

O'zbekiston Respublikasi
Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

**«BOSHLANG'ICH TA'LIM
METODIKASI»
kafedrası**

Andijon Davlat universiteti Pedagogika fakul'tetining 2013.08.26 sanadagi O'quv-uslubiy kengashi yig'ilishida tasdiqlangan (Bayonnoma №1.) va ko'paytirishga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:

Kat.o'qit Abdullayev I.

Abdullayeva N.

Taqrizchi:

f.m.f.n, dotsent Q.Abdullayev

SO'Z BOSHI

Ushbu ma'ruzalar matni «TSMG» Ta'limi yo'nalishining 1-bosqich talabalariga mo'ljallab yozildi. Ushbu kitobda 35 ta ma'ruza keltirilgan bo'lib, har bir ma'ruza oxirida tayanch iboralar, takrorlash uchun savollar va tegishli adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

Ma'ruzalar matnlari «Oliy matematika asoslari» bo'yicha davlat standartida berilgan mavzularning asosiy qismining o'z ichiga oladi, mavzularning qolgan qismi mustaqil ishlarga ajratilgan bo'lib, ularni talabalar o'qituvchi nazorati ostida mustaqil ravishda o'rganayaptilar.

«Kimyo», «IO'M», «Geografiya» yo'nalishlarining «Oliy matematika»dan davlat standartlari ham yuqoridagi «Mexnat» bo'limi standartiga mosligi uchun bu fakultetlarda makzur ma'ruzalar matnidan foydalanish mumkin.

Oliy matematika asoslari fanidan ma'ruzalar matni

A N N O T A T S I Y a

Ushbu “Oliy matematika asoslari fanidan ma'ruzalar matni ” o'quv qo'llanmasi universitetning “TSMG” ta'limi yo'nalishi talabalari uchun moslab yozilgan. Har bir mashg'ulot uchun zarur chizmalar va nazariy ma'lumotlar qisqacha keltirilgan va mavzuga oid na'munaviy misollar berilgan. Har bir mavzudan so'ng, o'tilgan materiallarni mustaxkamlash uchun savollar, adabiyotlar ro'yxati bor.

Mazkur qo'llanmadan «Kimyo», «IO'M», «Geografiya» kabi yo'nalishlarda ham foydalanish mumkin.

Kafedra mudiri:

Tojiyev O.

MUNDARIJA

1. So'z boshi.....	3
2. 1-Ma'ruza: Tekislikda koordinatalar metodi.....	4
3. 2-Ma'ruza: To'g'ri chiziq. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi. To'g'ri chiziqning turli tenglamalari.....	6
4. 3-Ma'ruza: To'g'ri chiziqning normal tenglamasi. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi masofa.....	9
5. 4-Ma'ruza: Aylana. Ellips. Giperbola. Parabola.....	12
7. 5-Ma'ruza: Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar va ularning xossalari. Chizikli tenglamalar sistemasi.....	27
8. 6-Ma'ruza: Vektor. Vektorlar ustida amallar. Skalyar ko'paytma. Vektor ko'paytma.....	35
9. 7-Ma'ruza: To'plam va ular ustida amallar. Ratsional sonlar to'plami. Irratsional sonlar.....	41
10. 8-Ma'ruza: Funksiya. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar. Juft va toq funksiyalar. Davriy funksiyalar. Monoton funksiyalar. Teskari funksiyalar.....	48
11. 9-Ma'ruza: Elementar funksiyalar.....	62
12. 10-Ma'ruza: Sonlar ketma-ketligi va uning limiti. Chegaralangan ketma-ketliklar. Monoton ketma-ketliklar. Ketma-ketlikning limiti.....	65
13. 11-Ma'ruza: Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. Ularni taqqoslash. e-soni va ajoyib limitlar.....	72
14. ADABIYOTLAR.....	84

1-MA'RUZA TO'PLAM VA ULAR USTIDA AMALLAR.

REJA:

1. To'plam haqida tushuncha.
2. To'plam ustida amallar.
3. Ratsional sonlar to'plami.
4. Irratsional son ta'rifi va Dedikind metodi.

To'plam tushunchasi matematikani boshlang'ich tushunchalaridan bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. To'plam tushunchasi nimalardan iborat ekanligini tushunish uchun quyidagi misollarga murojaat qilamiz.

- 1) Shu auditoriyadagi studentlar to'plami.
- 2) Hamma butun sonlar to'plami.
- 3) Tekislikdagi biror nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq to'plami
- 4) Markazi berilgan nuqtada bo'lgan aylanalar to'plami.
- 5) N natural sonlar to'plami va hokazo.

Matematikada to'plam haqida so'z yuritilganda, bir qancha narsalar bittaga birlashtirilib qaraladi va A, B, C, D, \dots harflar bilan belgilanadi. Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, har bir to'plam nomining o'zi qaysi elementlar bu to'plamga kiritilganini ko'rsatib turibdi. To'plam elementlari kichik a, b, c, d, \dots harflar bilan belgilanadi. Agar A to'plam a, b, c elementlardan tashkil topgan bo'lsa, $A = \{a, b, c\}$ kabi yoziladi. Agar A to'plamni ixtiyoriy elementini X harfi bilan belgilasak, uni $A = \{x\}$ kabi yozamiz. Masalan, barcha natural sonlar to'plamini N desak, $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ kabi belgilanadi, buni yana $A = \{n\}$ kabi ham yozish mumkin.

Agar biror a narsa A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ ko'rinishida yoziladi. $a \notin A$ belgilash esa a element A to'plamga tegishli emasligini bildiradi. Masalan, natural sonlar to'plamini N bilan

belgilasak, u holda $5 \in N$, $7 \in N$, $0 \notin N$, $5,2 \notin N$ ko'rinishlarda yozish mumkin. Birorta elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi.

Masalan, parallel to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari to'plami, $x^2+1=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami, kvadrati ikkiga teng bo'lgan ratsional sonlar to'plami va hokazo. Bo'sh to'plam odatda \emptyset simvol bilan belgilanadi. A va B to'plamlar bir xil elementlardan iborat bo'lsa, teng to'plamlar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi. Bundan tashqari matematikada yana quyidagi belgilashlar ham ishlatiladi.

\forall - har qanday degan belgi, \exists - mavjudki degan belgidir.

\wedge - va belgisi, \vee - yoki belgisidir.

\Leftrightarrow - bo'lganda faqat shundagina, \Rightarrow kelib chiqadi. Bu belgilashlarga ko'ra A va B to'plamlar tengligini quyidagicha yozish mumkin:

$$(A=B) \Leftrightarrow ((\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)).$$

A va B to'plamlar bir xil elementlarni o'z ichiga olganda va faqat shundagina tengdir.

Masalan, 1 dan 10 gacha bo'lgan natural sonlar to'plamlari bu sonlar qaysi tartibda joylashganligidan qat'iy nazar o'zaro tengdir. Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamning qism to'plami deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi. Bu ta'rifga ko'ra har qanday to'plam o'z-o'zining qism to'plami hisoblanadi.

Masalan, $N \subset Z$, $Q \subset R$, A - sinfdagi o'quvchilar to'plami, B - bir to'garakka qatnashuvchi o'quvchilar to'plami bo'lsa, $B \subset A$ kabi yoziladi.

Ko'pincha matematikada tadqiqot maqsadlariga qarab berilgan A to'plamdan barcha elementlari biror umumiy xossaga ega bo'lgan qism to'plam ajratiladi, unda A to'plamning hamma elementlari shu xossaga ega bo'lavermaydi. Uni quyidagicha yoziladi:

$\{x \in A \dots\}$ bu degan so'z A to'plamga tegishli va "... " xossaga ega bo'lgan barcha x lar to'plami. Masalan, 3 dan kichik natural sonlar to'plami B ni quyidagicha yozish mumkin: $B = \{x \in N: x < 3\} = \{1, 2\}$

Endi, $M = \{x: \dots\}$ belgilash $M = \{x \in R: \dots\}$ kabi belgilashga teng kuchlidir, ya'ni M to'plam "... " xossaga ega bo'lgan haqiqiy sonlar to'plami deganidir. Yuqoridagi belgilashlarga ko'ra ratsional sonlar to'plami Q ni quyidagicha ta'riflash mumkin.

$$Q = \{x: x = \frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\}$$

Ta'rif: A va B to'plamlarning kamida bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tuzilgan C to'plamga **to'plamlarning birlashmasi deyiladi** va

$$A \cup B \text{ yoki } C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ yoki } x \in B\}$$

kabi yoziladi.

Bu tushunchani istalgan chekli sondagi to'plamlar uchun ham kiritish mumkin. n ta A_1, A_2, \dots, A_n to'plamlar berilsa, ularning birlashmasi

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

kabi yoziladi.

Ta'rif: A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plam shu to'plamlar **kesishmasi deyiladi** va

$$D = A \cap B$$

kabi yoziladi. n ta to'plamlar kesishmasi esa

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

kabi yoziladi.

Ta'rif: A to'plamdan B to'plamning ayirmasi **deb**, A ga tegishli, lekin B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi va

$$E=A/B$$

kabi yoziladi.

Ta'rif: *A ning B da hamda B ning A da bo'lmagan elementlari to'plami shu to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va*

$$F=A\Delta B$$

kabi yoziladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, simmetrik ayirma

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

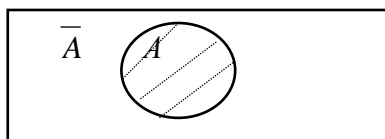
dan iborat ekan.

Ta'rif: *B to'plam A to'plamning qism to'plami bo'lganda A/B to'plam B ni A ga to'ldiruvchi to'plam deyiladi va \bar{B} yoki $C_A B$ kabi belgilanadi.*

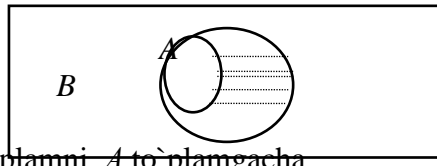
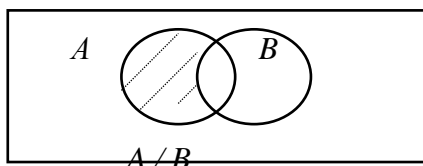
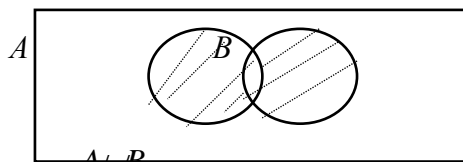
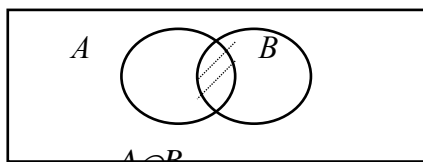
Ta'rif: *Har qanday to'plamning xos qism to'plami deb qaralmagan to'plam universal to'plam deyiladi va U bilan belgilanadi.*

Universal to'plamning barcha qism to'plamlari to'plamini $T(U)$ bilan belgilanadi. Bu holda $A \in T(U)$ ni $A \subseteq U$ deb tushiniladi. \emptyset va A to'plamlar uchun ham $\emptyset \in T(U)$ va $A \in T(U)$ o'rinlidir. $T(U)$ to'plamdan olingan istalgan ikkita A va B to'plamlar birlashmasi, kesishmasi hamda \bar{A} va \bar{B} to'plamlar $T(U)$ ning aniqlanishiga asosan yana $T(U)$ ga tegishli bo'ladi. U universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri uning o'zi va \emptyset to'plamdir, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi. U universal to'plam chekli bo'lsa, uning barcha qism to'plamlari ham chekli bo'ladi. U cheksiz bo'lsa, uning qism to'plamlari chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

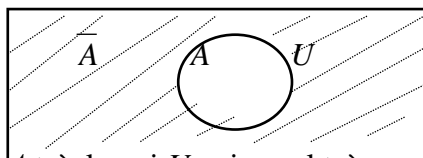
U universal to'plam to'g'ri to'rtburchak bilan, uning xos qism to'plamlarini shu to'rtburchak ichidagi doiralar bilan tasvirlanadi. Bu holda to'rtburchakning shtrixlangan qismi A qism to'plam bo'lsa, shtrixlanmagan qismi \bar{A} to'ldiruvchi to'plam bo'ladi.



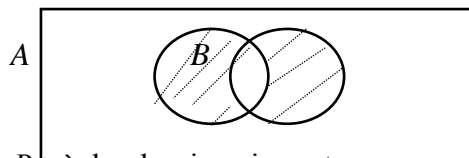
- 1) $A \cup \bar{A} = U$
- 2) $A \cup A = A$



B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam.



A to'plamni U universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam



A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi.

To'plamlarni bunday tasvirlash **Eyler-Venn diagrammalari** deyiladi.

To'plamlar ustida amallarning xossalari.

1-xossa. Istalgan ikkita A va B to'plamlarning kesishmasi va birlashmasi kommutativdir, ya'ni

$$A \cap B = B \cap A \quad (1)$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (2)$$

2-xossa. Birlashma va kesishma amallari assotsiativdir, ya'ni

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (3)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (4)$$

3-xossa. Uchta A , B va C to'plamlar ustida bajariladigan kesishma va birlashma amallari distributivlik qonuniga buysunadi, ya'ni

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (5)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (6)$$

4-xossa. Idempotentlik qonunlari o'rinlidir, ya'ni

$$A \cup A = A \quad (7)$$

$$A \cap A = A \quad (8)$$

5-xossa. Yutilish qonunlari o'rinlidir, ya'ni

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (9)$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (10)$$

6-xossa. De-Morgan qonunlari o'rinli, ya'ni

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (11)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (12)$$

7-xossa. $A \cup U = U \quad (13)$

8-xossa. $A \cap U = A \quad (14)$

9-xossa. Involyatsiya qonuni o'rinli, ya'ni

$$\overline{\overline{A}} = A \quad (15)$$

To'plamlarning dekart ko'paytmasi.

Ikkita bo'shmas A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif: A to'plam elementlarini birinchi, B to'plam elementlarini ikkinchi qilib tuzilgan barcha juftliklar to'plami A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi deyiladi va u

$$A \times B$$

kabi belgilanadi.

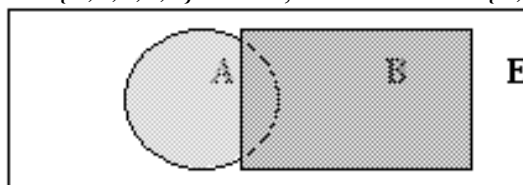
Ta'rif: Barcha elementlari A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan elementlardan tuzilgan to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi yoki ularning yig'indisi deyiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi.

Bu ta'rifni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

Misollar:

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ bo'lsa, u holda $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ dan iborat bo'ladi.



$$A \cup B = C$$

b) A - barcha manfiy bo'lmagan butun sonlar to'plami bo'lsin. B - barcha butun manfiy sonlar to'plami bo'lsin, u holda $A \cup B = Z$ barcha butun sonlar to'plami bo'ladi.

Ta'rif: Barcha elementlari A va B to'plamlarning har biriga tegishli bo'lgan elementlardan tuzilgan to'plamga A va B to'plamlarning kesishmasi deyiladi hamda $A \cap B$ kabi belgilanadi.

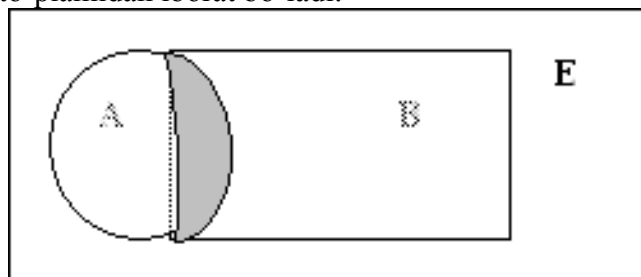
Bu ta'rifni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin.

$$(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \quad \text{yoki} \quad A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Misol. 1) $N \cap Z = N$ bo'ladi.

2) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 6, 7, 8, 9\}$ bo'lsa, $A \cap B = \{7, 9\}$ bo'ladi.

3) A - hamma romblar to'plami, B - hamma to'g'ri to'rtburchaklar to'plami bo'lsin, u holda $A \cap B$ hamma kvadratlar to'plamidan iborat bo'ladi.



$A \cap B$

To'plamlarning birlashmasi, kesishmasi sonlarning yig'indisi va ko'paytmalarining ko'p xossalarga o'xshash bo'ladi. Masalan, o'rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlari sonlar va to'plamlar uchun ham bir xil bo'lishligini quyidagicha ko'rsatish mumkin:

1) $a + b = b + a$ bo'lsa, $A \cup B = B \cup A$

2) $a \cdot b = b \cdot a$ bo'lsa, $A \cap B = B \cap A$

3) $(a + b) + c = a + (b + c)$ bo'lsa, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ bo'lsa, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Bunday o'xshashlik har doim ham o'rinli emas. Masalan, to'plamlarning quyidagi xossalari uchun to'g'ri emas.

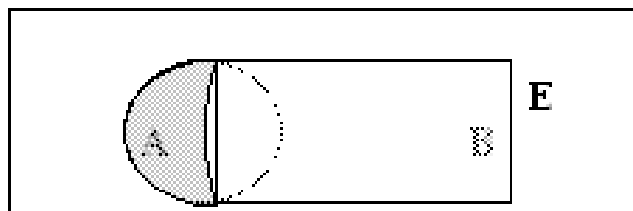
1) $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (C \cap B) \cup A$

2) $A \cup A = A$

3) $A \cap A = A$

Ta'rif: A to'plamning B to'plamda bo'lmagan hamma elementlariga A va B to'plamlarning ayirmasi deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi.

Misollar.



1) Agar $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \{3, 4\}$ bo'ladi.

2) Agar $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4\}$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \{1, 2, 5\}$ bo'ladi.

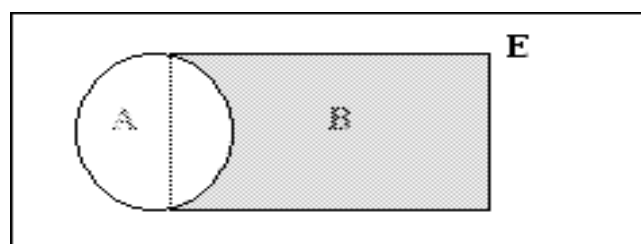
3) Agar $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ bo'lsa, u holda $A \setminus B = \emptyset$ bo'ladi.

Bu to'plamning ayirmasi ta'rifini matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \quad \text{yoki}$$

$$(A \setminus B) = \{x: x \in A, x \notin B\}$$

Agar $B \subset A$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlarning ayirmasi B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisi deyiladi va $S_A B$ kabi belgilanadi.



Misol:

1) Irratsional sonlar to'plami $\frac{p}{q}$ ratsional sonlar to'plamining haqiqiy sonlar to'plamigacha

to'ldirmasidir.

2) A - barcha to'g'ri to'rtburchaklar to'plami, B - kvadratlar to'plami, C - turli tomonli to'g'ri to'rtburchaklar to'plami bo'lsin, u holda $A \setminus B = C$ va $A \setminus C = B$ bo'ladi.

3) $Q \setminus R = \emptyset$

To'g'ri chiziqdagi istalgan bir nuqtani 0 nuqta deb olib uni O harfi bilan belgilaymiz. 0 dan o'ng tomonga musbat yo'nalish chap tomonga esa manfiy yo'nalish deb ma'lum bir kesmani o'lchov birligi sifatida qabul qilamiz. O'lchov birligini 0 dan o'ngga va chapga o'lchab joylashtirganda to'g'ri chiziqda $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ sonlarga mos nuqtalarni hosil qilamiz, bu nuqtalar butun nuqtalar, ularga mos keluvchi sonlarni esa butun sonlar deb ataladi va u Z harfi bilan belgilanadi.

$$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Ratsional sonlar to'plami.

Ta'rif: cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lgan sonlar ratsional sonlar deyiladi. Barcha musbat va manfiy butun va kasr sonlar nol soni bilan birgalikda ratsional sonlar

to'plamini hosil qiladi. Ratsional sonlar to'plamini yana quyidagicha ta'riflash mumkin. Barcha $\frac{p}{q}$

ko'rinishidagi sonlarga ratsional sonlar to'plami deyiladi. Bu erda $p, q \neq 0$ butun sonlar. Ratsional sonlar Q harfi bilan belgilanadi. Ratsional sonlar to'plami quyidagi muhim xossaga ega:

I. Q ratsional sonlar to'plami tartiblangan to'plamdir. Ixtiyoriy ikkita a va b ratsional sonlar olinsa, ular uchun $a=b, a>b$ yoki $a<b$ munosabatdan faqat bittasigina o'rinlidir.

II. Q ratsional sonlar to'plami zich joylashgan to'plamdir. Ixtiyoriy a va b ratsional son olinsa, bu ratsional sonlar orasida yotuvchi bitta yoki cheksiz ko'p ratsional son yotadi. Masalan,

$c = \frac{a+b}{2}$ ratsional son uchun $a < c < b$ bo'ladi. Ixtiyoriy ikkita a va b ratsional son orasida kamida

bitta ratsional son mavjudligidan bu ratsional sonlarning orasida cheksiz ko'p ratsional sonlarni mavjudligi kelib chiqadi.

Irratsional son ta'rifi.

Irratsional son tushunchasini nemis matematigi Dedikind (1831 - 1916) nazariyasi bo'yicha kiritamiz. Shu maqsadda biz barcha ratsional sonlar to'plamini ikkita bo'sh bo'lmagan A va A' to'plamlarga ajratamiz.

Ta'rif: Agar 1) har bir ratsional son A va A' to'plamlardan faqat bittasigina tegishli bo'lsin.

2) A to'plamga tegishli bo'lgan a ratsional son A' to'plamga tegishli bo'lgan a' ratsional son dan kichik bo'lsa, bu bo'linish ratsional sonlar to'plamida bajarilgan kesim deyiladi va uni (A/A') kabi belgilanadi. Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinda-diki, Q ratsional sonlar to'plamida kesim hosil bo'lishi uchun uning qism to'plamlari A va A' lar uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak ekan.

1) $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$

2) $A \cup A' = Q$

3) $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

SAVOLLAR.

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?
2. To'plamlar ustida amallarni tushuntiring?
3. Natural sonlar to'plamini tushuntiring?
4. Butun sonlar to'plamida qanday amallar o'rinli?
5. Ratsional sonlar to'plamida bajarilgan kesim turlarini ayting?
6. Qanday kesimga irratsional son deyiladi?

2-MA'RUZA VEKTOR. VEKTORLAR USTIDA AMALLAR.

REJA:

1. Vektor.
2. Kollinear vektorlar.
3. Vektorlar ustida amallar.
4. Skalyar ko'paytmaning ta'rifi.
5. Skalyar ko'paytmaning xossalari.
6. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
7. Ikki vektor tashkil qilgan burchak.
8. Mashqlar.
9. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi.
10. Vektor ko'paytma ta'rifi.
11. Vektor ko'paytma xossalari.
12. Uchburchakning yuzi.
13. Misollar.

1-ta'rif: Yo'naltirilgan kesmaga vektor deyiladi.

Uzunliklari teng bir xil yo'nalishli kesmalarni olsak, ular o'zaro teng vektorlar bo'lib, parallel ko'chirish orqali xar biri ikkinchisiga o'tadi. Vektorning yo'nalishi strelka orqali ko'rastiladi. Vektorning tartiblangan xarflar jufti yoki lotin alifbosining kichik xarflari orqali belgilanadi va ustiga strelka qo'yiladi. Masalan: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \vec{a} , \vec{b} . Bunda A vektorning boshi, V esa uning oxirini ifodalaydi.

2-ta'rif: Boshi bilan oxiri ustma-ust tushgan vektorga nol vektor deyiladi va $\vec{0}$ tarzida belgilanadi. Nol vektorning uzunligini nolga teng deb qabul qilingan.

3-ta'rif: Uzunligi birga teng bo'lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi. Vektorlar o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarga qarashli bo'lib, yo'nalishdosh yoki qarama-qarshi yo'nalishlarda bo'lishi mumkin. (5-chizma) Vektorlar yo'nalish-dosh bo'lsa, $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$, qarama-qarshi bo'lganda esa $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{CD}$ tarzida belgilanadi.

Ikki vektorning tengligi ularning bitta vektor ekanini, lekin turlicha belgilanganini bildiradi:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a} = \vec{b} \\ \vec{a} \uparrow \vec{b} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

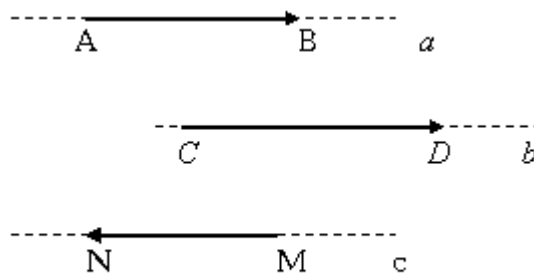
$|\vec{a}|$ -belgi \vec{a} vektorning uzunligini (yoki modulini) ifoda etadi.

4-ta'rif: Bitta to'g'ri chiziqqa yoki parallel to'g'ri chiziq-larga tegishli vektorlarni kollinear vektorlar deyiladi.

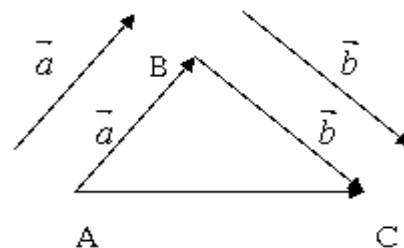
Kollinear vektorlar yo'nalishdosh yoki qarama-qarshi yo'nalishga ega bo'lishi mumkin.

Vektorlar ustida qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallarini bajarish mumkin.

5-ta'rif: Ikkita \vec{a} va \vec{b} vektorlarning yig'indisi deb istalgan A nuqtaga \vec{a} vektorni qo'yib, uning oxiri V ga \vec{b} vektorni qo'yganda boshi \vec{a} vektorning boshida, oxiri esa \vec{b} vektorning oxiri S nuqtada bo'lgan \overrightarrow{AS} vektorga aytiladi. \vec{a} va \vec{b} vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi.



5-чизма



6-чизма

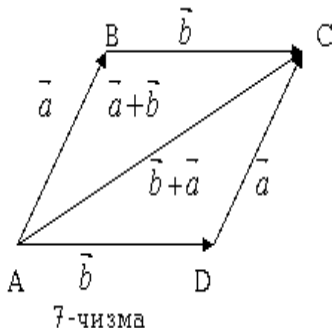
$$5\text{-ta'rifdan istalgan } A, V \text{ va } S \text{ uch nuqta uchun } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (2)$$

tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. (2) ni vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi. (6-chizma). Vektorlarni qo'shish quyidagi hossalarga ega: 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, ya'ni, qo'shishning o'rin almashtirish (kommutativlik) qonuni; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ qo'shishning gruppalash (assotsiativlik) hossasi; 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

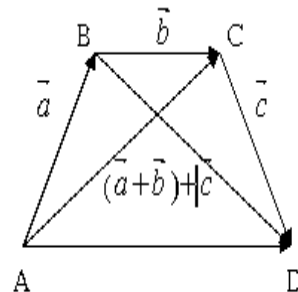
$$4) \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

1) va 2) hossalarni 7 va 8-chizmalar asosida osonlik bilan isbotlash mumkin.

Qo'shiluvchi vektorlarning soni ikkitadan ortiq bo'lganda o'larning yig'indisini hosil qilish uchun \vec{a} vektorning oxiriga \vec{b} vektorning boshini



7-чизма



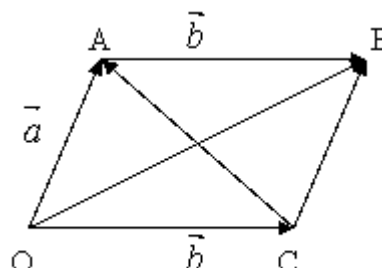
8-чизма

qo'yish, \vec{b} vektorning oxiriga \vec{c} vektorning boshini qo'yish va bu ishni oxirgi qo'shiluvchi vektor ustida bajarilguncha davom ettiriladi. u vaqtda $\vec{a} + \vec{b} + \dots + \vec{l}$ yig'indi vektor boshi \vec{a} vektorning boshidan, oxiri esa \vec{l} vektorning oxiridan iborat bo'ladi.

6-ta'rif: $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$ tenglikni qanoatlantiruvchi $\vec{a}' = -\vec{a}$ vektorga \vec{a} vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ uchun $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ tenglikdan \overrightarrow{AO} ning \overrightarrow{OA} uchun qarama-qarshi vektor ekanligini ko'ramiz.

7-ta'rif: \vec{a}, \vec{b} vektorlarning ayirmasi deb, \vec{a} vektor bilan \vec{b} vektorga qarama qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig'indisiga aytiladi.

9-chizmadan (parallelogramm) ko'ramizki, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{b}$.



9-чизма

8-ta'rif: $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorning $\lambda \in \mathbb{R}$ songa ko'paytmasi deb, shunday $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ vektorga aytiladiki, 1) $\lambda > 0$ bo'lganda $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$;

2) $\lambda < 0$ bo'lganda $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$ bo'lib, $\lambda = 0$ da $\vec{b} = \vec{0}$.

\vec{a} va \vec{b} vektorlar har vaqt o'zaro kollinearidir.

Hossalari: a) har qanday \vec{a} vektor uchun $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$. b) Xar qanday $\lambda \in \mathbb{R}$ uchun $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$; v)

Har qanday \vec{a} vektor uchun $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$ -birlik vektor bo'lib, $|\vec{a}_0| = 1$.

Teorema: \vec{a} va \vec{b} vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\lambda \in \mathbb{R}$ bo'lib, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ tenglikning bajarilishi zarur va etarli.

Isbot: Zaruriyligi: \vec{a} va \vec{b} kollener vektorlar bo'lsa, ular bitta yoki parallel to'g'ri

chiziq'larga tegishli bo'lib, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ bajariladi. $\pm \frac{\vec{b}}{|\vec{a}|} = \lambda$ deb belgilasak, $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ kelib chiqadi.

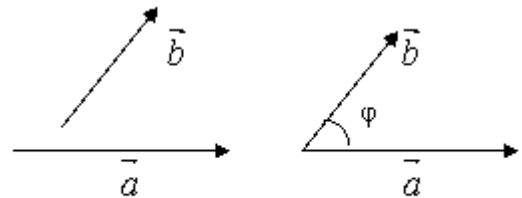
Yetarliliigi: $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ dan $\lambda > 0$ da $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, $\lambda < 0$ da $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, $\lambda = 0$ da esa $\vec{b} = 0$ bo'lib, \vec{a} va \vec{b} vektorlar kollinear vektorlardir.

V_3 da ikkita \vec{a} va \vec{b} vektorlarni qaraylik. Ularni biror O nuqtaga qo'yamiz.

Ta'rif: \vec{a} , \vec{b} vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb shu vektor larning uzunliklari bilan ular hosil qilgan burchak kosinusini ko'paytirishdan hosil qilingan songra aytiladi.

Skalyar ko'paytma $\vec{a} \vec{b}$ yoki (\vec{a}, \vec{b}) orqali belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi \quad (1)$$



12-чизма

Masalan: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 60^\circ$ bo'lsa, $(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Natija: Nol vektorni har qanday vektorga skalyar ko'paytmasi nolga teng.

Xossalari: 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ o'rin almashtirish o'rinli;

Isbot: $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ ko'ramizki, $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

3) Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ulardan birining uzunligi bilan ikkinchisining birinchisi yo'nalishiga tushirilgan proeksiyasi ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_a |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_b |\vec{a}|, \quad (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = |\vec{a}| \text{Pr}_a |\vec{b}| =$$

Isbot: $(\vec{b}, \vec{a}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{b} \wedge \vec{a}) = |\vec{b}| \text{Pr}_b |\vec{a}|$

chap tomonlarning tengligidan o'ng tomonning tengligi kelib chiqadi.

$$4) (\lambda \vec{a}) \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$5) \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Isbot: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$

Natijalar: 1) $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektorning uzunligi

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (6)$$

ga teng.

$$2) (1) \text{ dan } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (7)$$

(5) va (6) ni e'tiborga olsak,

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (8)$$

3) $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ va $\vec{a} = \{b_1, b_2, b_3\}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti (8) formula bo'yicha

quyidagicha aniqlanadi: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ (9)

1-misol: $\vec{a}(3,5)$, $\vec{b}(2,-1)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini aniqlang. $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$

Yechish: $(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1$.

2-misol: $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(1, -\frac{1}{2})$ vektorlar tashkil qilgan burchakni aniqlang.

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{0}{\sqrt{5} \sqrt{\frac{5}{4}}} = 0$$

3-misol: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, булса $|\vec{a} + \vec{b}| = ?$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2(\vec{a}\vec{b}) + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \varphi + |\vec{b}|^2} =$$

Yechish: $\sqrt{9 + 25 + 2 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{34 - 15} = \sqrt{19}$

Tekislikda koordinatalar sistemasi qanday kiritilgan bo'lsa, fazoda ham shunday kiritiladi.

OX, OY, OZ perpendikulyar to'g'ri chiziqlar O nuqtada kesishib, fazoni 8 ta oktantga ajratadi. OX o'qning musbat yo'nalishiga \vec{i} vektorni, OY o'qning musbat yo'nalishiga \vec{j} vektorni, OZ o'qning musbat yo'nalishiga \vec{k} vektorni qo'yamiz. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ $B\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ni dekart reper deb ataymiz.

Agar A nuqta B reperda $A(x_1, y_1, z_1)$ koordinatalarga, V nuqta B reperda $V(x_2, y_2, z_2)$ koordinatalarga ega bo'lsa, u holda

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

Agar S(x,u) nuqta AB to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib, AB kesmani λ nisbatda bo'lsa, u holda $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ (8) tenglik o'rinli bo'ladi.

A, V, S nuqtalarning koordinatalari orasida

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (3)$$

munosabatlar tekislikdagi kabi saqlanadi. S nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lganda

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{2}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{2}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{2} \quad (4)$$

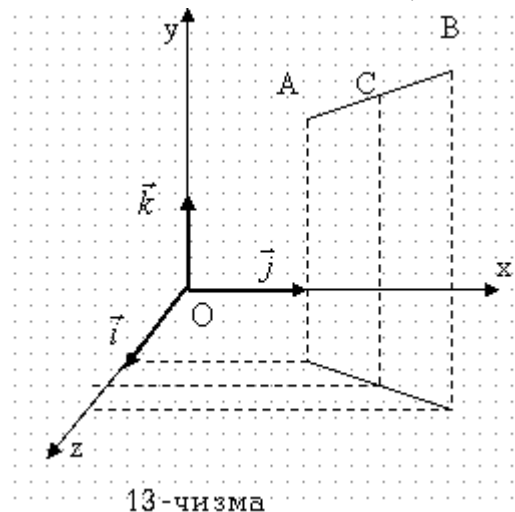
formulalarga ega bo'lamiz.

Ta'rif: \vec{a} va \vec{b} vektorlarning vektor ko'paytmasi deb quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi \vec{p} ga aytiladi:

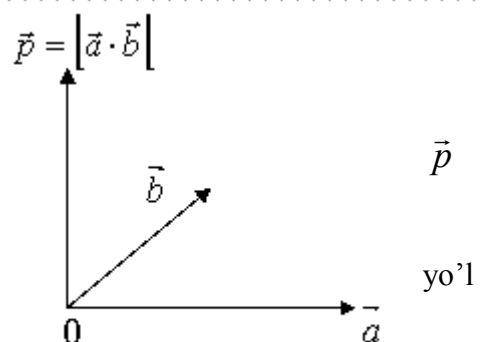
1) $|\vec{p}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$;

2) $\vec{p} \perp \vec{a}, \vec{p} \perp \vec{b}$;

3) \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} vektorlar umumiy boshga keltirilib, ning uchidan \vec{a} va \vec{b} vektorlar yotgan tekislikka qaraganda \vec{a} vektordan \vec{b} vektor tomonga qarab eng qisqa



13-чизма



14-чизма

bilan burilish soat strelkasi xarakteriga teskari bo'lsin, (o'ng sistema). Vektor ko'paytmani $\vec{p} = [\vec{a}, \vec{b}]$ bilan belgilaymiz.

Ta'rifdagi shartlar quyidagi geometrik ma'no kasb etadi:

1-shartdan \vec{p} vektorning moduli \vec{a} va \vec{b} vektorlar bo'yicha qurilgan parallelogramm yuziga tengligi kelib chiqadi.

2-shartdan $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektor ko'paytma parallelogramm tekisligiga perpendikulyar vektor ekanligini aniqlaydi.

3-shart \vec{p} vektorning yo'nalishini aniqlaydi. 14-chizmada \vec{a} , \vec{b} , \vec{p} vektorlar o'ng uchlik tashkil etadi.

1-misol: $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ vektorlarga yasalgan parallelogramm ning yuzini va uning diagonallari uzunliklarini toping.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = S(\#) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{6}. \quad d_1 = |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{14}, \quad d_2 = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}.$$

2-misol: Uchlari A(3,0,5), V(3,-2,2), S(1,2,4) nuqtalarda bo'lgan AVS uchburchak yuzini toping.

$$\text{Yechish: } \vec{AB} = -2\vec{j} - 3\vec{k}, \quad \vec{AC} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 8\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (|\vec{AB}, \vec{AC}|) = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 36 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{116} = \sqrt{29}.$$

3-MA'RUZA

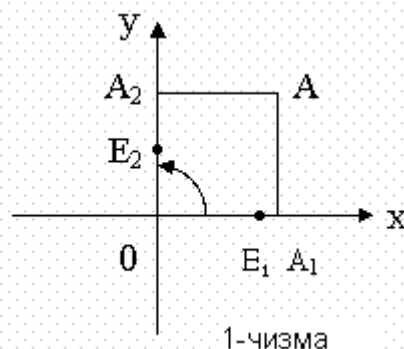
TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYANING SODDA MASALALARI.

REJA

1. To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.
2. Kesma uzunligi.
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Mavzuning bayoni: Tekislikda o'zaro perpendikulyar ikkita to'g'ri chiziqlarni qaraylik. O ularning kesishish nuqtasi bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlarda uzunlik bo'yicha $OE_1 = OE_2$ shartni qanoatlantiruvchi E_1 va E_2 nuqtalarni belgilaymiz. OE_1 va OE_2 to'g'ri chiziqlarni absissalar va ordinatalar o'qi deb ataladi va mos ravishda Ox va Oy orqali belgilanadi. O nuqtani esa koordinatalar boshi deyiladi. O nuqta o'qlarning har birini ikkita yarim o'qlarga ajratadi. Yarim o'qlardan birini shartli ravishda musbat, ikkinchisini esa manfiy deb ataymiz. chizmada musbat yarim o'q uchiga strelka qo'yamiz. $E_1 \in Ox$ nuqta $E_2 \in Oy$ nuqtaga O markaz atrofida soat strelkasiga teskari ravishda 90° burish orqali o'tadi. Tekislikning har bir A nuqtasiga ikkita x, y sonlarini mos keltiramiz.

A nuqtadan ordinata o'qi Oy ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, uning Oy o'qi bilan kesishgan nuqtasini A_2 orqali belgilaymiz. $A_1 \in Ox$ bo'lib, OA_1 kesma uzunligi x orqali belgilaymiz. A_1 nuqta musbat yarim o'qda yotsa x musbat son, manfiy yarim o'qda yotganda esa manfiy son bo'ladi. O nuqta bilan ustma-ust tushsa, 0 (nol) son bo'ladi. $A_2 \in Oy$ bo'lib, OA_2 kesma uzunligini y orqali belgilaymiz. y son x kabi musbat, manfiy yoki nol sonlar bo'lishi mumkin. x-ni A nuqtaning absissasi, y-ni esa ordinatasi deyiladi.



