



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA  
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**QARSHI MUXANDISLIK IQTISODIYOT INSTITUTI**

**Muhandis texnika fakulteti  
Transport yo'nalishi  
1-kurs 142- guruh talabasining**

**Ikkinchi tartibli egri chiziqlar**  
Mavzusida yozgan

# **REFERATI**

**Bajardi:  
Tekshirdi:**

**X. G'aybullayev  
f.-m.f.n. K.Xolov**

**QARSHI-2014**

**Reja:**

1. Aylana va uning kanonik tenglamasi
2. Elleps va uning kanonik tenglamasi
3. Giperbola va uning kanonik tenglamasi
4. Parabola va uning kanonik tenglamasi

## Mavzu: Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

### 1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha

**1-ta'rif.**  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  (1) ko'rinishdagi tenglama **ikkinchi darajali algebraik tenglama** deb ataladi.

Bu yerdagi  $A, B, C, D, E, F$  ma'lum sonlar bo'lib ulardan  $A, B, C$  bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya'ni  $A=B=C=0$  bo'lganda (1) tenglama

$$Dx + Ey + F = 0$$

ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

**2-ta'rif.** Dekart koordinatalari  $x$  va  $y$  ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deb ataladi. (1) ikkinchi tartibli egri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziq'larga **aylana, ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

### 2. Aylana va uning kanonik tenglamasi

**3-ta'rif.** Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **aylana** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi  $O_1(a;b)$  nuqtada bo'lib radiusi  $R$  ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (1<sup>a</sup>-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini  $M(x;y)$  desak aylananing ta'rifiga binoan:

$$MC_1 = R.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib

aylananing istalgan  $M(x;y)$

nuqtasining kooordinatalari (2)

tenglamani qanoatlantirar ekan.

Shuningdek aylanaga tegishli

bo'lmagan hech bir nuqtaning

koordinatalari (2) tenglamani

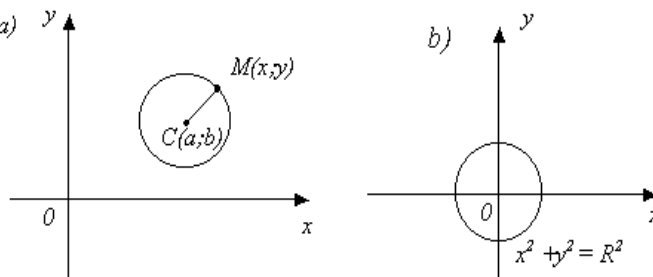
qanoatlantirmaydi. Demak (2)

aylana tenglamasi.

U aylananing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiyl holda aylananing markazi  $C_1(a,b)$  koordinatalar boshida bo'lsa  $a=b=0$  bo'lib uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (3)$$



1-rasm

ko'rinishga ega bo'ladi ( $1^b$ -chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan taqqoslaymiz. (2) da qavslarni ochib ma'lum almashtirishlarni bajarsak u

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (1) bilan taqqoslab unda  $x^2$  bilan  $y^2$  oldidagi koeffitsientlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi  $xy$  ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni  $A=C$  va  $B=0$ .

(1) tenglamada  $A=C$  va  $B=0$  bo'lsa u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.

Soddalik uchun  $A=C=1$  deb olamiz. Aks holda tenglamani  $A$  ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamani hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan  $\frac{D^2}{4}$  va  $\frac{E^2}{4}$  ni ham qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} + F = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F \quad (6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1)  $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$  (yoki  $D^2 + E^2 > 4F$ ). Bu holda (6) tenglamani (2) bilan

taqqoslab u va unga teng kuchli (9.5) tenglama ham markazi  $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$  nuqtada,

radiusi  $R = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$  bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2)  $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F = 0$ . Bu holda (9.6) tenglama

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona  $O_1\left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right)$  nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3)  $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F < 0$ . Bu holda (9.6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

**Xulosa.** (1) tenglama  $A=C$ ,  $B=0$ ,  $\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F > 0$

bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

**1-misol.**  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$  tenglama aylanani tenglamasi ekanligi ko'rsatilsin va aylanani markazi hamda radiusi topilsin.

