$

(11) to’g’ri chiziq bilan (12) - tekislikning parallellik sharti:

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (14)$$

to’g’ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (15)$$

Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o’tib, berilgan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka perpendikulyar bo’lgan to’g’ri chiziq tenglamasi:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C} \qquad (16)$$

Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan va berilgan $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to’g’ri chiziqdan o’tuvchi tekislik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \qquad (17)$$

formula bilan ifodalanadi.

$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ va $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (18)$$

(11)-to'g'ri chiziqning (12)-tekislikda yotish sharti esa quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases} \qquad (19)$$

Nazorat savollari:

1. Fazodagi tekislik tenglamasi qanday ko'rinishlarda bo'lishi mumkin?
2. Ikki tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini ayting.
3. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa qanday topiladi?
4. Fazodagi to'g'ri chiziqning tenglamalari qanday bo'lishini ayting.
5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
6. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
7. To'g'ri chiziqning tekislikka parallel va perpendikulyar bo'lishi shartlarini ayting.

Mustaqil ish № 5

Fazodagi analitik geometriya

Fazoda to'g'ri chiziq va tekislik tenglamalari

1. *A(1;3;4)* nuqtadan o'tgan va yo'naltiruvchi vektori $x=2\vec{i}+3\vec{j}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.
2. *2x-5y+z-3=0*; *3x-2y+3z-6=0* tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamalari yozilsin.
3. *M(1;-1;2)* nuqtadan o'tib,

$$\begin{cases} 2x+3y-z+3=0 \\ x+y+3z-6=0 \end{cases}$$

   To'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

4. *x+y-3z+5=0*; *2x-3y+z-7=0* to'g'ri chiziq va *M(1;2;3)* nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

5. $y=2x+1$; $2z=5x+6$ to'g'ri chiziq va $x+2y-z+3=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

6. $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{4}$ to'g'ri chiziqdan o'tib, $x-3y+5z=4$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

7. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}$ va $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$ parallel to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $3x+5y-z+8=0$ tekislikning kesishgan nuqtasi topilsin.

9. $y=2x+5$ *va* $z=3x-6$ to'g'ri chiziq bilan $5x-3y+z+7=0$ tekislikning kesishgan nuqtasi topilsin.

10. $M(3;-2;-5)$ nuqtadan o'tib, $2x-6y+3z+5=0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

11. $M_1(2;3;-1;)$ va $M_2(1;5;3)$ nuqtalardan o'tib, $3x-y+3z+15=0$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

12. $2x+3y-5z+30=0$ tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari koordinatalari topilsin.

13. $M_1(1;2;3)$ nuqtadan o'tib, $x-y+z-7=0$ va $3x+2y-12z+5=0$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

14. Oy o'qqa parallel hamda $M_1(1;3;4)$ va $M_2(2;5;-6)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

15. $A(3;-2;1)$ va $B(0;3;5)$ nuqtalar orqali o'tuvchi hamda OX va OY koordinata o'qlaridan musbat va o'zaro teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamalari tuzilsin.

16. $2x-y-z-1=0$; $x-y=0$; $x+2z-4=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasidan, koordinatalar boshidan va $A(7;1;2)$ nuqta orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

17. *x+y-z+1=0* tekislik bilan *XOZ* koordinata tekisligining kesishish chizig'I orqali o'tib, *x-3y+z=0* tekislikka perpendikulyar bo'lgan tekislikning tenglamasi tuzilsin.

18. $M_1(1;1;-2)$ va $M_2(-2;4;1)$ nuqtalardan o'tib, *x-z-1=0* tekislik bilan $\varphi = \frac{\pi}{3}$ burchak hosil qiluvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

19. *M(2;-5;3)* nuqtadan o'tib, *OУ* o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning kanonik va parametric tenglamalari tuzilsin.

20. Ikki to'g'ri chiziq

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=0 \\ 2x+y-2z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+y-6z-2=0 \\ y-3z-2=0 \end{cases}$$ orasidagi burchakni toping.

21. *A(*1;-1;2*)* nuqtadan o'tib, $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

22. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan:

*A(*2;3;*-1), B(1;-2;0)* va *C(-3;2;2)*

АД medianasining kanonik tenglamasi tuzilsin.

23. *A(4;-3;1)* nuqtadan o'tib, *УOZ* koordinatalar tekisligining bissektrisasiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

24. *A(4;-3;1)* nuqtadan o'tuvchi hamda $\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-3}$ va $\frac{x+5}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{x-4}{2}$ to'g'ri chiziqlarga parallel tekislikning tenglamasi tuzilsin.

25. $\begin{cases} x-y+3=0 \\ 6y+1=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq orqali o'tib, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+1}{4}$ to'g'ri chiziq bilan kesishib, 45°li burchak hosil qiluvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

26. *A(4;-3;1)* nuqtaning *x+2y-z-3=0* tekislikdagi proeksiyasi topilsin.

27. *A(3;-3;0)* nuqtadan hamda $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{5}$ to'g'ri chiziq bilan $3x-4y+2z-1=0$ tekislikning kesishish nuqtasi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

28. *A(2;-3;-7)* nuqtadan o'tib, $2x-6y-3z+5=0$ tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

29. *M(2;2;-2)* nuqtadan va $3x-2y-z+1=0$ bilan x-y-z=0 tekisliklarning kesishish chizig'i orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

30. *A(2;3;-1)* va *B(-1;2;4)* nuqtalardan o'tib, OZ o'qqa parallel bo'lgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

MUNDARIJA