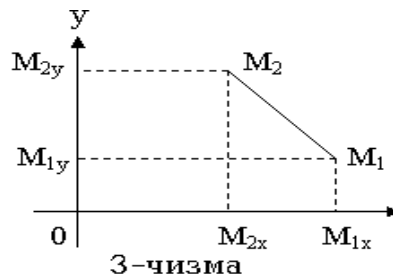
x, y sonlar juftini A nuqtaning koordinatalari deyiladi va $A(x,y)$ kabi belgilanadi. $A_1(x,0), A_2(0,y), O(0,0)$ koordinatalarga ega. Koordinata o'qlari kesishib, tekislikni to'rtta kvadratlarga ajratadi. Kvadratlardagi ixtiyoriy nuqta koordinatalarining ishorasi 2-chizmada tasvirlangan.

x, y haqiqiy sonlar jufti (x, y) tartibda berilgan bo'lsa, Oxy tekislikda birdan bir $A(x,y)$ nuqta mos keladi. chizmada A nuqtani ko'rsatish uchun Ox o'qda $A_1(x,0)$, Oy o'qda esa $A_2(0,y)$ nuqtalar belgilanadi. A_1 nuqtadan Oy o'qqa, A_2 nuqtadan Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ularning kesishish nuqtasi izlangan $A(x,y)$ nuqtadan iboratdir.

$x > 0, y > 0$ bo'lsa $A \in I$, $x < 0, y > 0$ bo'lsa $A \in II$,

$x < 0, y < 0$ bo'lsa $A \in III$ $x > 0, y < 0$ bo'lsa $A \in IV$.

Tekislikda $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi masofa deb M_1M_2 kesma uzunligiga aytiladi. M_1M_2 kesma uzunligini shu nuqtalarning koordinatalari orqali aniqlaylik. $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ bo'lsin. M_1 va M_2 nuqtalardan koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. M_1M_{1y} va M_2M_{2x} to'g'ri chiziqlar M nuqtada kesishadi. M_2MM_1 uchburchak to'g'ri burchakli, MM_1 kesma uzunligi $|x_1 - x_2|$ ga, MM_2 kesma uzunligi esa $|y_1 - y_2|$ ga teng. Pifagor teoremasini to'g'ri burchakli M_2MM_1 uchburchakka qo'llash orqali $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ ifodani hosil qilamiz. Bunda d M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi masofa yoki M_1M_2 kesma uzunligini ifoda etadi.



$$\text{Shunday qilib, } d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1)$$

ikki nuqta orasidagi masofaning formulasidir. M_1 va M_2 nuqtalar ustma-ust tushsa $d = 0$. Endi Oxy tekislikda A_1A_2 ikkita turli nuqtalar berilgan bo'lsin. A nuqta A_1A_2 kesmaga tegishli bo'lib, Uni $\lambda_1:\lambda_2$ nisbatda ajratsin. A nuqtaning x, y koordinatalarini A_1 va A_2 nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalash talab qilingan bo'lsin. A_1A_2 kesma Ox o'qqa parallel bo'lmasin. A_1, A, A_2 nuqtalarni Oy o'qqa proeksiyalaylik. A'_1, A', A'_2 nuqtalar Oy o'qdagi proeksiyalar bo'lsin. A_1BA va ACA_2 uchburchaklarning o'xshashligidan (mos burchaklari o'zaro teng)

$$\frac{A_1A}{A_1A_2} = \frac{A'A'}{A'A'_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (2)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A(x, y)$ nuqtalarning proeksiyalari $A'_1(0, y_1), A'_2(0, y_2), A'(0, y)$ koordinatalarga ega bo'lib,

$$A'A' = |y_1 - y|, A'A'_2 = |y - y_2| \quad (3)$$

(2) va (3) tengliklardan $\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ (4) kelib chiqadi.

A' nuqtaning $A'_1, A'_2 \in Oy$ nuqtalarning orasida yotishidan $y_2 - y$ va $y_1 - y$ sonlarning bir hil ishorali ekanligi kelib chiqadi. Bundan

$$\frac{|y_1 - y|}{|y - y_2|} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (5)$$

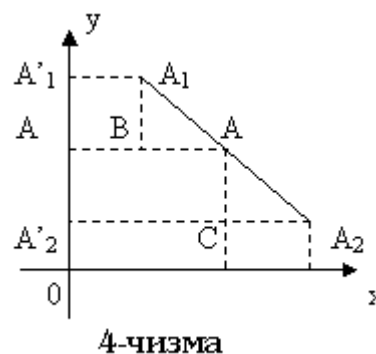
Ko'ramizki,

$$y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (6)$$

Yuqoridagi kabi mulohazalarni o'tkazib, A nuqtaning absissasi uchun

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (7)$$

formulani keltirib chiqaramiz. Agar $\lambda_1:\lambda_2$ ni λ bilan belgilasak,



$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (8)$$

formulalarga ega bo'lamiz.

(8) da $\lambda \neq 1$ shartni bajarilishini talab qilamiz. aks holda A va A₂ nuqtalar ustma-ust tushadi. Agar A nuqta A₁A₂ kesmaning o'rtasida yotsa, $\lambda = 1$ bo'lib,

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (9)$$

formula kelib chiqadi.

Agar A nuqta A₁A₂ kesmaning ichki nuqtasi bo'lsa, $\lambda > 0$. A₁A₂ to'g'ri chiziqning A₁A₂ kesmasidan tashqaridagi barcha nuqtalar uchun $\lambda < 0$ bo'ladi.

Misol: Uchlari A(1,1), B(5,4), S(13,6) orqali berilgan ABS uchburchak A burchak bissektrisasining BE tomon bilan kesishish nuqtasi aniqlansin.

Yechish: $\lambda > 0$ va $\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{d(AB)}{d(AC)}$; $d(AB) = \sqrt{16+9} = 5$; $d(AC) = \sqrt{144+25} = 13$.

$$x = \frac{5 + 5/13 \cdot 13}{1 + 5/13} = \frac{130}{18} = 7\frac{2}{9}; \quad y = \frac{4 + 5/13 \cdot 6}{1 + 5/13} = \frac{82}{18} = 4\frac{5}{9}. \quad \text{Жавоб: } \left(7\frac{2}{9}, 4\frac{5}{9}\right)$$

4-MA'RUZA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR AYLANA Reja

1. Aylana ta'rifi.
2. Normal va kanonik tenglamalari.
3. Aylananing umumiy tenglamasi va uni tekshirish.
4. Misollar.
- 5.

Ta'rif: Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan M_0 nuqtadan bir xil $r > 0$ masofada turuvchi nuqtalar to'plamini aylana deb ataladi.

P tekislik berilgan bo'lib, unda $B = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ dekart reper o'rnatilgan bo'lsin. M_0 nuqta B reperda $M_0(a, b)$ koordinatalarga ega bo'lsin. $M(x, y)$ nuqta aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $d(M_0, M) = r$, bunda d – masofa. Kesma uzunligi formulasidan

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

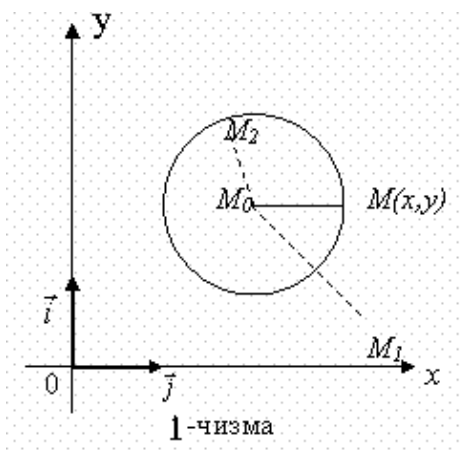
kelib chiqadi. Bundan

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (1)$$

(1) ni aylananing normal tenglamasi deyiladi. Bu tenglamani faqat aylana tegishli nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi.

Agar $M_1(x_1, y_1)$ nuqta aylanadan tashqarida yotsa, uning x_1, y_1 koordinatalarini (1) tenglamaga qo'ysak, $d(M_0, M_1) = r_1$ masofa aylana radiusi r dan katta bo'ladi, ya'ni

$$d(M_0, M_1) > r \Rightarrow (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 > r^2.$$



Agar $M_2(x_2, y_2)$ nuqta aylana ichkarisida yotsa,

$$d(M_0, M_2) < r \Rightarrow (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 < r^2.$$

Agar aylana markazi M_0 nuqta koordinatalar boshi 0 nuqta bilan ustma-ust tushsa, u holda $a = b = 0$ bo'lib, (1) tenglama

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

ko'rinishni oladi. Buni aylananing eng sodda (kanonik) tenglamasi deyiladi.

(1) tenglamadagi qavslarni ochsak

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + m = 0 \quad (3)$$

tenglama kelib chiqadi, bunda $m = a^2 + b^2 - r^2$. (3) tenglama ikkinchi tartibli bo'lib, uning ayrim jihatlari quyidagicha:

a) x^2 va y^2 koeffitsientlari o'zaro teng;

b) tenglamada xy ko'paytma qatnashmaydi.

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0 \quad (4)$$

ko'rinishidagi tenglamani qaraylik.

Qanday shart bajarilsa, (4) tenglama tekislikda aylananing ifoda etadi? degan savolga javob izlaymiz. (4) tenglamaning har ikki qismini A ga bo'lamiz va (4) ga teng kuchli bo'lgan tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Bu tenglamada quyidagicha ayniy shakl almashtirish bajaramiz.

$$\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + 2\frac{E}{2A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) + \frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4A^2} = 0$$

yoki

$$\left(x^2 + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y^2 + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} \quad (5)$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\frac{D}{2A} = -a, \quad \frac{E}{2A} = -b \quad (6)$$

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) $\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = r^2 > 0$. U holda (5) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

va aylananing (1) tenglamasi kelib chiqadi.

b) $\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = 0$. U holda (5) tenglama

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani faqat (a, b) nuqtagina qanoatlantiradi.

v) $\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} = -r^2 < 0$. U holda (5) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = -r^2$$

va aylananing mavhum tenglamasi kelib chiqadi.

1-misol: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring hamda aylananing $M_0(x_0, y_0)$ markazi va r radiusini toping.

$$\text{Yechish: } (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) - 9 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Oxirgi tenglikda $x = X - 1$, $y = Y + 3$ almashtirishlarni bajaramiz.

$$X^2 + Y^2 = 9 \Rightarrow M_0(-1, 3), r = 3. \quad \text{Javob: } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9, M_0(-1, 3), r = 3.$$

2-misol: Markazi $M_0(1,2)$ nuqtada bo'lib, $6x + 8y - 15 = 0$ to'g'ri chiziqqa uringan aylana tenglamasini tuzing.

Yechish: M_0 nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz:

$$r = d(M_0, l) = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 15|}{10} = \frac{7}{10}. \quad \text{Demak } (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{49}{100}.$$

ELLIPS

Reja

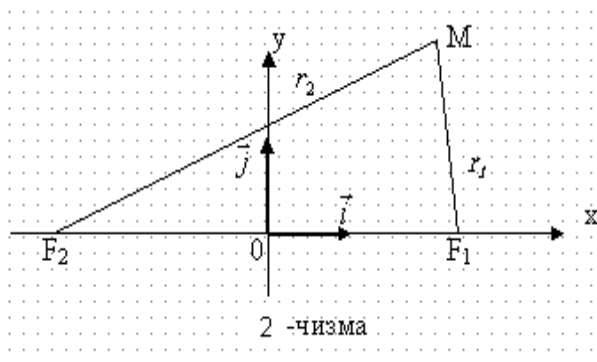
1. Ta'rif, fokal radiuslari.
2. Kanonik tenglamasi.
3. Ellips shakli.
4. Parametrik tenglamasi.
5. Misollar.

Ta'rif: Xar bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi berilgan $[PQ]$ kesma uzunligiga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami ellips deb ataladi.

Berilgan kesma uzunligi $d(P, Q) = 2a$ va fokuslar orasidagi masofa $d(F_1, F_2) = 2c$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, $d(P, Q) > d(F_1, F_2) \Rightarrow a > c$. M – izlangan nuqtalar to'plamining biror nuqtasi bo'lsin. $d(M, F_1) = r_1$, $d(M, F_2) = r_2$ belgilash kiritamiz. r_1 va r_2 ni ellipsning fokal radiuslari deyiladi. Ellips ta'rifiga ko'ra,

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (1)$$

(1) tenglamani M nuqtaning koordinatalarida ifoda qilaylik. Buning uchun dekart koordinatalar sistemasini maxsus o'rnatamiz. (F, F_2) to'g'ri chiziqni absissalar o'qi uchun olamiz. O'qning yo'nalishi F_2 dan F_1 tomonga. $[F, F_2]$ kesmaning o'rtasini koordinatalar boshi O nuqta uchun olamiz va shu nuqtadan $[F, F_2]$ kesmaga perpendikulyar o'tkazamiz. $[F, F_2]$ kesmaning o'рта perpendikulyarini ordinatalar o'qi OU uchun olamiz. OU o'qdagi yo'nalishni \vec{j} vektorning yo'nalishi aniqlaydi. Agar OX o'qning yo'nalishi \vec{i} vektor yo'nalishi bilan belgilansa, $\vec{j} \perp \vec{i}$ bo'lib, \vec{i} dan \vec{j} ga soat strelkasi xarakteriga teskari yo'nalishda o'tish mumkin.



O'rnatilgan $B = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ reperda $M(x, y)$ koordinatalarga ega bo'lsa, $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ (2) r_1 va r_2 ning (2) munosabatlardagi qiymatlarini (1) tenglikka qo'yib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (3)$$

(3) tenglama tanlangan B reperga nisbatan ellips tenglamasidir.

Tenglamasiga ko'ra ellipsni o'rganish uchun (3) tenglamani soddaroq ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (3) ni

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ko'rinishida yozib olib, xar ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$x^2 + 2cx + y^2 + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Bu tenglamaning chap va o'ng qismini qaytadan yana kvadratga ko'tarib

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (3')$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $a > c$ ni e'tiborga olib,

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad (4)$$

belgilash kiritamiz. (3') tenglama (4) asosida

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$$

ko'rinishga keladi. Tenglikning xar ikki qismini a^2b^2 ga bo'lsak,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

kelib chiqadi. (5) ni (3) ga teng kuchlilikni xozircha noaniq. Shu narsa ma'lumki, (5) tenglama (3) tenglamaning natijasi. Endi (5) tenglamadan (3) ni yoki (1) tenglikni keltirib chiqaramiz. Buning uchun (5) tenglamani qanoatlaniruvchi ixtiyoriy $M_1(x_1, y_1)$ nuqtani olamiz.

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

M_1 nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1 = d(F_1, M_1) = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad (7)$$

$$r_2 = d(F_2, M_1) = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} \quad (8)$$

(6) dan $y_1^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$ ni aniqlab, bu qiymatni (7) va (8) tengliklarga qo'yamiz:

$$r_1 = d(F_1, M_1) = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 - 2cx_1 + (b^2 + c^2)}, \quad (9)$$

$$r_2 = d(F_2, M_1) = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1^2 + 2cx_1 + (b^2 + c^2)}$$

$a^2 - b^2 = c^2$, $b^2 + c^2 = a^2$ bo'lgani uchun

$$r_1 = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x_1^2 - 2cx_1 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a} x_1 - a\right)^2} = \pm \left(\frac{c}{a} x_1 - a\right), \quad (10)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x_1^2 + 2cx_1 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a} x_1 + a\right)^2} = \pm \left(\frac{c}{a} x_1 + a\right).$$

(10) dagi ikkita ishoralardan $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ tengsizlikni ifodalovchi birini tanlash kerak. $0 < \frac{c}{a} < 1$

va (6) dan $|x_1| \leq a$ bo'lgani uchun

$$a + \frac{c}{a}x_1 > 0, \quad a - \frac{c}{a}x_1 > 0.$$

U holda

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x_1. \quad (11)$$

(11) tengliklarni xadma-xad qo'shsak, $r_1 + r_2 = 2a$ kelib chiqadi. Ko'ramizki, M_1 nuqta ellips ta'rifini qanoatlantiradi. (6) ni ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi. r_1 va r_2 fokal radiuslar (11) ko'rinishga ega. (6) dan $a = b$ bo'lganda $x^2 + y^2 = c^2$ aylananing tenglamasi kelib chiqadi. Aylana uchun $c^2 = a^2 - b^2 = 0$, fokus markaz bilan ustma-ust tushadi.

GIPERBOLA

Reja

1. Ta'rif, fokal radiuslari.
2. Kanonik tenglamasi.
3. Giperbola shakli.
4. Ekssentrisiteti.
5. Parametrik tenglamasi.
6. Misollar.

Ta'rif: Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan $[PQ]$ kesma uzunligi $d(P, Q) = 2a$ gat teng bo'lgan nuqtalar to'plami giperbola deb ataladi.

Fokuslar orasidagi masofani $d(F_1, F_2) = 2c$ deb belgilasak, uchburchakning ixtiyoriy tomoni qolgan ikki tomonining ayirmasi dan katta bo'lgani uchun $d(P, Q) < d(F_1, F_2) \Rightarrow a < c$.

Giperboladagi M nuqtaning F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari uning fokal radiuslari deyiladi va r_1 va r_2 bilan belgilanadi, ya'ni

$$r_1 = d(F_1, M), \quad r_2 = d(F_2, M).$$

Ta'rifga ko'ra, $|r_1 - r_2| = 2a$ (1)

(1) tenglik faqat giperbolada yotgan M nuqtalar uchun o'rinli. Bu tenglikni M nuqtaning koordinatalari bo'yicha yozaylik. Buning uchun dekart reporni quyidagicha o'rnatamiz:

(F_1, F_2) to'g'ri chiziqni OX o'q uchun $[F_1, F_2]$ kesma o'rtasini koordinatalar boshi uchun va $[F_2, F_1]$ kesma o'rta perpendikulyarini OY o'q uchun olamiz. OX va OY o'qlarning yo'naltiruvchi ort (birlik) vektorlari \vec{i} va \vec{j} bo'lsin. O'rnatilgan $B = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ reperda $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, va $M(x, y)$ koordinatalarga ega.

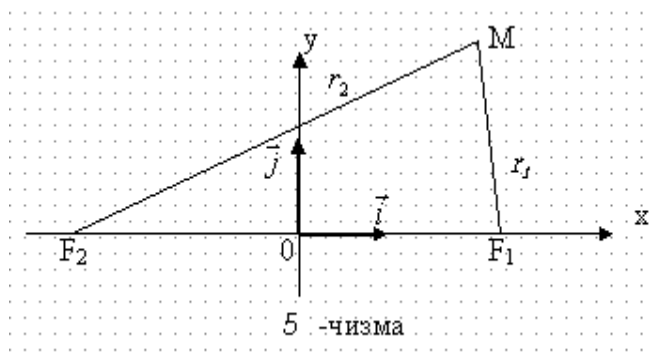
$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (2)$$

(1) ni (2) orqali ifodalaylik.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, soddalashtiramiz:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx - a^2$$



Bu tenglamani yana kvadratga ko'tarib, soddalashtirsak,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) > 0$$

$$c^2 - a^2 = b^2 \quad (3)$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad (4)$$

(4) tenglamaning har ikki qismini a^2b^2 ga bo'lsak,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

kelib chiqadi. (5) tenglama (1) tenglamaning natijasi, shunga ko'ra M nuqtaning koordinatalari (1) ni qanoatlantirsa, (5) ni ham qanoatlantiradi. Endi (5) ni qanoatlantiruvchi har bir nuqta (1) ni ham qanoatlantirishini, ya'ni (1) tenglama (5) ning natijasi ekanini ko'rsataylik.

(5) ni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $M_1(x_1, y_1)$ nuqtani olaylik.

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

M_1 nuqtaning fokal radiuslari

$$r_1 = d(F_1, M_1) = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad (7)$$

$$r_2 = d(F_2, M_1) = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}, \quad (8)$$

(6) dan $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$ ni aniqlab, bu qiymatni (7) va (8) tenglamalarga qo'yib, (3) munosabatni e'tiborga olsak,

$$r_1 = \pm \left(\frac{c}{a}x_1 - a \right) \quad (9)$$

$$r_2 = \pm \left(\frac{c}{a}x_1 + a \right) \quad (10)$$

tengliklarga ega bo'lamiz. r_1 va r_2 musbat sonlar, shunga ko'ra (9) va (10) tengliklarning o'ng tomonidagi qavslar oldidagi ishoralarni shunday tanlaymizki, bu tengliklarning o'ng tomoni musbat bo'lsin. (6) dan $|x_1| \geq 0, c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 1$. U holda $x_1 > 0$ bo'lsa, $\frac{c}{a}x_1 - a > 0$ va $\frac{c}{a}x_1 + a > 0$ bo'lib, (9) va (10) tengliklardagi qavslar oldidagi ishoralardan «+» ishorasini olamiz, ya'ni

$$r_1 = \frac{c}{a}x_1 - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x_1 + a \quad (11)$$

Bulardan $r_1 - r_2 = -2a$ (*).

$x_1 < 0$ bo'lsa, $\frac{c}{a}x_1 - a < 0$ va $\frac{c}{a}x_1 + a < 0$ bo'lib, (9) va (10) tengliklardagi qavslar oldidagi ishoralardan «-» ishorasini olamiz, ya'ni

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1, \quad r_2 = -\frac{c}{a}x_1 - a \quad (12)$$

Bulardan $r_1 - r_2 = 2a$ (**).

(*) va (**) dan $|r_1 - r_2| = 2a$, ya'ni (1) kelib chiqadi. Ko'ramizki, (1) va (5) teng kuchli tenglamalar ekan. (5) ni giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi. (11) va (12) tenglamalardan quyidagi natija kelib chiqadi:

r_1 va r_2 fokal radiuslar x absissalar orqali $x > 0$ bo'lganda

$$r_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x + a \quad (13)$$

$x < 0$ bo'lganda

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x \quad (14)$$

ko'rinishlarda chiziqli ifodalanadi.

1-misol: Giperbola $M_1(4,6)$ nuqtadan o'tib, haqiqiy o'qi 4 ga teng bo'lsa, kanonik tenglamasi yozilsin.

$$\text{Yechish: } 2a = 4 \Rightarrow a = 2. \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{4} - \frac{36}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = 12.$$

$$\text{Жавоб: } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

2-misol: $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$ giperbolaning markazi va yarim o'qlarini toping.

$$\text{Yechish: } (x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) + 8 = 0$$

$$(x+1)^2 - 4(y-2)^2 + 8 = 0 \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{8} = 1.$$

Giperbolaning haqiqiy o'qi OU to'g'ri chiziqqa parallel bo'lib, markazi $(-1,2)$ nuqtada, yarim o'qlari $b = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{8}$ ga teng.

3-misol: $c = 6$, $e = \frac{6}{5}$ bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

$$\text{Yechish: } e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{6}{a} = \frac{6}{5} \Rightarrow a = 5.$$

$$c^2 - a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 25 = 9. \quad \text{Жавоб: } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

PARABOLA

Reja

1. Ta'rif.
2. Kanonik tenglamasi.
3. Parabolaning shakli
4. Parabolani yasash.
5. $y = ax^2 + bx + c$ tenglama orqali berilgan parabola.
6. Misollar.
- 7.

Ta'rif: Har bir nuqtasidan fokus deb ataluvchi berilgan nuqttagacha va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa o'zaro teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga parabola deb ataladi.

Parabola fokusini F va direktrisasini s orqali belgi laylik. F fokus s direktrisaga tegishli emas. $d(F, S) = p$ bo'lsin. F nuqtadan s to'g'ri chiziqqacha perpendikulyar o'tkazamiz va uni absissa o'qi OX uchun olamiz. $d(F, N) = p$ bo'lib, $N \in S$. FN kesmaning o'rtasi O nuqtadan OX ga perpendikulyar ordinata o'qi OU o'tkazamiz. OXU-dekart reper tashkil etadi. O'rnatilgan dekart reperda $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$, $N\left(-\frac{P}{2}, 0\right)$ koordinatalarga ega. Direktrisaning tenglamasi $x = -\frac{P}{2}$.

Fokus $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ koordinatalarga ega. Parabola ta'rifiga ko'ra

$$d(F, M) = d(L, M) \quad (1)$$

(1) tenglikni koordinatalar bo'yicha kanonik holga keltiraylik. $B = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ reperda M nuqta $M(x, u)$ koordinatalarga ega bo'lsin.

$$d(F, M) = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(L, M) = \sqrt{\left(x + \frac{P}{2}\right)^2} = x + \frac{P}{2}.$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{P}{2}\right| \quad (2)$$

(2) tenglamaning har ikki tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$x^2 - px + \frac{P^2}{4} = x^2 + px + \frac{x^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px \quad (3)$$

(3) tenglama (1) tenglikdan kelib chiqadi. Endi (3) dan foydalanib, (1) tenglikni isbotlaymiz.

Ixtiyoriy $M_1(x_1, u_1)$ nuqta (3) tenglamani qanoatlantirsin: $y_1^2 = 2px_1$. $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ nuqta va

$s: x = -\frac{P}{2}$ to'g'ri chiziqni olaylik.

$$d(F, M) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{P}{2}\right)^2 + y_1^2} = \sqrt{x_1^2 - Px_1 + \frac{P^2}{4} + 2Px_1} = \sqrt{x_1^2 + Px_1 + \frac{P^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1 + \frac{P}{2}\right)^2} = \left|x_1 + \frac{P}{2}\right| = d(M_1, S) = d(L, M_1).$$

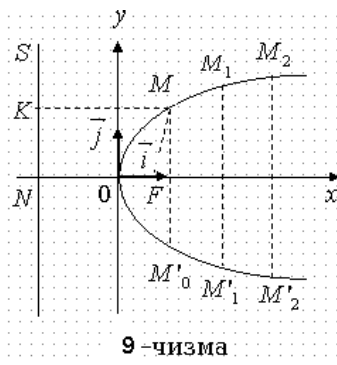
Ko'ramizki, M_1 nuqta parabolaga tegishli. (3) ni parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Parabola shaklini aniqlaylik.

- 1) Parabola ikkinchi tartibli chiziq.
- 2) $y^2 \geq 0$ va $p > 0 \Rightarrow x \geq 0$. Bundan parabolaning barcha nuqtalari $x \geq 0$ yarim tekislikka tegishligi kelib chiqadi.
- 3) $x = 0, y = 0 \Rightarrow$ parabola koordinatalar boshidan o'tadi. $O(0,0)$ nuqtani parabolaning uchi deyiladi.
- 4) x ning har bir $x > 0$ qiymatiga u ning qarama-qarshi ishorali, ammo absolyut miqdorlari teng bo'lgan ikki qiymati mos keladi. Xulosa shuki, parabola OX o'qqa nisbatan simmetrik chiziq.
- 5) $y^2 = 2Px \Rightarrow y = \pm\sqrt{2Px} \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow |y| \rightarrow \infty$. Yuqoidagi mulohazalar bo'yicha parabolaning shakli quyidagicha bo'lishi mumkin. (9-chizma).

Agar parabola fokusi $F\left(-\frac{P}{2}, 0\right)$ bo'lsa, u holda uning tenglamasi

$$y^2 = -2px \quad (4)$$

ko'rinishida bo'ladi. Agar fokus OU o'qining $E\left(0, \frac{P}{2}\right)$ nuqtasi



bo'lsa, u holda parabolaning tenglamasi $x^2 = 2Py$ ko'rinishida bo'ladi.

Parabolani quyidagi usul bilan yasash mumkin.

$y^2 = 2px$ kanonik tenglamasi bilan berilgan parabolaning fokusi va direktrisasini

yasaymiz. Buning uchun OX o'qida O nuqtadan chapda va o'ngda $d(N, O) = D(O, F) = \frac{P}{2}$

bo'lgan N va F nuqtalarni belgilaymiz. N nuqtadan OX ga perpendikulyar s to'g'ri chiziq o'tkazamiz. F fokusdan boshlab OX o'qqa perpendikulyar va har biri oldingisidan $P/2$ masofada turuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. O'tkazilgan to'g'ri chiziqlarning har biridan direktrisagacha bo'lgan masofani radius qilib F markazli aylana chizamiz. Bu aylana mos to'g'ri chiziqni OX o'qqa simmetrik bo'lgan ikki nuqtada kesib o'tadi. Bu nuqtalar izlangan parabola tegishli bo'ladi. OX o'qqa perpendikulyar istalgancha to'g'ri chiziqlarni o'tkazish mumkin. Shularning har birida ta'rifni qanoatlantiruvchi parabola nuqtalarini aniqlaymiz. Aniqlangan nuqtalarni tutashtirib parabola grafisini hosil qilamiz.

1-misol. $x^2 = -12y$ parabolada fokal radiusi $r = 9$ bo'lgan nuqta topilsin.

Yechish: $2q = -12 \Rightarrow q = -6$. $F(0, 3)$. $r = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 9 \Rightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 81$.

$$(y + 3)^2 - 12y - 81 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y - 72 = 0 \Rightarrow y_1 = -6, y_2 = 12.$$

Bu sonlarni $x^2 = -12y$ tenglamaga qo'ysak, $x_1 = -12 \cdot (-6) = 72$, $x_{1,2} = \pm 6\sqrt{2}$. $y_2 = 12$ tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki $x^2 = -12 \cdot 12 = -144$. $x_{3,4} = \pm 12i$ (mavhum son)

Javob: $M_1(6\sqrt{2}, -6)$, $M_2(-6\sqrt{2}, 6)$.

2-misol: $y = 4x^2 - 6x - \frac{3}{4}$ parabola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirilsin va parabola uchining koordinatalari aniqlansin.

Yechish: $y = 4\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} \Rightarrow y = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - 3 \Rightarrow y + 3 = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$.

$y + 3 = Y$, $x - \frac{3}{4} = X$ belgilashlarni kiritsak, $Y = 4X^2$. Parabolaning uchun $O'\left(\frac{3}{4}, -3\right)$

nuqtada. $(O'Y)$ – simmetriya o'qi.

Javob: $Y = 4X^2$, $O'\left(\frac{3}{4}, -3\right)$.

3-misol: $x^2 - 6x + 9 - 4(y + 1) = 0$ tenglama koordinatlar boshini ko'chirish orqali kanonik ko'rinishga keltirilsin. Almashtirish formulasi yozilsin.

Yechish: $x^2 - 6x + 9 - 4(y + 1) = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 4(y + 1)$.

$x - 3 = X$, $y + 1 = Y$ ko'rinishidagi belgilash kiritsak, $X^2 = 4Y$, $O'(3, -1)$.

Javob: Simmetriya o'qi $O'(3, -1) // (OY)$ bo'lgan parabola. Uchi $O'(3, -1)$ nuqtada, parametri $p = \frac{1}{8}$. Almashtirish formulalari $x = X + 3$, $y = Y - 1$.

5-MA'RUZA FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA.

Reja:

1. 1§. Berilgan nuqtadan o'tib, berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.
2. 2§. Tekislikning umumiy tenglamasi va uni tekshirish
3. 3§. Uch nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Tayanch iboralar: Normal tenglama, masofa, normallovchi kupaytuvchi burchak, ikki tugri chizikning kesishuvi.

1 - Berilgan nuqtadan o'tib berilgan vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasi.

Avvalo tekislikni tushunchasiga tegishli ba'zi tushunchalar bilan tanishaylik. Tekislik tushunchasi stereometriyaning asosiy tushunchalaridan bo'lib, tekislikdagi to'g'ri chiziq kabi bevosita ta'riflanmaydi.

Tekislikka tegishli asosiy xossalar qo'yidagi aksiomalarda mujassamlashgan:

- 1) Bir to'g'ri chiziq ustida yotmagan uch nuqtadan fakatgina bir tekislik o'tadi.
- 2) Bir to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi tekislik ustida yotsa, kolgan barcha nuqtalari ham shu tekislik ustida yotadi.

Keltirilgan aksiomalar va ularadan kelib chiqadigan natijalardan foydalanib tekislikni qo'yidagi berilish usullari yordamida aniqlash mumkin:

- 1) Bitta to'g'ri chiziqdan va unda yotmovchi nuqtadan o'tuvchi tekislik.
- 2) Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq, orkali bitta tekislik o'tadi.
- 3) Ikkita parallel to'g'ri chiziq, orkali bitta tekislik o'tadi.

Odatda tekislikni grek alfavitni α, β, γ harflari bilan belgilanadi, yasashda esa tekislikni biror chekli qismi parallelogramm shaklda kursatiladi.

Endi quyidagi masalani qaraylik:

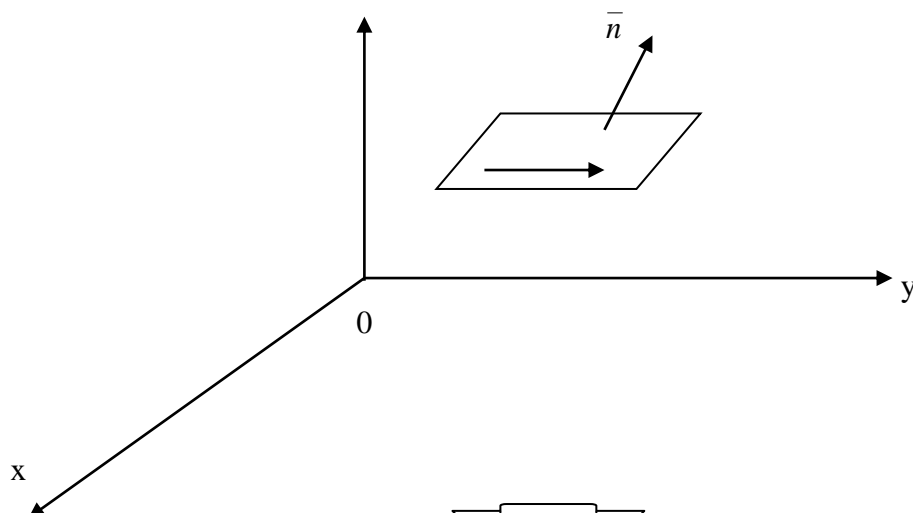
Fazoda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib $\vec{n} = \{A; B; C\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan α tekislik berilgan bo'lsin. SHu α tekislikning tenglamasi tuzilsin. Berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan har qanday vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

α tekislik tenglamasini tuzamiz, chiziq va sirtning tenglamasini tuzish qoidasiga asosan α tekislik ustida $M(x, y, z)$ koordinatalari o'zgaruvchi nuqta olamiz va o'zgaruvchi koordinatalar bo'lgan x, y, z orasidagi bog'lanishni topamiz:

M no'qtani M_0 birlashtirib $\vec{I}_0\vec{I} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ vektorni hosil qilamiz. \vec{n} normal vektor α tekislik ustida yotgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar, xususiyl holda $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$, ya'ni $(\overline{M_0M}, \vec{n}) = 0$ yoki

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (19,1) yoki $\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \vec{r} - \vec{r_0}$ ekanini

e'tiborga olsak $(\vec{r} - \vec{r_0}, \vec{n}) = 0$. (19,2) biz izlayotgan tekislikning vektor shakldagi tenglamasi deyiladi.



2 – Tekislikni umumiy tenglamasi va uni tekshirish.

Fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida x, y, z o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (20,1)$$

bu yerda $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, tenglama berilgan bo'lsin. Isbot qilamizki (20,1) tekislikning tenglamasi. Haqiqatdan $A \neq 0$ bo'lsa $A(x + \frac{D}{A}) + By + Cz = 0$ (20,2) bo'lib (20,2) tenglama (19,1) ko'rinishdagi tenglamadir, ya'ni (20,1) tekislik tenglamasini ifodalaydi. Xudi shuningdek (19,1)ni ochib chiksak

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0 \quad \text{yoki} \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

desak, $Ax + By + Cz + D = 0$ (19,1) tenglamasi hosil bo'ladi. (19,1)ga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi. Endi tekislikni, umumiy tenglamasini tekshiramiz: tekislikni umumiy tenglamasini tekshirish deganda, A, B, C, D koeffitsientlarni ba'zi qiymatlari nolga teng bo'lganda tekislikni fazoda qanday joylashganligani tekshiramiz:

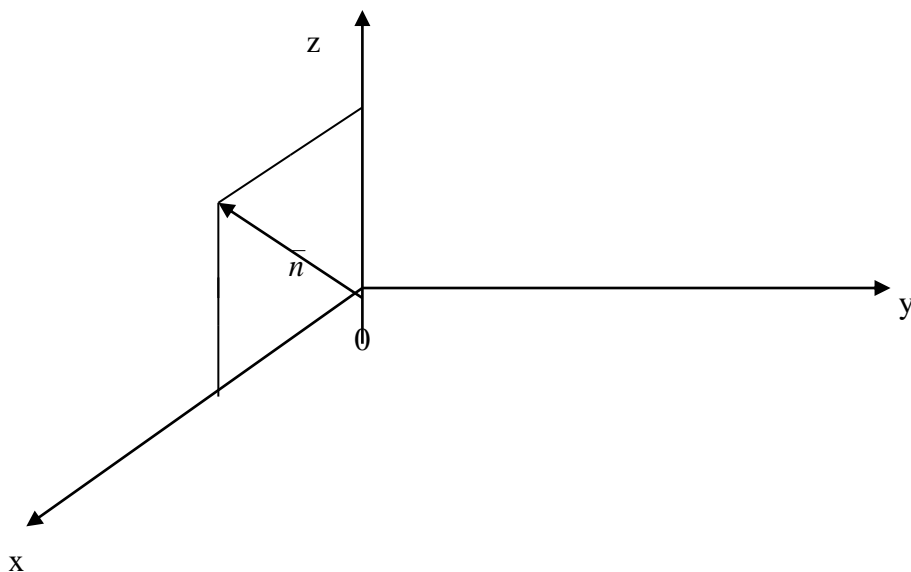
- 1) $D = 0$ bo'lsin, bu holda (19,1) tenglama $Ax + By + Cz = 0$ bo'lib koordinata boshidan o'tadi va normal vektori $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ bo'ladi.
- 2) $A = 0, B, C, D \neq 0$ bo'lsin, ya'ni $By + Cz + D = 0$
- 3) $B = 0, A, C, D \neq 0$ bo'lsin, ya'ni $Ax + Cz + D = 0$
- 4) $C = 0, A, B, D \neq 0$ bo'lsin, ya'ni $Ax + By + D = 0$

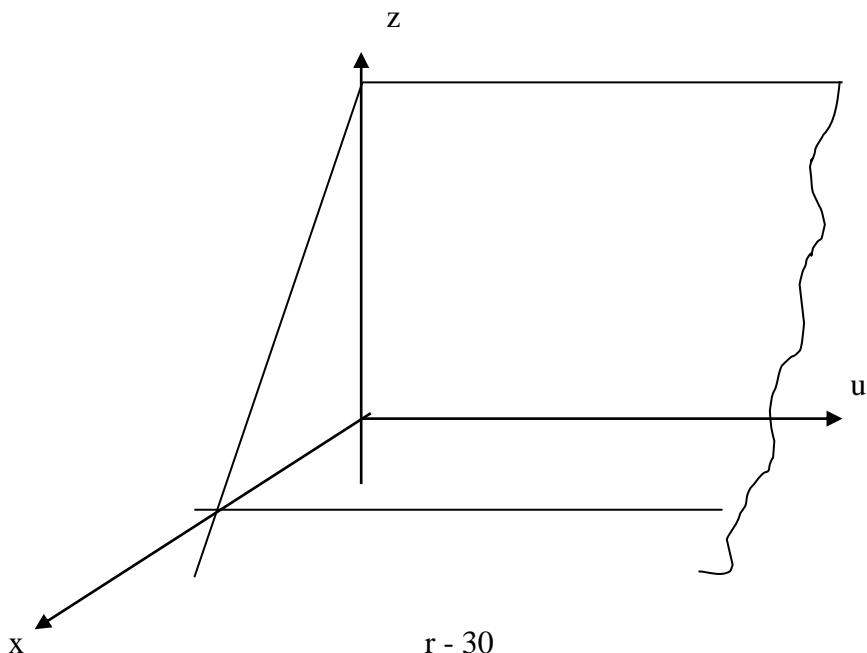
2, 3, 4 hol uchun umumiy qoida keltirib chiqaramiz.