**Yechish.**  $A=C=1$ ,  $B=0$ ,  $\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F = 1^2 + 2^2 - (-4) = 9 > 0$ ,

demak berilgan tenglama aylanani umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 1 - 4 - 4 = 0$$

ko'rinishda yozib undan

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

aylanani kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylanani markazi  $O_1(-1;2)$  nuqta va radiusi  $R=3$  ekan.

**2-misol.**  $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 4 = 0$  tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligi ko'rsatilsin.

**Yechish.** Tenglamani  $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 1 + 4 = 0$

ko'rinishda yozsak undan  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = -2$

tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

### 3. Ellips va uning kanonik tenglamasi

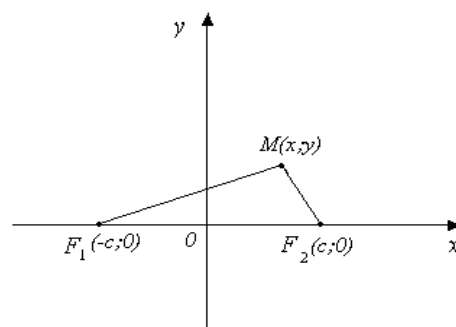
**4-ta'rif.** Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **ellips** deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini  $F_1$  va  $F_2$  orqali belgilab ularni ellipsning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani  $2c$  va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini  $2a$  orqali belgilaymiz.  $Oxy$  dekart koordinatalar sistemasini  $Ox$  o'qini ellipsning fokuslari  $F_1$  va  $F_2$  orqali o'tkazib  $F_1$  dan  $F_2$  tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa  $F_1F_2$  kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar  $F_1(-c;0)$ ,  $F_2(c;0)$  koordinatalarga ega bo'ladi (2-rasm).

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz.  $M(x,y)$  ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra  $M$  nuqtadan ellipsning fokuslari  $F_1$  va  $F_2$  gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son  $2a$  ga teng, ya'ni

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra



2-rasm

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

bo'lgani uchun

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$  yoki  $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$  kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}; cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Buni yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]; \quad a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2];$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2; \quad a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2;$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (7)$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak  $\Delta F_1MF_2$  dan (2-rasm)  $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$ ;  $2a > 2c$ ;  $a > c$ ;  $a^2 - c^2 > 0$  ( $a > 0$ ,  $c > 0$ ) bo'ladi.

$a^2 - c^2 = b^2$  deb belgilab uni (9.7) ga qo'yamiz. U holda

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki buni  $a^2b^2$  ga bo'lsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy  $M(x,y)$  nuqtasini koordinatalari (8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning **kanonik tenglamasi** deb ataladi. Koordinatalar boshi **ellipsning markazi** deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning **simmetriya o'qlari** bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning **fokal o'qi** deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni **uchlari** deyiladi.  $A_1(-a;0)$ ,  $A(a;0)$ ,  $B_1(0;-b)$ ,  $B(0;b)$  nuqtalar ellipsning uchlari.

$a$  va  $b$  sonlar mos ravishda ellipsning **katta** va **kichik yarim o'qlari** deyiladi.  $\frac{c}{a}$  nisbat ellipsning **ekssentrisiteti** deyiladi va  $\varepsilon$  orqali belgilanadi. Ellips uchun  $0 < \varepsilon < 1$  bo'ladi, chunki  $c < a$ . Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Haqiqatan,  $a^2 - c^2 = b^2$  tenglikni  $a^2$  ga bo'lsak  $1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$  yoki

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$  bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$  bo'lganda ellips tenglamasi  $x^2+y^2=a^2$  ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$ , bo'lgani uchun  $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$  bo'ladi.

Demak aylana eksentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

Endi ellipsni shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I-chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (8)ni  $y$  ga nisbatan yechsak

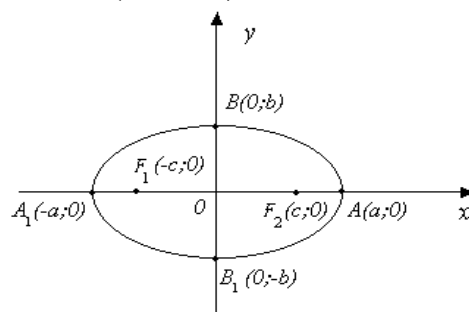
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}; \quad y^2 = b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right); \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2); \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

bo'ladi, bunda  $0 < x < a$ , chunki  $x > a$  bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi.  $x$  0 dan  $a$  gacha o'sganda  $y$   $b$  dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I-chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan  $B(0,b)$  va  $A(a,0)$  nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (3-rasm).