Buning shu uch holdan birortasini, Masalan: 3 – holni qaraylik. $B = 0$ bo'lsa, $\vec{n} = A\vec{i} + C\vec{k}$ bo'ladi, ya'ni \vec{n} vektor Bilan OU o'qi orasidagi burchak 90° ga perpendikulyar bo'ladi. Endi $Ax + Cz + D = 0$ tenglamani kesmalar shakliga keltirsak

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \quad a = -\frac{D}{A}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, tekislik OX o'qidan a va OU o'qidan c birlik ajratib \vec{n} vektorga perpendikulyar yoki OU o'qiga parallel bo'lgan tekislik tenglamasidir. (r – 30)





Bundan ko'rinadiki tekislikning umumiy tenglamasida o'zgaruvchi x, y, z lardan kaysi biri qatnashmasa, tekislik shu qatnashmagan o'zgaruvchiga mos keluvchi koordinata o'qiga parallel bo'lar ekan.

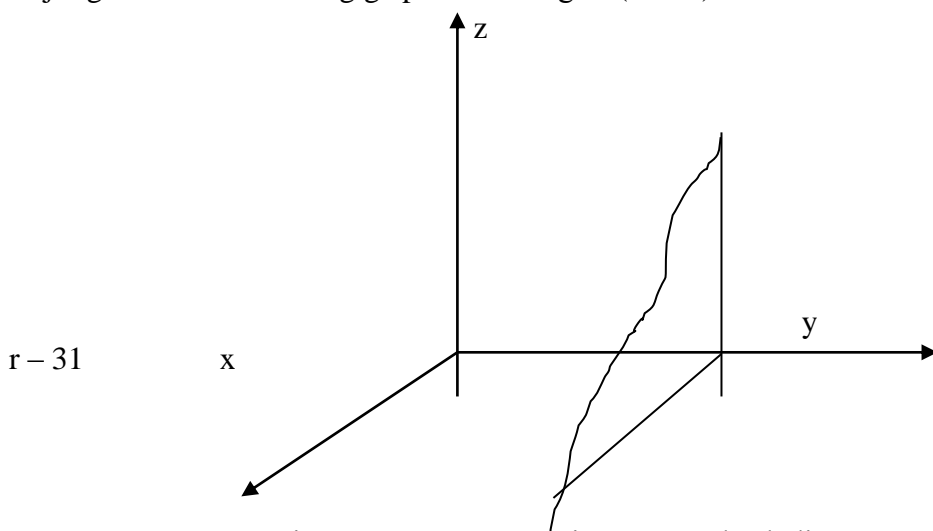
5) $A = V = 0, C, D \neq 0$ bo'lsin, ya'ni $Cz + D = 0$

6) $B = C = 0, A, D \neq 0$ bo'lsin, ya'ni $Ax + D = 0$

7) $A = C = 0, B, D \neq 0$ bo'lsin, ya'ni $By + D = 0$

5, 6, 7 hol uchun umumiy qoida keltirib chiqaramiz. Masalan: 7 holni qaraylik:

$A = S = 0$ bo'lsa $\vec{n} = B\vec{j}$ bo'ladi, ya'ni $Vu + D = 0$ tekislik uchun OU o'qi normal vektor vazifasini bajaradi, OU o'qiga perpendikulyar tekisliklar esa XOZ tekisligi va o'nga parallel bo'lgan tekisliklardir. $Vu + D = 0$ tenglamadan $y = -\frac{D}{B} = b$. Demak $Vu + D = 0$ tekislik OU o'qidan va birlik ajratgan va XOZ tekisligiga parallel bo'lgan ($r - 31$) tekislikni ifodalaydi.



5 – holda tekislik OZ o'qiga, 6 – holda OX o'qiga parallel bo'ladi.

Demak tekislikni umumiy tenglamasida o'zgaruvchilardan ikkitasi qatnashmasa shu qatnashmagan o'zgaruvchilarga mos keluvchi koordinata tekisliklariga parallel bo'lar ekan, M: x va u qatnashmasa tekislik XOU koordinata tekislikligiga parallel bo'ladi, u va z qatnashmasa tekislik UOZ tekisligiga parallel bo'ladi.

8) $A = V = D = 0, S \neq 0$

$$9) V = S = D = 0, \quad A \neq 0$$

$$10) A = S = D = 0, \quad V \neq 0$$

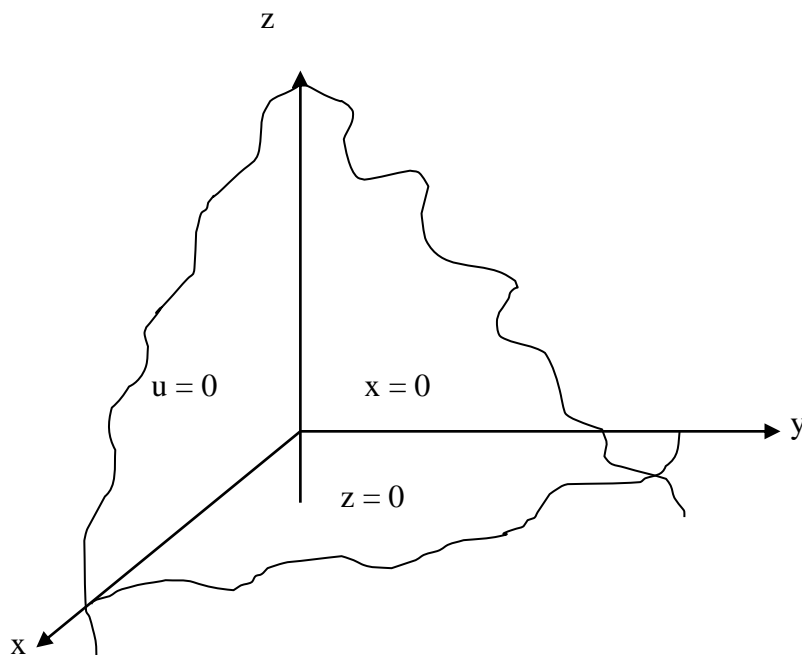
8, 9, 10 hollar 5, 6, 7 hollarning $D=0$ bo'lgandagi xususiy holidir, ya'ni tekislikning umumiy tenglamasida ozod had $D=0$ bo'lib ikki o'zgaruvchi qatnashmasa, tekislik shu qatnashmagan o'zgaruvchiga mos keluvchi koordinata tekisligini ifodalaydi:

$X = 0$ tenglama UOZ koordinata tekisligini,

$U = 0$ tenglama XOZ koordinata tekisligini,

$Z = 0$ tenglama XOY koordinata tekisligini

ifodalaydi ($r - 32$).



3 – Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Tekislikni kesmalarga nisbatan tenglamasi.

Quyidagi masalani qaraymiz: bir to'g'ri chiziq ustida yotmagan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin. Normal vektori $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ bo'lib $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasini yozamiz.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (21.1)$$

bu yerda A, V, S noma'lum o'zgaruvchilar sonlar. A, V, S ni ixtiyorligidan foydalanib ushbu tekislikni $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tadi deb faraz qilamiz, ya'ni M_2 va M_3 nuqtaning koordinatalar (21.1) tenglamani qanoatlantirsin, ya'ni

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0 \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0 \end{cases} \quad (21.2)$$

A, V, S ni noma'lum desak (21.1) uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasidir.

Ravshanki, bir jinsli tenglamalar sistemasi trivial $(0,0,0)$ yechimga ega bo'ladi. Bizni esa (21.2) sistemani notrivial yechimi qiziqtiradi.

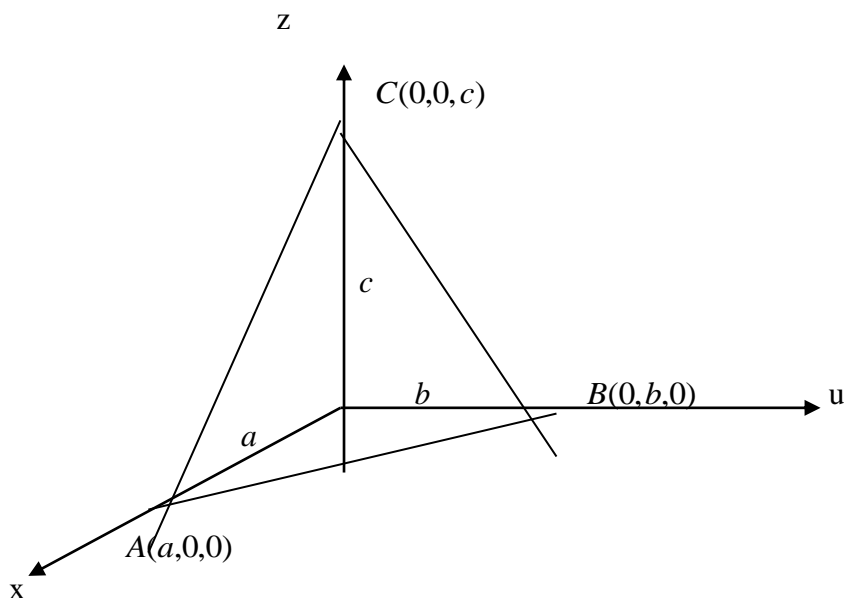
CHiziqli algebra kursida isbot qilinganki, bir jinsli tenglamalar sistemasi notrivial yechimga ega bo'lishi uchun (21.2) sistemani asosiy determinanti nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (21.2)$$

(21.2) tenglama biz izlayotgan tekislikning tenglamasi, ya'ni M_1 , M_2 va M_3 nuqtalardan o'tuvchi tekislikning tenglamasidir.

Endi tekislikni yasash uchun qulay bo'lgan tekislikni kesmalarga nisbatan tenglamasi deb ataluvchi tenglamani uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasidan foydalanib keltirib chiqaramiz.

Tekislik koordinata o'qlarini $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ va $C(0,0,c)$ nuqtalarda kesib utsin, boshkacha aytganda tekislik koordinata o'qlaridan mos ravishda a, b, c kesmalar ajratsin ($r - 32$).



(21.2) formuladan foydalanib A, V, S nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz: $x_1=a, y_1, z_1=0; x_2=0, y_2=b, z_2=0; x_3=0, y_3=0, z_3=c$ bo'lganidan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

determinantni hisoblasak $(x - a)bc + abz + a^2c = 0$ yoki $xbc + yac + abz = abc$ yoki

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (21.3) \quad (\text{oxirgi tenglik } abc \text{ ga bo'lingan})$$

(21.3) tenglama tekislikni kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi.

$M: \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$ tenglama koordinata o'qlaridan mos ravishda 3, 5, 2 birlik ajratgan tekislikni ifodalaydi.

Tekislik kesmalarga nisbatan tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, uni yasash qulay bo'lganidan, umumiy tenglamasi bilan berilgan tekislikni kesmalarga nisbatan tenglamaga keltirishni o'rganamiz: buning uchun tekislikni umumiy tenglamasidagi ozod had D ni tenglikni o'ng tomoniga o'tkazib, tenglikni $-D$ ga bo'lish kifoya.

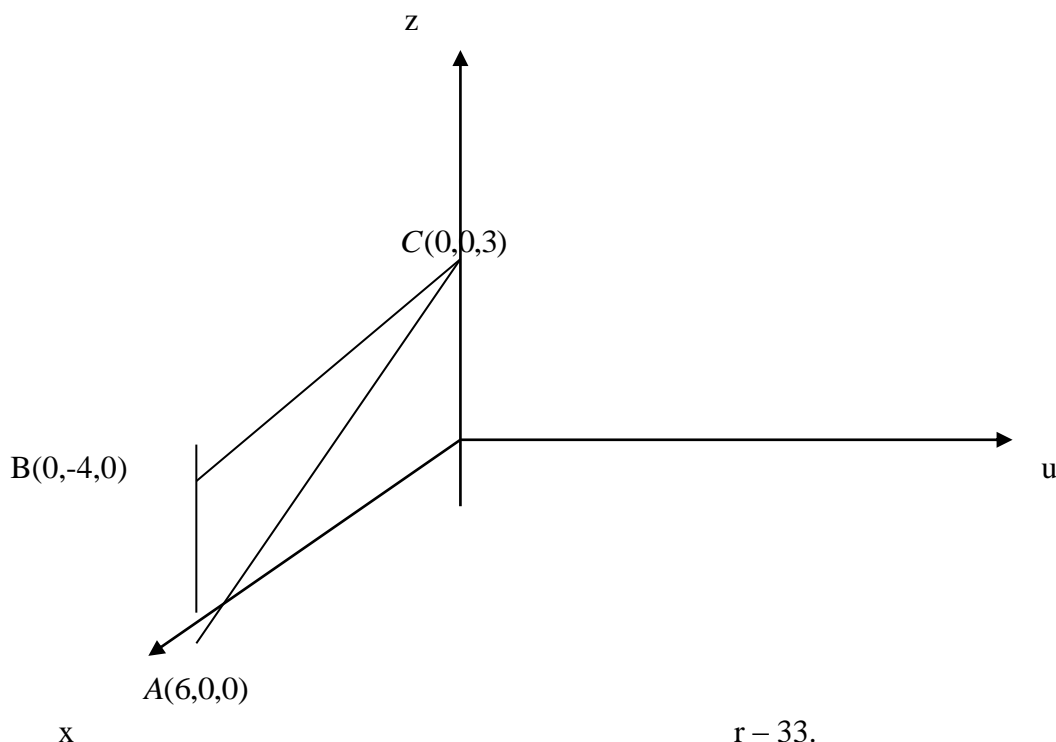
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad Ax + By + Cz = -D, \quad \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1, \text{ yoki}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (21.3), \text{ bu yerda } a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}.$$

MISOL: $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ tekislikni yasang.

ECHISH: Berilgan tenglamani kesmalarga nisbatan tenglamaga keltiramiz:

$2x - 3y + 4z = 12 \quad (/12) \quad \frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{3} = 1.$ Demak bu tekislik OX o'qidan $a = 6$, OY o'qidan $b = -4$ va OZ o'qidan $c = 3$ birlik ajratib o'tar ekan. (r - 33)



Mavzuni takrorlash uchun savollar:

- 1) Tekislik nima?
- 2) Tekislikni bilvosita ta'rifini keltiring.
- 3) Tekislikni normal vektori nima?
- 4) Tekislikning umumiy tenglamasini yozing.
- 5) Tekislikni umumiy tenglamasida z katnashmasa, u kaysi koordinata ukiga paralel buladi.
- 6) Koordinata boshidan utuvchi tekislik tenglamasini yozing.
- 7) Tekislikning umumiy tenglamasida x va z katnashmasa u kaysi koordinata tekisligiga paralell buladi.

6-MA'RUZA.
FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIK TENGLAMALARI.

REJA:

1. Fazoda to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasi. To'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalari
2. Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uni kanonik ko'rinishga keltirish
3. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
4. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
5. To'g'ri chiziq va tekislikning kesishuvi

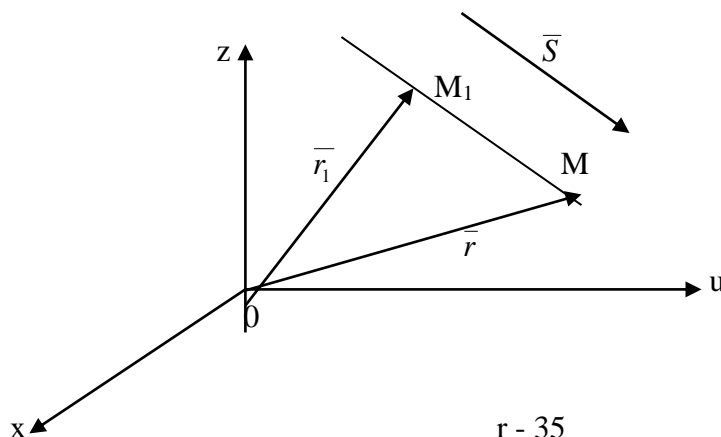
Tayanch iboralar: fazo, tugri chiziq, vektor, yunaltiruvchi, kanonik, parametrik, yunaltiruvchi vektor

Fazoda to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasi. To'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalari.

Fazodagi to'g'ri chiziq ham tekislikdagi to'g'ri chiziq kabi bevosita ta'rifga ega emas, bilvosita ta'rifga ega: fazoda to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish no'qtalarini geometrik o'rni deb qarash mumkin. Tekislikdagi to'g'ri chiziq uchun keltirilgan barcha aksiomalar fazodagi to'g'ri chiziq uchun ham urinli bo'lib quyidagi bitta xossa bilan farq qiladi:

Tekislikda ikki to'g'ri chiziq parallel bo'lmasa, ular kesishadi, fazoda esa kesishmasligi mumkin.

Fazoda parallel bo'lmasdan kesishmaydigan to'g'ri chiziq'larga ayqash to'g'ri chiziq'larga deyiladi.



r - 35

Fazoda to'g'ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini keltirib chiqaramiz: fazoda biror \bar{S} vektor va $M_1(r_1) = M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqta berilgan bo'lsin. Ravshanki M_1 nuqtadan \bar{S} vektorga parallel bo'lgan fakat bitta to'g'ri chiziq o'tadi. SHu to'g'ri chiziq M_1 va M nuqtadano'tuvchi to'g'ri chiziq bo'lsin. M nuqtani koordinatalari x, u, z bo'lib shu to'g'ri chiziq buylab harakatlana olsin. Endi chiziq tenglamasini tuzish qoidasiga asosan x, u, z lar orasidagi bog'lanishni topamiz:

$\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1$ va \bar{S} vektorlar kolliniar bo'lganidan $\frac{\bar{r} - \bar{r}_1}{\bar{S}} = \lambda$ (24.1), bunda λ biror skalyar

son. (24.1) dan \bar{r} vektorlarni topsak

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \lambda \bar{S} \quad (24.2)$$

(24.2) tenglamaga fazoda to'g'ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasi deyiladi. (24.2) tenglamadagi \bar{S} vektorga to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \bar{r}_1 = x_1\bar{i} + u_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ bo'lsa (24.2) dan quyidagi tengliklar hosil bo'ladi, ya'ni $x = x_1 + \lambda m; y = y_1 + \lambda n; z = z_1 + \lambda p$ (24.3)

(24.3) tenglamalar fazoda to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi. (λ - parametr)

(24.3) tenglikni har biridan λ ni topib, so'ngra tenglashtirsak

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (24.4)$$

(24.4) fazoda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi. Agar to'g'ri chiziqning yulantiruvchi vektori \vec{S} birlik vektor bo'lsa, ya'ni $\vec{S} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ bo'lsa (24.4) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma} \quad (24.5)$$

$\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma$ lar to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. \vec{S} vektorning komponentlari $m; n; p$ birdaniga nolga teng bo'lmasligi ravshan, chunki birdaniga nolga teng bo'lsa to'g'ri chiziqning fazodagi o'rni aniqlanmaydi. Lekin $m; n; p$ lardan bittasi, hatto ikkitasi nolga teng bo'lishi mumkin.

MASALAN: $m \neq 0; n \neq 0; p \neq 0$ bo'lsa $x = x_1 + \lambda m; y = y_1 + \lambda n; z = z_1 + \lambda p$ yoki

$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ tenglama hosil bo'ladi. Nolga bo'lish mumkin bo'lmaganidan bu tenglamani qanday tushunish kerak?

Oxirgi tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n}, \frac{x-x_1}{m} = \frac{z-z_1}{p} \quad \text{yoki} \quad n(x-x_1) = m(y-y_1) \quad \text{yoki} \quad y-y_1 = 0 \quad \text{yoki}$$

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{z-z_1}{p}, y = y_1$$

Oxirgi tenglamalar yo'naltiruvchi vektori $\vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ bo'lgan to'g'ri chiziqni bildiradi.

Agar $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab qilinsa $\vec{S} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ bo'lganidan $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Fazoda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uni kanonik ko'rinishga keltirish.

Fazoda to'g'ri chiziqni ikki tekislikni kesishishidan hosil bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni deb qarash mumkin, ya'ni

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25.1)$$

(25.1) fazoda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi, bunda tekisliklar parallel bo'lmasligi kerak, ya'ni $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ yoki $\left| \begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{matrix} \right|^2 \neq 0$.

(25.1) umumiy tenglamadan uning kanonik tenglamasiga o'tish mumkin. Bu quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix} \quad \text{determinantlar hisoblanadi.}$$

Berilgan tekisliklar parallel bo'lmaganidan $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}$ determinantlardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'ladi.

MASALAN: $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bo'lsin. Bu vaqtda (21.1) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y &= -C_1 z - D_1 \\ A_2 x + B_2 y &= -C_2 z - D_2 \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

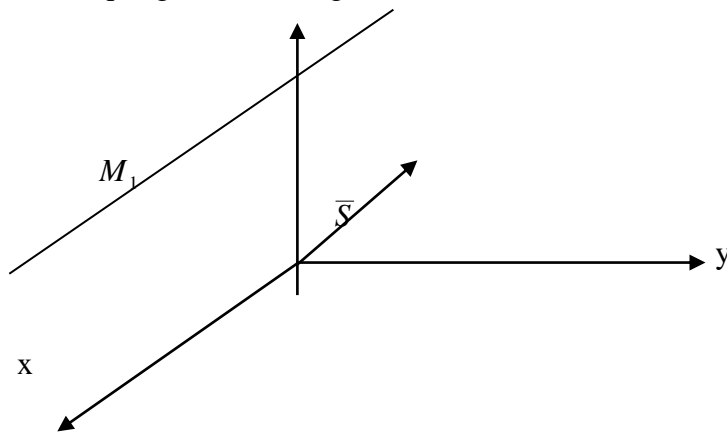
(25.2) x va y nisbatan ikki noma'lumli ikkita chiziqli birjinslimas tenglamalar sistemasidir. Uni x va y ga nisbat yechsak

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 z + b_1 \\ y &= a_2 z + b_2 \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

tenglamalar hosil bo'ladi. (25.3) tenglamalarni z ga nisbatan yechib, ularni tenglashtirsak

$$\frac{x-b_1}{a_1} = z; \frac{y-b_2}{a_2} = z, \quad \frac{x-b_1}{a_1} = \frac{y-b_2}{a_2} = z \quad \text{yoki} \quad \frac{x-b_1}{a_1} = \frac{y-b_2}{a_2} = \frac{z-0}{1}.$$

Oxirgi tenglama $M_1(b_1; b_2; 0)$ nuqtadan o'tib yo'naltiruvchi vektori $\vec{S} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + \vec{k}$ bo'lgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasidir.



Masala: $2x - 3y + 2z - 5 = 0$, $3x + 2y - 3z + 6 = 0$ tenglamalar bilan tasvirlangan to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishga keltirib yasalsin.

Yechish: $\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-3 \\ 32 \end{vmatrix} = 4+9=13 \neq 0$ demak berilgan tenglamalarda x va y larni

o'rnida koldirib, kolganlarini tenglikni o'ng tomonga o'tkazamiz

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2z + 5 \\ 3x + 2y = 3z - 6 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13, \Delta_x = \begin{vmatrix} -2z + 5 & -3 \\ 3z - 6 & 2 \end{vmatrix} = -4z + 10$$

$$9z - 18 = 5z - 8$$

$$\Delta_y = \frac{2}{3} - 2z = 6z - 12 + 6z - 15 = 12z - 27$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5z - 8}{13} = \frac{5}{13}z - \frac{8}{13}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{12z - 27}{13} = \frac{12}{13}z - \frac{27}{13}$$

$$\text{ya'ni } x = \frac{5}{13}z - \frac{8}{13}; y = \frac{12}{13}z - \frac{27}{13}, \text{ yoki } \frac{x + \frac{8}{13}}{\frac{5}{13}} = z; \frac{y + \frac{27}{13}}{\frac{12}{13}} = z$$

oxirgi tengliklarni tenglashtirsak

$$\frac{x + \frac{8}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{y + \frac{27}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{z - p}{1}$$

Bu tenglama $M_1(-\frac{8}{13}; -\frac{27}{13}; 0)$ nuqtadan o'tib yo'naltiruvchi vektor $\vec{S} = \frac{5}{13}\vec{i} + \frac{12}{13}\vec{j} + \vec{k}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasidir.

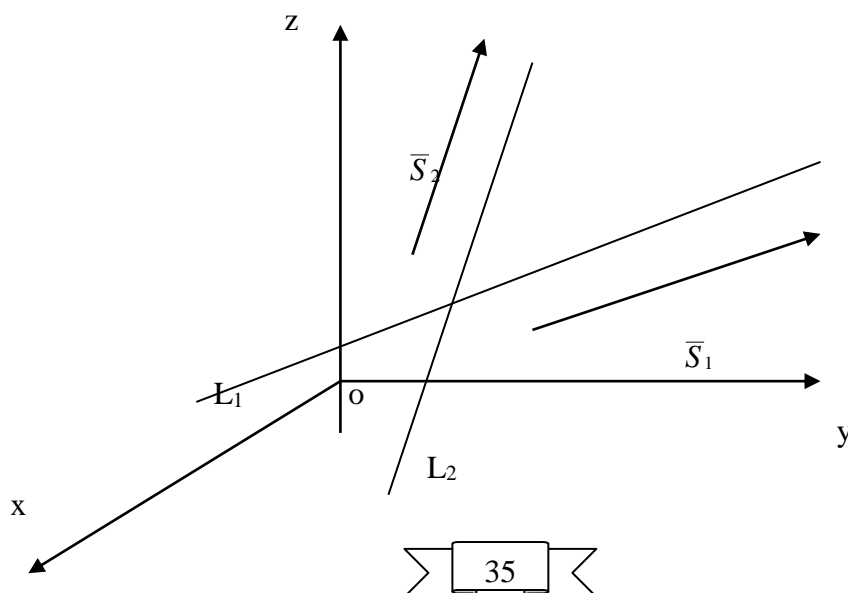
Mavzuni takrorlash uchun savollar:

- 1) Fazoda tugri chizik uchun asosiy aksiomalarni ayting.
- 2) Fazoda tugri chizik bilan tekislikdagi tugri chizik kaysi xssasi bilan farqlanadi.
- 3) $M_0(3;4;-5)$ nuqtadan utib $\vec{S} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ vektor tenglamalarini yozing.
- 4) Fazoda tugri chizikning umumiy tenglamasini kanonik kurinishga keltirish usulini aytib bering.
- 5) $x+y-2z+1=0$ va $2x-y+1=0$ tekisliklarning kesishishidan xosil bulgan tugri chizikning kanonik tenglamasini yozing.
- 6) Ikki tekislik kandy shartlar bajarilganda tugri chizikni ifodalaydi.

Tayanch iboralar: fazo, tugri chizik, vektor, yunaltiruvchi, kanonik, parametrik, yunaltiruvchi vektor.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak sifatida fazoning istalgan nuqtasidan shu to'g'ri chiziq'larga parallel o'tkazilgan ikki to'g'ri chiziqning tashkil kilgan burchaklaridan ixtiyoriy birini olamiz. Bu burchak 0 bilan π orasida o'zgaradi. Agar L_1 va L_2 to'g'ri chiziq'lar o'zining kanonik tenlamalari bilan berilgan bo'lsa ravshanki ular orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka teng.



$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad \text{bo'lsa}$$

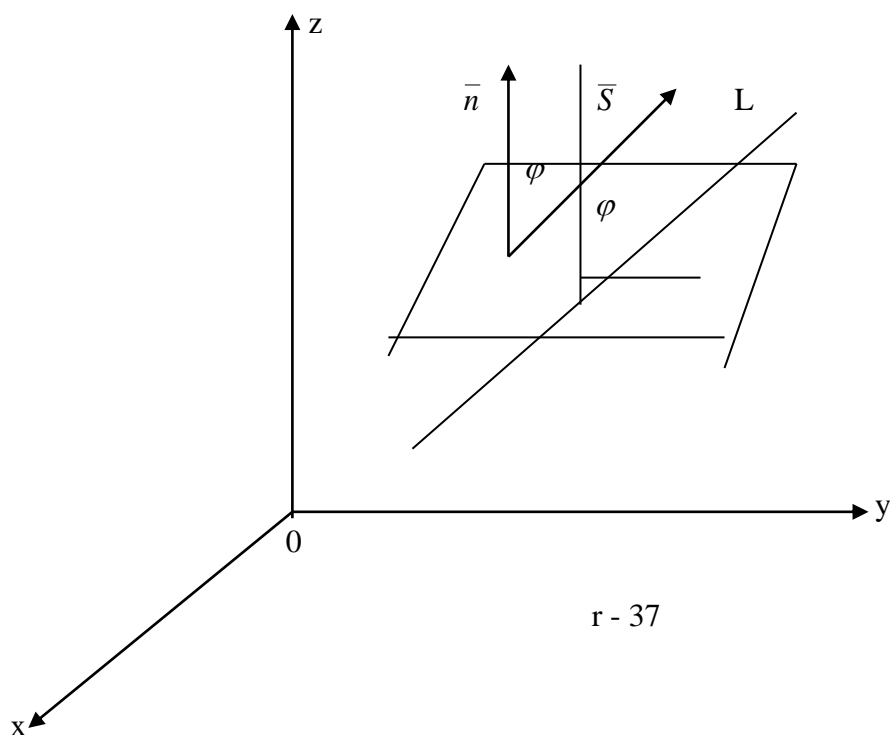
$$\cos \varphi = \frac{(\bar{S}_1, \bar{S}_2)}{|\bar{S}_1| |\bar{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (26.1)$$

Agar $L_1 \parallel L_2$ bo'lsa $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$ bo'lib $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ (26.2)

(26.2) ikki to'g'ri chiziqning parallel shartidir. Agar $L_1 \perp L_2$ bo'lsa $\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2$ bo'lib $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ (26.3)

(26.3) ikki to'g'ri chiziq perpendikulyarlik shartidir.

Endi to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish masalasini qaraylik: To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi proektsiyasi orasidagi burchakka to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb aytiladi. (r – 37)



r - 37

To'g'ri chiziq $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ tenglama bilan tekislik esa $Ax + By + Cz + D = 0$

tenglama bilan berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq bilan uning proektsiyasi orasidagi burchak φ o'rniga, tekislikning normal vektori \bar{n} bilan to'g'ri chiziqniyo'naltiruvchi \bar{S} vektori orasidagi $\frac{\dot{I}}{2} - \varphi$ burchakni topish qulay. Haqiqatan $\cos(\frac{\dot{I}}{2} - \varphi) = \sin \varphi$ bo'lganidan

$$\sin \varphi = \frac{(\bar{n}, \bar{S})}{|\bar{n}| |\bar{S}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad (26.4)$$

Agar L II Q bo'lsa $\bar{n} \perp \bar{S}$ bo'lib $Am + Bn + Cp = 0$ (26.5)

(26.5) to'g'ri chiziq va tekislikning parallel shartidir. Agar L II Q bo'lsa $\bar{n} \parallel \bar{S}$ bo'lib

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (26.6)$$

(26.6) to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartidir.

To'g'ri chiziq va tekislikni kesishuvi.

L to'g'ri chiziq $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ (27.1) kvanonik tenglamasi bilan, Q tekislik

$Ax + By + Cz + D = 0$ (27.2) umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin va ular uzaro parallel bo'lsin. L to'g'ri chiziq bilan Q tekislikni kesishgan nuqtasini topamiz, ya'ni (27.1) va (27.2) tenglamalar sistemasini yechimini topamiz: buning uchun (27.1) praportsiyani umumiy qiymatini λ bilan belgilaymiz va bu tenglamalardan x, y, z larni topamiz, ya'ni

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} = \lambda, \quad \frac{x-x_1}{m} = \lambda, \quad \frac{y-y_1}{n} = \lambda, \quad \frac{z-z_1}{p} = \lambda \quad \text{bulardan}$$

$$x = m\lambda + x_1, \quad y = n\lambda + y_1, \quad z = p\lambda + z_1 \quad (27.3)$$

(27.3) dagi x, y, z larning qiymatlarini (27.2) ga qo'yamiz:

$$A(m\lambda + x_1) + B(n\lambda + y_1) + C(p\lambda + z_1) + D = 0 \quad \text{yoki}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(Am + Bn + Cp) = 0 \quad (27.4)$$

L to'g'ri chiziq va Q tekislik parallel bo'lmaganidan $Am + Bn + Cp \neq 0$ (27.4) dan λ ni topamiz:

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp} \quad (27.5)$$

(27.5) ni (27.3) ga qo'ysak $M_0(x_0; y_0; z_0)$ to'g'ri chiziq bilan tekislikni kesishgan nuqtasi hosil bo'ladi. Agar $Am + Bn + Cp = 0$ bo'lib $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$ bo'lsa to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishmaydi. Agar $Am + Bn + Cp = 0$ bo'lib $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ bo'lsa, bu vaqtda L to'g'ri chiziq ustida yotadi va ular cheksiz ko'p nuqtada kesishadi.

Masala: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $x + 2y - 2z - 3 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish: $Am + Bn + Cp = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = 2 + 6 - 4 = 4 \neq 0$, demak berilgan to'g'ri chiziq va tekislik parallel emas. Endi to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik shaklga keltiramiz:

$$\frac{x-1}{2} = \lambda; \quad \frac{y}{3} = \lambda; \quad \frac{z-1}{2} = \lambda, \quad x = 2\lambda + 1, \quad y = 3\lambda, \quad z = 2\lambda + 1$$

x, y, z larni tekislikning umumiy tenglamasiga qo'yamiz:

$$2\lambda + 1 + 2 \cdot 3\lambda - 2(2\lambda + 1) - 3 = 0$$

$$2\lambda + 1 + 6\lambda - 4\lambda - 2 - 3 = 0; 4\lambda - 4 = 0, \lambda = 1$$

$$x_0 = 2\lambda + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3; \quad y_0 = 3 \cdot 1 = 3; \quad z_0 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Demak berilgan to'g'ri chiziq va tekislikni kesishish nuqtasi $M_0(3;3;3)$ ekan.

Mavzuni takrorlash uchun savollar:

- 1) CHizik nima?
- 2) Ikkinchi tartibli egri chizikning umumiy tenglamasini yozing.
- 3) Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chizikni kanonik kurinishda yozing.
- 4) Aylana nima?
- 5) Aylananing kanonik tenglamasini yozing.
- 6) Ellips giperbola va parabolaning kanonik tenglamasini yozing.
- 7) Giperbolaning assimptotalari nima?
- 8) Parabolaning direktirisasi nima?

7-MA'RUZA. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA

REJA:

1. Funksiya haqida tushuncha va uning ta'rifi.
2. Funksiyaning berilish usullari.
3. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.
4. Juft va toq funksiyalar.
5. Davriy funksiyalar.
6. Monoton funksiyalar.

Tabiatda ikki xil miqdorlar uchraydi, o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Bizga bir necha to'rtburchak berilgan bo'lsin. Ularda quyidagi miqdorlar qatnashadi. Tomonlarning uzunliklari, burchaklarning kattaliklari, yuzalari va perimetrlari. Bu miqdorlardan ba'zilar o'zgarmaydi, ba'zilar o'zgarib turadi. Masalan, qaralayotgan hamma to'rtburchaklarda burchaklarining to'g'riligi, ularning soni to'rtta bo'lishligi va yig'indisi 360° ga tengligi o'zgarmaydi. Tomonlarining uzunliklari, perimetrlari, yuzlari esa o'zgarib turadi. Xuddi shuningdek, bir necha doira chizsak, ularda aylana uzunliklarining o'z diametrlariga nisbati hammasida bir xil bo'lib, π ga teng, lekin ularning radiuslari, aylana uzunliklari, doira yuzlari o'zgarib turadi.

Ma'lum sharoitda faqat bir xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgarmas miqdorlar deyiladi. Ma'lum sharoitda har xil son qiymatlariga ega bo'lgan miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar deyiladi. Odatda o'zgarmas miqdorlarni a, b, c, d, \dots , o'zgaruvchi miqdorlarni x, y, z, u, v, \dots harflari bilan belgilaydilar.

Matematikada ko'pincha o'zaro bir-biriga bog'liq ravishda o'zgaradigan miqdorlar bilan ish ko'riladi. Yuqoridagi misollarimizda doiraning yuzi uning radiusining o'zgarishiga qarab o'zgaradi, ya'ni doiraning radiusi ortsa, yuzi ham ortadi, kamaysa kamayadi. Xuddi shuningdek, kvadratning tomoni bilan yuzi orasida ham shunday bog'lanish bor. Kvadratning yuzi uning tomoniga bog'liq ravishda o'zgaradi.

Ta'rif : Agar x miqdorning X sohadagi har bir qiymatiga biror f qonuniyatga ko'ra y miqdorning Y -sohadan aniq bir qiymati mos keltirilsa, y miqdor x miqdorning X -sohadagi funksiyasi deyiladi va $y=f(x)$ kabi yoziladi.

Bu holda x - argument yoki erkli o'zgaruvchi, y - esa funksiya yoki erksiz o'zgaruvchi deyiladi. Agar y x ning funksiyasi bo'lsa, u holda x va y lar orasidagi bog'lanish funksiyali bog'lanish deyiladi va quyidagicha yoziladi: $y=f(x)$, $y=q(x)$, $y=\varphi(x)$ va hokazo. Agar yuqoridagi misollarga e'tibor bersak, doiraning yuzi radiusning funksiyasi, kvadratning yuzi tomonining funksiyasi ekan.

Argument qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi, funksiyaning o'zi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami funksiyaning o'zgarish sohasi yoki qiymatlari to'plami deyiladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya sharoitiga qarab jadval, analitik va grafik usullar bilan berilishi mumkin.

Funksiya jadval usulida berilganda, argumentning ma'lum tartibdagi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ qiymatlari va funksiyaning ularga mos keluvchi $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ qiymatlari jadval holida beriladi:

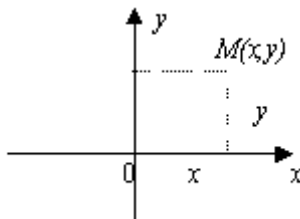
X	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n	\dots
Y	y_1	y_2	y_3	\dots	y_n	\dots

Funksiyalarning jadval usulida berilishiga misol qilib kvadratlar, kublar, kvadrat ildizlar jadvallarni ko'rsatish mumkin. Bu usuldan ko'pincha miqdorlar orasida tajribalar o'tkazishda foydalaniladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi. Ma'lumki, sonlar o'qida nuqtaning vaziyati bir son uning koordinatasi bilan aniqlanar edi. Endi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tushunchasini kiritamiz.

Tekislikda sanoq boshlari ustma-ust tushadigan va o'zaro perpendikulyar bo'lgan OX va OY sonlar o'qini chizamiz. Gorizontol holda tasvirlangan sonlar o'qi ordinatalar o'qi, ularning kesishgan nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Hammasi birgalikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida nuqtaning vaziyati quyidagicha aniqlanadi. Faraz qilamiz, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi olingan tekislikda ixtiyoriy M nuqta berilgan bo'lsin. Shu nuqtadan koordinata o'qlariga perpendikulyarlarning absissalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son uning absissasi, koordinatalar o'qidagi proeksiyasiga mos keluvchi son esa uning ordinatasi deyiladi va $M(x,y)$ tartibida yoziladi. (1-chizma).



Demak, to'g'ri burchakli koordinatalar tekisligida har qanday bir juft ma'lum tartibda berilgan son bilan aniqlanar ekan. Xuddi shuningdek, har qanday bir juft songa koordinatalar tekisligida bitta nuqta mos keladi.

Funksiyaning grafik usulda berilishi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinatalari $y=f(x)$ ni to'g'ri tenglikka aylantiruvchi tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga aytiladi. Agar funksiyaning grafigi tasvirlangan bo'lsa, funksiya grafik usulda berildi deyiladi.

Endi savol tug'iladi, har qanday egri chiziq biror funksiyaning ifodalaydimi? Buni aniqlash uchun egri OX o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar chizamiz, agar bu to'g'ri chiziq egri chiziq bilan kamida ikki nuqtada kesishsa, grafik funksiyaning ifodalamaydi, agar bitta nuqtada kesishsa funksiyaning ifodalaydi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi. Formula yordamida berilgan funksiyalarga analitik usulda berilgan deyiladi. Masalan, $y=x^2$, $y=kx+b$, $y=a^x$, $y=lgx$, $y=sinx$, $y=tgx$, $y=2x^3-x+4$ funksiya analitik usulda berilgan. Agar analitik usulda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi to'g'risida alohida shart qo'yilmagan bo'lsa, u holda $y=f(x)$ da o'ng tomonda turuvchi ifoda ma'noga ega bo'ladigan x ning qiymatlari olinadi. Masalan, agar $y=x^2$ ni kvadratning tomoni bilan yuzi ifodalovchi bog'lanish sifatida olsak, u holda aniqlanish sohasi barcha musbat sonlardan iborat bo'ladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topishga doir misollar ko'raylik. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = \frac{3}{x}$. Echim. Ma'lumki, kasr ma'noga ega bo'lishi uchun uning maxraji noldan farqli

bo'lishi kerak. Demak, $x \neq 0$ yoki $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y = \frac{1}{2}(x-1)^{-1}$. Yechimi. Xuddi yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1 \neq 0$ yoki $2x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$ dan iborat.

3. $y = \sqrt{3x+2}$ Echim. Kvadrat ildiz ma'noga ega bo'lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni $3x+2 \geq 0$, bunda $x \geq -\frac{2}{3}$. Demak, aniqlanish sohasi $[-\frac{2}{3}, +\infty)$ dan iborat.

4. $y = \frac{1}{\sqrt{4x-5}}$ Yechimi. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, u holda $4x-5 > 0$ bo'ladi. Bundan $x > \frac{5}{4}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{5}{4}, +\infty)$ dan iborat.

5. $y = \lg(2x-1)$ Echim. Logarifmik funksiya faqat musbat sonlar uchun aniqlangan. Demak, $(2x-1) > 0$ bo'lishi kerak. Bundan $x > \frac{1}{2}$. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2}, +\infty)$ dan iborat.

6. $y = \frac{1}{\lg(2x-1)}$. Echim. Agar yuqoridagidek muhokama yuritsak, $2x-1 > 0$, $2x-1 \neq 1$ bo'ladi. Bundan $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$ kelib chiqadi. Demak, aniqlanish sohasi $(\frac{1}{2}; +1) \cup (1; +\infty)$ dan iborat.

A) analitik usul funksiyaning o'rganish jarayonida juda ko'p uchraydigan usuldir, lekin ba'zi xollarda funksiyaning qiymatini topish murakkab hisoblashlarga olib keladi:

B) $y=f(x)$ yozuv hali funksiyaning analitik usulda berilishi bo'lmasligi mumkin. Masalan, ushbu Dirixle funksiya uchun quyidagidek:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{рационал сон булса} \\ 0, & \text{агар } x - \text{иррационал сон булса.} \end{cases}$$

Demak $y=f(x)$ funksiya berilgan, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat, ammo funksiyaning analitik ifodasi berilgan emas:

V) funksiyaning jadval usulida berilishi qulaydir, chunki bir necha qiymatlar topilgan bo'ladi, lekin funksiyaning sohasi cheksiz to'plam bo'lganda, uning barcha qiymatlarini ko'rsatib bo'lmaydi:

G) funksiyaning grafik usulda berilishi uning o'zgartirishlarini ko'rgazmali qilish imkonini beradi.

Funksiyaning grafigi – egri chiziq (hususiy holda to'g'ri chiziq), ba'zi hollarda biror nuqtalar to'plami bo'ladi.

4. Funksiya grafigini chizish. $y=f(x)$ funksiyaning grafigini hosil qilish uchun $M(x, f(x))$ nuqtalarni hosil qilib, ular bir-biriga juda yaqin bo'lganda, silliq chiziq bilan tutashtiriladi.

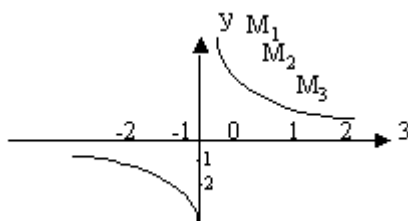
Misol. 1) $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning grafigi chizilsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $x \neq 0$ haqiqiy sonlar to'plami, ya'ni $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ dan iborat.

Endi, aniqlanish sohasidan x ning bir necha qiymatlarini olib, y ning ularga mos keladigan qiymatlarini topamiz.

X	1	2	3	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$...
f(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	...

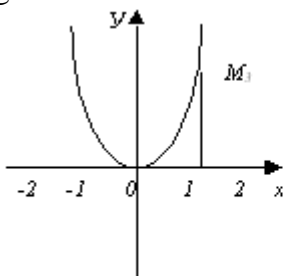
Koordinata tekisligida $M_1(1;1)$, $M_2(2;\frac{1}{2})$, $M_3(3;\frac{1}{3})$,....

nuqtalarni hosil qilamiz. Bir biriga yaqin turga nuqtalarni uzluksiz chiziq yorlamida tutashtirsak, funksiyaning grafigini ifoda qiladigan egri chiziq giperbola hosil bo'ladi. (2-chizma)

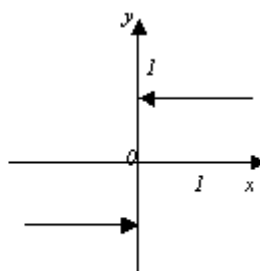


2-chizma.

2) $y=x^2$ ning grafigi chizilsin.



3-chizma.



4-chizma.

Jadval tuzamiz:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	...
$y=x^2$	0	1	4	9	1	4	9	...

$M_1(0; 0)$, $M_2(1; 1)$, $M_3(2; 4)$,.... nuqtalarni hosil qilamiz. Ularni silliq chiziq bilan tutashtirsak, parabola egri yaizig'i hosil bo'ladi. (3-chizma)

3) 4-chizmada

$$y = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bulsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bulsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bulsa.} \end{cases}$$

funksiyaning grafigi ko'rsatilgan.

Aksincha, agar tekislikda biror egri chiziq berilgan bo'lib, absissalar o'qiga tik bo'lgan har qanday to'g'ri chiziq bu egri chiziq bilan bittadan ko'p bo'lmagan nuqtada kesishsa, u holda bu egri chiziq funktsiyani ifoda qiladi.

3. Chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar.

1. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli B sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x) \leq B$ bo'lsa, $f(x)$ yuqoridan chegaralangan funksiya deyiladi.

2. $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasidagi har qanday qiymati uchun shunday o'zgarmas chekli A sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, $f(x) \geq A$ bo'lsa, $f(x)$ quyidan chegaralangan deyiladi.

Misollar .1. $y=x^2-4x+6$ funksiya $-\infty < x < +\infty$ oraliqda aniqlangan bo'lib, u quyidan chegaralangan. Haqiqatdan ham, $y=(x-2)^2+2$ Demak, $y \geq 2$ ya'ni funksiyaning eng katta qiymati yo'q. Eng kichik qiymati 2.

2. $Y=-3x^2+4x+1$ funksiya yuqoridan chegaralangan. Haqiqatdan ham,

$$y=-3x^2+4x+1=-3(x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3})=-3(x-\frac{2}{3})^2-\frac{7}{3},$$

ya'ni funksiyaning eng katta qiymati bor. Eng kichik qiymati yo'q. Demak, $y \leq \frac{7}{3}$.

Agar $y=f(x)$ funksiya yuqoridan ham, quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni $A \leq f(x) \leq B$ bo'lsa, bunday funksiya *chegaralangan* funksiya deyiladi.

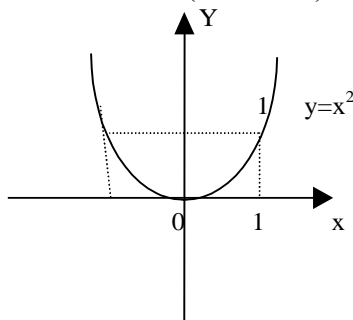
Masalan, $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalar chegaralangandir, chunki $-1 \leq \sin x \leq 1$ va $-1 \leq \cos x \leq 1$ shartlari bajariladi.

Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $A \leq f(x)$ yoki $f(x) \leq B$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan A yoki B sonlari mavjud bo'lmasa, u holda bunday funksiya *chegaralanmagan* funksiya deyiladi.

Masalan, $y=x$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan, lekin chegaralanmagan funksiya, ya'ni $-\infty < y < +\infty$. $f(x) \geq a$ bo'lsa, funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan x uchun grafikning barcha nuqtalari $y=a$ to'g'ri chiziqdan (2-chizma) yuqorida joylashgan bo'ladi.

4. Juft va toq funksiyalar.

$y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x o'zgaruvchining har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *juft funksiya* deyiladi. Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya juft funksiya. Haqiqatdan, bu funksiya \mathbf{R} to'plamda aniqlangan va demak, aniqlanish sohasi har qanday x bilan $-x$ ni o'z ichiga oladi. Bundan tashqari, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ tenglik bajariladi. Juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi (7-chizma).



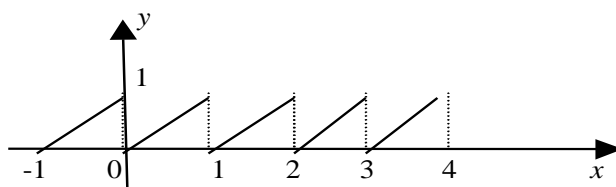
7-chizma

$y=\cos \alpha$ juft funksiya. Haqiqatdan ham, har qanday α va $-\alpha$ uchun P_α va $P_{-\alpha}$ nuqtalar absissalar o'qiga nisbatan simmetrik joylashgan (9-chizma). Bundan shu nuqtalarning absissalari bir xil, ordinatalari esa qarama-qarshi ekanini kelib chiqadi. Bu kosinus ta'rifiga ko'ra, har qanday α da quyidagi tenglik to'g'ri ekanini bildiradi: $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$. Umuman, har qanday juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrikdir. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x ning har bir qiymati bilan $-x$ qiymat ham shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa va bunda $f(-x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya *toq funksiya* deyiladi. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya toq funksiya. Haqiqatdan ham, $f(-x)=(-x)^3=-f(x)$, ya'ni $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajariladi. Bu funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lib, kubik paraboladan iboratdir (9-chizma). $y=\sin x$ toq funksiya. Haqiqatdan ham, chizmada P_α va $R_{-\alpha}$ nuqtalarning ordinatalari bir xil, lekin ishoralari qarama-qarshiligidan $\sin \alpha = y_\alpha$, $\sin(-\alpha) = -y_\alpha$ bo'ladi. Bundan esa $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ bo'ladi. Har qanday funksiya ham juft yoki toq bo'lishi shart emas.

Masalan, $y=2x+5$, $y=x^2+x^3$, $y=\sin x+\cos x$ juft ham, toq ham emas. Demak funksiyalar har doim juft yoki toq bo'lishi shart emas ekan.

5. Davriy funksiyalar.

Ta'rif: Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $t>0$ son mavjud va funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $x+t$ va $x-t$ lar aniqlanish sohasiga joylashgan bo'lib, $f(x+t)=f(x)$ tenglik o'rinni bo'lsa, u holda $f(x)$ *davriy funksiya* deb ataladi. t sonlarni eng kichigi funksiyaning *davri* deyiladi.



8-chizma

Misol. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=x-[x]$ davriy funksiyalardir.

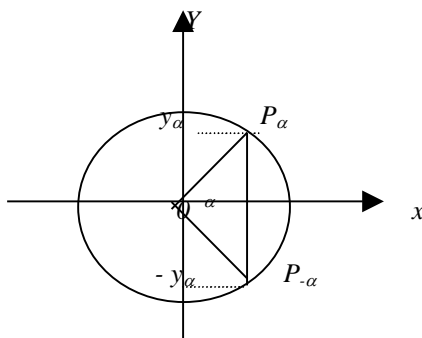
Davriy funksiyaning grafigini hosil qilish uchun uning bir davr ichidagi grafigini chizib, so'ngra uni chapga va o'ngga cheksiz ko'p marta ko'chirish kerak.

Misol. $f(x)=x-[x]=x-E(x)$ funksiya berilgan. Bunda $E(x)=[x]$ ifoda x ning butun qismini bildiradi. (E – fransuzcha Entier -ante-butun so'zining birinchi harfi). Masalan, $[x]=m$ ($m \leq x < m+1$) m butun son.

$f(x)=x-E(x)=\{x\}$. Bu funksiya x ning kasr qismini bildiradi, ya'ni $f(1)=0$; $f(1,05)=0,05$; ... , $f(x)$ funksiya davriydir va uning davri $t=1$ dir. Haqiqatdan,

$$f(x+1)=x+1-E(x+1)=x+1-E(x)-1=x-E(x)=f(x).$$

Demak, har qanday butun son ham davr bo'ladi. Funksiyaning grafigi 8-chizmada ko'rsatilgan.

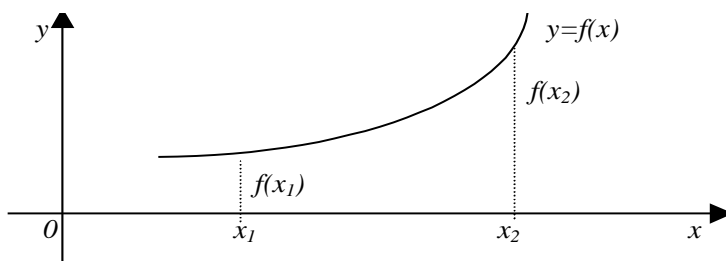


9-chizma

6. Monoton funksiyalar.

Ta'rif-1: $y=f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita (x_1, x_2) qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi X sohada o'suvchi funksiya deyiladi.

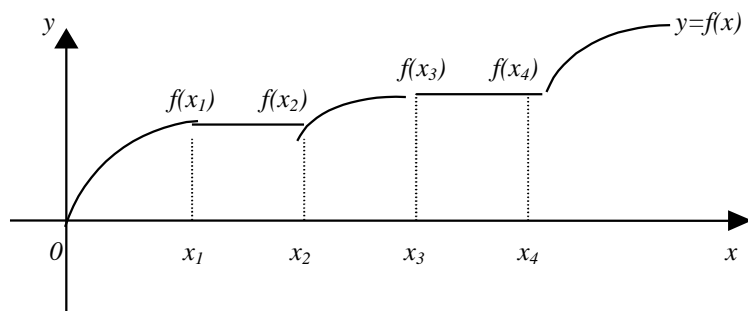
Yuqorida, aytib o'tilgan ta'rifni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha ko'rsatishimiz mumkin.



Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, funksiya biror oraliqda o'suvchi bo'lishi uchun shu oraliqdagi argumentning kichik qiymatiga funksiyaning kichik qiymati, argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelar ekan.

- 1) $y=2^x$ funksiyasi butun son o'qida o'suvchi.
- 2) $y=\operatorname{tg} x$ funksiya ham o'suvchi funksiyadir.

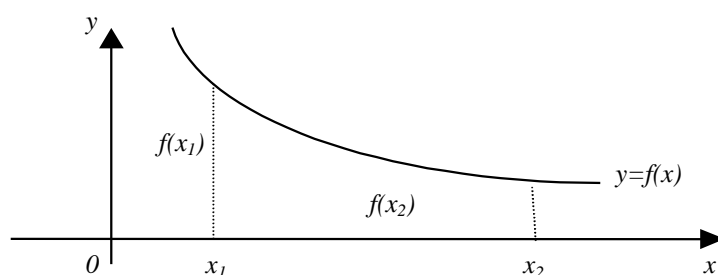
Ta'rif-1: $y=f(x)$ funksiyaning X sohadagi ixtiyoriy ikkita (x_1, x_2) qiymatlari uchun $x_1 \leq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1, x_2) oraliq'ida kamaymaydigan funksiya deyiladi.



Ta'rif-2: $y=f(x)$ ning argumenti X ni $\forall(x_1, x_2)$ uchun $x_1 < x_2$, bo'lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizligi o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ ni (x_1, x_2) oraliq'ida kamayuvchi funksiya deyiladi.

1-Misol: $y=x^2$ funksiyaning olsak, bu funksiya $(-\infty, 0)$ oraliq'ida kamayuvchi, $(0, \infty)$ oraliq'ida o'suvchi funksiyadir.

2-Misol: $y=\sin x$ funksiya $(0, \frac{\pi}{2})$ oraliqda monoton o'suvchi bo'lib, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ oraliqda monoton kamayuvchidir.



Ta'rif: $y=f(x)$ ning argumentining ixtiyoriy (x_1, x_2) qiymatlari uchun $x_1 \leq x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi (x_1, x_2) oraliq'ida o'smaydigan funksiya deyiladi.

Agar berilgan oraliqda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa, ya'ni shu oraliqdagi ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun $x_2 > x_1$ shartdan $f(x_2) > f(x_1)$ kelib chiqsa, $y=f(x)$ funksiya shu oraliqda o'suvchi deyiladi.

Ta'rif-3: Biror (x_1, x_2) oraliq'ida o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

1. Quyidagi funksiyalarni aniqlanish sohasini toping:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

b) $y = \arcsin \frac{x-2}{2}$

v) $y = \frac{1}{\lg(4-x^2)}$

g) $y = \sqrt{25-x^2} + \lg \sin x$

J: a) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ b) $[0, 4]$ v) $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 2)$ g) $[-5, -\pi) \cup (0, \pi)$

2. Quyidagi funksiyalarni o'zgarish sohasini toping:

a) $y = \sqrt{16-x^2}$ b) $y = 3\cos x - 1$; v) $y = 3^{-x^2}$

J: a) $[0, 4]$; b) $[-4, 2]$ v) $(0, 1]$.

3. Quyidagi funksiyalarni juft yoki toq funksiya ekanini aniqlang:

a) $y = \sin 5x$ b) $y = \lg \cos 2x$ v) $y = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$

J: a) toq b) toq ham emas juft ham emas v) juft

4. Quyidagi funksiyalarning davrlarini aniqlang:

a) $y = x^4 \sin 3x$ b) $y = x^4 - x^2 + x$ v) $y = \lg \cos x$

J: a) $\frac{2\pi}{5}$ b) π v) π

5. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang:

a) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ b) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$ v) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ g) $y = 2^x + 2^{-x}$

J: a) juft b) toq v) toq g) juft

Teskari Funksiya Tushunchasi.

Teskari trigonometrik funksiyalarga o'tishdan avval umuman teskari funksiya haqidagi izoh berib o'tamiz.

Faraz qilaylik; $y=f(x)$ funksiya biror X sohada berilgan bo'lsin va x argument X sohada o'zgarganda, bu funksiya qabul qilgan barcha qiymatlar to'plami Y bilan ifodalansin. Odatda, X va Y lar oraliqlardan iborat bo'ladi.

Biz Y sohadan biror $y=y_0$ qiymatni tanlaylik; bu vaqtda X sohadan bizning funksiyamiz xuddi shu y_0 ga teng bo'ladigan $x=x_0$ qiymat, albatta, topiladi, demak, $f(x_0)=y_0$ bo'ladi.

x_0 ning bunday qiymatlari bir qancha bo'lishi ham mumkin. Shunday qilib, Y sohadagi y ning har bir qiymatiga x ning bitta yoki bir qancha qiymati mos keladi; shu bilan Y sohada bir qiymatli yoki ko'p qiymatli $x=g(y)$ funksiya aniqlanib, buni $y=f(x)$ funksiyaning teskari funksiyasi deyiladi.

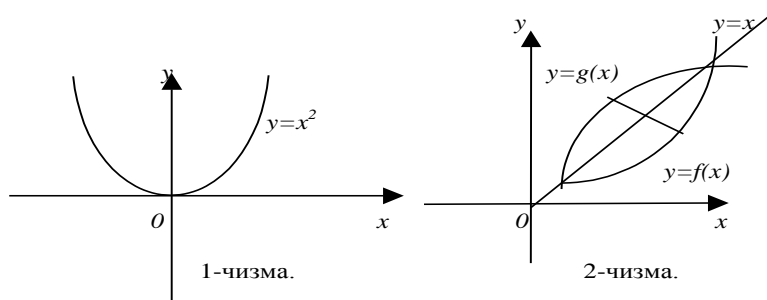
M i s o l l a r qaraymiz:

1) $y=a^x$ ($a>1$) funksiyani olaylik, bu erda x argument $X=(-\infty; +\infty)$ oraliqda o'zgaradi. Funksiya u ning qiymatlari $Y=(0; +\infty)$ oraliqni tashkil qiladi, shu bilan birga, bu oraliqdagi har bir y ga X dan birgina $x=\log_a y$ qiymat mos keladi. Bu holda teskari funksiya b i r q i y m a t l i bo'ladi.

2) Aksincha, $y=x^2$ funksiya uchun x argument $X=(-\infty; +\infty)$ oraliqda o'zgarsa, teskari funksiya ikki qiymatli bo'ladi, chunki $Y[0; +\infty)$ oraliqdagi y ning har bir qiymati uchun X da ikkita $x=\pm\sqrt{y}$ qiymat mos keladi. Odatda, bu ikki qiymatli funksiya o'rniga $x=+\sqrt{y}$ va $x=-\sqrt{y}$ funksiya (ikki qiymatli funksiyaning "shoxchalari") tekshiriladi. Bularning har birini alohida $y=x^2$ ga teskari funksiya deb qarash ham mumkin, faqat bu vaqtda x ning o'zgarish sohasi $[0; +\infty)$ yoki $(-\infty; 0]$ oraliq bilan chegaralangan, deb faraz qilish kerak.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning grafigiga qarab, bunga teskari $x=g(y)$ funksiyaning bir qiymatli bo'lish yoki bo'lmasligini sezish osondir. Agar x o'qqa parallel bo'lgan har bir to'g'ri chiziq bu grafikni faqat bitta nuqtada kessa, u holda teskari funksiya bir qiymatli bo'ladi. Aksincha, bunday to'g'ri chiziqlardan ba'zilar grafikni bir nechta nuqtada kessa, teskari funksiya ko'p qiymatli bo'ladi. Bu holda grafikka qarab, har bir bo'lakka bu funksiyaning bir qiymatli "shoxchasi" mos keladigan qilib, x ning o'zgarish oralig'ini bo'laklarga bo'lish mumkin. Masalan, 1-chizmadagi $y=x^2$ funksiyaning grafigi bo'lgan parabolaga birinchi qarashimizdayoq, uning teskari funksiyasi ikki qiymatli ekanini aniq ko'ramiz va teskari funksiyaning bir qiymatli "shoxchalarini" olish uchun parabolaning o'ng va chap bo'laklarini, ya'ni x ning musbat va manfiy qiymatlarini alohida qarash etarlidir.

Agar $x=g(y)$ funksiyasi $y=f(x)$ funksiyaga teskari bo'lsa, u vaqtda bu ikki funksiyaning grafigi bir xil bo'lishi ravshan. Teskari funksiyaning argumentini ham x bilan belgilashni, ya'ni $x=g(y)$ funksiya o'rniga $y=g(x)$ deb yozishni talab etish mumkin. U vaqtda gorizental o'qni y o'q deb va vertikal o'qni esa x o'q (yangi) gorizental, y o'q (yangi) vertikal bo'lsin desak, u vaqtda bu o'qlarning o'rinlarini almashtirib, birining o'rniga ikkinchisini qo'yish kerak, bu esa grafikni ham o'zgartiradi. Buni amalga oshirish uchun xOy chizma tekisligini birinchi koordinata burchak bissektrisasi atrofida 180° ga aylantirish hammadan ham qulaydir



Shunday qilib, oxiri $y=g(x)$ ning grafigi $y=f(x)$ ning grafigini shu bissektisaga nisbatan ko'zgudagi aksi deb olish mumkin.

Funksiyaning superpozitsiyasi.

Funksiyalarning superpozitsiyasi (yoki o'rniga qo'yish) tushunchasi bilan tanishaylik. Bu tushuncha berilgan funksiyaning argumenti o'rniga boshqa argumentga bog'liq bo'lgan funktsiyani qo'yishdan iboratdir. Masalan, $y=\sin x$ va $z=\lg y$ funksiylarning superpozitsiyasi $z=\lg \sin x$ funktsiyani beradi; shunga o'xshash $\sqrt{1-x^2}$, $\arctg \frac{1}{x}$ va hokazo funktsiyalar ham hosil bo'ladi.

Umuman, $y=f(x)$ funktsiya x ning hamma qiymatlari uchun $X=\{x\}$ sohada aniqlangan va shu bilan birga bu funktsiyaning hamma qiymatlari esa $Y=\{y\}$ sohaga kirgan deb faraz etaylik. Endi $z=\varphi(y)$ funktsiya xuddi $Y=\{y\}$ sohada aniqlangan bo'lsin. U vaqtda z o'zgaruvchining o'zi y orqali x ning funktsiyasi bo'ladi, ya'ni: $z=\varphi(f(x))$.

x ning X sohadagi berilgan qiymati bo'yicha avval y ning Y dagi unga mos qiymatini (f belgi bilan harakterlangan qonun bo'yicha) topamiz, so'ngra y ning bu qiymatiga muvofiq z ning qiymatini (φ belgi bilan harakterlangan qonun bo'yicha) aniqlaymiz; z ning bu qiymatini x ning tanlangan qiymatiga mos deb hisoblanadi. Hosil qilingan funksiyaning funktsiyasi yoki murakkab funktsiya $f(x)$ va $\varphi(y)$ funksiylarning superpozitsiyasi natijasida vujudga keldi.

Bundagi $f(x)$ funksiyaning qiymatlari, $\varphi(y)$ ni aniqlovchi Y sohadan chetga chiqmaydi degan farazimiz g'oyat muhimdir; agar bu farazni tushirib qoldirilsa, ma'nosizlik yuz berishi mumkin. Masalan, $z=\lg y$, $y=\sin x$ deb olib, biz faqat x ning $\sin x > 0$ ni qanoatlantiruvchi qiymatlarinigina olamiz, bo'lmasa $\lg \sin x$ ifoda ma'noga ega bo'lmay qoladi.

Murakkab funksiyaning harakteristikasi x va z orasidagi funktsional munosabatning tabiati bilan emas, balki bu munosabatning berilish usuli bilangina bog'langanligini ta'kidlab o'tish foydali deb hisoblaymiz. Masalan, $[-1,1]$ dagi y uchun $z=\sqrt{1-y^2}$ funktsiya va $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dagi x uchun $y=\sin x$ funktsiya berilgan bo'lsin.

U vaqtda: $z=\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$.

Bu erda $\cos x$ funktsiyasi murakkab ko'rinishida berilgan bo'lib qoldi.

Endi, funksiylarning superpozitsiyasi tushunchasi to'la anglashilgandan keyin, analizda tekshiriladigan eng oddiy funktsiyalar sinflarini harakterlashimiz mumkin: bular, yuqorida ko'rsatilgan elementar funktsiyalar, so'ngra bulardan to'rtta arifmetik amalni ishlatish va superpozitsiyalashni chekli son marta ketma-ket qo'llash natijasida kelib chiqqan funktsiyalardir. Bu funktsiyalarni elementar funktsiyalar orqali chekli ko'rinishda ifodalanuvchi funktsiyalar deb, ba'zan esa faqat elementar funktsiyalar deb ham ataladi.

SAVOLLAR.

1. Teskari funktsiyani ta'riflang?
2. Berilgan funktsiya bilan teskari funktsiyani aniqlanish va o'zgarish sohalaridagi farqni ayting?
3. Teskari funktsiya grafigi qanday chiziladi?
4. Qanday funktsiyalar teskari trigonometrik funktsiyalar deyiladi?
5. Funktsiyalar superpozitsiyasi deganda nimani tushunasiz?

8-MA'RUZA. ELEMENTAR FUNKSIYALAR.

REJA:

1. Butun va kasr ratsional funksiyalar.
2. Darajali funksiya.
3. Ko'rsatkichli funksiya.
4. Logarifmik funksiya.
5. Trigonometrik funksiyalar.

Bu erda *elementar funksiyalar* deb atalgan funksiyalarning ba'zi bir sinflarini ko'rsatib o'taylik.

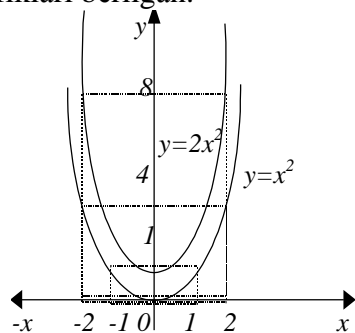
1. *Butun va kasr ratsional funksiyalar.* X ga nisbatan butun $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ko'phad (bu erda a_0, a_1, a_2, \dots o'zgarmas) bilan tasvirlanuvchi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi.

Bunday ikki ko'phadning

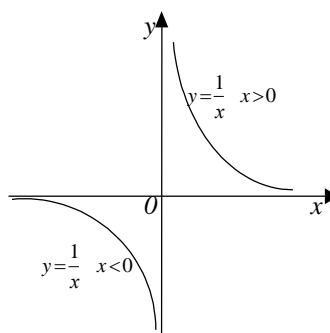
$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

nisbati kasr ratsional funksiya deyiladi. Bu funksiya x ning maxraji nolga aylantiruvchi qiymatlaridan boshqa hamma qiymatlari uchun aniqlangan bo'ladi.

Misol tariqasida 1-chizmada $y = ax^2$ funksiya (parabola) ning a koeffitsienti har xil qiymatlar qabul qilgandagi grafiklari berilgan.



1-chizma



2-chizma.

2-Chizmada esa $y = \frac{a}{x}$ funksiya (teng yonli giperbola) ning a har xil qiymatlarni qabul qilgandagi grafiklari berilgan.

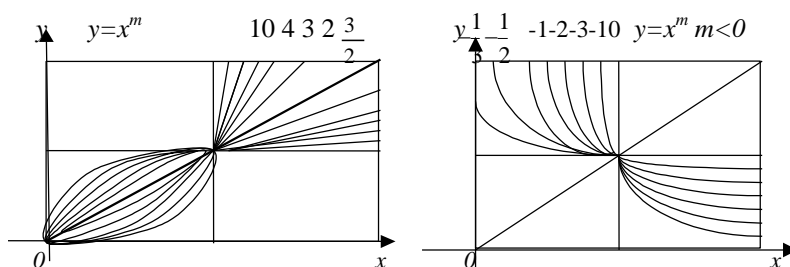
2. *Darajali funksiya.*

Quyidagi $y = x^\mu$ ko'rinishdagi funksiyani darajali funksiya deyiladi, bu erda μ ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Agar μ kasr bo'lsa, biz ildizga ega bo'lamiz. Masalan, m natural son bo'lsin

va: $y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$.

Bu funksiya m toq bo'lganda, x ning hamma qiymatlari uchun va m juft bo'lganda, x ning faqat musbat qiymatlari uchun aniqlanadi. Bu holda biz ildizning faqat arifmetik qiymatini hisobga olamiz. Nihoyat, μ irratsional son bo'lsa, $x > 0$ deb faraz etamiz ($x = 0$ qiymat $\mu > 0$ bo'lgandagina olinadi).

Quyida 3 va 4-chizmalarda μ ning har xil qiymatlari uchun darajali funksiyaning grafiklari berilgan.

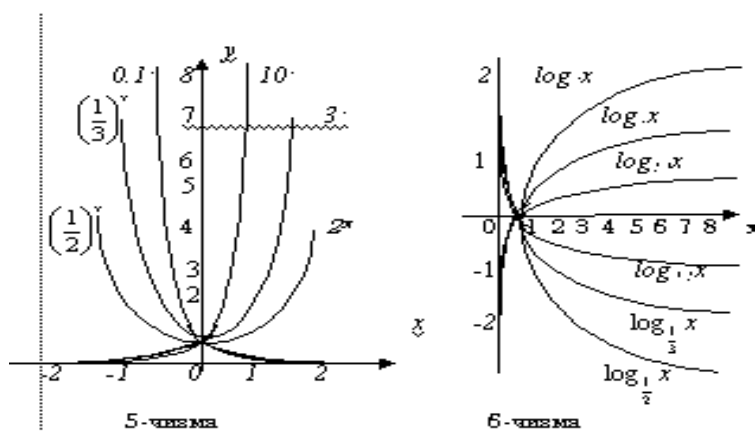


3-chizma.

4-chizma.

3. Ko'rsatkichli funksiya, ya'ni $y=a^x$

ko'rinishdagi funksiyadir, bu erda a 1 dan farqli musbat son; x istalgan haqiqiy qiymat qabul qila oladi. 5-Chizmada a ning har xil qiymatlari uchun ko'rsatkichli funksiyaning grafiklari berilgan.



4. Logarifmik funksiya, ya'ni

$$y = \log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya, bu erda a yuqoridagi singari 1 dan farqli musbat son; x faqat musbat qiymatlar qabul qiladi.

6-Chizmada bu funksiyaning a ning turli qiymatlaridagi grafiklari berilgan.

5. Trigonometrik funksiyalar:

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x,$$

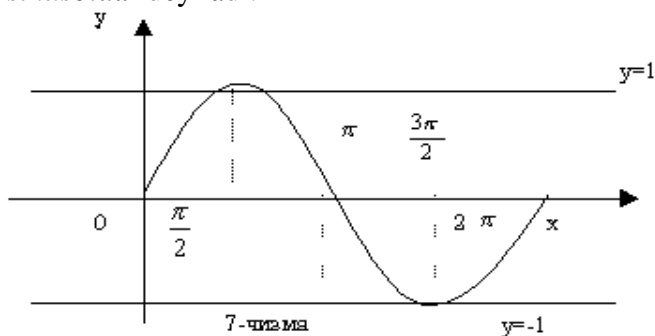
$$y = \operatorname{sec} x, y = \operatorname{cosec} x$$

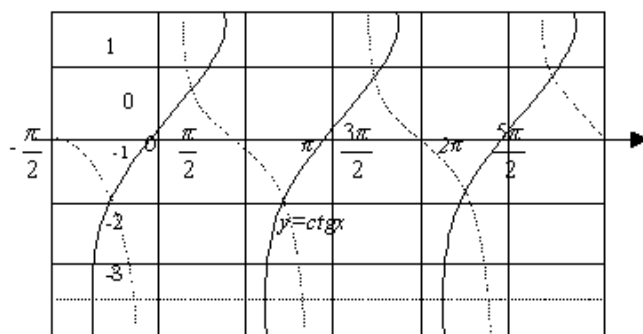
Agar trigonometrik funksiyalarning argumentlari burchaklarning o'lchovi sifatida qaralsa, ular bu burchaklarni har vaqt radianlarda ifodalaydi (agarda aksi aytilmagan bo'lsa). Buni har

vaqt esda tutish kerak. Bunda $\operatorname{tg} x$ va $\operatorname{sec} x$ lar uchun $(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ko'rinishdagi qiymatlar, $\operatorname{ctg} x$ va

$\operatorname{cosec} x$ lar uchun $k\pi$ (bu erda k -butun son) ko'rinishdagi qiymatlar mustasnodir.

$y = \sin x$ ($\cos x$) va $y = \operatorname{tg} x$ ($\operatorname{ctg} x$) funksiya-larning grafiklari 7-8 chizmalarda berilgan. Sinusning grafigi, odatda, sinusoida deyiladi.





8-chizma
SAVOLLAR.

1. Qanday funksiyaga butun va kasr ratsional funksiya deyiladi?
2. Darajali funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
3. Ko'rsatkichli funksiya debchi?
4. Logarifmik funksiya ta'rifini ayting?
5. Qanday funksiyalar trigonometrik funksiyalar deyiladi?

9-MA'RUZA. SONLAR KETMA-KETLIGI VA UNING LIMITI.

REJA:

1. Sonlar ketma-ketligi haqida tushuncha.
2. Chegaralangan ketma-ketliklar.
3. Monoton ketma-ketliklar.
4. Sonlar ketma-ketligining limiti.

1. Sonlar ketma-ketlik tushunchasi.

Ta'rif: Agar $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x ni qabul qiladigan qiymatlari natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsa, bu holda bunday funksiyani $N=\{1,2,3,\dots\}$ natural argumentli funksiya deb ataladi va u quyidagicha yoziladi $y=f(n)$ yoki $y=f(N)$

Ta'rif: Natural argumentli funksiya $y=f(n)$ ning xususiy qiymatlarining $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ ketma-ketligiga cheksiz sonlar ketma-ketligi deb ataladi.

$$f(1)=x_1, f(2)=x_2, f(3)=x_3, \dots, f(n)=x_n \dots$$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, cheksiz sonlar ketma-ketligining har bir hadi ma'lum bir tartib nomeriga ega bo'layapti. Umuman olganda sonlar ketma-ketligi $\{a_n\}=a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \{x_n\}=x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ko'rinishlarda belgilanadi. Ketma-ketlikni tashkil qilgan sonlar shu ketma-ketlikning hadlari deyiladi. Bularga ko'ra x_1 - ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 - ikkinchi hadi x_n - ketma-ketlikni n chi hadi yoki umumiy hadi deb yuritiladi. Agar ketma-ketlikning n hadi berilgan

bo'lsa shu hadga ega bo'lgan ketma-ketlikni tuzish mumkin. Masalan, 1) $x_n = \frac{n}{n+1}$ berilgan bo'lsa,

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ ketma-ketlikni tuzish mumkin.

2) $x_n = aq^{n-1}$ bo'lsa, $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ ketma-ketlikni tuzish mumkin.

Ta'rif: Tartib nomeriga ega bo'lgan sonlar to'plami sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Sonlar ketma-ketligi uch xil bo'ladi.

1. O'suvchi ketma-ketlik.
2. Kamayuvchi ketma-ketlik.
3. Tebranuvchi ketma-ketlik.

Ta'rif: Agar ketma-ketlikning har bir hadi o'zidan avvalgi hadiga nisbatan qiymat jihatidan ortib borsa, u holda bunday ketma-ketliklar o'suvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan: 1) $\{\frac{n}{n+1}\}; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ o'suvchi ketma-ketlik; aks holda kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Masalan: 2) $\{\frac{1}{n}\}; 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ kamayuvchi ketma-ketlik.

Ta'rif: O'smaydigan va kamaymaydigan ketma-ketliklar tebranuvchi ketma-ketliklar deyiladi.

Masalan: $\{x_n\}=(-1)^n$
 $x_0=-1; x_2=1; x_3=-1; x_4=1; \dots$

2. Chegaralangan ketma-ketliklar.

Biror $\{x_n\} : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif: Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

2-ta'rif: Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ quyidan chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

3-ta'rif: Agar ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilsaki, $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik deyiladi.

Misolalar. 1. Ushbu $x_n = 1 + \frac{1}{n^2};$

$1+1, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{9}, \dots, 1+\frac{1}{n^2}, \dots$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \leq 2$ ($M=2$) tengsizlik o'rinli.