Ellipsning kanonik tenglamasida  $x$  ni  $-x$  ga va  $y$  ni  $-y$  ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asoslanib uning shakli 3-rasm ko'rsatilgandek ekanligiga iqror bo'lamiz.



3-rasm

**3-misol.** Kichik yarim o'qi  $b=4$  va eksentrisiteti  $\varepsilon=0,6$  bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi yezilsin.

**Yechish.** Shartga ko'ra  $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$ ;  $c = 0,6a$ ,  $a^2 - c^2 = b^2$  tenglikka  $c$  va  $b$  ning qiymatlarini qo'yib  $a$  ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0,6a)^2 = 4^2; \quad a^2(1 - 0,36) = 16; \quad 0,64a^2 = 16; \quad a^2 = \frac{16}{0,64} = 25.$$

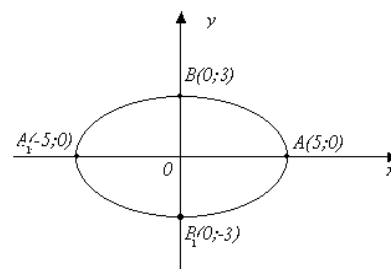
Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  ko'rinishda bo'lar ekan.

**4-misol.**  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$  tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

**Yechish.** Berilgan tenglamani  $9x^2 + 25y^2 = 225$  ko'rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama yarim o'qlari  $a=5$ ,  $b=3$  bo'lgan ellipsni tenglamasi ekan (4-rasm)



4-rasm

**5-misol.**  $4x^2 - 16x + 9y^2 - 54y + 61 = 0$  egri chiziq chizilsin.

**Yechish.** Tenglamani  $4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) + 61 = 0$ ;

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) - 16 - 81 + 61 = 0; \quad 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 36$$

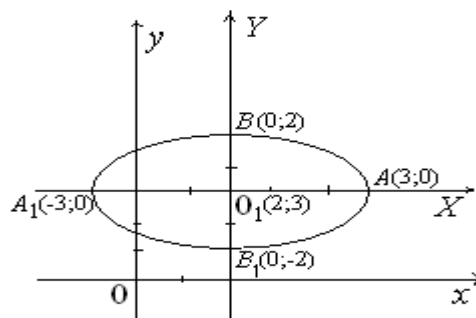
ko'rinishda yozib buni 36 ga bo'lsak  $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$  yoki

$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1$  tenglama hosil bo'ladi.  $x-2=X$ ;  $y-3=Y$  almashtirish olsak

$$\frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \text{ kelib chiqadi.}$$

Bu ellipsning  $O_1XY$  sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar  $Oxy$  "eski" sistemani  $O_1(2,3)$  nuqtaga parallel kuchirilsa ya'ni  $O_1XY$  sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan (5-rasm)



5-rasm

#### 4.Giperbola va uning kanonik tenglamasi

**5-ta'rif.** Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga **giperbola** deb ataladi.

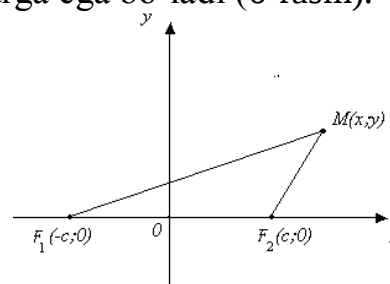
Tekislikning berilgan nuqtalarini  $F_1$  va  $F_2$  orqali belgilab ularni gepirbolaning **fokuslari** deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani  $2c$  va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning ayirmasini  $\pm 2a$  orqali belgilaymiz.  $Oxy$  dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya'ni  $Ox$  o'qni  $F_1$ ,  $F_2$  fokuslaridan o'tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini  $F_1F_2$  kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar  $F_1(-c,0)$ ,  $F_2(c,0)$  koordinatalarga ega bo'ladi (6-rasm).

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz.  $M(x,y)$

giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Ta'rifga binoan giperbolaning  $M$  nuqtasidan uning fokuslari  $F_1$  va  $F_2$  gacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas son  $\pm 2a$  ga teng, ya'ni



6-rasm

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan  $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$  va  $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$  bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o'xshash amallarni bajarib

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (10)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki uchburchakning ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko'ra  $\Delta F_1MF_2$  dan

$F_1M - F_2M < F_1F_2$ ;  $2a < 2c$ ;  $a < c$ ;  $a^2 - c^2 < 0$  ( $a > 0, c > 0$ ) hosil bo'ladi. Shuning uchun  $a^2 - c^2 = -b^2$  yoki  $c^2 - a^2 = b^2$  deb belgilab olamiz. U holda (10) formula

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \text{ yoki } b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni  $a^2b^2$  ga bo'lib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbolaning ixtiyoriy  $M(x,y)$  nuqtasini koordinatalari (11) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi.

(11) giperbolaning **kanonik** tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida  $x$  va  $y$  juft darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi.

Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Giperbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi **giperbolaning markazi** deb ataladi.

Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I-chorakda chizamiz.

Giperbolaning kanonik tenglamasi (11) dan

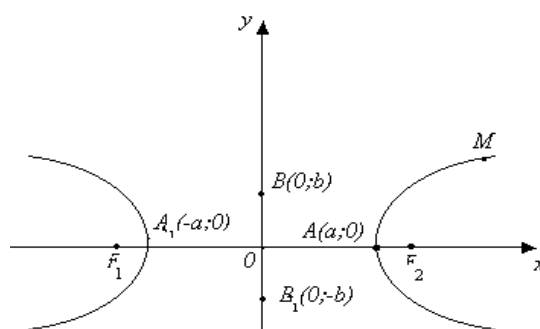
$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1; \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}; \quad y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}; \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

kelib chiqadi, chunki I-chorakda  $y \geq 0$ . Bunda  $x \geq a$ , aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi).  $x$   $a$  dan  $+\infty$  gacha o'zgarganda  $y$  0 dan  $+\infty$  gacha o'zgaradi. Demak giperbolaning I-chorakdagi qismi 7-rasm tasvirlangan  $AM$  yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan hisobga olsak uning shakli 7-rasm tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga  $y=0$  ni qo'ysak  $x=\pm a$  kelib chiqadi. Demak  $A_1(-a;0)$  va  $A(a;0)$  nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi.

Giperbolaning tenglamasi (9.11) ga  $x=0$  ni qo'ysak  $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ ;  $y = \pm \sqrt{-b^2}$  bo'ladi.



7-rasm

Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak giperbola 0y o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi **haqiqiy o'qi** unga perpendikulyar o'qi **mavhum o'qi** deb ataladi.

$a$  va  $b$  sonlar mos ravishda giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum yarim o'qlari** deyiladi.

Giperbolaning  $M$  nuqtasi u bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan  $y = -\frac{b}{a}x$  va  $y = \frac{b}{a}x$  to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari  $y = -\frac{b}{a}x$  va  $y = \frac{b}{a}x$  to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar **giperbolaning asimptotalari** deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari  $Ox$  va  $Oy$  o'qlarga parallel va mos ravishda  $2a$  va  $2b$  ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

To'rtburchakni diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi (8-rasm).

$\frac{c}{a}$  nisbat giperbolaning **ekssentrisiteti** deb ataladi va  $\varepsilon$  orqali belgilanadi.

Giperbola uchun  $c > a$  bo'lganligi sababli  $\varepsilon > 1$  bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan,  $c^2 - a^2 = b^2$  tenglamani har ikkala tomonini  $a^2$  ga bo'lsak  $\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$  yoki

$\varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$  kelib chiqadi.  $\varepsilon$  kichrayganda  $\frac{b}{a}$  nisbat ham kichrayadi. Ammo  $\frac{b}{a}$

nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi.  $\varepsilon$  qanchalik kichik bo'lsa  $\frac{b}{a}$  nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsientlari ham shunchalik kichik bo'ladi va giperbola  $Ox$  o'qqa yaqinroq joylashadi.