2. Ushbu $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2};$

$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \dots$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $x_n \geq -\frac{1}{4}$ ($m=-\frac{1}{4}$) tengsizlik o'rinli.

3. Ushbu $x_n = \frac{n^2-1}{n^2}$

$0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2}, \dots$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun $0 \leq x_n < 1$ tengsizlik o'rinli.

3. Monoton ketma-ketliklar.

1-ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari quyidagi

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \quad (x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n < x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ o'suvchi (qat'iy o'suvchi) ketma-ketlik deyiladi.

2-ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari quyidagi

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \quad (x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots)$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, ya'ni $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun

$$x_n \geq x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$$

bo'lsa, $\{x_n\}$ kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

O'suvchi (qat'iy o'suvchi), kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) ketma-ketliklar monoton ketma-ketliklar deyiladi.

1-Misol. Ushbu $x_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

ketma-ketlikning o'suvchi ekanini ko'rsating.

Bu ketma-ketlikning $x_n = \frac{n}{n+1}$, $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ hadlarini olib, $x_{n+1} - x_n$ ayirmani qaraymiz:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Ravshanki, $\forall n \in N$ uchun $\frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$

Demak, $\forall n \in N$ da $x_{n+1} - x_n > 0$, ya'ni $x_n < x_{n+1}$ bo'ladi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning o'suvchi (hatto qat'iy o'suvchi) ekanini bildiradi.

2-Misol. Ushbu $x_n = \frac{n!}{n^n} : \frac{1!}{1}, \frac{2!}{2^2}, \frac{3!}{3^3}, \dots, \frac{n!}{n^n}, \dots$

ketma-ketlikning kamayuvchi ekanini ko'rsating.

Bu ketma - ketlikning $x_n = \frac{n!}{n^n}$, $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ hadlarini olib, ularning nisbatini

qaraymiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

Ravshanki, ixtiyoriy $n \in N$ da $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < 1$ bo'ladi. Demak, $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ Bu tengsizlikdan esa $x_n > x_{n+1}$

($\forall n \in N$) kelib chiqadi.

Demak, ketma-ketlik kamayuvchi ekan.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin:

$$x_n : x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots,$$

$$y_n : y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n, \dots,$$

Quyidagi

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, \dots,$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yig'indisi hamda ayirmasi deyiladi va $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ kabi belgilanadi.

Ushbu

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n,$$

ketma--ketlik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar ko'paytmasi deyiladi va $\{x_n \cdot y_n\}$ kabi belgilanadi.

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_k \neq 0, k = 1, 2, \dots)$$

ketma-ketlik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar nisbati deyiladi va $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ kabi belgilanadi.

3. Sonlar ketma-ketligining limiti.

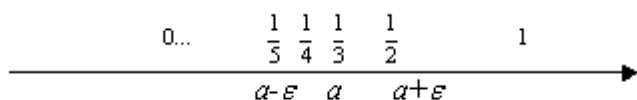
Limit haqida intuitiv tasavvur biror "harakat" to'g'risidagi tasavvur bilan bog'langan. Tartiblangan N to'plam bo'ylab harakatlana borib, $\{a_n\}$ ketma-ketlikning ortishi bilan ketma-ketlik

hadlari shu ketma-ketlikning limiti deb ataladigan biror a sonidan borgan sari kam farq qilishi lozimligini kuzatamiz.

Bu tasavvurning tabiiyligiga qaramasdan, qat'iy matematik formulalar jiddiy mulohaza yuritish jarayonini talab etadi. Eng avval pirovard maqsadni aniqlab olaylik, chunonchi biz uchun ketma-ketlik hadlari biror a songa cheksiz yaqinlashishi zarur. Binobarin, bunday savol qo'yamiz; talab qilinayotgan yaqinlikka nima hisobiga erishish mumkin?

Umumiy hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo'lgan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ ketma-ketlikni tekshiraylik. n chegarasiz ortganda bu ketma-ketlikning hadlari borgan sari kichiklashadi, ya'ni noldan borgan sari kam farq qiladi. Haqiqatan, ketma-ketlikning 10 - hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari 0,1 dan kichik, 1000 - haddan keyingi barcha hadlari 0,001 dan kichik va hokazo.

Ketma-ketlikning hadlarini son o'qida nuqtalar ko'rinishida tasvirlaymiz (1-chizma). Son o'qining ketma-ketlikning hadlariga mos nuqtalari 0 nuqta atrofida quyuvlashayotganini ko'rish oson.



1-chizma

Yuqoridagilarga asoslanib, nuqtaning atrofi tushunchasini keltiramiz. Biror a nuqta (son) hamda ixtiyoriy musbat ε soni ($\forall \varepsilon > 0$) berilgan bo'lsin. Ushbu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ interval a nuqtaning *atrofi* (ε atrofi) deyiladi (1-chizma). Ravshanki, ε turli qiymatlarga teng bo'lganda a nuqtaning turli atroflari hosil bo'ladi. Masalan, $a=1$ nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{3}$ atrofi $(1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3})$ intervaldan, ya'ni $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ intervaldan; $a=0$ nuqtaning $\varepsilon = \frac{1}{10}$ atrofi $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ intervaldan iborat.

Biror $\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik hamda biror a nuqta (son) berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning hadlari a nuqtaning biror atrofiga tegishli bo'ladimi, tegishli bo'lsa, nechta hadi tegishli bo'ladi - shularni aniqlash ketma-ketlikning limiti tushunchasini kiritishda muhim rol o'ynaydi. Misollar keltiraylik:

1. Ushbu $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}: 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots$ ketma-ketlik va $a=0$ nuqtaning $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ atrofini qaraylik. Bu ketma-ketlikning

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{1}{4}, x_5 = \frac{1}{5}$$

hadlari a nuqtaning $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ atrofiga tegishli bo'lmaydi. Berilgan ketma-ketlikning x_6 hadidan, ya'ni 6-hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'ladi.

Agar $a=0$ nuqtaning $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ atrofi olinsa, unda $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ketma-ketlikning 11-hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ atrofga tegishli bo'ladi.

Agar $a=0$ nuqtaning $(-2, 2)$ atrofi olinsa, unda berilgan ketma-ketlikning barcha hadlari shu $(-2, 2)$ atrofga tegishli bo'ladi.

2. Ushbu $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, 1, \dots$ ketma-ketlikni hamda $a=1$ nuqtaning $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$, ya'ni $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ atrofini qaraymiz.

Bu ketma-ketlikning $x_2=1, x_4=1, x_6=1, \dots, x_{2k}=1, \dots$ hadlari, ya'ni juft nomerli barcha hadlari $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ atrofga tegishli bo'ladi. Berilgan ketma-ketlikning

$$x_1 = -1, x_3 = -1, x_5 = -1, \dots, x_{2k+1} = -1, \dots$$

hadlari, ya'ni toq nomerli barcha hadlari $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ atrofga tegishli bo'lmaydi.

Ravshanki, $x_n = (-1)^n$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari $a=1$ nuqtaning $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ atrofiga tegishli bo'lavermaydi.

3. Ushbu $x_n = n : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ketma-ketlikni hamda $a=2$ nuqtaning $(2-4, 2+4)$ ya'ni $(-2, 6)$ atrofiga qaraylik.

Bu ketma-ketlikning

$$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5$$

hadlari $(-2, 6)$ atrofga tegishli bo'lib, 6-hadidan boshlab qolgan barcha hadalari shu atrofga tegishli emas. Agar $a=0$ nuqta olinsa va uning $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ atrofi qaralsa, unda berilgan $x_n = n$ ketma-ketlikning bitta ham hadi shu atrofga tegishli bo'lmasligini ko'ramiz.

Yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinidagi, biror nuqta atrofga ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari tegishli bo'lishi, biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari, jumladan ketma-ketlikning barcha hadlari (cheksiz sondagi hadlari) tegishli bo'lishi, bitta ham hadi tegishli bo'lmasligi mumkin ekan.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik hamda biror a son berilgan bo'lsin.

6 - t a ' r i f : Agar a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofi $(\forall \varepsilon > 0)$ olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab, keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (\text{yoki } \lim x_n = a \text{ yoki } x_n \rightarrow a)$$

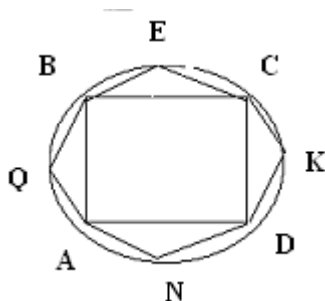
kabi belgilanadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari a nuqtaning ixtiyoriy $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ atrofga tegishliligi, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday natural n_0 son topilib, barcha $n > n_0$ uchun $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ tengsizliklarning o'rinli bo'lishidan iboratdir.

Ravshanki, $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Masala: Bizga ma'lumki ketma-ketliklar o'zining berilishiga qarab ma'lum bir songa intilib boradi. Bu son chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Faraz qilaylik C aylana va bu aylanaga ichki chizilgan muntazam to'rtburchakning perimetri berilgan bo'lsin.



$$P_n = AB + BC + CD + AD$$

Ichki chizilgan muntazam to'rtburchakni ikkilantirsak R_8 hosil bo'ladi.

$$R_8 = AQ + QB + BE + \dots + NA.$$

Muntazam sakkiz burchakni ikkilantirsak R_{16} hosil bo'ladi. Bu jarayonni cheksiz ikkilantirib borsak natijada

$$R_4 < P_8 < P_{16} < P_{32} < \dots < P_n < C \quad (1) \text{ tengsizlik hosil bo'ladi.}$$

(1) dan ko'rinadiki aylanaga ichki chizilgan muntazam to'rtburchakning perimetri har qancha ikkilansa ham aylana uzunligi C dan katta bo'la olmaydi. Boshqacha qilib aytganda $C - R_n < \varepsilon$ tengsizligi o'rinli bo'ladi.

Bizga ma'lumki bu tengsizlikni $|P_n - C| < \varepsilon$ ko'rinishida yozish ham mumkin. Bu erda P_n - o'zgaruvchi C - o'zgarmas.

Ta'rif: Har qanday $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ nomer mavjud bo'ladiki, $n > n_0$ bo'lgan x_n ning barcha qiymatlari $|x_n - a| < \varepsilon$ uchun tengsizlik o'rinli bo'lsa, a soni x_n sonlar ketma-ketligining limiti deyiladi va $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\}$ kabi yoziladi.

Limit so'zi lotincha limes so'zining qisqartirib olingani bo'lib u "chek" yoki "intiladi" degan ma'noni beradi.

Yuqoridagi masalani bu ta'rifga tadbiiq qilsak.

$|P_n - C| < \varepsilon$ edi, shuning uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C$ bo'ladi. Demak, aylanaga ichki chizilgan muntazam n burchakning perimetrini $n \rightarrow \infty$ dagi qiymati aylana uzunligiga teng deb olinar ekan.

1-Misol: $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ketma-ketlikning limiti nol ekanligini ko'rsating.

$\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ soni topilishini ko'rsatish kerakki, berilgan ketma-ketlikni $n > n_0 \in \mathbb{N}$ hadidan keyingi barcha hadlari $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsin. $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Agar natural n_0 soni $\frac{1}{\varepsilon}$ dan katta qilib olinsa unda barcha $n > n_0$ uchun $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lib $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ tengsizligi bajariladi. Shunday qilib $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra $n_0 \in \mathbb{N}$ topiladiki, barcha $n > n_0$ uchun $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ tengsizligi bajariladi. Bu esa ta'rifga ko'ra 0 soni $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning limiti ekanligini bildiradi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Agar $\varepsilon = 0,1$ bo'lsa $n > 10$ bo'ladi.

2-Misol: $\{\frac{n}{n+1}\}$ ketma-ketlik limiti 1 ga tengligini ko'rsating.

Yechish: $x_n = \frac{n}{n+1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{n}{n+1}$ bu ketma-ketlik limiti 1 ga teng ekanligini

ko'rsatish uchun $\forall \varepsilon > 0$ da ham $\exists N(\varepsilon)$ son mavjudki $n > N$ bo'lganda $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ bo'lishini ko'rsatish kerak.

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n-n-1}{n+1}| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow 1 < \varepsilon(n+1) \Rightarrow 1 - \varepsilon < \varepsilon \cdot n \Rightarrow n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \quad N = E(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon})$$

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists N = E(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon})$ soni topilar ekanki, $n > N = E(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon})$

bo'lganda ketma-ketlikning barcha elementlari uchun $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ bo'lar ekan. Ta'rifga ko'ra

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\frac{n}{n+1}\} = 1$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\varepsilon = 0,1$ bo'lsin, u holda $N = E\left(\frac{1-0,1}{0,1}\right) = 9$. Demak, $n > 9$ bo'lganda $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < 0,1$ bo'lar ekan. 9 sonidan kichik qiymatlar bu tengsizlik bajarilmaydi, ammo 10 dan boshlab bu tengsizlik bajariladi.

1) $n = 10$ bo'lsin

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{10}{10+1} - 1\right| = \left|\frac{10}{11} - 1\right| = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}$$

2) $n = 8$ bo'lsin, u holda $\left|\frac{8}{9} - 1\right| = \frac{1}{9} > \frac{1}{10}$

3-Misol: Ushbu $x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ ketma-ketlikni qaraylik. Har qanday a ning ixtiyoriy atrofi, jumladan $\left(a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3}\right)$ atrofi olinsa, ketma-ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lmaydi. Binobarin, a berilgan ketma-ketlikning limiti emas. Berilgan ketma-ketlik limitga ega emas.

4-Misol: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ ekanligini isbot qiling va $N(\varepsilon)$ ni aniqlang.

Yechish: $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists N(\varepsilon)$ soni mavjud bo'lishi kerakki, barcha $n \geq N(\varepsilon)$ lar uchun $\left|\frac{2n+3}{2n+1} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizligi bajarilsa, limit ta'rifiga ko'ra qo'yilgan masala hal bo'ladi.

Yuqoridagi tengsizlikni echsak, $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$ bundan $2n+1 > \frac{2}{\varepsilon}$ yoki $n > \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$ bo'ladi, demak

$N = N(\varepsilon) = \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}$. Shuning uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ bo'ladi.

S A V O L L A R.

1. Natural argumentli funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Sonlar ketma-ketligi deb nimaga aytiladi?
3. Chegaralangan ketma-ketlik deganda nimani tushunasiz?
4. Monoton ketma-ketlik deb qanday ketma-ketliklarga aytiladi?
5. Nuqtaning atrofi deganda nimani tushunasiz?
6. Ketma-ketlik limitini ta'riflang?

10-MA'RUZA.

CHEKSIZ KICHIK VA CHEKSIZ KATTA MIQDORLAR

REJA:

1. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar
2. Cheksiz kichik miqdorlarning asosiy xossalari.
3. Cheksiz kichik miqdorlarni taqqoslash
4. Uzoqlashuvchi va yaqinlashuvchi ketma-ketliklar.
5. Monoton o'zgaruvchining limiti haqidagi teoremlar.
6. Fundamental ketma-ketlik.

1.Ta'rif: Agar x_n o'zgaruvchining limiti $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'lsa, u holda x_n o'zgaruvchi *cheksiz kichik* miqdor deyiladi.

Masalan, $\frac{1}{n}$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Yuqorida berilgan ta'rifdan o'zgaruvchi miqdorning limiti haqidagi ta'rif bilan solishtirsak, uni quyidagicha ifodalash mumkin. Bizga ma'lumki, har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists N(\varepsilon)$

mavjud ediki, $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lar edi. Shunda biz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ deb yoza olar edik. Xuddi shuningdek, $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), n > N(\varepsilon)$, bo'lganda $|x_n - 0| < \varepsilon$ bo'lsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ bo'ladi.

Bu erda $|x_n - 0| < \varepsilon$ dan $|x_n| < \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu degan so'z agar x_n o'zgaruvchi cheksiz kichik miqdor bo'lsa, ixtiyoriy $\forall \varepsilon > 0$ sondan ham x_n ning absolyut qiymati $|x_n| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu mulohazaga ko'ra cheksiz kichik miqdorning ta'rifini yana quyidagicha berish mumkin.

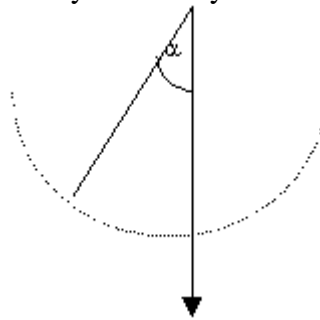
Ta'rif: $\forall \varepsilon > 0$ ham $\exists N(\varepsilon)$ mavjudki, $n > N(\varepsilon)$ bo'lganda $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_n o'zgaruvchi *cheksiz kichik miqdor* deyiladi.

Bu cheksiz kichik miqdorga berilgan ta'rifdan foydalanib o'zgaruvchi miqdor limitining ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

Agar o'zgaruvchi miqdor x_n bilan o'zgarmas a soni orasidagi ayirmaning qiymati α_n cheksiz kichik miqdorga teng bo'lsa, ya'ni $x_n - a = \alpha_n$, u holda a soni x_n o'zgaruvchining limiti deyiladi va u $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ kabi yoziladi. Demak, o'zgarmas a soni x_n o'zgaruvchining limiti bo'lishi uchun ular orasidagi ayirma $x_n - a = \alpha_n$ cheksiz kichik miqdordan iborat bo'lishi shart ekan.

Cheksiz kichik miqdorlarga doir misollar.

1-misol. Muvozanat holatidan chiqib tebranayotgan mayatnik qaraymiz (1 rasm). Mayatnikning holatini uning vertikal to'g'ri chiziq bilan (muvozanat holati) hosil qiladigan α burchagi yordamida aniqlaymiz. Mayatnikning vertikal to'g'ri to'g'ri chiziqdan o'ngda yoki chapda bo'lishiga qarab, burchakni musbat yoki manfiy deb olamiz.



(1 rasm)

Muhitning ko'rsatadigan qarshiligi natijasida mayatnikning tebranish qadami tobora kichrayadi: shuning uchun har qanday kichik musbat son ε berilganda chetlanish α absolyut qiymati bo'yicha ε dan kichik bo'ladi va kichikligicha qolaveradi.

Demak, α cheksiz kichik miqdordir: u o'zga-rishi davomida musbat qiymatlarni ham, manfiy qiymatlarni ham, nolga teng bo'lgan qiymatlarni ham qabul qiladi.

2-misol. $y = x^3$ o'zgaruvchi miqdorni x nolga cheksiz yaqinlashganda cheksiz kichik miqdor ekanini ko'rsatamiz. ε uchun biror musbat sonni, masalan 0,001 ni olamiz.

$$|y| < 0.001$$

yoki baribir $|x^3| < 0,001$ tengsizlik x nolga yaqinlasha borib, absolyut qiymati bo'yicha $\sqrt[3]{0,001} = 0,1$ dan kichik bo'lgandagina o'rinli bo'ladi: $|x| < 0,1$

Demak, $|y| < 0,001$ tengsizlik x ning nolga bundan keyingi yaqinlashishida ham o'rinli bo'lib qolaverishi ravshan.

Endi ε uchun boshqa biror kichik musbat son, masalan, $\varepsilon < 0,000001$ ni olaylik, $|y| < 0,000001$ tengsizlik x tengsizlik yoki baribir $|x^3| < 0,000001$ tengsizlik x absolyut qiymati bo'yicha $\sqrt[3]{0,000001} = 0,01$ dan kichik bo'lgandagina amalga oshadi: $|x| < 0,01$, $|y| < 0,000001$ tengsizlik x ning nolga bundan keyingi yaqinlashishida ham o'rinli bo'lib qolaverishi ravshan. Shunga o'xshash har qanday avvaldan berilgan ε son uchun x absolyut qiymati bo'yicha $\sqrt[3]{\varepsilon}$ dan

kichik bo'lishi bilan, ya'ni $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ bo'lganda $|x|^3 < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi va bu tengsizlik x ning bundan keyingi nolga yaqinlashadigan qiymatlari uchun ham saqlanib qolaveradi.

Shunday qilib, o'zgaruvchi miqdor y $x \rightarrow 0 + \infty$ da cheksiz kichik miqdor belgilovchi shartni qanoatlantiradi.

3-misol. $\frac{1}{x}$ nisbat x ning cheksiz kattalashgan yoki x ning $+\infty$ ga intilishda ($x \rightarrow +\infty$) cheksiz kichik miqdor ekanligini ko'rsatamiz.

Dastlabki x cheksiz o'sgani uchun uning faqat musbat qiymatlarini qarashimiz mumkin, bu holda $\|\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\| \varepsilon = \frac{1}{1000000}$ deb olamiz. $\frac{1}{x} < \frac{1}{1000000}$ tengsizlik x o'sa borib, 1000000 dan katta bo'lganda bajariladi va x ning bundan keyingi o'sishida o'rinli bo'lib qolaveradi.

Umuman, har qanday musbat ε son berilganda ham $\frac{1}{x} < \varepsilon$ tengsizlik $x \frac{1}{\varepsilon}$ dan katta bo'lishi bilan o'rinli bo'ladi va x ning bunday keyingi o'sishida ham bajarilaveradi.

2. Cheksiz kichik miqdorlarni taqqoslash.

Aytaylik, bir vaqtda bir necha $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ cheksiz kichik miqdorlar birgina x argumentning funksiyalaridan iborat bo'lib, x biror a limitga yoki cheksizlikka intilganda ular nolga intilsin. Bu o'zgaruvchilarning nisbatlarini ko'zdan kechirib, o'zgaruvchilarning nolga intilishlarini harakter-laymiz.

Bundan buyon quyidagi ta'riflardan foydalanamiz.

1-Ta'rif: Agar $\frac{\beta}{\alpha}$ nisbat chekli va noldan farqli limitga ega, ya'ni $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ demak,

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0$ bo'lsa, u holda β va α cheksiz kichik miqdorlar bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar deyiladi.

1-misol. $\alpha=x, \beta=\sin 2x$ bo'lsin, bu erda $x \rightarrow 0$ α va β bir xil tartibli cheksiz kichik miqdordir, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$.

2-misol. $x \rightarrow 0$ da $x, \sin 3x, \operatorname{tg} 2x, 7 \ln(1+x)$ cheksiz kichik miqdordar bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlardir. Buning isboti 1 – misolda isbot qanday o'tkazilgan bo'lsa, shunday qilinadi.

2-Ta'rif: Agar ikkita cheksiz kichik miqdorning nisbati $\frac{\alpha}{\beta}$ nolga intilsa, ya'ni

$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$ ($\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$) bo'lsa, u holda β cheksiz kichik miqdor α cheksiz miqdorga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor deyilib, α cheksiz kichik miqdor esa β cheksiz kichik miqdorga nisbatan quyi tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi.

3-misol. $\alpha=x, \beta=x^n, n > 1, x \rightarrow 0$ bo'lsin. β cheksiz kichik miqdor α cheksiz kichik miqdorga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0$$

Bunda α cheksiz kichik miqdor β cheksiz kichik miqdorga nisbatan quyi tartibli cheksiz kichik miqdordir.

3-Ta'rif: Agar β va α^k bir hil tartibli cheksiz kichik miqdorlar uchun $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = A \neq 0$ bo'lsa, β cheksiz kichik miqdorga nisbatan α k - tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi.

4-misol. Agar $\alpha=x$, $\beta=x^3$ bo'lsa, u holda $x \rightarrow 0$ da β cheksiz kichik miqdor α cheksiz kichik miqdorga nisbatan uchinchi tartibli cheksiz kichik miqdordir, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x)^3} = 1$.

4-Ta'rif: Agarda ikkita cheksiz kichik miqdorning $\frac{\beta}{\alpha}$ nisbati birga intilsa, ya'ni $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ bo'lsa, u holda β va α cheksiz kichik miqdorlar ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar deyiladi va $\alpha \sim \beta$ shaklida yoziladi.

5-misol. $\alpha=x$ va $\beta=\sin x$ bo'lsin, bunda $x \rightarrow 0$. α va β cheksiz kichik miqdorlar ekvivalentdir, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

6-misol. $\alpha=x$ va $\beta=\ln(1+x)$ bo'lsin, bunda $x \rightarrow 0$. α va β cheksiz kichik miqdorlar ekvivalentdir, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Cheksiz katta miqdorlar.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar har qanday musbat M son berilganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun

$$|x_n| > M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini ∞ deb qaraladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{yoki} \quad x_n \rightarrow \infty$$

kabi belgilanadi.

Agar har qanday musbat M son berilganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun $x_n > M$ ($x_n < -M$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ($-\infty$) deb qaraladi.

1-misol. $x_n = (-1)^n n$: $-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n n, \dots$ ketma-ketlikning limiti ∞ bo'ladi, chunki $|x_n| = |(-1)^n n| = n$ bo'lib, har qanday musbat M son olinganda ham shunday natural n son topiladiki, $n > M$ bo'ladi.

Ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan, $x_n = n$ ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi, chunki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

2-misol. Ushbu $\{x_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}$: $2, 2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}}, \dots, 2^{\sqrt{n}} \dots$ ketma-ketlikning limiti $+\infty$ ekanini ko'rsating.

Ixtiyoriy $E > 0$ sonni olaylik. Unda bu songa ko'ra shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(E)$) son topilishini ko'rsatish kerakki, barcha $n > n_0$ uchun $x_n = 2^{\sqrt{n}} > E$ tengsizlik bajarilsin. Oldingi misolni yechish jarayonida aytganimizdek, n_0 son

$$2^{\sqrt{n}} > E \tag{1}$$

tengsizlikni yechish orkali aniqlanadi. Ravshanki,

$$2^{\sqrt{n}} > E \Leftrightarrow \log_2 2^{\sqrt{n}} > \log_2 E \Rightarrow \sqrt{n} > \log_2 E$$

$0 < E \leq 1$ bo'lganda, $n_0 = n_0(E) = 1$ deyilsa, $E > 1$ bo'lganda, $n_0 = \lceil \log_2^2 E \rceil$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun har doim (1) tengsizlik bajariladi: $x_n = 2^{\sqrt{n}} > E$.

Bu esa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$ ekanini bildiradi.

2-Ta'rif: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti chekli son bo'lsa, uni yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Agar ketma-ketlikning limiti cheksiz yoki ketma - ketlik limitga ega bo'lmasa, uni uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

5. Monoton o'zgaruvchining limiti haqidagi teorema

Teorema: Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lib u yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

Isboti: Teorema shartiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketligimiz yuqoridan chegaralangan uchun u o'zining aniq yuqori chegarasiga ega bo'ladi. Faraz qilaylik a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning aniq yuqori chegarasi bo'lsin, u holda ("Supremum") $\sup\{x_n\}=a$

Agar a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning aniq yuqori chegarasi bo'lsa quyidagi ikkita shart bajarilar edi.

1. $x_n \leq a$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N n > N$ bo'lganda $a - \varepsilon < x_n \leq a$ bo'lar edi.

Teorema shartiga ko'ra ketma - ketlik o'suvchi bo'lganligi uchun $x_N < x_n$ bo'ladi. Monoton o'suvchi bo'lganligidan $a - \varepsilon < x_N \leq a$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikdan $a - \varepsilon < x_n$ deb yozishimiz mumkin yoki $a - x_n < \varepsilon$ yoki $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu degan so'z ketma - ketlik limitining ta'rifiga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$ deganidir.

e- SONI VA AJOYIB LIMITLAR.

Ko'pincha matematik masalalarni tekshirish ushbu limitni izlashga olib keladi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Bu limit matematikada g'oyat darajada katta rol o'ynaydi. Uni izlashga kirishishdan ilgari o'quvchilarni ba'zi bir yangilish fikrlardan saqlashni lozim topamiz. Ifodaga yuzaki qaraganda mana bunday o'ylash mumkin: "n cheksiz o'sib borganda $\frac{1}{n}$ nolga yaqinlashib boradi; shuning uchun qavsning ichida yolg'iz 1 qoladi va $1^n = 1$ bo'ladi".

Bunday muhokama qilish yaramaydi: n, ya'ni daraja ko'rsatkich, har qanday katta bo'lsa-da, u chekli bo'lgan holdagina bunday muhokama qilish to'g'ri bo'lar edi, holbuki, bu erda n cheksiz o'sib boradi.

Ikkinchi tomondan, daraja ko'rsatkichi n cheksiz o'sib borgan bilan u "ifodaning o'zi ham cheksiz o'sib boradi" deb bo'lmaydi, chunki bu holda $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ birga yaqinlashib keladi. Shunga o'xshash u birga yaqinlashgan bilan "ifodaning o'zi ham birga yaqinlashadi" deb bo'lmaydi, chunki bu holda uning daraja ko'rsatkichi cheksiz o'sib boradi.

Aytilganlarni ochiq tasvir qilish maqsadida n ga bir necha ketma-ket o'sib boruvchi qiymatlarni berib, ifodaning ularga tegishli qiymatlarini hisoblab ko'rsatamiz; n ga berilgan qiymatlar va chiqqan natijalar quyidagi jadvaldan ko'rinmoqda:

N	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00
2	2,25
3	2,37
4	2,44
5	2,48
6	2,52
7	2,54
8	2,56
...	...
1000	2,71

Bu jadvalga qaraganda: n ning qiymati 1 dan 1000 gacha o'sib borsa-da, biroq ifodaning qiymati 2 bilan 3 ning orasida bo'ladi.

Endi, masala shundaki, n har qancha cheksiz o'sib borgan holda ham, ifodaning qiymati shu chegara ichida, ya'ni 2 bilan 3 orasida qolarmikan? Quyidagi tekshirishlar bu savolga javob beradi.

Bizga maktab matematika kursidan ma'lumki, ikki son yig'indisining n darajasi Nyuton Binomi formulasi bilan hisoblanar edi.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!}b^n$$

Bizning asosiy maqsad, ushbu formuladan foydalanib $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ko'rinishdagi ketma-ketlikning

limitini hisoblashdan iborat. Biz ushbu ketma-ketlik limitini hisoblash uchun uni

- 1) monoton o'suvchi ekanligini
- 2) uni yuqoridan chegaralanganini ko'rsatishi-miz lozim bo'ladi.

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot (\frac{1}{n})^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots [n-(n-1)]}{n!} \cdot (\frac{1}{n})^n$$

(1) tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{n-1}{n})$$

Endi $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ hadni hisoblaymiz.

$$x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n+1}) + \dots + (1 - \frac{2}{n+1}) + \dots + \frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})\dots(1 - \frac{n-1}{n+1})$$

Bu ketma-ketlik isbotining 1-shartida uni monoton o'suvchi ekanligini ko'rsatish kerak edi. Agar bu ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lsa, $x_n \leq x_{n+1}$ tengsizligi o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikni ko'rsatish uchun (2) va (3) tengliklarning hadlarini o'zaro taqqoslaymiz. x_{n+1} ning uchinchi hadidan

boshlab har bir hadi x_n ning tegishli mos hadidan kattadir. Shuning uchun $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ bo'ladi.

Natijada x_n va x_{n+1} ketma-ketliklar uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizligi o'rinli bo'ladi.

x_n monoton o'suvchi o'zgaruvchini yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda (2) tenglikni o'ng tomondagi 1 sonidan kichik bo'lgan har bir qavsni 1 soni bilan almashtiramiz.

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Demak, $x_n < 3$ ekan.

x_n o'zgaruvchi monoton o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa monoton o'zgaruvchining limiti yuqoridagi teorema ko'ra u chekli limitga ega bo'lar edi.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71828\dots$$

1-Misol.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2}} = e^1 = e.$$

SAVOLLAR.

1. Nyuton-binomi formulasi qanday yoyiladi?
2. Monoton ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
3. Qanday ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik deyiladi?
4. e -soni nimani ifoda qiladi?

ADABIYOTLAR

1. N.P.Antonov va boshqalar, Elementa, matematikadan masalalar tuplami.
2. P.E.Danko, A.G.Popov, Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax, 4.1-3.
3. N.X.Abdullaev va boshqalar. Modelirovaniye biologicheskix protsessov. T- 1979g.
4. B.A.Abdalimov, Oliy matematika. T-1994 yil
5. T.Jo'rayev va boshqalar. Oliy matematika asoslari, 1-I k., T-1999Y
6. Yo.Soatov. Oliy matematika. MP k.. T-1992 y.
7. V.E.Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.
8. V.E.Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masala yechish.
9. S.X.Sirojiddinov, M.Mamatov Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari.
10. T.A.Sarimsaqov. H.O'F.N.
11. Sh.Maqsudov va b. K.O'F.N.
12. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami.
13. Ma'ruzalar matni.
14. Mustaqil yechiladigan misollar to'plami.

11-MA'RUZA. FUNKSIYANING LIMITI.

REJA:

1. Funksiya limitining ta'rifi.
2. Funksiya limiti cheksiz bo'lgan holi.
3. Funksiyaning chap va o'ng limitlari.
4. Birinchi ajoyib limit.

Faraz qilaylik, bizga X haqiqiy sonlar to'plami va shu to'plamda aniqlangan a nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif: a nuqtaning $(a-\delta, a+\delta)$ oralig'i shu nuqtaning atrofi deyiladi.

Ta'rif: Agar a nuqtaning $\forall (a-\delta, a+\delta)$ atrofida X -to'plamning a nuqtadan boshqa yana biror elementlari mavjud bo'lsa, a nuqta X to'plamning quyuqlanish nuqtasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ berilgan bo'lsin, bu funksiyaning argumenti X sohada aniqlangan bo'lsin. a nuqta X haqiqiy sonlar to'plamining quyuqlanish nuqtasi bo'lsin. Agar $y=f(x)$ funksiyaning argumenti x biror a soniga intilganda $y=f(x)$ funksiyaning o'zi bir o'zgarmas A soniga intilishi mumkin yoki intilmasligi mumkin. Masalan: $y=\sin x$ funksiyasini olsak, bu

funksiyaning argumenti $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ da $y \rightarrow 1$ ga intiladi $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ da $y \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ intiladi, huddi shuningdek

$y=\tan x$ funksiyasini olsak, bu funksiyaning argumenti $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ da $y \rightarrow \infty$, $x = \frac{\pi}{4}$ da $y \rightarrow 1$.

1-Ta'rif (Geyne ta'rifi): Agar X to'planning nuqtalaridan tuzilgan a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}\{x_n \neq a, n=1,2,3,\dots\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona b (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi (yoki $x \rightarrow a$ dagi) limiti deb ataladi va uni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ yoki $x \rightarrow a$ da $f(x) \rightarrow b$ kabi belgilanadi.

1 misol. Ushbu $f(x)=x^5$ Funksiyaning $x \rightarrow 2$ dagi limiti 32 ga teng ekanini ko'rsating. 2 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}\{x_n \neq 2, n=1,2,3,\dots\}$ ketma-ketlik olamiz. Mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik quyidagi $\{f(x_n)\}=\{x^5\}$ ko'rinishda bo'ladi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustidagi arifmetik amallarga binoan:

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n^5 = 2^5 = 32$$

Demak, ta'rifga ko'ra: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 32$

2-misol. Ushbu $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

Funksiyaning $x \rightarrow 0$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Nolga intiluvchi ikkita turli $\{x_n'\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\}$, $\{x_n''\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\}$ ketma-ketliklarni

olaylik. U holda $f(x_n') = \cos \frac{(4n+1)\pi}{2} = 0$, $f(x_n'') = \cos 2n\pi = 1$ bo'lib,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'') = 1$ bo'ladi.

Demak, $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi limiti mavjud emas ekan.

2-Ta'rif: Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtada limiti deyiladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kabi belgilanadi. Funksiya limitiga berilgan bu ta'rif Koshi ta'rifi deyiladi.

Misollar.

1. Ushbu $f(x) = \sin x$ funksiyaning $x = \frac{\pi}{6}$ nuqtadagi limiti $\frac{1}{2}$ ga teng ekanligini ko'rsating.

$\forall \varepsilon > 0$ sonni olaylik. Bu ε ga ko'ra δ ni $\delta(\varepsilon)$ deb olsak, u holda $0 < \left| x - \frac{\pi}{6} \right| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x larda quyidagi

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \right| = \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} \cdot 2 \cos \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{\left| x - \frac{\pi}{6} \right|}{2} = \left| x - \frac{\pi}{6} \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan 2- ta'rifga ko'ra $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz yuqorida $f(x)$ funksiya $x \rightarrow a$ dagi chekli b limitga ega bo'lishining Koshi ta'rifini (2-ta'rifni) keltirdik. $b = \infty$, ($b = +\infty$, $b = -\infty$) bo'lgan holda funksiya limitining Koshi ta'rifi quyidagicha ifodalanadi.

2. **3-Ta'rif:** Agar $\forall E > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, x argumentning $0 < |x - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x)| > E \quad (f(x) > E; -f(x) > E)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti ∞ ($x \rightarrow +\infty, -\infty$) deyiladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) kabi belgilanadi.

Misol. Ushbu $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ bo'linishini

ko'rsating.

Agar $\forall E > 0$ son uchun $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{E}}$ deb olinsa, u holda $0 < |x-1| < \delta$ tengsizlikni

qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x)| = \left| \frac{1}{(x-1)^3} \right| > E$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3} = \infty$.

Endi, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng va chap limitlari tushunchalarini keltiramiz.

$X = \{x\}$ haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lib, a nuqta uning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin. Shu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

4-ta'rif (Geyne ta'rifi): Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo'lib a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi.

5-ta'rif (Koshi ta'rifi): Agar $\forall x$ va $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ son topilsaki, argument x ning $a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) tengsizliklarini qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi.

Funksiyaning o'ng (chap) limitlari quyidagicha belgilanadi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b & \quad \text{ëku} \quad f(a+0) = b \\ \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \right) & \quad \text{ëku} \quad f(a-0) = b \end{aligned}$$

1-misol. Ushbu $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ($x \neq 0$) funksiyaning nol nuqtadagi o'ng va chap limitlarini

toping.

Nolga intiluvchi turli $\{x_n'\}$ va $\{x_n''\}$ ketma-ketliklarni olaylik. Faraz qilaylik, $\{x_n'\}$ ketma-ketlik 0 nuqtaga o'ngdan, $\{x_n''\}$ esa 0 nuqtaga chapdan intilsin. U holda bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n') = \frac{|x_n'|}{x_n'}, \quad f(x_n'') = \frac{|x_n''|}{x_n''},$$

bo'lib, sonning absolyut qiymati ta'rifiga ko'ra

$$f(x_n') = \frac{x_n'}{x_n'} = 1, \quad f(x_n'') = -\frac{x_n''}{x_n''} = -1$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1$$

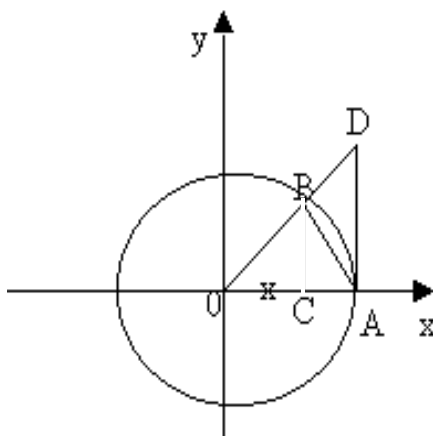
$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ isboti. Bu limitni o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun radiusi R ga teng bo'lgan aylana olamiz. OA qo'zg'almas radius bo'lsin. OV esa qo'zg'aluvchi radius bo'lsin. $\angle AOV = x$ bo'lib, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. V nuqtadan OA radiusga S nuqtani tik tushiramiz. Aylanaga A nuqtadan urinma o'tkazamiz. OV ni urinma bilan kesishish nuqtasi D bo'lsin. V va A nuqtalarni tushiramiz, natijada AV vatar hosil bo'ladi. Shakldan $S_{\triangle OAV} < S_{\text{sek}OAV} < S_{\triangle AOD}$ (1)

$$\frac{AO \cdot BC}{2} < \frac{AO}{2} AB < \frac{AO \cdot AD}{2} \Rightarrow (BC < AB < AD) \Rightarrow \frac{BC}{AO} < \frac{AB}{AO} < \frac{AD}{AO} \quad (2)$$

(1) va (2) larga ko'ra $\triangle OAV$ $\sin x < x < \tan x$ o'rinli bo'ladi.