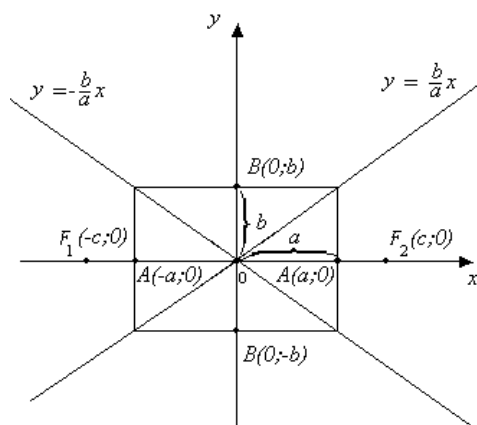
Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi  $Ox$  o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.

Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola **teng tomonli** yoki **teng yonli** deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y = x$  va  $y = -x$  to'g'ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'lib uning ekssentrisiteti  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}$  bo'ladi.



8-rasm

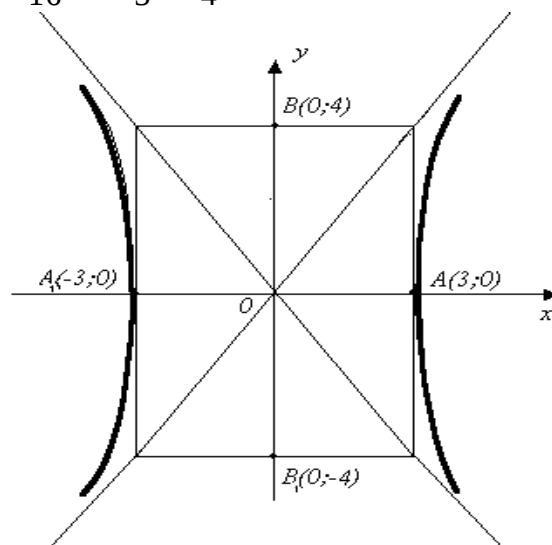
**6-misol.**  $16x^2 - 9y^2 = 144$  egri chiziq chizilsin.

**Yechish.** Uni har ikkala tomonini 144 ga bo'lsak

$$\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o'qlari  $a=3$  va  $b=4$  bo'lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz.

Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz. Giperbolaning uchlari  $A_1(-3;0)$  va  $A(3;0)$  nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo'ladi (9-rasm).



9-rasm

**7-misol.**  $y = \frac{k}{x}$  funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko'rsatilsin.

**Yechish.** Koordinata o'qlarini  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  burchakka burib "yangi"  $OXY$  sistemani hosil qilamiz. Bu holda «yangi» koordinatalardan «eski» koordinatalarga o'tish formulasi  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$  ko'rinishda bo'ladi.  $x$  va  $y$  ning ushbu qiymatlarini  $y = \frac{k}{x}$  tenglamaga qo'ysak  $\frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)}$ ;

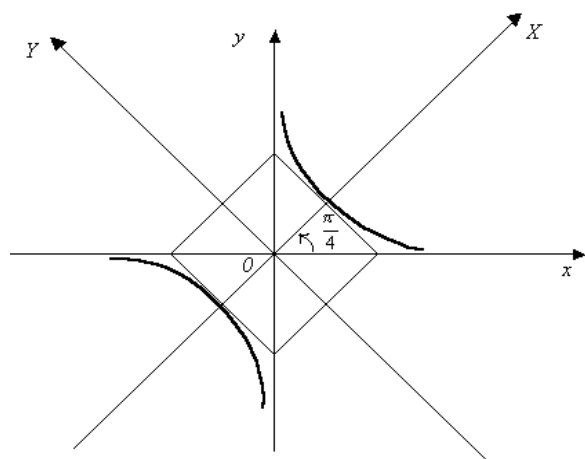
$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)(X - Y) = k$  yoki  $X^2 - Y^2 = 2k$  hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi.  $k > 0$  bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi  $OX$  bilan,  $k < 0$  bo'lganda  $OY$  o'q bilan ustma-ust tushadi.

$k > 0$  bo'lgan hol uchun giperbola 10-rasm tasvirlangan.

$Ox$ ,  $Oy$  “eski” o’qlar  $OXY$  “yangi” sistemani koordinata burchaklarini bissektoralari bo’lgani uchun ular teng tomonli giperbolani asimptotalari bo’ladi.

Shunday qilib  $y = \frac{k}{x}$  funksiyaning grafigi asimptotalari  $Ox$  va  $Oy$  o’qlardan iborat tengtomonli giperbola bo’lar ekan.

Shuningdek  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  kasr-chiziqli funksiyaning grafigi ham asimptotalari koordinata o’qlariga parallel tengtomonli giperbola ekanligini ko’rsatish mumkin.



10-rasm

## 5. Parabola va uning kanonik tenglamasi

**6-ta’rif.** Berilgan nuqtadan hamda berilgan to’g’ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o’rniga **parabola** deb ataladi.

Berilgan nuqtani  $F$  orqali belgilab uni parabolaning **fokusi** deb ataymiz. Berilgan to’g’ri chiziqni parabolaning **direktrisasi** deb ataladi. (Fokus direktrisa yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani  $p$  orqali belgilaymiz va uni parabolaning **parametri** deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Absissalar o’qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o’tkazib yo’nalishini direktrisadan fokusga tomon yo’naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa  $FR$  ning qoq o’rtasiga joylashtiramiz (11-rasm).

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  koordinatalarga, direktrisa  $x = -\frac{p}{2}$  tenglamaga ega bo’ladi.

Faraz qilaylik  $M(x; y)$  parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo’lsin. Parabolaning ta’rifiga binoan

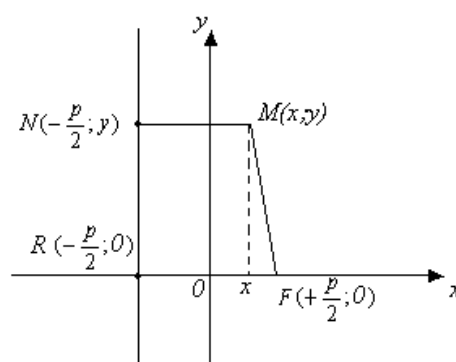
$M$  nuqtadan direktrisagacha  $MN$  masofa undan fokusgacha  $MF$  masofaga teng:  $MN=MF$ .

11-rasmdan  $MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = x + \frac{p}{2}$  va  $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$  ekani ravshan.

$$\text{Demak, } x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko’tarib ixchamlasak

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \quad \text{yoki} \quad y^2 = 2px \quad (12)$$



11-rasm

hosil bo'ladi.

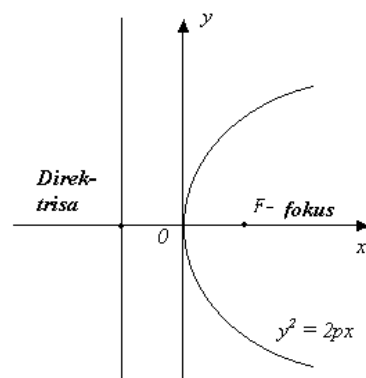
Shunday qilib parabolaning istalgan  $M(x,y)$  nuqtasining koordinatalari (12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabola yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak (9.12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning **kanonik tenglamasi** deb ataladi.  $p$  parabolaning parametri deb yuritiladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabolani shaklini chizamiz (12) tenglamada  $y$  ni  $-y$  ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu absissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni  $x$  ning ham manfiy bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola  $Oy$  o'qning o'ng tomonida joylashadi.  $x=0$  da  $y=0$ . Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi.

$x$  cheksiz o'sganda  $y$  ning absolyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 12-rasmda tasvirlangan.

Parabolaning simmetriya o'qi uning **fokal o'qi** deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning **uchi** deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.



12-rasm

**8-misol.**  $y^2=8x$  parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

**Yechish.** Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (12) bilan taqqoslab  $2p=8$ ,  $p=4$  ekanini ko'ramiz. Direktrisa  $x=-\frac{p}{2}$  tenglamaga, fokus  $(-\frac{p}{2}, 0)$  koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi  $x=-2$  va fokus  $F(2;0)$  bo'ladi.