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad /: \sin x \neq 0$$



$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, \quad -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x, \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$

$$\cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} < x \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x, \text{ shuning uchun } x \rightarrow 0 \text{ da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1-Misol: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5$

2-Misol. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$ limitni hisoblang

Yechish. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz.

Agar $\frac{\pi}{2} - x = z$ desak, u holda $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ da $z \rightarrow 0$ bo'ladi.

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - z\right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\pi - \pi + 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2}$$

SAVOLLAR.

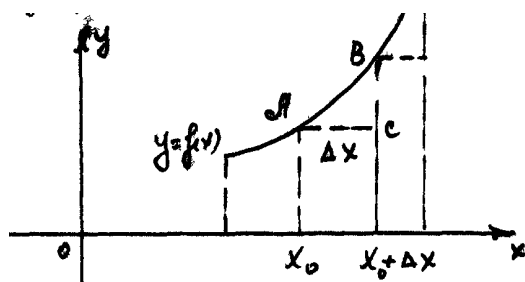
1. Q nuqtaning atrofi deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya limitining ketma-ketlik tilidagi ta'rifini ayting?
3. Funksiya limitining ϵ, δ tilidagi ta'rifini ayting?
4. Qachon berilgan funksiya cheksiz limitga ega bo'ladi?

12-MA'RUZA. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI.

REJA:

1. Uzlüksizlik tushunchasining ta'riflari.
 2. Chapdan va o'ngdan uzlüksizlik ta'riflari.
 3. Uzilish nuqtalari klassifikatsiyasi.
 4. Murakkab funksiyaning uzlüksizligi.
 5. Uzlüksiz funksiyalar ustida amallar.
1. Uzlüksizlik tushunchasi.

Faraz qilaylik, bizga X sohada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar $y=f(x)$ funksiyaning argumenti $x=x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lib, unga biror Δx ortirma bersak, u holda shu nuqtaga mos kelgan funksiyaning orttirmasi ham $y+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ bo'ladi. Bizga berilgan funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi Δx orttirmasiga mos kelgan Δy orttirmani topadigan bo'lsak, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ bo'ladi.



1-chizma

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiyaning argumenti $x \rightarrow x_0$ da funksiyaning o'zi shu nuqtadagi uning xususiy qiymatiga intilsa, ya'ni $f(x) \rightarrow f(x_0)$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi X to'plamni $x=x_0$ nuqtasida uzlüksiz deyiladi va limit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$ yoziladi.

Endi funksiya limitining ketma-ketliklar tilidagi ta'rifidan foydalanib, uzlüksizlikning yana bir ta'rifini berish mumkin.

Ta'rif: (Geyne ta'rif). Agar E to'plamdan olingan x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi har qanday $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, sonli ketma-ketlik uchun unga mos keladigan $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ ketma-ketlik $f(x_0)$ ga yaqinlashsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *uzlüksiz* deb ataladi.

Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki, $y=f(x)$ funksiyasi biror $x=x_0$ da uzlüksiz bo'lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak ekan.

1. $u=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lishi kerak.
2. $u=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi limit qiymati mavjud bo'lishi kerak, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. $u=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ dagi limit qiymati uning shu nuqtadagi xususiy qiymatiga teng bo'lishi kerak, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)=f(x_0)$

Yuqoridagi aytib o'tilgan uchta shart bajarilganda $y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada uzlüksiz funksiya deyiladi, aks holda esa $y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada uzulishga ega deyiladi.

Misol: $y=2x+1$ funksiyasini $x=2$ nuqta-dagi uzlüksizligi ko'rsatilsin.

Yechish: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x+1)=5 \quad f(2)=5$

Uzlüksizlik tushunchasiga ε va δ tilida quyidagi ta'rif berilgan.

Ta'rif: (Koshi ta'rif) $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham $\exists \delta > 0$ son topish mumkin bo'lsaki, $|x-x_0| < \delta$ bo'lganda $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizligi o'rinli bo'lsa u holda $y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada uzlüksiz deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

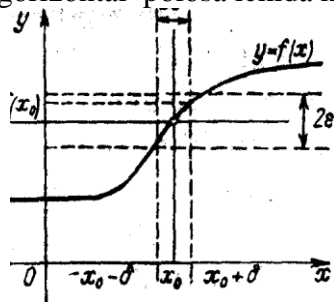
Yuqoridagi ta'rif matematik tilda quyidagicha yoziladi.

$$\{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), |x - x_0| < \delta$$

va $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizliklarini echsak,

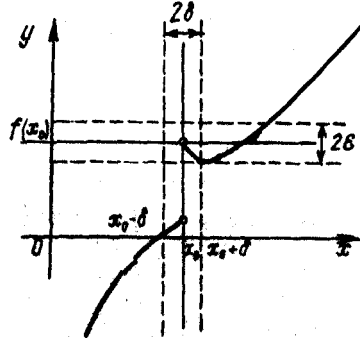
$$\begin{aligned} -\delta < x - x_0 < \delta \\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon \\ f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \end{aligned} \quad \text{bo'ladi.}$$

Yuqoridagi ta'riflarni geometrik jihatidan tasvirlash uchun funksiyaning uzluksizligi ta'rifini uning $u=f(x)$ grafigi bilan bog'laymiz. Buning uchun biror $\varepsilon > 0$ ni tanlaymiz va $u=f(x_0)$ to'g'ri chiziq bo'ylab uni 2ε polosa yasaymiz. U holda, agar funksiya uzluksiz bo'lsa, shunday $\delta > 0$ topiladiki, grafikning $x=x_0$ to'g'ri chiziq bo'ylab o'tgan va uni 2δ bo'lgan vertikal polosa ichidagi qismi uni 2ε bo'lgan gorizontaal polosa ichida ham yotadi. (1-chizma.)

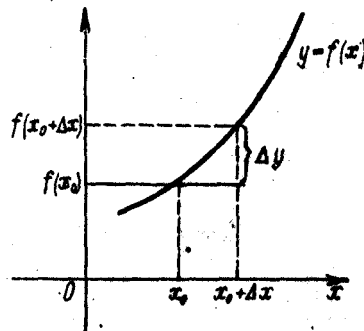


1-chizma.

Agar funksiya x_0 nuqtada uzluksiz xossasiga ega bo'lmasa, u holda $x=x_0$ to'g'ri chiziq bo'ylab o'tgan vertikal polosa qanchalik ensiz bo'lmasin, u doimo grafikning $y=f(x_0)$ to'g'ri chiziq bo'ylab o'tgan 2ε enli gorizontaal polosadan tashqarida yotgan qismini o'z ichiga olgan bo'ladi. (2-chizma.)



2-chizma.



3-chizma.

Misol: $y=2x+1$ funksiyasining $x_0=2$ nuqtadagi uzluksizligi ε va δ tilidagi ta'rifga ko'ra ko'rsatilsin.

2-Ta'rifga ko'ra $|x-x_0| < \delta$, $|x-2| < \delta$ bo'lganda $|2x+1-5| < \varepsilon$ yoki $|2x-4| < \varepsilon$ yoki $2|x-2| < \varepsilon$ yoki $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$;

3. **Ta'rif:** $y=f(x)$ funksiyasining argument orttirmasi $\Delta x \rightarrow 0$ da unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ uzluksiz deyiladi va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ yoziladi.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x, & \Delta x &= x - x_0, & \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), & \Delta y &= f(x) - f(x_0) \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \end{aligned}$$

Misol: 1) $y=2x+1$ (1) funksiyani uzluksizligi ko'rsatilsin.

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x) + 1 \quad (2)$$

(2)dan (1) ni ayiramiz.

$$\Delta y = 2x + 2\Delta x + 1 - 2x - 1, \quad \Delta y = 2\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\Delta x = 0$$

$$2) \quad y = x^3$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3$$

$$\Delta y = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

$$\text{Bu degan so'z } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x = 0.$$

2. **1-t a ' r i f.** Agar $x \rightarrow x_0 + 0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit $f(x_0)$ ga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan uzluksiz deyiladi.

2-t a ' r i f. Agar $x \rightarrow x_0 - 0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit $f(x_0)$ ga teng, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

M i s o l. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & \text{agar } x \leq 2 \text{ bo'lsa,} \\ x, & \text{agar } x > 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyalarni qaraylik. Bu funksiya $X = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Berilgan funksiyaning $x=2$ nuqtadagi o'ng va chap limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} x = 2$$

Agar $f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 = -2$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = f(2), \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = 2 \neq f(2)$$

ekanligini topamiz. Demak, berilgan funksiya $x=2$ nuqtada chapdan uzluksiz, o'ngdan uzluksiz emas.

3-t a ' r i f. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, uning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

Masalan, $f(x) = x^2$ funksiya $(0, 1)$ intervalning har bir nuqtasida uzluksiz. Demak, bu funksiya $(0, 1)$ da uzluksiz.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo'lib, (a, b) intervalda uzluksiz, a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'ladi.

Yuqoridagi aytilganlardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan uzluksiz bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Aksincha, agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada bir vaqtda ham o'ngdan, ham chapdan uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

3. Funksiya uzilish nuqtalarining turlari.

1-t a ' r i f. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ bo'lsa, ya'ni funksiyaning x_0 nuqtadagi chap limiti funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deb ataladi.

2 - t a ' r i f . Agar $f(x_0 + 0) = f(x_0) = f(x_0 - 0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan uzluksiz deyiladi.

Tabiiyki, agar $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar

$$f(x_0 - 0) \neq f(x_0) \neq f(x_0 + 0) \quad (1)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Endi bir tomonlama limitlar $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ ni mavjud va chekli deb quyidagini ko'rib o'tamiz:

1) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ bo'lsin. Bu holda x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi bo'ladi.

Bunday holda $f(x)$ dan faqat bitta x_0 nuqtada farq qiladigan va bu nuqtada uzluksiz

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ f(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

funksiya mavjud bo'ladi. Bunday uzilish nuqtasi *tuzatib bo'ladigan uzilish nuqtasi* deyiladi.

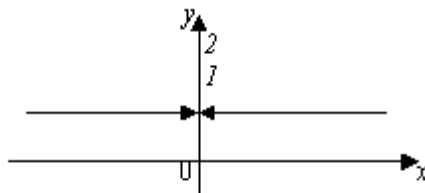
Misol. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq 0 \text{ булса,} \\ 2, & \text{agar } x = 0 \text{ булса.} \end{cases}$

$$\text{Bunda } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1, \quad f(0) = 2.$$

Bu hol grafikdan (5-chizma) ham yaqqol ko'rinadi,

2) $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo'lsin. Bu holda x_0 funksiyaning chekli sakrashga ega bo'lgan uzilish nuqtasi deyiladi. $d = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ cakrash kattaligi deyiladi.

M i s o l . $f(x) = E(x) = [x]$, $x_0 = 1$ nuqtani olamiz. $E(1-0) = 0$; $E(1+0) = 1$; $d = 1$



5-ЧИЗМА

3 - t a ' r i f . 1) va 2) holdagi uzilish nuqtalari *1- tur uzilish nuqtalari* deyiladi.

Barcha boshqa uzilish nuqtalari *2 - tur uzilish nuqtalari* deyiladi. Demak, cheksiz sakrashga ega bo'lgan uzilish nuqtalari va bir tomonlama limitlardan kam deganda biri mavjud bo'lmaydigan uzilish nuqtalari *2 - tur uzilish nuqtalari* bo'ladi.

Misollar. 1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ булса,} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ булса.} \end{cases}$

Bu funksiya $x=0$ nuqtada cheksiz sakrashga ega, demak, bu nuqta *2 - tur uzilish nuqtasi* bo'ladi.

2. Ilgari ko'rib o'tilgan Dirixle funksiyasi esa har bir haqiqiy nuqtada *2 - tur uzilishga* egadir, chunki har bir nuqtada bu funksiyaning bir tomonlama limitlarining ikkalasi ham mavjud emas.

4. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

Teorema-1: Chekli sondagi uzluksiz funksiyalarning yig'indisi (ayirmasi) yana uzluksiz funksiya bo'ladi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = f(x_0) \pm g(x_0)$

Teorema-2: Chekli sondagi uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi yana uzluksiz bo'ladi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0) \cdot g(x_0)$ teorema shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ limit ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Tenglikning o'ng tomonidagi limit ostidagi funksiyalar uzluksizlik ta'rifiga ko'ra $f(x_0)$ va $g(x_0)$ ni beradi. Shuning uchun $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0)$ teorema isbotlandi.

Teorema-3: Agar $f(x)$ va $g(x) \neq 0$ funksiyalari x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsalar, ularning nisbati ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

S A V O L L A R .

1. Uzluksiz funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Argument orttirmasi deb nimaga aytiladi?
3. Murakkab funksiyaning uzluksizligi deganda nimani tushunasiz?
4. Funksiyaning o'ng limiti qanday ta'riflanadi?
5. Funksiyaniing chap limiti qanday ta'riflanadi?
6. O'ngdan uzluksizlik deb nimaga aytiladi?
7. Chapdan uzluksizlik deb nimaga aytiladi?
8. 1-Tip uzilish nuqtasi deganda nimani tushunasiz?
9. 2-Tip uzilish nuqtasi deganda nimani tushunasiz?
10. Cheksiz sakrash nuqtasi deb nimaga aytiladi?
11. Chetlatilishi mumkin bo'lgan nuqta deb nimaga aytiladi?
12. Uzluksiz funksiyalar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati qanday hisoblanadi?

13-MA'RUZA. HOSILA.

REJA:

1. Hosilaning ta'rifi.
2. Elementar funksiyalarning hosilalari.
3. Teskari funksiyaning hosilasi.

Hosilaning ta'rifi:

$y=f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo'lsin. Erkli o'zgaruvchining birorta $x=x_0$ qiymatini olib X sohadan chiq-maydigan $x_0+\Delta x$ orttirma beramiz, u holda $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ funksiya orttirmasi hosil bo'ladi.

Ta'rif: $y=f(x)$ funksiyasini $x=x_0$ nuqtadagi funksiya orttirmasi Δu ni argument orttirmasi Δx ga bo'lgan nisbatini $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, bu limit berilgan $y=f(x)$ funksiyasini $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi va y'_{x_0} yoki $f'(x_0)$ kabi yoziladi. Umumiy holatda esa y'_x , $f'(x)$; $\frac{dy}{dx}$ deb yoziladi,

$$y'_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Bu ta'rifni (1) va (3) limitlarga tadbiiq qilsak.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'_t = S'(t) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'_x = f'(x)$$

Hosilaning mexanik ma'nosi.

Moddiy nuqtani t vaqt ichidagi S masofani bosish uchun harakatdagi tezligini topishdan iborat.

Hosilaning geometrik ma'nosi.

Egri chiziqni biror nuqtasiga o'tkazilgan urinmani abtsissa o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti $tg \alpha$ ni topishdan iborat.

$$y-y_0 = k(x-x_0) \quad k = tg \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = f'(x_0)$$

Elementar funksiyalarning hosilalarini topish.

1) $y=c$; $y'=c'=0$

2) $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$

Isbot: $y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+nx^{n-1}\cdot\Delta x+\dots+\frac{(n(n-1)(n-2)\dots[n-(n-1)]\Delta x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}-x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{1\cdot 2}+\dots$$

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=n\cdot x^{n-1}+\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{1\cdot 2}+\dots$$

$y'_x=nx^{n-1}$

$y=\frac{1}{x}$; $y'_x=-\frac{1}{x^2}$

Isbotom. $y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}$

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}$$

$$\Delta y=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x^2+x\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{1}{x^2+x\Delta x} \quad y'_x=-\frac{1}{x^2};$$

4) $y=a^x$; $y'=a^x \ln a$

5) $y=\sin x$; $y'=\cos x$

Isboti:

$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$ $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

6) $y=\cos x$; $y'_x=-\sin x$

7) $y=\operatorname{tg} x$; $y'_x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Isboti:

$$y'_x=\lim_{\Delta x}\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x}=\frac{\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\cos(x+\Delta x)\sin x}{\cos(x+\Delta x)\cos x}}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)};$$

$$y'_x=\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Teskari funksiyaning hosilasi.

$u=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada aniqlangan uzluksiz bo'lib, 1-tartibli hosilaga egadir.

Teorema: agar $y=f(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(u)$ funksiyasi $u=u_0$ nuqtada x'_u yoki $\varphi'(u_0)$ hosilaga ega bo'lib, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ bo'ladi.

S A V O L L A R .

1. Hosila qanday ta'riflanadi?
2. Hosilaning geometrik ma'nosini ayting?
3. Elementar funksiyalarda hosila qanday bajariladi?
4. Teskari funksiyaning hosilasi haqidagi teoremani ayting?

HOSILANI HISOBLASH QOIDALARI.

Biz elementar funksiyalarni hisoblashni o'rgandik. Endigi bizni asosiy maqsad chekli sondagi arifmetik amallar va superpozitsiyalar vositasida elementar funksiyalardan tuzilgan ixtiyoriy funksiyaning hosilasini hisoblash imkonini beruvchi qoidalarni ko'rib chiqamiz.

1. Agar $u=u(x)$ funksiyasi $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa u holda $y=c \cdot u(x)$ funksiyasi ham hosilaga ega bo'lib, $[c \cdot u(x)]' = c \cdot u'(x)$ bo'ladi. Isbot: $y=c \cdot u(x)$ desak bu funksiyani orttirmasi $y+\Delta y=c \cdot u(x+\Delta x)$ bo'ladi.

Bundan $\Delta y=c \cdot u(x+\Delta x)-c \cdot u(x) \quad | : \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Agar $\Delta x \rightarrow 0$ da $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ hosila ta'rifiga ko'ra $y'_x = c \cdot u'(x)$.

Misol: $u=3 \cdot x^3$; $u'=(3x^3)'=3(x^3)'=3 \cdot 3x^2=9x^2$.

Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, $U(x) \pm V(x)$ funksiya ham shu nuqtada hosilaga ega bo'lib $[U(x) \pm V(x)]' = U'(x) \pm V'(x)$.

Isboti: $y=U(x) \pm V(x)$ funksiyaning orttirmasi $\Delta y=[U(x+\Delta x)-U(x)] \pm [V(x+\Delta x)-V(x)]$

$$\Delta y = \Delta U \pm \Delta V \quad | : \Delta x \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ limitga o'tsak} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Hosila ta'rifiga ko'ra $y' = U' \pm V'$.

3. Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, ularning o'zaro ko'paytmasining hosilasi $[U(x) \cdot V(x)]' = U'(x) \cdot V(x) + V'(x) \cdot U(x)$ bo'ladi.

Isboti: $y=U(x) \cdot V(x) \quad \Delta y=U(x+\Delta x) \cdot V(x+\Delta x)-U(x) \cdot V(x)$

$$\Delta y = \Delta U \cdot V + U \cdot \Delta V \quad | : \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot V + U \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad \text{bo'ladi, } \Delta x \rightarrow 0 \text{ limit olsak} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot V + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot U$$

Hosila ta'rifiga ko'ra $y' = U' \cdot V + V' \cdot U$

Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsalar ularni o'zaro nisbatlari

ham hosilaga ega bo'lib $\left[\frac{U(x)}{V(x)} \right]' = \frac{U'(x)V(x) - V'(x)U(x)}{V^2(x)}$ bo'ladi.

Isboti:
$$\Delta y = \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V} - \frac{U}{V} = \frac{V\Delta U - U\Delta V}{V(V + \Delta V)} \quad | : \Delta x \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(V + \Delta x)}$$

yoki
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (V + \Delta V)} = \frac{U'V - V'U}{V^2}$$

Agar $y=U(x) \cdot V(x)$ funksiyalar hosilaga ega bo'lsalar, bu funksiyalar ko'paytmasining hosilasi

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U \text{ bo'ladi.}$$

2. Misol: $y = \sin 5\sqrt{x}$ Murakkab funksiya hosilasi topilsin. $u = F(z) = \sin z$, $z = f(x) = 5\sqrt{x}$ deb qarash mumkin. Shuning uchun

$$\begin{aligned} y_x' &= (\sin 5\sqrt{x})' = (\sin z)'_{z=5\sqrt{x}} (5\sqrt{x})' = \\ &= 5 \cos 5\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5 \cos 5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$Z = \varphi(x)$ funksiyasi $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, $u = f(z)$ funksiyasi ($x = x_0$ nuqtaga mos keluvchi) $z = z_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda bulardan tuzilgan $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi hosilasi $y_x' = y_z' \cdot z_x'$ ga teng bo'ladi.

Isboti: $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiyasi $x = x_0$ nuqtada aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun u quyidagi ko'rinishda orttirmaga ega bo'ladi.

$\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z)$ ammo bu erdagi argument z erkli o'zgaruvchi bo'lmasdan $\varphi(x)$ ning funksiyasidir.

Bizda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_x'$ limit ta'rifiga ko'ra $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y_x' = \alpha$ cheksiz kichik miqdor.

$\Delta y = y_x' \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$ shuning uchun $\Delta y = y_z' \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z)$ bo'ladi, $\Delta x \neq 0$ ga bo'lsak

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y_z' \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta z)}{\Delta x}$ bundan $y_x' = y_z' \cdot y_x'$ murakkab funksiya hosilasini hisoblash formulasi.

Misol: $y = \sqrt{z}$; $z = 1 - x^2$ bo'lsa, $y = \sqrt{1 - x^2}$ murakkab funksiya hosilasi topilsin.

$$y_x' = (\sqrt{z})'_z (1 - x^2)'_x = \frac{1}{2\sqrt{z}} (-2x) = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}};$$

$$y' = -\frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ bo'ladi.}$$

$$y = x^{-x}$$

$$y = x^x x^{x^x - 1} + x^{x^x} \ln x (x x^{x^x - 1} + x^x \ln x) = x^x x^{x^x - 1} +$$

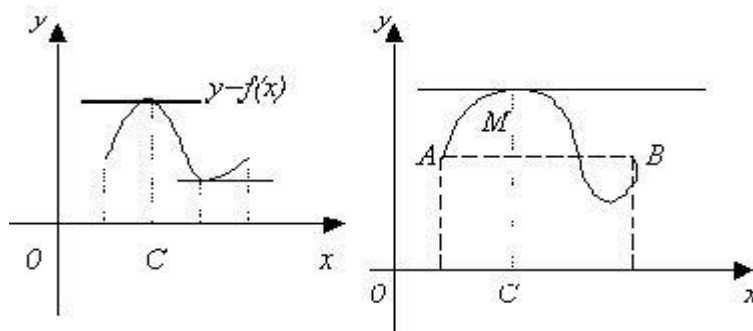
$$+ x^{x^x} \ln x x x^x (1 + \ln x) = (x^{x^x - 1} x)(1 + x^x \ln x (1 + \ln x))$$

SAVOLLAR.

1. O'zgarman sondan qanday hosila olinadi?
2. Yig'indining hosilasi qanday olinadi?
3. Ayirmani, kasrni, ko'paytmani hosilasi nimaga teng?
4. Giperbolik sinus, kosinus, tangens, katangenslarning hosilalari nimaga teng?
5. Murakkab funksiyaning hosilasi haqidagi isbotni aytib bering?

DIFFERENTIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI.

Ferma teoremasi: $y=f(x)$ funksiyasi X - sohada aniqlangan bo'lib, shu sohaning ichki $x=c$ nuqtasida o'zining eng katta yoki eng kichik qiymatlariga ega bo'lsa, u holda ana shu $x=c$ nuqtadagi funksiyaning hosilasi $f'(c)=0$ bo'ladi.



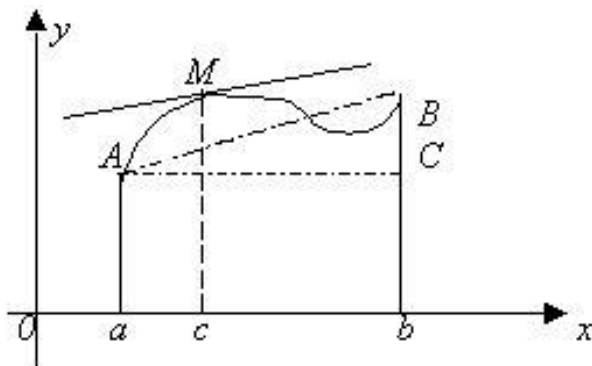
Rol teoremasi: Agar $y=f(x)$ funksiyasi :

1. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa.
2. $f(x)$ funksiya (a, b) ochiq oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa.
3. $f(x)$ funksiya kesmaning chetlarida $f(a)=f(b)$ qiymatlarga ega bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesmada yotuvchi shunday bir s nuqta topiladiki, ana shu nuqtadagi funksiyaning 1- tartibli hosilasi $f'(c)=0$ bo'ladi.

Lagranj teoremasi: Agar $y=f(x)$ funksiyasi:

1-dan $[a, b]$ da aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, 2-dan $f(x)$ funksiya hech bo'lmaganda (a, b) ochiq oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda a bilan b orasida yotuvchi shunday s nuqta topiladiki,

bu nuqtada $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ bo'ladi.



Koshi teoremasi:

1. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa.
2. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar hech bo'lmaganda (a, b) oraliqda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa.
3. (a, b) Ochiq oraliqda $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $a < c < b$ da shunday s nuqta topiladiki, bu nuqtada $\frac{f(c) - f(a)}{g(c) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ bo'ladi.

SAVOLLAR.

1. **Ferma teoremasini ayting?**
2. **Rol teoremasini ayting?**
3. **Lagranj teoremasini ayting?**
4. **Koshi teoremasini ayting?**
5. **Lagranj teoremasi bilan Rol teoremasini qanday farqi bor?**
6. **Koshi teoremasi bilan Lagranj teoremasini qanday farqi bor?**

14-MA'RUZA. ANIQMAS INTEGRAL.

REJA:

1. Berilgan funksiyani boshlang'ich funksiyasi haqida tushuncha.
2. Aniqmas integralni ta'rifi.
3. Aniqmas integralni xossalari.
4. Integrallash jadvali.
5. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish.
6. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash.

Biz hozirgacha biror $u=f(x)$ funksiyasi berilgan bo'lsa, bu funksiyaning hosilasini yoki differentsialini hisoblashni o'rgandik. Endi hosila olish amaliga teskari bo'lgan amal tushunchasini kiritishga harakat qilamiz. Agar bizga hosilasi olingan funksiya berilgan bo'lsa, ana shu funksiyani hosilasi olingunga qadar, ya'ni uning boshlang'ich ko'rinishi qanday bo'lgan edi degan savolga javob beramiz.

Ta'rif: Agar $u=F(x)$ funksiyasining hosilasi $f(x)$ ga teng bo'lsa, ya'ni $F'(x)=f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiyasi $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya deyiladi.

Misol 1. Agar $f(x)=x^2$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo'ladi, chunki

$$F'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2=f(x) \text{ bo'ladi.}$$

Misol 2. Agar $f(x)=\sin x$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=-\cos x$ bo'ladi, chunki, $F'(x)=(-\cos x)'=\sin x=f(x)$.

Misol 3. Agar $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\arcsin x$

bo'ladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiyasi uchun $F(x)$ funksiyasi boshlang'ich funksiya bo'ladigan bo'lsa, u holda $F(x)+C$ funksiyasi ham boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki $[F(x)+C]'=f(x)$, S - o'zgarmas son. Bundan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiyasining boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa bunday boshlang'ich funksiyalar cheksiz ko'p bo'lib, ular o'zgarmas son S ga farq qilar ekan. 1-misolda $\frac{x^3}{3}+C$, 2-misolda $(-\cos x+C)$, 3-misolda esa $(\arcsin x+C)$

boshlang'ich funksiyalar bo'ladi.

Ta'rif: $f(x)$ funksiyasining boshlang'ich funksiyasining umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ ga shu $f(x)$ funksiyasining aniqmas integrali deyiladi va u quyidagicha yoziladi: $\int f(x)dx=F(x)+C$

Bu erda \int -integral belgisi, $f(x)dx$ -integral ostidagi ifoda deb yuritiladi.

Ta'rif: $f(x)$ funksiyasini boshlang'ich funksiyasining umumiy ko'rinishi $F(x)+C$ ni topish amaliga integrallash amali deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $f(x)$ -funksiyani integrallash amali shu funksiyani hosila olish yoki differentsiallash amaliga nisbatan teskari bo'lgan amal ekan. Integrallash amali quyidagi muhim xossalarga ega:

1-Xossa. Agar differentsiallash belgisi integrallash belgisidan oldin kelsa, ular o'zaro teskari amallar bo'lgani uchun bir-birini yo'qotadi:

$$d\int f(x)dx=f(x)dx$$

2-Xossa. Differentsial belgisi integral belgisidan keyinda kelsa, bu belgilar bir-birini yo'qotgandan so'ng $F(x)$ ga o'zgarmas S soni qo'shiladi.

$$\int df(x)dx=F(x)+C$$

Isboti: $\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$.

3-Xossa. O'zgarmas sonni integral ishorasi tashqarisiga chiqarib yozish mumkin:

$$\int k \cdot f(x)dx=k \cdot \int f(x)dx.$$

Isboti: $d\int k \cdot f(x)dx=k \cdot f(x)dx$

$$d(k \cdot \int f(x)dx)=k \cdot \int f(x)dx=k \cdot f(x)dx$$

4-Xossa. Algebrik yig'indining (ayirmaning) integrali qo'shiluvchilar (ayiriluvchilar) integrallari-ning algebrik yig'indisiga (ayirmasiga) teng.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Isboti: $d\int [f(x) \pm g(x)] dx = d\int f(x) dx \pm d\int g(x) dx =$
 $d\int f(x) dx \pm d\int g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

INTEGRAL JADVALI.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int dx = x + C$ | 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$ | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ |
| 5. $\int e^x dx = e^x + c$ | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$ |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + c$ | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$ | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$ |
| 11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$ | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 + a^2} + c$ |
| 13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$ | |

ANIQMAS INTEGRALDA O'ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH.

Faraz qilaylik, bizga $I = \int f(x) dx$ integralni hisoblash kerak bo'lsin. Integral ostida shunday $f(x)$ funksiyalar mavjud bo'ladiki, bu funksiyalarning integralini hisoblashlik uchun yangi o'zgaruvchi kiritishga to'g'ri keladi. Faraz qilaylik, $I = \int f(x) dx$ integralda $x = \varphi(t)$ o'zgaruvchi almashtiraylik, unda $dx = \varphi'(t) dt$ bo'ladi. Ularni integral ostidagi ifodaga qo'ysak, $\int f(x) dx = \int [f(\varphi(t))] \varphi'(t) dt$ bo'ladi. Bu formula aniqmas integralda o'zgaruvchi almashtirish formulasi deyiladi.

1-misol. $I = \int \frac{dx}{5-3x}$ ni hisoblang.

$$5-3x=z \quad I = \int \frac{dx}{5-3x} = -\frac{1}{3} \int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{3} \ln |z| = -\frac{1}{3} \ln |5-3x| + c$$

$$x = \frac{5-z}{3} \quad dx = -\frac{1}{3} dz$$

2-misol. $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ ni hisoblang. Buni hisoblash uchun biz o'zgaruvchi almashtirish

usulidan foydalanamiz.

$$x+1=z^3 \text{ desak, } x=z^3-1, \quad dx=3z^2 dz$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \int \frac{3z^2 dz}{1+z} = 3 \int \frac{z^2-1+1}{1+z} dz = \\ &= 3 \left(\int \frac{z^2-1}{1+z} dz + \int \frac{dz}{1+z} \right) = 3 \left(\int \frac{(z-1)(z+1)}{z+1} dz + \int \frac{dz}{1+z} \right) = \\ &= 3 \left(\frac{z^2}{2} - z + \ln |1+z| + c \right) = -\frac{3^3 \sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} - 3^3 \sqrt[3]{x+1} + 3 \ln |1+\sqrt[3]{x+1}| + c \end{aligned}$$

ANIQMAS INTEGRALNI BO'LAKLAB INTEGRALLASH.

Bizga differensiallanuvchi bo'lgan $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalari berilgan bo'lsin. bizga ma'lumki, $d(U \cdot V) = VdU + UdV$ edi.

Bu erdan UdV ni topsak, $UdV = d(U \cdot V) - VdU$ bo'ladi. Bu tengliklarni integrallasak, $\int UdV = \int d(UV) - \int VdU$, $\int UdV = UV - \int VdU$

Bu formula aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

1-misol. $I = \int x \ln x dx$ ni hisoblang.

$$U = \ln x \quad dU = \frac{1}{x} dx \quad dV = x dx \quad V = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \int x \ln x dx = \frac{\ln x}{2} \cdot x^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{\ln x}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c$$

Tekshirish. $\int f(x) dx = F(x) + c \quad F'(x) = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + c \right]' =$

$$= 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x \ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \ln x = f(x).$$

2-misol. $I = \int \arctg \sqrt{x} dx$ integralni hisoblansin.

$$U = \arctg \sqrt{x} \text{ bo'lsa } dU = \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad dV = dx \text{ desak } V = x \text{ bo'ladi. Bo'laklab integrallash}$$

formulasiga ko'ra

$$I = \int \arctg \sqrt{x} dx = x \arctg \sqrt{x} - \int \frac{x dx}{2\sqrt{x}(x+1)} =$$

$$= x \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$$

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x} \text{ integralda } \sqrt{x} = t \text{ desak, } x = t^2, dx = 2t dt \text{ bo'lib}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2 \left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right] =$$

$$= 2t - \arctg t + c = 2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x} + c$$

Bularga ko'ra berilgan integral quyidagiga teng bo'ladi.

$$I = \int \arctg \sqrt{x} dx = x \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctg \sqrt{x} + c = (x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + c$$

S A V O L L A R .

1. Berilgan funksiyani boshlang'ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyani boshlang'ich funksiyasini umumiy ko'rinishi deganda nimani tushunasiz?
3. Berilgan funksiyani integrali deb nimaga aytiladi?
4. Aniqmas integralni asosiy xossalarini ayting?
5. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasini tushuntirib bering?
6. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash deganda nimani tushunasiz?

Misol. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2}$ ratsional funksiya sodda kasr ratsional funksiya ko'rinishida yoyilsin.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x^2 - 3x + 2 = Ax^2 + 2xA + A + Bx + Cx^2 + Cx$$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2(A + C) + x(2A + B + C) + A$$

$$A + C = 1$$

$$2A + B + C = -3 \quad \text{bundan} \quad C = -1$$

$$A = 2 \quad B = -6$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx = \int \frac{2dx}{x} - \int \frac{6dx}{(x+1)^2} - \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= 2 \ln |x| + \frac{6}{x+1} - \ln |x+1| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int (x+1)^{-2} d(x+1) = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+1}$$

Misol. $\frac{x}{x^3 - 1}$ ni kasr ratsional funksiya oddiy kasrga ajratilsin.

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$x = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx - Bx - C$$

$$x = x^2(A + B) + x(A + C - B) + (A - C)$$

$$A + B = 0 \quad A = -B \quad A = \frac{1}{3}$$

$$A + C - B = 1 \quad A - C = 0 \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$A - C = 0 \quad 3A = B \quad C = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{x-1}{3(x^2 + x + 1)}$$

SAVOLLAR.

1. Butun ratsional funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Kasr ratsional funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
3. Qanday funksiyaga to'g'ri kasr ratsional funksiya deyiladi?
4. $F(x)$ funksiya haqiqiy karrali ildizga ega bo'lsa $\frac{f(x)}{F(x)}$ ni qanday qilib oddiy kasrga yoyiladi?
5. $F(x)$ funksiya haqiqiy har xil ildizga ega bo'lsachi?
6. $F(x)$ funksiya kompleks karrali ildizga ega bo'lsachi?
7. $F(x)$ funksiya kompleks har xil ildizga ega bo'lsachi?

RATSIONAL, IRRATSIONAL VA

BINOMIAL INTEGRALLARNI HISOBLASH QOIDALARI.

Sodda integrallarni hisoblash qoidalari.

$$1. \quad I = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c \quad dx = d(ax+b) = d(ax) + d(b) = a \frac{1}{a} dx$$

2. $I = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun biz to'la kvadrat ajratamiz.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \\
 &= \left[\begin{array}{l} x+\frac{b}{2a} = t, \quad x = t - \frac{b}{2a} \\ \frac{b^2-4ac}{4a^2} = k^2 \end{array} \right] = \frac{1}{a} \int \frac{At dt}{t^2-k^2} + \frac{1}{a} \int \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{t^2-k^2} dt = \\
 &= \frac{A}{a} \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-k^2)}{t^2-k^2} + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a} \int \frac{dt}{t^2-k^2} = \\
 &= \frac{A}{2a} \ln |t^2-k^2| + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{a} \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{t-k}{t+k} \right| + c
 \end{aligned}$$

Irratsional ifodalarni integrallash.

$I = \int F(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$ ko'rinishdagi integrallar irratsional ifodali integral deyiladi.

Bunday integrallarni hisoblash uchun $\sqrt[n]{ax+b} = t$ almashtirish bajaramiz.

$$ax+b = t^n, \quad x = \frac{1}{a}(t^n - b), \quad dx = \frac{1}{a}(nt^{n-1} dt)$$

Bularni berilgan integral ostidagi ifodaga qo'ysak, u quyidagi ko'rinishni oladi.

$$I = \int F(\sqrt[n]{ax+b}) dx = \int F\left[\frac{1}{a}(t^n - b), t\right] \frac{1}{a} nt^n dt$$

Integral ostidagi hosil bo'lgan ifodalar ratsional ifodalardir. Biz bunday integrallarni hisoblashni bilamiz.

Misol. $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$ ni xisoblang.

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{l} x^2-1 = t^2 \\ x^2 = t^2+1 \quad dx = \frac{2tdt}{2\sqrt{t^2+1}} \\ x = \sqrt{t^2+1} \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{t^2+1} t dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int dt = t + c = \sqrt{x^2-1} + c$$

2- usul.

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2-1) = \frac{1}{2} \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-1} + c$$

$$I = \int F(x, \alpha \sqrt{ax+b}, \beta \sqrt{ax+b}, \dots, \gamma \sqrt{ax+b}) dx$$

Bu ko'rinishdagi integrallarni hisoblash uchun α, β, γ ko'rsatkichlarning eng kichik umumiy buluvchisini topamiz. Faraz qilaylik bular uchun eng kichik umumiy buluvchi n bo'lsin, u holda

$${}^n\sqrt{ax+b}=t, \quad ax+b=t^n, \quad x=\frac{1}{a}(t^n-b) \quad dx=\frac{1}{a}(nt^{n-1}dt)$$

$$I = \int F\left(\frac{1}{a}(t^n-b), (t^{\frac{n}{\alpha}}, t^{\frac{n}{\beta}}, \dots, t^{\frac{n}{\gamma}})\right) dt \cdot \frac{1}{a} \cdot n \cdot t^{n-1}$$

S A V O L L A R.

1. Ratsional kasrlarni integrallash qanday amalga oshiriladi.

(4 - hol bo'yicha)?

2. Irratsional ifodalarni integrallash necha ko'rinishda bajariladi?

3. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ ifodani qanday integrallanadi?

TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR QATNASHGAN INTEGRALLARNI HISOBLASH.

$I = \int R(\sin x, \cos x) dx$ ko'rinishdagi integrallarni $tg \frac{x}{2} = t$ almashtirish orqali ratsional funksiyalarning integrallariga keltiriladi.

Bizga ma'lumki,

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctgt; dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

1- Misol: $I = \int \frac{dx}{3+5\sin x + 3\cos x}$ integral hisoblansin.

Yechish:

Yuqoridagi belgilashlarga ko'ra integral ostidagi funksiya quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{3+5\sin x + 3\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(3+5\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2})} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{3+3t^2+10t+3-3t^2} = \int \frac{dt}{5t+3} = \frac{1}{5} \ln |5t+3| = \frac{1}{5} \ln |5tg \frac{x}{2} + 3| + c; \end{aligned}$$

Ba'zi xususiy hollarda yuqoridagi integrallarni yechishda quyidagi ko'rinishdagi o'rniga qo'yishlardan foydalanamiz.

a) Agar $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\sin x$ ga nisbatan toq funksiya bo'lsa, ya'ni $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ u holda $\cos x = t$ o'rniga qo'yish bu funksiyani ratsionallashtiriladi.

b) Agar $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\cos x$ ga nisbatan toq funksiya, ya'ni $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda integral $\sin x = t$ o'rniga qo'yish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

v) Agar $R(\sin x, \cos x)$ ifoda $\sin x$ va $\cos x$ ga nisbatan juft funksiya, ya'ni $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, u holda bu funksiya $tg x = t$ o'rniga qo'yish bilan ratsionallashtiriladi. Bu holda

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \quad x = arctgt; dx = \frac{dt}{1+t^2};$$

Agar $R(tgx)$ bo'lsa, u holda integral ostidagi ifoda yana $tgx=t$ o'rniga qo'yish bilan ratsionallashtiriladi.

1-Misol. Integralni toping.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$$

Yechish.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx = \\ &= -\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= -\int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x) = c - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x \end{aligned}$$

B) Agar $m > 0$ bo'lib toq bo'lsa, u holda $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ o'rniga qo'yish orqali ratsionallashtiriladi.

2-Misol. $I = \int \sin^4 x dx$ integralni eching.

Yechish.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x dx\right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx\right) = \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x\right) + c = \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x\right) + c; \end{aligned}$$

G) Agar $m, n \leq 0$ bo'lib ulardan biri toq bo'lsa, u holda surat va maxrajni $\sin x$ yoki $\cos x$ ga qaysiniki toq darajasiga qarab, qo'shimcha ko'paytirish usulidan foydalanamiz.

5-Misol. Integralni eching.

$$I = \int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| + c = \ln \sqrt{tg^2 \frac{x}{2}} + c = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + c$$

D) Agar $m+n < 0$ va juft bo'lsa, u holda $tgx=t$ yoki $stgx=t$ o'rniga qo'yishdan foydalanamiz.

$I = \int \sin m x \cdot \cos n x dx$, $I = \int \cos m x \cdot \cos n x dx$ va $I = \int \sin m x \cdot \sin n x dx$ ko'rinishdagi integrallar trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indi shaklga keltirish orqali oson hisoblanadi.

Misol. $I = \int \sin 2x \cos 5x dx$ integralni xisoblang.

$$\begin{aligned} \text{Yechish.} \quad I &= \int \sin 2x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin(-3x)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 7x dx - \frac{1}{2} \int \sin 3x dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

15-MA'RUZA. ANIQ INTEGRAL.

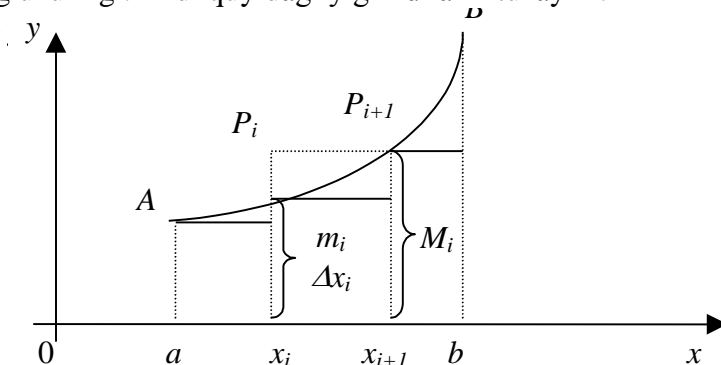
REJA:

1. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masala.
2. Darbuning quyi va yuqori yig'indilari.
3. Riman yig'indisi.
4. Aniq integralning ta'rifi.

Masala. Yuqoridan $y=f(x)$ egri chizig'i bilan chapdan $x=a$, o'ngdan $x=b$ to'g'ri chiziqlari hamda ostki tomondan $u=0$ to'g'ri chizig'i bilan chegaralangan yuzi hisoblanadi. Masalaning

mazmuniga ko'ra chizma yarasak bu $aAVb$ ko'rinishdagi egri trapesiya deb ataluvchi figura hosil bo'ladi. Bizni maqsad ana shu egri trapesiyani yuzini hisoblashdan iboratdir.

Maktab matematikasidan ma'lumki, yuqoridagi egri trapesiyani yuzasini elementar matematika yordami bilan hisoblab bo'lmaydi, chunki A va V nuqtalarini $y=f(x)$ ko'rinishdagi ixtiyoriy egri chiziq birlashtirgan. $aAVb$ ko'rinishdagi egri trapesiyani yuzini hisoblashlik uchun $[a, b]$ ni $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n=b$ nuqtalar yordamida ixtiyoriy n - ta bo'lakka bo'lamiz. Natijada $[a, b]$ kesma $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, n-1$) ko'rinishdagi n - ta kesmachaga ajraladi. Bu bo'linish nuqtalaridan ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar chiqarilsa, berilgan egri trapesiya $x_i P_i P_{i+1} x_{i+1}$ ko'rinishdagi elementar n - ta trapesiyachalarga bo'linadi. Faraz qilaylik $u=f(x)$ funksiyasi $[a, b]$ da aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu holda $[a, b]$ ni maydalash natijasida hosil bo'lgan har bir $[x_i, x_{i+1}]$ kesmachada ham $y=f(x)$ funksiya uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun Veyershrasning II - teoremasiga ko'ra $y=f(x)$ funksiya har bir $[x_i, x_{i+1}]$ da o'zining aniq quyi m_i va yuqori M_i qiymatlariga ega bo'ladi. Agar $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ deb belgilasak, bu erda Δx_i $x_i P_i P_{i+1} x_{i+1}$ egri trapesiyaga asosining uzunligi. Endi quyidagi yig'indilarni tuzaylik.



$$S = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_i \Delta x_i + \dots + m_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

$$S = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_i \Delta x_i + \dots + M_{n-1} \Delta x_{n-1} \text{ yoki}$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i - \text{ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklar yuzasi. } (i=0, n-1)$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \text{tashqi chizilgan to'g'ri to'rtburchaklar yuzasi. } (i=0, n-1)$$

Δx_i - larni ichida eng kattasini uzunligini λ - deylik ya'ni $\lambda = \max(\Delta x_i)$

Ta'rif: Agar $\lambda \rightarrow 0$ da s va S lar umumiy I limitga ega bo'lsa ya'ni,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I$$

bo'lsa u holda bu limit izlanayotgan egri trapesiyaning yuzi deyiladi.

Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ ga tegishli bo'lgan ixtiyoriy ξ_i nuqtani olib bu nuqtadagi $y=f(x)$ ni qiymatini hisoblab quyidagi yig'indini tuzamiz.

$$\zeta = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

Bu hosil qilingan s, S va ζ yig'indilar uchun quyidagi tengsizlik o'rinalidir.

$$s \leq \zeta \leq S \quad (1)$$

Endi (1) tengsizlikni isbotlaylik.

Bizda $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ bo'lgani uchun $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ bo'ladi. Bu tengsizlikni barcha tomoni Δx_i ga ko'paytirsak $m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$ bo'ladi. Bu tengsizlikdagi i ga 0 dan $n-1$ gacha qiymat berib quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz.

$$m_0 \Delta x_0 \leq f(\xi_0) \Delta x_0 \leq M_0 \Delta x_0$$

$$m_1 \Delta x_1 \leq f(\xi_1) \Delta x_1 \leq M_1 \Delta x_1$$

...

$$m_{n-1} \Delta x_{n-1} \leq f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1} \leq M_{n-1} \Delta x_{n-1} \quad \text{yoki}$$

$$\sum m_i \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum M_i \Delta x_i \quad (i=0, n-1) \quad \text{yoki}$$

$s \leq \zeta \leq S$ bo'ladi. $\lambda \rightarrow 0$ da s va S lar yoyga ζ ham ana shu limitga intiladi. Agar izlanayotgan trapesiya yuzini R - desak,

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \zeta \quad \text{yoki} \quad P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (2)$$

bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki berilgan $aABb$ ko'rinishdagi egri trapesiyani yuzasini hisoblash (2) ko'rinishdagi limitni hisoblashga olib keldi, bu limitni hisoblash esa aniq integral tushunchasiga olib keladi.

Ta'rif: Agar $\lambda \rightarrow 0$ da ζ - yig'indi chekli I - limitga ega bo'lsa, bu limit $[a, b]$ ni maydalash usuliga va har bir $[x_i, x_{i+1}]$ kesmadagi ξ_i nuqtalarni tanlanishiga bog'liq bo'lmasa u holda bu limit $y=f(x)$ ning $[a, b]$ dagi aniq integrali deyiladi va

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \zeta = \int_a^b f(x) dx$$

kabi belgilanadi.

Bu erda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi. a - aniq integralni quyi, b - esa yuqori chegaralari deyiladi. Odatda ζ - yig'indi $u=f(x)$ ning $[a, b]$ dagi integral yig'indisi deyiladi, yoki Riman yig'indisi deyiladi.

s va S lar Darbu yig'indilari deyiladi. Darbuning quyi s va yug'ori S yig'indilari quyidagi muhim xossalarga ega.

1. $[a, b]$ ni ixtiyoriy maydalashga nisbatan $s \leq S$ bo'ladi.
2. $[a, b]$ ni berilgan maydalashga nisbatan tuzilgan Darbuni quyi va yuqori yig'indilari aniq son qiymatlar bo'ladi.
3. $[a, b]$ ni bo'linish nuqtalarining ustiga bo'linish nuqtalari qo'shilsa, Darbuning quyi yig'indisi s kichiklashmaydi, yuqori yig'indisi S esa kattalashmaydi.
4. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I^*$ va $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I^*$ bo'lsa u holda $s \leq I^* \leq I^* \leq S$ tengsizligi o'rinli bo'ladi. Bizga

ma'lumki ixtiyoriy maydalashga nisbatan $s \leq \zeta \leq S$ edi, berilgan maydalashga nisbatan s va S lar o'zgarmasdir. ζ - yig'indi esa o'zgaruvchidir, chunki $[x_i, x_{i+1}]$ ga tegishli bo'lgan ξ_i ixtiyoriy nuqtani tanlanishiga qarab ζ - yig'indi o'zgaradi, bu ζ - yig'indi qanchalik o'zgarmasin Darbuning quyi yig'indisi s dan kichik bo'la olmaydi va yuqori yig'indisi S dan katta bo'la olmaydi. Shuning uchun s -ni ζ - integral yig'indini quyi chegarasi S ni esa ζ - integral yig'indini yuqori chegarasi deyiladi.

Yuqoridagi ko'rilgan masala natijasidan quyidagi xulosa kelib chiqadi. Biror $[a, b]$ da ixtiyoriy $y=f(x)$ uchun $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \zeta$ limit mavjud bo'lishi uchun yoki boshqacha qilib aytganda $[a, b]$ dagi ixtiyoriy $y=f(x)$ uchun $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \zeta = \int_a^b f(x) dx$ aniq integral mavjud bo'lishi uchun $y=f(x)$ funksiyasi $[a, b]$ kesmada chegaralangan bo'lishligi shart ekan.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ da chegaralanmagan bo'lsa, uni maydalash natijasida hosil qilingan kesmalarni kamida bittasida chegaralanmagan bo'ladi, natijada $f(x_i) \Delta x_i$ ifoda ham chegaralanmagan bo'ladi. Bu degan so'z $\zeta - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$ yig'indi chegaralanmagan bo'ladi. Bu

holda ζ - yig'indi chekli limitga ega bo'lmaydi. Bu degan so'z $y=f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oralig'ida aniq integrali mavjud bo'lmaydi deganidir.

NYUTON LEYBNES VA ANIQ INTEGRALDA BO'LAKLAB INTEGRALLASH HAMDA O'ZGARUVCHINI ALMASHTIRISH.

Nyuton-Leybnis formulasi.

Bizga ma'lumki agar $f(t)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa uning qismi $[a, x]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'lib, $\int_a^x f(t) dx = G(x)$ (1) bo'lar edi.

Bundan avvalgi mavzudan bizga ma'lumki, $f(x)$ uchun $G(x)$ funksiya boshlang'ich funksiya bo'lar edi, ya'ni $G'(x) = f(x)$ edi.

Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ funksiya ham boshlang'ich funksiya bo'lsin, ya'ni $F'(x)=f(x)$ bo'lsin. $f(x)$ uchun $G(x)$ va $F(x)$ lar boshlang'ich funksiyalar bo'lganliklari sababli ular o'zaro o'zgarish songa farq qilishi kerak boshqacha qilib aytganda $G(x)=F(x)+C$ (2)

(2) da $x=a$ bo'lganda $G(a)=F(a)+C$ bo'ladi, lekin $G(a)=\int_a^a f(x)dx=0$ bo'lgani uchun $F(a)+C=0$ bo'ladi, bunda $C=-F(a)$ (3) ega bo'lamiz. (3) ga asosan (2) quyidagi ko'rinishni oladi. $G(x)=F(x)-F(a)$ (4)

(4) - ga asosan (1) quyidagi ko'rinishni oladi.

$\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$ bu tenglikda $x=b$ bo'lsa $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (5) bo'ladi.

(5) dan ko'rinadiki $f(x)$ funksiyasining $[a,b]$ kesmadagi aniq integralini hisoblash uchun $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ ning aniq integralning yuqori limitdagi qiymatidan quyi limitdagi qiymatini ayirish kerak ekan odatda

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx \quad (6)$$

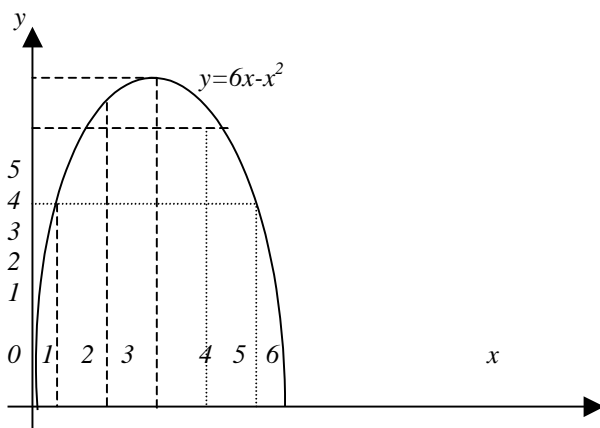
(6) asosan (5) quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b$$

Bu formulani Nyuton - Leybnits formulasi deyiladi.

Misol-1.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin 45^\circ - \sin 0^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$



Aniq integralni bo'laklab integrallash.

Agar $U(x)$ va $V(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi funksiyalar bo'lsa $\int_a^b U \cdot dV = U \cdot V|_a^b - \int_a^b V \cdot dU$ bo'ladi.

Isbot: Bizga ma'lumki aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasi $\int U dV = UV - \int V dU$ (1) edi. Agar $\int V dU = G$ desak $\int U dV = UV - G$ (2) bo'ladi. (2) tenglikka Nyuton-Lebnits formulasini tadbiq etib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\int_a^b U dV = (UV - G)|_a^b \text{ yoki } \int_a^b U dV = UV|_a^b - G|_a^b \text{ yoki } \int_a^b U dV = UV|_a^b - \int_a^b V dU$$

Misol-1:

$$I = \int_0^1 \arcsin x dx \quad U = \arcsin x \quad | \quad dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dV = dx \quad | \quad V = x$$

$$I = x \arcsin x|_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x|_0^1 + \sqrt{1-x^2}|_0^1$$

$$I = \arcsin(1) + 0 + 0 - 1 = \arcsin 1 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Aniq integralda o'garuvchini almashtirish.

Faraz qilaylik $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $I = \int_a^b f(x)$ aniq integrali berilgan bo'lib, uni hisoblash kerak bo'lsin. Ba'zi hollarda bunday aniq integrallarni hisoblashda o'zgaruvchi x - ni biror boshqa o'zgaruvchi orqali almashtirishga to'g'ri keladi.

Faraz qilaylik berilgan aniq integralda $x = \varphi(t)$ almashtirilishi kerak bo'lsin.

Agar birinchidan $\varphi(t)$ funksiyaning argumenti t biror $[\alpha, \beta]$ kesmada o'zgarganda uning qiymatlari $[a, b]$ kesmadan tashqariga chiqmasa.

Ikkinchidan $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$ bo'lsa;

Uchinchidan $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lsa u holda $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ bo'ladi.

Isboti: $f(x)$ va $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$ funksiyalar uzluksiz funksiyalar bo'lgani uchun $\int f(x) dx$ va $\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ integrallar mavjud bo'lib $\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = G(t) + C$; $\int f(x) dx = F(x) + C$ bo'ladi.

$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ bo'lgani uchun $F[\varphi(t)] + C = G(t) + C$ yoki $F[\varphi(t)] = G(t)$ bo'ladi.

Nyuton Leybnits formulasiga asosan:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b ; \quad \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

bo'lishligini bilamiz, lekin $F(x) \Big|_a^b = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$ bo'lgani uchun $(F[\varphi(t)] = G(t))$ bo'lgani uchun $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ bo'ladi.

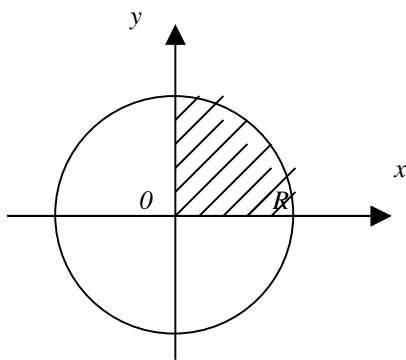
Misol-1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$

$\cos x = t$ desak / $x=0$ da $\cos 0 = 1$ $t=1$;

$-\sin x dx = -dt$ / $x = \frac{\pi}{2}$ da $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $t=0$;

$$I = \int_1^0 t^2 dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_1^0 = -(0 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

Misol-2. Markazi koordinata boshida radiusi R -ga teng bo'lgan doirani yuzi topilsin.



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$S_{\text{doira}} = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos t R \cos t dt =$$

$$= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$x = R \sin t \quad / \quad x=0 \quad \text{da} \quad t=0$$

$$dx = R \cos t dt \quad / \quad x=R \quad \text{da} \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$S_{\text{ai'èdà}} = 2R^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right) = \pi R^2;$$

$$S_{\text{doira}} = \pi R^2$$

S A V O L L A R .

1. **Integrallash amali deb nimaga aytiladi?**
2. **Aniq integralni ta'riflang?**
2. **Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasini qanday chiqariladi?**
4. **Bo'laklab integrallash formulasichi?**

16-MA'RUZA.

DIFFERENSIAL TENGLAMA HAQIDA TUSHUNCHA. MASHQLAR

Reja:

1. Differensial tenglama xaqida tushuncha.
2. Differensial tenglamaga olib kelinadigan ba'zi masalalar.
3. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari.

1. Tabiatda uchraydigan turli jarayonlar (avtomobil xarakati, tayyorani uchishi, fizik, ximik va biologik jarayonlar va x.k.) o'z xarakat qonuniga ega. Ba'zi jarayonlar bir xil qonun bo'yicha sodir bo'lishi mumkin, bu xol esa ularni ishni o'rganishni osonlashtiradi. Ammo jarayonlarni tafsiflaydigan qonunlarni to'g'ridan-to'g'ri topish xar doim xam mumkin bo'lavermaydi. Bu xarakat qonunlarini tavsiflovchi no'malum funksiyalar va xosilalarini o'zaro bog'lovchi munosabatlar differensial tenglamalar deyiladi. Jumladan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

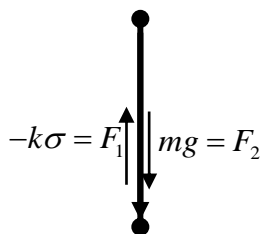
$F(x, y, y') = 0$ birinchi tartibli hosilaga nisbatan echilmagan oddiy differensial tenglama deyiladi.

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ - n -chi tartibli yuqori tartibli hosilaga nisbatan echilgan oddiy differensial tenglama deyiladi.

$F(x, y, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ - n -chi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x, y, y, \dots, y^{(n-1)})$ yoki $F(x, y, y, \dots, y^{(n)}) = 0$ funksiyalar $x, y, y, \dots, y^{(n)}$ argumentlariga nisbatan chiziqli bo'lsa tegishli differensial tenglama chiziqli deyiladi.

2. Differensial tenglamaga olib keladigan ba'zi masalalar.



1-masala. Massasi m bo'lgan jism $v(0) = v_0$ boshlang'ich tezlik bilan biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Jism tezligining o'zgarish qonunini toping.

Nyutonning 2-qonuniga ko'ra

$$m \frac{d\sigma}{dt} = F$$

Bu erda F -jismga ta'sir etayotgan kuchlar yig'indisi.

Jismga faqat 2 ta kuch ta'sir etishi mumkin deb faraz qilinadi.

- 1) xavoning qarshiligi $\leftarrow F_1 = -kv, k > 0$
- 2) erning tortish kuchi $\leftarrow F_2 = mg$

Shunday qilib, matematik nuqtai-nazardan

a) $F = F_2$;

b) $F = F_1$;

v) $F = F_1 + F_2$ teng bo'lishi mumkin.

a) $F = F_2 \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg = \frac{dv}{dt} = g \Rightarrow \int dv = \int g dt \Rightarrow v_1(t) = gt + C,$

$v(0) = v_0 \Rightarrow v_1(0) = C = v_0, C = const.$

$v_1(t) = gt + v_0$

b) $F = F_1 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \Rightarrow \ln(v) = -\frac{k}{m}t + \ln C \Rightarrow v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t},$

$v(0) = v_0 \Rightarrow v(0) = C = v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$

v)

$$F = F_1 + F_2 \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - kv \Rightarrow \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt \Rightarrow -\frac{m}{k} \int \frac{d\left(g - \frac{k}{m}v\right)}{g - \frac{k}{m}v} = t + \ln C \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k} \ln\left(g - \frac{k}{m}v\right) = t + \ln C \Rightarrow g - \frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow -\frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} - g \Rightarrow v_2(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} - g \Rightarrow v_2(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \quad v(0) = v_0$$

$$v_2(0) = C + \frac{mg}{k} = v_0 \Rightarrow C = v_0 - \frac{mg}{k}$$

$$v_2(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

3.

TA'RIF: Erkli o'zgaruvchi va noma'lum funksiya xamda uning xosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi munosabat differensial tenglama deyiladi.

Agar no'malum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.

Agar no'malum funksiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama xususiy xosilali differensial tenglama deyiladi.

TA'RIF: Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi tenglamaning tartibi deyiladi.

Misollar.

1) $y'' - y' \cos x - x^2 y = 0$ ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama.

2) $x(1 - y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ birinchi tartibli oddiy differensial tenglama

3) $x \frac{dz}{dx} = y \frac{dz}{dy}$ birinchi tartibli xususiy xosilali differensial tenglama bo'ladi. ($z = z(x, y)$)

TA'RIF: Differensial tenglamaning echimi yoki integrali deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan xar qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

TA'RIF: Differensial tenglama echimining grafigi integral egri chiziq deyiladi.

17-MA'RUZA. O'ZGARUVCHILARI AJRALADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

Reja:

1. Birinchi tartibli differensial tenglama.
2. O'zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama.
3. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama.
1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

x -erkli o'zgaruvchi, y -no'malum funksiya

$y' = \frac{dy}{dx}$ -no'malum funksiya hosilasi

Agar (1) y' ni ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, u holda

$$y' = f(x, y) \quad (2) \text{ bo'ladi} \quad (2)$$

(2) dan differensial ishtirok etgan ko'rinishga o'tish oson, ya'ni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

ko'rinishga ega.

Haqiqatan, agar $y' = \frac{dy}{dx}$ desak, $f(x, y) = dx - dy = 0$ bu erdan $M(x, y) = f(x, y)$

$N(x, y) = -1$ va aksincha (3) dan (2) ga o'tish oson.

Differensial tenglamani umuman aytganda, bitta funksiya emas, balki funksiyalarning butun bir to'plami qanoatlantirishi mumkin. Ulardan birini ajratib ko'rsatish kerak, yani $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ ko'rinishdagi shart berilishi kerak. Bu shart boshlang'ich shart deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (2) \\ y|_{x=x_0} = y_0 & (4) \end{cases}$$

(2), (4) masala Koshi masalasi deyiladi.

Teorema: (Echimning E va ! xaqidagi teorema) Agar (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga olgan $D \subset \mathbb{R}^2$ soxada $f(x, y)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy xosilaga ega bo'lsa, u xolda (2)

differensial tenglamaning (4) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ echimi Z va ! bo'ladi.

Ta'rif: Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy echimi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y=f(x, c)$, $c=\text{const}$ funksiyaga aytiladi:

a) u ixtiyoriy o'zgarvas S ning xar qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantiradi.

b) boshlang'ich $y|_{x=x_0} = y_0$ shart xar qanday bo'lganda xam o'zgarvas S ning shunday S_0 qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, c_0)$ funksiya berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiradi, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$

Ta'rif: Differensial tenglamaning umumiy echimidan o'zgarvasning mumkin bo'lgan qiymatlarida xosil qilinadigan echimlar xususiy echimlar deyiladi.

2. Differensial tenglamaning eng sodda turi o'zgaruvchilari ajralgan tenglamadir. Uning umumiy ko'rinishi:

$$M(x)dx + N(y) \cdot dy = 0 \quad (5)$$

Bu tenglamaning muximligi shundaki dx oldidagi funksiya faqat x ga bog'liq, dy oldidagi funksiya faqat y ga bog'liq. Bu tenglamaning umumiy echimini topish uchun, uni xadlab integrallash orqali xosil qilinadi:

bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya n o'lchovli bir jinsli funksiya deyiladi. (n -funksiya bir jinsliligining o'lchovi deyiladi).

Bir nechta misollar ko'raylik.

1-misol. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki,

$$f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\sqrt{x^2 + y^2} = t^1 f(x,y)$$

2-misol. $F(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ o'lchovli bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki $f(tx,ty) =$

$$= \frac{tx - ty}{tx + ty} = \frac{t(x-y)}{t(x+y)} = \frac{x-y}{x+y} = t^0 f(x,y), \text{ ya'ni } f(tx,ty) = t^0 f(x,y)$$

Tasdiq: $f(tx,ty) = f(x,y)$ shartga bo'ysinadigan 0o'lchovli bir jinsli funksiya

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko'rinishida yozilishi mumkin.

Isbot. Haqiqatdan ham, t parametrni tanlab olish mumkin bo'lgani uchun $t = \frac{1}{x}$ deb olamiz.

$$\text{U holda } f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

2-misoldagi $f(x,y)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x,y) = \frac{x(1 - \frac{y}{x})}{x(1 + \frac{y}{x})} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Biz quyidagi 0o'lchovli bir jinsli funksiya bilan ish ko'ramiz.

- Ta'rif:** Agar 1-chi tartibli $y' = f(x,y)$ differensial tenglamaning o'ng tomoni x va u ga nisbatan 0o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, u holda bunday tenglama bir jinsli tenglama deyiladi.
- Shunday qilib bir jinsli tenglamani

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekan.

Bir jinsli (1) tenglamani $\frac{y}{x} = u(x)$ o'rniga qo'yish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan

tenglamaga keltirish mumkin, u holda $y = u \cdot x$, bu erda u -yangi izlanayotgan funksiya. Keyingi tenglikni differensiallab, $y' = u'x + u$ ni hosil qilamiz. u va u' qiymatlarini (1)ga qo'yamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$u'x = \varphi(u) - u$ o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama

$$du \cdot x = (\varphi(u) - u) dx \quad G': x(\varphi(u) - u) \neq 0$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x} \text{ hosil qilamiz.}$$

Buni integrallaymiz.

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + \ln c, \quad \ln cx = \int \frac{du}{\varphi(u) - u} \Rightarrow cx = t^{\int \frac{du}{\varphi(u) - u}}$$

Integrallashdan so'ng u o'rniga $uG'x$ nisbatni qo'yib, (1)tenglamaning umumiy echimini hosil qilamiz. ushbu $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (2)

tenglamada $M(x,y)$, $N(x,y)$ lar bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo'lgandagina (2)tenglama bir jinsli tenglama bo'ladi.

.....
 Bu 2ta bir xil o'lchovli bir jinsli funksiya nisbati 0 ulchovli 1 jinsli funksiya bo'lishidan kelib chiqadi.

(2) ko'rinishdagi tenglamani yechish uchun uni dastlab (1) ko'rinishga keltirish kerak:

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \rightarrow 0 \text{ o'lchovli bir jinsli funksiya}$$

Masalan, $(y^2-3x^2)dy+2yxdx=0$ tenglama bir jinslidir, chunki y^2-3x^2 va $2xy$ funksiya 2 o'lchovli bir jinsli funksiyalardir. Tenglamani yechishdan oldin uni hosilaga nisbatan yechish shakliga keltirish kerak:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{3 - (\frac{y}{x})^2}$$

4. Quyidagi $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ (3) ko'rinishdagi tenglama bir jinsli tenglamaga

keltiriladi. Buning uchun x va y larni o'rniga yangi u va v o'zgaruvchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$x=u+\alpha, y=v+\beta \quad (4)$$

bunda α va β -larni shunday tanlaymizki, tenglama bir jinsli tenglamaga aylansin. Bunday almashtirishda dx, dy, du, dv bo'ladi. Bularni (3)ga qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d\vartheta}{du} = f\left(\frac{(au+b\vartheta)+(\alpha a+\beta b+c)}{(a_1u+b_1\vartheta)+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}\right) \quad (5)$$

quyidagi tengliklar bajarilsa, (5) tenglama bir jinsli bo'ladi:

$$\begin{cases} \alpha a + \beta b + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Bu sistemani α va β ga nisbatan echib, α va β ning (4)o'rniga qo'yish (3) tenglamani bir jinsli qiladigan qiymatlarini aniqlaymiz:

Agar $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo'lsa, ular (6) sistema echimiga ega bo'lmaydi. Bunday holda (3) tenglama o'zgaruvchilarini ajraladigan tenglamaga

.....
 $z=ax+by$

 o'rniga qo'yish orqali keltiriladi.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.
Bernulli, Rikkati, tenglamalari.

1. **Ta'rif:** Noma'lum funksiya va uning xosilasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali) bo'lgan tenglamalar birinchi tartibli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalarning umumiy ko'rinishi quydagicha bo'ladi:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

bu erda $P(x)$, $Q(x)$ lar x ning ma'lum uzluksiz funksiyalari (yoki o'zgamasidir). Agar (1) tenglamaning o'ng tamoni $Q(x) \neq 0$ bo'lsa, (1) tenglama chiziqli bir jinsli (boshqacha ma'noda), aks holda ya'ni $Q(x) = 0$ bo'lsa chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi.

Aytaylik, (1) tenglama bir jinsli bo'lmasin, ya'ni $Q(x) \neq 0$ teng bo'lsin. Bu tenglamani integrallash (yoki echimini topish) ning 2 usulini keltiramiz.

1) o'rniga qo'yish usuli va

2) o'zgarishni variatsiyalash usuli.

Bir jinsli chiziqli tenglama bo'lgan holni alohida qarab chiqish shart emas, chunki $Q(x) \equiv 0$ bo'lganda (1) tenglama ayni vaqtda o'zgaruvchilarni ajratiladigan tenglama bo'ladi.

a) o'rniga qo'yish usuli

(1) tenglamada $y=U \cdot V$ o'zgaruvchini almashtirayiz. Bu bilan u o'rniga izlanyotgan yangi o'zgaruvchi, masalan, U ni kiritgan bo'lamiz, shu sababli ikkinchi o'zgaruvchi V ni yordamchi o'zgaruvchi deb qarab uni o'z hoxishimizga ko'ra tanlashimiz mumkin. Kelgusida shunday qilinadi ham, ya'ni (1) da $y=U \cdot V$ almashtirish bajaramiz. y va y' ning U va V orqali ifodalarini (1) ga quyamiz:

$$\begin{aligned} y' &= U'V + V' \cdot U \\ U' \cdot V + UV' + P(x)U \cdot V &= Q(x) \\ U'V + U(V' + P(x)V) &= Q(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Yordamchi formula V ni tanlash mumkinligidan foydalanib, uni o'rta qavs ichidagi ifoda 0 ga aylanadigan qilib olamiz, ya'ni

$$V' + P(x)V = 0 \quad (3)$$

talab qilamiz. Bu o'zgaruvchilarga ajratiladigan tenglama (3) dan

$$V' + P(x)V = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x)dx \Rightarrow \ln V = -\int P(x)dx + \ln c \Rightarrow V = C e^{-\int P(x)dx} \quad (4)$$

v - ni bu ifodasini (2) tenglamaga qo'ysak, U uchun o'zgaruvchilari aratiladigan tenglamani hosil qilamiz, ya'ni

(3) o'rinli bo'lsa (2) quyidagicha bo'ladi.

$$U'V = Q(x)$$

(4) dan esa

$$C e^{-\int P(x)dx} U' = Q(x) \quad (5)$$

$$CU' = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$

$$CdU = Q(x) e^{\int P(x)dx} dx$$

$$U = \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right] \quad (6)$$

$y=U \cdot V$ bo'lgani uchun (4) va (6) dan (1) tenglamaning umumiy echimi uzil-kesil quyidagicha ko'rinishida bo'ladi:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C_1 \right] \quad (7)$$

(3) tenglamaning integrallashdan hosil bo'lgan S o'zgarish U ni V ga kupaytirganda qisqarib ketgani uchun (4) echimda oldindan $S=1$ deb olish va (3) chi tenglamaning umumiy echimi o'rniga

$$V = e^{\int P(x)dx}$$

xususiy echimni olish mumkin edi, amalda shunday qilinadi. O'rniga quyish usuli 1 ta (1) tenglamani o'zgaruvchilarga ajraladigan 2 ta (3) va (5) tenglamalarning echimlarini izlashga olib keladi.

1-misol. $y'-ay=e^{bx}$ tenglamani o'rniga qo'yish usuli bilan eching.

O'zgarishni variatsiyalash usuli.

Bu usulda bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamani ($Q(x) \neq 0$) echimini izlash o'rniga dastlab unga mos bir jinsli

$$y' + P(x)y = 0 \quad (8)$$

tenglamani echamiz, bu tenglama o'zgaruvchilari ajratiladigan tenglamadir uning umumiy echimi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow y = C e^{-\int P(x)dx} \quad (9)$$

Bu erda S o'zgarishni $S=S(x)$ funksiya deb qaraydigan bo'lsak, u holda $S(x)$ formulani shunday tanlab olish mumkin ekan, (9) funksiya bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning echimi bo'lar ekan.

$S(x)$ funksiyani topishi uchun $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz, y va y' ning ifodalarni (1) tenglamalarga qo'yamiz, ya'ni

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

bo'lgani uchun (1) tenglama ushbu tenglamaga o'tadi:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad (10)$$

Biz yana o'zgaruvchilari ajraladigan va noma'lum funksiya S(x) bo'lgan tenglamani hal qilishga keldik. (10)dan

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1$$

Bu (10) ni umumiy echimi bo'ladi.

S(x) ning tanlangan ifodasini (9) tenglikka qo'yib bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning izlanayotgan echimini yana (7) ko'rinishda hosil qilamiz:

$$y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C_1] \quad (7)$$

Oldingi (7) bilan bir xil bo'lar ekan.

Bu usulning nomi S o'zgarimasni x ning funksiyasi deb qarab, uni variatsiyalaganimizdan (o'zgartirganimizdan) kelib chiqqan.

Bu usul o'rniga quyish usuli kabi (1) tenglamani o'zgaruvchilarga ajratiladigan 2 ta (8) va (10) tenglamaga keltirildi.

2-misol. $\frac{dy}{dx} - y$ ctg x qa sin x tenglamani 2-chi usul bo'yicha eching.

3. Bernulli tenglamasi

Bernulli tenglamasining umumiy ko'rinishi;

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad (11)$$

bu erda $n \neq 0, n \neq 1$ Bernulli tenglamasi chiziqli tenglamaga aylanadi; nql da o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglama bo'ladi, chunki uni

$$y' + [P(x) - Q(x)]y = 0$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Shuning uchun $n \neq 0, n \neq 1$ deb faraz qilamiz.

Bernulli tenglamasini tegishli o'rniga qo'yish orqali chiziqli ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun tenglamaning ikkala qismini y^n ga bo'lamiz:

$$\frac{1}{y^n} y' + P(x) \frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$$

$\frac{1}{y^{n-1}} = z$ deylik. u holda $z' = -(n-1)y^{-(n-1)-1}y' = (1-n) \frac{1}{y^n} y'$ va Bernulli tenglamasi ushbu ko'rinishga

keladi: $\frac{1}{y^n} y' = \frac{z}{1-n} \quad \frac{z}{1-n} + P(x)z = Q(x) \Rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$

Bu z ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli tenglama, bu tenglamani yechishni bilamiz. Misol ko'riladi.

Rikkati tenglamasi

Ba'zi tenglamalar o'zgaruvchini almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Masalan, Rikkati tenglamasi uning bitta xususiy echimi ma'lum bo'lganda Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Ushbu

$$y' + P(x)y + q(x)y^2 = f(x) \quad (12)$$

ko'rinishdaga tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi.

$y = y_1(x)$ funksiya (12) tenglamaning xususiy echimi bo'lsin. Agar $y = y_1(x) + z$ almashtirishni bajarsak $y' = y_1'(x) + z' \Rightarrow y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$ kelib chiqadi. $y_1' + py_1 + qy_1^2 = f(x)$ ekanligini e'tiborga olsak, ushbu

$$z + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0$$

Bernulli tenglamasi hosil qilamiz.

1. Ehtimollar nazariyasining fani.
2. Hodisalar va ularning turlari.
3. Ehtimollar fazosi.

1. Ehtimollar nazariyasining fani. Nazariya so'zi –fan bilan bog'liq; fan esa qonuniy xodisalarni o'rganadi; «ehtimol» so'zi esa tasodifiy, noanik, noqonuniy so'zlar bilan alokadordir. Shuning uchun «ehtimollar nazariyasi fani» dan bexabar odamlar bu fan to'g'risida istexzoli fikr yuritadilar. Lekin ehtimollar nazariyasi fani o'sib borayotgan matematikaning bo'limi bo'lib, bu tasodifiy xodisalar qonuniyatlarini o'rganadigan fandır.

Tasodifiy xodisalar biror qonuniyatga bo'ysunmaganday tushiniladi, aslini olganda xar kanday tasodif biror qonuniyatga bo'ysunadi. Bu qonuniyatni birinchi bor Ya. Bernulli o'rgandi.

Matematika boshqa fanlan singari moddiy dunyodagi xodisalar qonuniyatlarini o'rganadi.

Masalan, Ulugbek o'zining ko'p yillik kuzatishlari natijasida eklektikaning ekvatori og'ish burchagi $23^{\circ}30'49''$ ekanligini o'lchadi yoki Jamshid Koshiy $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ tenglikni ko'rsatdi.