**Izoh.** Fokal o'qi  $Oy$  o'qdan iborat parabolaning tenglamasi

$$x^2=2py \quad (13)$$

ko'rinishga ega bo'ladi

**9-misol.**  $y=3x^2-12x+16$  parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

**Yechish.** Tenglamani

$$y=3(x^2-4x)+16, y=3(x^2-4x+4-4)+16; y=3(x-2)^2+4; y-4=3(x-2)^2$$

ko'rinishga keltirib  $x-2=X$ ,  $y-4=Y$  deb belgilasak parabolaning tenglamasi

$$Y=3X^2$$

kanonik ko'rinishga keladi.  $x-2=X$ ,  $y-4=Y$  almashtirish bilan "eski"  $Oxy$  sistemani  $O_1(2;4)$  nuqtaga parallel ko'chirdik. "Yangi"  $O_1XY$  sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. "Yangi" sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo'ladi, ya'ni  $x_0=2$ ,  $y_0=4$ .

**10-misol.**  $F(0,4)$  nuqtadan hamda  $y=8$  to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni, egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.

**Yechish.**  $M(x,y)$  egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga binoan undan  $y=8$  to'g'ri chiziqqacha  $MN = \sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2}$  masofa va undan  $F(0,2)$  nuqttagacha

$$MF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

masofa o'zaro teng ya'ni,

$$\sqrt{(x-x)^2 + (8-y)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} \quad (13\text{-rasm}).$$

Bu tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak  $(8-y)^2 = x^2 + (y-4)^2$  yoki qavslarni ochsak.

$$64 - 16y + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16 \text{ yoki } 64 - 16y = x^2 - 8y + 16$$

hosil bo'ladi. Tenglamani soddalashtirish

$$-16y + 8y = x^2 + 16 - 64, \quad -8y = x^2 - 48$$

yoki  $-8$  ga bo'lsak

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + 6$$

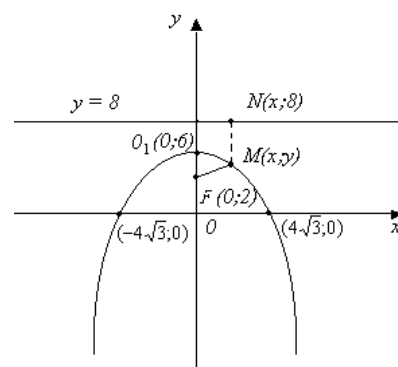
tenglamaga ega bo'lamiz. U Oy o'qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga  $x=0$  qiymatni qo'ysak  $y=6$  kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'q bilan  $O_1(0,6)$  nuqtada kesishar ekan. Shuningdek parabolga tenglamasiga  $y=0$  qiymatini qo'ysak  $-\frac{1}{8}x^2 + 6 = 0; -x^2 + 48 = 0; x^2 = 48; x = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$

hosil bo'ladi. Demak parabola Ox o'q bilan  $(-4\sqrt{3}, 0)$  va  $(4\sqrt{3}, 0)$  nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini  $y - 6 = -\frac{1}{8}x^2$  yoki  $x^2 = -8(y-6)$  ko'rinishda yozib  $x=X, y-6=Y$  almashtirish olsak uning tenglamasi  $X^2 = -8Y$  kanonik shaklni oladi.

**Izoh.** Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilganda koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani "yangi" sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.



13-rasm

## ADABIYOTLAR

1. Ё.У.Соатов-Олий математика 1-жилд.Тошкент, 1992й.
2. С.М.Николский-Курс математического анализа.1-том.Москва,1973й.
3. Б.Абдалимов,Ш.Солихов-Олий математика қисқа курси.Тошкент,1981й.
4. Э.Холмуродов,З.Узоқов-Экстремумлар назариясининг амалий масалалар ечишга тадбиқи,Қарши,1991й.
5. В.А. Шнейдер, А.И.Слущкий, А.С.Шумов-Олий математика қисқа курси. 1-қисм. «Ўқитувчи»,1983й.
6. Т.Н.Қори-Ниёзий-Аналитик геометрия асосий курси. Тошкент «Ўқитувчи»,1971й.
7. Ш.И.Тожиев-Олий математикадан масалалар ечиш.Тошкент, «Ўзбекистон»,2002й.