Lekin, kuzatish natijasida, ko'pgina jarayonlarda tasodifiy xolatlarini ko'ramiz.

Masalan bozorda sotadigan maxsulotingiz siz o'ylagan narxda sotilmasligi yoki ertaga yomg'ir yog'ishi yoki yog'masligi mumkin.

Ana shunday tasodifiy xodisalar kandaydir ehtimollar qonuniyatiga bo'ysinar ekan, bu erda bir xil sharoitda doim takrorlanadigan xodisalar to'g'risida gap boradi.

Masalan, n ta tajribada A xodisa $n(A)$ chastotasi bu sonni bildiradi, tajriba soni ortgan sari kandaydir o'zgarmas xarakterga ega. Bu tajriba bir necha bor takrorlansa

$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx \dots \approx \frac{n_k}{n_k}$ ni xosil kilamiz. Bu sonlar kandaydir miqdor atrofida tebranadi, bu songa

A xodisani ehtimolligi deyiladi va $R(A)$ bilan belgilanadi. Masalan, o'g'il bolaning dunyo bo'yicha tug'ilish chastotasi 0,51-0,52 ga teng. Bu turg'un chastota moddiy borlikdagi tasodifiy xodisaning mavjud xossasidir.

Ehtimollar nazariyasi kombinatorika, matematik tahlil, algebra, mantik, to'plamlar nazariyasi kabi matematika fanlaridan foydalanadi va ko'pgina nomatematik masalalarni xal kiladi.

2. Xodisa. Ehtimollar nazariyasining asosi ytushunchalaridan biri «tajriba» dir. Tajriba² - hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmui (shartlar kompleksi) S ni bajarilishini ta'minlashdan iboratdir. Tajribadan tajribaga o'tganda ro'y berayotgan hodisalar o'zgarib turadigan xollar hayotda keng miqyosda uchrab turadi, bu erda, albatta, tajribani vujudga keltiruvchi shartlar majmui³ (kompleksi) S o'zgarmas bo'lgan xollar tushiniladi.

1-misol. Kuzatilayotgan tajriba biror aloka bo'limidan bir kunda jo'natilayotgan telegrammalar soni bo'lsin, bu erda tajribadan o'tganda, ya'ni kundan-kunga o'tganda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalar (telegrammalar sonining biror natural songa tengligi) har xil bo'lishi mumkin.

2-misol. O'tkazilayotgan tajriba anik bir kompyuterdagi kundalik internetidan foydalanilgan mijozlar sonini aniklashdan iborat bo'lsin. Bu erda kompleks shart- anik bir kompyuter va bir xil vakt xaftani barcha kunlaridan iborat.

Ehtimollar nazariyasining keyingi tushunchasi bu «xodisadir». Tajriba natijasida ro'y berishi oldindan anik bo'lmagan xodisa «tasodifiy xodisa»⁴ deyiladi.

Moddiy dunyoda tasodifiy xodisa bu tajriba yoki kuzatish natijasi bo'lib, ro'y berishi yoki ro'y bermasligi mumkin.

3-misol. Tajriba shashkoltoshni (kubik, bir jinsli materialdan tayyorlangan bo'lib, tomonlarga birdan oltigacha rakamlar yozilgan, tashlanganda yukori tomondagi rakam xisoblanadi) tashlashdan iborat bo'lsin. Bu xolda A juft rakamli tomonlari tushish xodisasi, V tushgan rakamlar 3 dan oshmaslik xodisasi bo'lsin.

Demak, $A = \{a_2, a_4, a_6\}$, $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ bu erda $a_1 \dots i$ - nchi tomonning tushish xodisasini bildiradi.

Aslida xodisa ta'riflanmaydigan tushuncha bo'lib, o'zini xossasi bilan xarakterlanadi.

Agar bir vaktida bir nechta xodisa karaladigan bo'lsa, ularni bitta tajribada ro'y berishi yoki ro'y bermasligi e'tiborga olinadi.

Tajriba natijasida har gal ro'y beradigan xodisaga mukarrar xodisa ⁵ deyiladi va Ω bilan belgilanadi.

Tajriba natijasida xech kachon ro'y bermaydigan xodisaga mumkin bo'lmagan ⁶ xodisa deyiladi va \emptyset bilan belgilanadi. Agar tajriba natijasida A ro'y bermasa, u xolda unga teskari ⁷ \bar{A} xodisa ro'y berdi deyiladi.

Agar A xodisani tashkil etgan xodisalar B xodisaga ham tegishli bo'lsa, A xodisa B xodisani ergashtiradi ⁸ deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi. Ko'rinib turibdiki, bu xolda A ro'y bersa, B ham albatta ro'y beradi, lekin B ro'y bersa, A ning ro'y berishi shart emas.

A va B xodisalar bir xil xodisalar to'plamidan tashkil topgan bo'lsa, ya'ni A ni tashkil etgan barcha xodisalar albatta B ga ham tegishli va aksincha, B ni tashkil etgan barcha xodisalar albatta A ga ham tegishli bo'lsa, A va B xodisalar teng deyiladi ⁹ va $A = B$ kabi belgilanadi.

A va B xodisalar yig'indisi ¹⁰ deb, A yoki B ning yoki, ikkalasining ham ro'y berishidan iborat S xodisaga aytamiz. A va B xodisalar yig'indisini $A \cup B$ (yoki $A + B$) orkali belgilanadi.

A va B xodisalar yig'indisi bir vaktida ro'y berishini ta'minlovchi barcha $e \in \Omega$ lardan tashkil topgan S xodisa A va B xodisalar yig'indisi ¹¹ deyiladi va $A \cap B$ (yoki AB) kabi belgilanadi.

A va B xodisalar ayirmasi deb, A ro'y berib, B ro'y bermasligidan iborat S xodisaga aytiladi. A va B xodisalar ayirmasi ¹² $A \setminus B$ (yoki $A - B$) kabi belgilanadi.

Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, A va B xodisalar birgalikda emas ¹³ deyiladi.

Yukoridagi ta'riflardan $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = \Omega$ kelib chiqadi.

Xodisalar orasidagi yukorida kiritilgan tushunchalarni Eyler-Venn diagrammasi 1- shakl yordamida tushuntirish kulaydir. S- shartlar kompleksi 1- shakldagi katta kvadratga moddiy nuqtani tavakkaliga tashlashdan iborat bo'lsin.

«Tashlangan moddiy nuqtaning aylanada yotishi» xodisasini A orkali, «tashlangan moddiy nuqtaning kvadrat ichida yotishi» xodisasini B orkali belgilaylik. U xolda $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \bar{A}$ hodisalar tashlangan moddiy nuqtaning 1- shakldagi mos figuralarning shtrixlangan soxalari tushishidan iborat bo'ladi:

Ehtimollar nazariyasida ta'riflanmaydigan elementar xodisa tushunchasidan ham keng foydalaniladi. Oddiy misol sifatida quyidagini ko'rib chikamiz. Faraz kilaylik, xaltada n ta shar bor (sportlotto). Tajriba- xaltadan tasodifan bitta shar olamiz va bu modelni quyidagicha belgilaymiz: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

Agar tajribada $\omega_i \in A$ shar chiksa, bu erda A Ω ni to'plam osti, u xolda A xodisa ro'y berdi deyiladi, aks xolda A ro'y bermadi. ($\omega_i \notin A$) deyiladi. A Ω ning barcha to'plam ostilaridan iborat bo'lib, uni elementar xodisalar ¹⁵ deymiz.

Umumiy xolda $\Omega = \{\omega\}$ to'plamda ω ni elementar xodisalar, Ω ni esa elementar xodisalar fazosi ¹⁶, uning A to'plam ostilarini xodisa deymiz. To'plam va xodisa orasidagi munosabatni quyidagi 1-jadvalda ifodalaymiz.

Xodisalar ustida bajariladigan yig'indi va ko'paytma amalini chekli yoki cheksiz xodisalar

Belgi	To'plam tilida	Xodisalar tilida
Ω	Fazo(universal to'plam)	Elementar xodisalar fazosi, mukarrar xodisa.
$\omega, \omega \in \Omega$	ω fazo elementi	ω elementar xodisa
$A, A \in \Omega$	A to'plam	A xodisa
$A \cup B$	A va B to'plam yig'indisi	A va B xodisalar yig'indisi.

$A + B$		
$A \cap B,$ $A \cdot B,$	A va B to'plam ko'paytmasi	A va B xodisalar ko'paytmasi.
$A \setminus B$	A va B to'plam ayirmasi	A va B xodisalar ayirmasi.
\emptyset	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan xodisa
\bar{A}	A to'plam to'ldirmasi (teskari to'plam)	A xodisaga teskari xodisa.
$A \cdot B = \emptyset$	A va B kesishmaydi.	A va B birgalikda emas.
$A \subseteq B$	A B ning to'plam osti	A B xodisani ergashtiradi.
$A = B$	A va B teng.	A va B teng kuchli.

1-jadval.

ga umumlashtirish mumkin: $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}, \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ kabi belgilaymiz. Quyidagi xossalarni keltirish mumkin:

$$\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}, \quad \overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \bar{A}_{\alpha}, \quad \bar{\bar{A}} = A,$$

$$\bar{A} = \Omega \setminus A, \quad \overline{\emptyset} = \Omega, \quad \overline{\Omega} = \emptyset, \quad A | B = A | AB = A\bar{B},$$

$$A \setminus (A \setminus B) = AB, \quad A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$$

Agar A_1, A_2, \dots, A_n lar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ o'rniga $\sum_{i=1}^n A_i$ yozuv ishlatiladi.

Umumiy xolda Ω elementar xodisalar fazosining barchasini ko'rmaymiz, bu fazolardan "algebra" va σ -algebra deb ataluvchi fazolarni ajratib o'rganamiz.

1-Ta'rif: Agar

- $\emptyset \in A, \Omega \in A,$
- $A \in A$ dan $\bar{A} \in A$ kelib chiksa
- $A, B \in A$ dan $A \cup B \in A, A \cap B \in A$ kelib chiksa, u xolda Ω ni qismi bo'lgan A xodisalar algebrasini tashkil kiladi deyiladi ¹⁸.

2-Ta'rif: Agar yuqoridagi ta'rifni uchinchisini quyidagicha almashtirilsa: $A_n \in A$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ kelib chiksa, u xolda A ga xodisalar σ -algebrasi deyiladi.

3. Ehtimollar fazosi.

Ta'rif: Ω elementar hodisalar fazosi, A Ω dagi σ -algebra, R ehtimollik bo'lib, quyidagi shartlar

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in A$ (R ning nomanfiyligi),
- $P(\Omega) = 1$ (normallanganligi),
- $P(A + B) = P(A) + P(B), \quad AB = \emptyset$ (additivligi)
- Agar $A_n \downarrow \emptyset$, ya'ni $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \supseteq A_k \supseteq \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$,

da $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ (uzluksizlik) bajarilsa, u xolda $\{\Omega, A, P\}$ ga ehtimollar fazosi deyiladi. Bu aksiomadani ehtimollarning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1) Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Hakikatan ham, $B = A + (B \setminus A)$ va $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

Natijada, 3 aksiomaga ko'ra $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ (1)

2) Agar $A \subseteq B$ u holda $P(A) \leq P(B)$.

Bu xossa (1) dan kelib chiqadi.

3) $\forall A \in A$ uchun $0 \leq P(A) \leq 1$ $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ dan 2- aksiomaga ko'ra 3) xossa kelib chiqadi.

4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $A + \bar{A} = \Omega$ va $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ ligidan 3-aksiomaga ko'ra 4-xossa isbotlanadi.

5) $P(\emptyset) = 0$

Bu xossa 4) xossadan va 2.aksiomadadan kelib chiqadi.

6) Chekli additivlik. Agar $A_i \cdot A_j = \emptyset$ $i \neq j$ bo'lsa, u xolda

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \tag{2}$$

Oxirgi xossa 3 dan matematik induksiya usulini ko'llash yordamida isbotlanadi.

7) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n$ uchun $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$ (3)

(3) xosani isbotlash uchun $\bigcup_{k=1}^n A_k$ ni juft-jufti bilan bir-galikda bo'lmagan xodisalar yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz. $B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1})$ belgilasak $\bigcup_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n B_k$, 6) xossadan

va oxirgi tenglikdan $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k)$, lekin $P(B_k) \leq P(A_k)$, natijada (3) kelib chiqadi.

8) $\forall A$ va B uchun $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Ma'lumki, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cdot B)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cdot B)$ va $P(B \setminus A \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B)$ dan 8-xossa kelib chiqadi.

3 va 4 aksiomalarni σ -additivlik (sanokli additivlik) aksilmasi bilan almashtiramiz.

3*(σ -additivlik²²). Agar $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ juft-jufti bilan bog'liqsiz bo'lsa,

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{4}$$

1-teorema. 1.2.3.4 aksiomalar 1.2.3* aksiomalar bilan teng kuchlidir. Teorema isbotini o'kuvchiga koldiramiz.

Ω elementar xodisalar fazosidagi A σ -algebra 1.,2.,3.,4 aksiomalar ehtimollikni aniklaydi, bu aksiomalarni A.N. Kolmogorov kiritgan.

1.2.3. aksiomalarni chastota tilida quyidagicha izoxlash mumkin. Faraz kilaylik, A va B birgalikda bo'lmagan xodisalar bo'lib, $N(A)/N$ va $N(B)/N$ lar kuzatish natijasi bo'lgan nisbiy chastotalar bo'lsin. $N(A) \geq 0$ ligidan

$N(A)/N \geq 0$, va $P(A)$ ni $N(A)/N$ ga yaqinligidan $P(A) \geq 0$. Mukarrar xodisa uchun $N(\Omega) = N$ va demak, $P(\Omega) = 1$ ni talab kilsak. $N(A + B) = N(A) + N(B)$

Bundan $\frac{N(A + B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N}$

EHTIMOLLIK TA'RIFLARI

1. Chekli ehtimollar fazosi. Klassik Ta'rif:

Faraz kilaylik, $\Omega = \{\omega\}$ chekli fazo, A Ω dagi algebra bo'lsin. Bu holda A dagi ixtiyoriy A xodisa uchun $R(A)$ ni quyidagicha aniklaymiz, buning uchun $\omega \geq 0$ ni shunday tanlaymizki, $\sum_{\omega} P_{\omega} = 1$, u xolda $R(A)$ quyidagicha aniklanadi ²³.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P_{\omega}$$

Bunday aniklangan $R(A)$ ehtimollikning barcha aksiomalarini kanoatlantiradi.

$|A|$ bilan A to'plamdagi elementlar sonini belgilaymiz. Agar P_ω lar o'zaro teng bo'lsa, u holda $P_\omega = \frac{1}{|\Omega|}$ va $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ chunki bu xolda $1 = \sum_{\omega \in \Omega} P_\omega = P_\omega |\Omega|$

(1) ko'rinishda aniqlangan ta'rifga ehtimollikning klassik ta'rif²⁴ deyiladi. Bunda barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'ladi. Bunga turli loteriya o'yinlari, shashkoltoshni tashlash kabilar misol bo'la oladi.

2. Kombinatorika elementlari. Klassik ta'rifdan foydalanib masalalar yechishda kombinatorika elementlari muxim rol o'ynaydi, shuning uchun kombinatorikaning ayrim masalalarini ko'rib chikamiz.

1) Turli to'plamdan bittadan tanlab olishlar kombinatsiyasi²⁵.

r ta turli to'plam berilgan bo'lsin. Birinchi to'plam n_1 ta $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_{n_1}^{(1)})$ elementdan, ikkinchi to'plam n_2 ta $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \dots, a_{n_2}^{(2)})$ elementdan va hokazo, r ta to'plam n_r ta $(a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, \dots, a_{n_r}^{(r)})$ elementdan tuzilgan bo'lsin. Isbotlash mumkinki, har bir to'plamdan bittadan element olib r elementli $(a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}, \dots, a_{i_r}^{(r)})$ to'plam hosil qilishlar soni $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$ ga tengdir.

2) Qaytariladigan tanlashlar soni²⁶. Faraz kilaylik, n ta turli elementga ega bo'lgan to'plam (a_1, a_2, \dots, a_n) berilgan bo'lsin. Bu to'plamdan bittadan element olib, uni fiksirlagach, o'rniga kaytarib ko'yamiz va bu jarayonni yana takrorlaymiz. Bu usuldan r marta foydalanib, r elementli $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ to'plamni xosil qilamiz. Bu usulda tanlab olishlar soni $N = n^r$ ga tengdir.

3) Qaytarilmaydigan tanlashlar soni²⁷.

Faraz kilaylik, n ta turli elementga ega bo'lgan to'plam (a_1, a_2, \dots, a_n) berilgan bo'lsin. Bu to'plamdan bittadan element olib, kayta ko'ymaslik sharti bilan, r elementli $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ to'plam xosil qilishlar soni $N = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = A_n^r$ formula bilan topiladi.

Ayrim hollarda A_n^r o'rinashtirishni $n^{[r]}$ ko'rinishida ham ifodalanadi. Xususan, $r=0$ da $A_n^0 = n^{[0]} = 1$ deb kabul qilamiz.

Agar to'plamning barcha elementi bittadan, kayta ko'ymaslik sharti bilan, olinsa unday o'rinashtirishlar soni $A_n^n = n^{[n]} = n!$

4) Birlashma²⁸ (Kombinatsiya) n elementli to'plamdan r tadan element olib to'plam xosil qilishlar soni uchun

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ formula o'rinli}$$

Quyidagilar o'rinli deb kelishib olamiz: $0! = 1$, agar r butun manfiy, yoki $r > n$ bo'lsa, $C_n^0 = 1$, $C_n^r = 0$

1-misol. Xaltada nomerlangan m ta ok, $n-m$ ta kora shar bo'lsin. Bu sharlardan tasodifan bittadan shar ochib, nomerini yozib ko'yib, kaytadan xaltaga ko'yish sharti bilan r ta shar olganda roppa-rosa k tasining ok chikish hodisasi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Ma'lumki, n ta shardan, kayta ko'yish sharti bilan, bittadan olib r ta shar olishlar soni n^r ga teng. Lekin m ta okdan k ta olishlar soni m^k ga, kolgan $n-m$ dan $r-k$ ta olishlar soni $(n-m)^{r-k}$ ga teng. Natijada izlanayotgan ehtimollik quyidagicha topiladi:

$$P = C_r^k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{r-k}$$

3. Ehtimollikning geometrik va statistik ta'riflari.

Biror G soha berilgan bo'lib, bu soxa G_1 soxani o'z ichiga olsin, $G_1 < G$. G sohaga tavakkaliga (tasodifan) tashlangan nuqtaning G_1 soxaga ham tushish ehtimolligini topish talab etilsin. Bu erda Ω ehtimollik fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat va kontinum kuvvatga ega. Binobarin, bu holda klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz.

Tashlangan nuqta G ga albatta tushgan va uning biror G_1 kismga tushish ehtimoli shu G_1 kismning o'lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, G_1 ning formasiga va G_1 ni G ning kaerda joylanganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda karalayotgan hodisaning ehtimoli

29

$$P = \frac{\text{mes}G_1}{\text{mes}G}$$

formula yordamida aniklanadi. Bu formula yordamida aniklangan R funksiya ehtimolining barcha xossalarni kanoatlantirishini ko'rish kiyin emas.

(O'quvchilarga yukoridagi xossalarni tekshirib chikishni tavsiya etamiz).

2-misol. Ikki do'st soat 8 bilan 9 o'rtasida uchrashmochi bo'lishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini chorak soat davomida kutishini avvldan kelishib olishdi, agar bu vakt mobaynida do'sti kelmasa, u ketishi mumkin. Agar ular soat 8 bilan 9 o'rtasidagi ixtiyoriy vaktida kelishi mumkin bo'lib, kelishi vakti ko'rsatilgan vakt mobaynida tasodifiy bo'lib, bu vaktlar o'zaro kelishib olingan bo'lmasa, u holda bu ikki do'stning uchrashish ehtimolligi topilsin.

Yechish. Birinchi kishining kelish momenti X , ikkinchisniki esa U bo'lsin. Ularning uchrashishlari uchun $|x - y| \leq 15$ tengsizlikning bajarilishi zarur va etarlidir. X va U larni tekislikdagi Dekart koordinatalari sifatida tasvirlaymiz. Ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha imkoniyatlar tomonlari 60 bo'lgan kvadrat nuqtalaridan va uchrashishga kulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar shtrixlangan yuzadan iboratdir. Izlanayotgan ehtimol shtrixlangan yuzning kvadrat yuziga bo'lgan nisbatiga teng.

3-misol. Byuffon masalasi. Tekislikda bir-biridan $2a$ masofada turuvchi parallel to'g'ri chiziklar o'tkazilgan. Tekislik uzunligi $2l (l < a)$ bo'lgan igna tavakkaliga tashlangan. Ignaning birorta to'g'ri chizikni kesish ehtimolini toping.

Yechish. X orkali ignaning o'rtasidan unga yakinrok bo'lgan parallelgacha bo'lgan masofani va φ orkali igna bilan bu parallel chizik orasidagi burchakni aniklaymiz.

X va φ kattaliklar ignaning holatini to'la aniklaydi. Ignaning barcha holatlari tomonlari a va π bo'lgan to'g'ri to'rburchak nuqtalari bilan aniklanadi. Ignaning parallel to'g'ri chizik bilan kesishishi uchun $x \leq l \sin \varphi$ tengsizlikning bajarilishi zarur va etarlidir. Qilingan farazlarga ko'ra izlanayotgan ehtimol 4-shakldagi shtrixlangan yuzaning to'g'ri to'rburchak yuziga nisbatiga teng bo'ladi.

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}$$

Bu formula yordamida π ni hisoblash uchun $\pi = \frac{2l}{a}$ ifodani hosil kilamiz.

Shartlar kompleksi o'zgarmas bo'lganda biror A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi ustida ko'p marta kuzatishlar o'tkazilganda, uning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi ma'lum turg'unlik xarakteriga ega bo'ladi. A hodisaning n ta tajribada ro'y berishlar sonini ν deb olsak, u holda juda ko'p sondagi kuzatishlar seriyasi uchun $\frac{\nu}{n}$ nisbat deyarli o'zgarmas miqdor

bo'lib kolaveradi. $\frac{\nu}{n}$ nisbat A hodisaning ro'y berish nisbiy chastotasi³⁰ (ehtimollikning statistik ta'rifi) deyiladi. Nisbiy chastotaning turg'unlik xususiyati birinchi bor, demografik xarakterdagi

xodisalarda ochilgan. Eramizdan 2240 yil burun Qadimiy Xitoyda o'qq'il bola tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati deyarli $\frac{1}{2}$ ga tengligi hisoblangan.

Laplas London, Peterburg va Fransiyadagi juda ko'p statistik materiallarga tayanib, tug'ilgan o'g'il bolalar soniga nisbati taxminan $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko'rsatdi.

Agar tajribalar soni etarlicha ko'p bo'lsa, u holda shu tajribalarda karalayotgan A hodisaning ro'y berish chastotasi biror o'zgarmas $P \in [0,1]$ son atrofida turg'un ravishda tebransa, shu R sonni A hodisaning ro'y berish ehtimoli deb kabul kilinadi. Bunday usulda aniklangan ehtimol statistik ehtimoli ³¹ deyiladi. Mizes hodisaning ehtimolini ushbu munosabat yordamida kiritgan:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_r}{n}$$

20-21-MA'RUZALAR. TASODIFIY MIQDORLAR

REJA:

1. Tasodifiy miqdorlar. Indekatorlar.
2. Matematik kutilma.
3. Dispersiya.
4. Ko'p o'lchovli taqsimot qonun.

1. Tasodifiy miqdorlar. Indekatorlar.

Ta'rif: chekli ehtimollar fazosi (Ω, A, P) berilgan bo'lib, w elementar hodisa uchun aniklangan $\zeta(w)$, $w \in \Omega$ sonli funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Ko'pincha tasodifiy miqdorlarni grek harflari $\xi, r, \zeta, \nu, \dots$ kabilar bilan belgilaymiz.

1-misol. Bernulli sxemasida $\Omega \ni w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, bo'lib, $w_i = 1$ agar i -nchi tajribada biz kutgan hodisa ro'y bersa, $w_i = 0$, agar i -nchi tajribada biz kutgan hodisa ro'y bermasa. U holda n ta tajribada biz kutgan hodisalarini ro'y berishlar soni $\mu = \mu(w) = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ bo'ladi.

2-misol. Yashikda M ta ok $N - M$ ta kora shar bor. Qayta ko'ymaslik sharti bilan $n(n \leq N)$ ta shar olingan bo'lsin. Agar ok sharlar 1 dan M gacha nomerlangan bo'lsa, Ω elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, ko'rinishdagi elementlardan tuzilgan bo'ladi.

Bu holda chikkan ok sharlar soni ξ tasodifiy miqdor bo'lib, $\xi = \zeta(w) = m, i_m \leq M < i_{m+1}, 1 \leq m \leq M$, bo'ladi.

Agar $q(x_1, x_2, \dots, x_r)$ -sonli funksiya bo'lib, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $\eta = \eta(w) = q(\xi_1(w), \xi_2(w), \dots, \xi_r(w))$ murakkab funksiya ham tasodifiy miqdor bo'ladi.

Ta'rif: $A, A \in A$ hodisaning indeqatori deb, $J_A = J_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A. \\ 0, & w \in A; \end{cases}$ tasodifiy miqdorga aytiladi.

Indeqator quyidagi xossalarni kanoatlantiradi.

$$J_{\emptyset} = 0, J_{\Omega} = 1, J_{AB} = J_A \cdot J_B, J_A = 1 - J_{\bar{A}} \quad (1)$$

Agar A_1, A_2, \dots, A_n lar juft-jufti bilan bog'liqsiz bo'lsa, u holda $J_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n J_{A_k}$

Xususan, $J_{A_1+A_2} = J_{A_1} + J_{A_2}$

Agar A_1, A_2, \dots, A_n lar ixtiyoriy bo'lsa, u holda (1) ni hisobga olgan holda $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_K \bar{A}_k$,

$$J_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = 1 - J_{\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k} = 1 - \prod_{k=1}^n J_{\bar{A}_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - J_{A_k}),$$

ligidan $J_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \sum_{k=1}^n J_{A_k} - \sum_{1 \leq k < i \leq n} J_{A_k A_i} + \dots + \sum_{1 \leq k < i < m \leq m} J_{A_k A_i A_m} - \dots + (-1)^{n-1} J_{A_1 \dots A_n}$ (2) hosil bo'ladi.

ξ tasodifiy miqdorni indeqator bilan ifodalash mumkin. Agar $A_1 + \dots + A_n = \Omega$ bo'linish berilgan bo'lsa, $\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^k x_i J_{A_i}(\omega)$ (3) bo'ladi. (bu erda x_i -lar ξ ning kabul kiladigan qiymatlari).

$P(\xi \in B)$ ehtimollikni B ni sonli funksiyasi sifatida ξ ni taqsimot qonuni deb yuritiladi. Agar $P\{\xi = x_i\} = P_i$ bo'lsa, u holda bu taqsimot qonunni quyidagi 2-jadval orkali ifodalash mumkin:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
P	P_1	P_2	P_3		P_k

2-jadval.

bu erda $\sum_{i=1}^k P_i = 1$, x_1, x_2, \dots, x_k lar ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari bo'ladi va

$$P(\xi \in B) = \sum_{x_i \in B} P_i \quad (4)$$

A hodisaning indeqatori J_A ning taqsimot qonuni quyidagi jadvalda keltirilgan:

ξ	0	1
P	$1 - P(A)$	$P(A)$

3-jadval.

3-misol. Bernulli sxemasida n ta bog'liqsiz tajribada A hodisani μ marta ro'y berish taqsimot qonuni $P(\mu = m) = C_n^m P^m (1 - P)^{n-m}$, $m = 0, 1, \dots, n$ bo'ladi. Bunday taqsimotga binomial taqsimot qonun deyiladi.

4-misol. Yashikda M ta ok $N - M$ ta kora shar bo'lgan holda, kayta ko'yimaslik sharti bilan, n - ta shar olganda ulardan ξ tasini ok chikish taqsimot qonuni

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \dots, \min(n, M)$$

bo'ladi. Bu taqsimot qonuniga gipergeometrik taqsimot qonuni deyiladi.

5-misol. $P(\xi = m) = \frac{1}{N}$, $m = 1, 2, \dots, N$ ga tekis taksimlangan taqsimot qonun deyiladi.

6-misol. $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda > 0$ ga λ - parametrli Puasson qonuni bo'yicha taksimlangan taqsimot qonun deyiladi.

2. Matematik kutilma. Agar $P(\omega)$ chekli (Ω, A, P) ehtimollar fazosidan olingan bo'lib, $\sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = M\xi$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $M\xi$ ga ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deyiladi. Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1) $MJ_A = P(A)$

Hakikatan ham, $MJ_A = \sum_{\omega \in \Omega} J_A(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A)$

2) Additivlik $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, chunki

$$M(\xi + \eta) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega) + \eta(\omega)) P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) P(\omega) = M\xi + M\eta$$

Matematik induksiya usulini ko'llab, $M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = M\xi + \dots + M\xi_n$ ligini ko'rsatish mumkin.

3) Ixtiyoriy S o'zgarmas son uchun $MC\xi = CM\xi$, $MC = C$

4) Agar $\xi \geq \eta$ bo'lsa, $M\xi \geq M\eta$ va $\xi \geq 0$ va $M\xi = 0$ bo'lsa, $P(\xi = 0) = 1$ bo'ladi.

Isbot $M(\xi - \eta) = \sum_{\omega} (\xi(\omega) - \eta(\omega))P(\omega)$ va $\xi \geq \eta$ ligidan $M(\xi - \eta) \geq 0$ oxirgi tengsizlik va 2),3) xossalardan $M\xi \geq M\eta$ kelib chiqadi.

Agar $\xi \geq 0$ va $M\xi = 0$ bo'lsa, u holda $\omega \in \Omega$ $\xi(\omega)P(\omega) = 0$, $P(\omega) > 0 \Rightarrow \xi(\omega) = 0$

5) $M\xi = \sum_{i=1}^k x_i P(\xi = x_i)$

Hakikatan ham, $\xi = \sum_{i=1}^k x_i J_{\xi=x_i}$ ligidan va 1), 2), 3) lardan $M\xi = \sum_{i=1}^k x_i M J_{\xi=x_i} = \sum_{i=1}^k x_i P(\xi = x_i)$

7-misol. Binomial qonun bilan taksimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. ξ orkali A hodisaning n ta o'zaro bog'liqmas tajribalarda ro'y berish sonini belgilasak, $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ tenglik o'rinli ekani bizga ma'lum. Matematik kutilma ta'rifiga ko'ra

$$M\xi = \sum_{k=1}^n k P(\xi = k) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$$

8-misol. λ -parametrlı Puasson qonuni bo'yicha taksimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Ma'lumki $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Ta'rifga ko'ra $M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} = \lambda$

Demak, parametrlı Puasson qonuni bo'yicha taksimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi λ parametrga teng ekan.

3. Dispersiya. Agar $q(x)$ sonli funksiya bo'lsa, u xolda, x o'rinli ξ ni qo'ysak $\eta = q(\xi)$ tasodifiy miqdor (tasodifiy funksiya) xosil bo'ladi, u holda matematik kutilma ta'rifiga ko'ra

$M\eta = Mq(\xi) = \sum_{i=1}^k q(x_i) P(\xi = x_i)$ bo'ladi. Xususan $q(\xi) = \xi^n$ bo'lsa

$$M\xi^n = \sum_{i=1}^k x_i^n P(\xi = x_i)$$

Bu miqdorga ξ tasodifiy miqdorning n-nchi momenti, $M|\xi|^n$ ga esa n-nchi absolyut moment, $M(\xi - n\xi)^n$ ga n-nchi markaiziy moment, $M|\xi - M\xi|^n$ ga n-nchi absolyut markaziy moment deyiladi.

Ikkinchi tartibli markaziy momentga ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi deyiladi va $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ kabi belgilanadi, $\sqrt{D\xi}$ ga esa o'rta kvadratik og'ish deyiladi.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

1) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

Xaqiqatdan ham

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2M\xi \cdot \xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

2) $D\xi \geq 0$ va $D\xi = 0$ bo'lishi uchun shunday $C \in \Omega$ bo'ladiki $P(\xi = C) = 1$ bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu tasdiqni isboti matematik kutilma xossasidan kelib chiqadi:

3) Ixtiyoriy C uchun $D(c\xi) = C^2 D\xi$, $D(\xi + C) = D\xi$ o'rinlidir.

9-misol. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Ma'lumki $M\xi = np$, demak

$$D\xi = \sum_k k^2 C_n^k P^k q^{n-k} - (np)^2 = np \left[(n-1)P \sum_k C_{n-2}^{n-2} P^{k-2} q^{n-x} + \sum_k C_{n-1}^{k-1} P^{k-1} q^{n-k} \right] - (np)^2 = np((n-1)p + 1) - (np)^2 = npq$$

10-misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Ma'lumki $M\xi = \lambda$

Ta'rifga ko'ra

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \right] - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Quyidagi tengsizliklarni isbotsiz keltiramiz:

Iensen tengsizligi $Mq(\xi) \geq q(M\xi)$

Lyapunov tengsizligi. $(M|\xi|^\alpha)^\frac{1}{\alpha} \leq (M|\xi|^\beta)^\frac{1}{\beta}, \quad \alpha < \beta$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. $|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}$

4. Ko'p o'lchovli taqsimot qonuni. (Ω, \mathcal{A}, P) chekli ehtimollar fazosida $\xi = \xi(\omega), \eta = \eta(\omega)$ aniqlangan bo'lib, ξ ning qiymatlari x_1, x_2, \dots, x_n ; η ning qiymatlari y_1, y_2, \dots, y_m bo'lsin. Agar $P_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$ deb belgilangan, u holda ξ va η larning birgalikdagi extimolligi 4-jadvalda

keltirilgan, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} = 1$, bunday jadvalga ikki o'lchovli taqsimot ikki qonun deyiladi. Bunday juftlikga esa o'lchovli m ta tasodifiy miqdor deyiladi. Ikki o'lchovli taqsimot qonundan bir o'lchovli taqsimot qonun

$\xi \setminus \eta$	y_1	y_2	y_m
x_1	P_{11}	P_{12}		P_{1m}
x_2	P_{21}	P_{22}		P_{2m}
:	-	-	-	-
x_n	P_{n1}	P_{n2}		P_{nm}

4-jadval.

kelib chiqadi: $P(\xi = x_i) = P_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}, \quad P(\eta = y_j) = P_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}$

Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsa, u holda n o'lchovli tasodifiy miqdor taqsimot qonuni $P(\xi_i = x_{ij_k}, i = 1, 2, \dots, n) = P_{j_1, j_2, \dots, j_n}; 1 \leq j_k \leq k_i$ bo'ladi,

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} P_{j_1, j_2, \dots, j_n} = 1, \quad x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{k_i}}$$

Bir o'lchovli tasodifiy miqdorni taqsimot qonunini olish uchun quyidagicha yo'l tutamiz:

$P(\xi_1 = x_{1j}) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} P_{j_1, j_2, \dots, j_n}$, ikki o'lchovlini olish uchun esa

$$P(\xi_1 = x_{1j}, \xi_2 = x_{2j}) = \sum_{j_3, j_4, \dots, j_n} P_{j_1, j_2, \dots, j_n} \text{ va hokazo.}$$

22-MA'RUZA. BOG'LIQSIZ HODISA VA BOG'LIQSIZ TAJRIBA REJA.

1. Bog'liqsiz hodisa.
2. Bog'liqsiz bo'linish, algebra va σ - algebra.
3. Bog'liqsiz tajriba. Bernulli sxemasi.

1. Bog'liqsiz hodisa. Bog'liqsiz tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Agar $P(B) > 0$ bajarilsa, u holda, $P(A/B)$ mavjud bo'ladi. Agar $P(A \setminus B) = P(A)$ bajarilsa, u holda A hodisasi B hodisaga bog'liq emas⁴⁰ deyiladi.

Agar $P(A) > 0$ bo'lsa, $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A/B)}{P(A)} = P(B)$, ya'ni A ning

bog'liqsizligidan B ning A ga bog'liqsizligi kelib chiqadi.

Ehtimollikning ko'paytirish formulasiga ko'ra A va B hodisalarning bog'liqsizligidan $P(AB) = P(A)P(B)$.

Agar oxirgi ifoda bajarilsa, u holda, A va B hodisa bog'liq deyiladi. Bog'liksiz holat ehtimollik modelini ozgina o'zgartirilsa, bog'liqlikga aylantishi mumkin.

1-misol. 52 tali kartadan tasodifan bitta karta olinadi, A xodisasi tuz chikishi, B g'isht chikishi bo'lsa, $A \cdot B$ g'isht tuz bo'ladi va

$$P(A) = \frac{4}{52}, \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

ya'ni A va B hodisalari bog'liqsiz.

Agar 52 kartaga bitta djoker karta ko'shilsa, u holda

$$P(A) = \frac{4}{53}, \quad P(B) = \frac{13}{53}, \quad P(A \cdot B) = \frac{1}{53} \neq P(A) \cdot P(B)$$

ya'ni A va B hodisalar o'zaro bog'liqdir.

Agar ixtiyoriy $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m, 2 \leq m < n$ uchun $P(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_m})$

bajarilsa A_1, A_2, \dots, A_n lar bog'liqsiz⁴¹ deyiladi, aks holda o'zaro bog'liq deyiladi.

Agar A_1, A_2, \dots, A_n bog'liqsiz bo'lsa, uni ixtiyoriy to'plam ostisi $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ ham bog'liqsiz bo'ladi.

A_1, A_2, \dots, A_n ni bog'liqsizligi A_1, A_2, \dots, A_n larni jufti-jufti bilan bog'liqsizligidan kuchlirokdir.

2-misol. 2,3,5,30 sonlaridan biri $\frac{1}{4}$ ehtimolliги bilan olinadi. A_k hodisa olingan son k ga

bo'linadi. A_2, A_3, A_5 lar juft-jufti bilan bog'liqsiz va $P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{2}$,

$P(A_2 A_3) = P(A_2 A_5) = P(A_3 A_5) = \frac{1}{4}$ va $P(A_2 A_3 A_5) = \frac{1}{4}$, demak A_2, A_3, A_5 lar umuman uchlik

sifatida bog'liq.

Quyidagi teorema o'rinlidir:

1-Teorema. Agar A_1, A_2, \dots, A_n bog'liqsiz va $i_1, i_2, \dots, i_2, j_1, j_2, \dots, j_5$ turlicha bo'lib,

$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}) > 0$ bo'lsa, $P(A_{i_1} \dots A_{j_5} / A_{i_1} \dots A_{i_2}) = P(A_{j_1} \dots A_{j_5})$

Isbot. A_1, A_2, \dots, A_n larni bog'liqsizligidan $P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_2})$,

$P(A_{j_1} \dots A_{j_5}) = P(A_{j_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_5})$ va $P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r} A_{j_1} \dots A_{j_5}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_5})$

Bundan $P(A_{i_1} \dots A_{i_2} \cap A_{j_1} \dots A_{j_5}) = P(A_{i_1} \dots A_{i_2}) \cdot P(A_{j_1} \dots A_{j_5})$

Oxirgi ifodadan teorema isboti kelib chiqadi.

2. Bog'liqsiz bo'linish, algebra va σ -algebra.

1-Ta'rif: α -to'plamlar sistemasi bo'lsin. α ni o'z ichiga olgan $A(\alpha)$ to'plamdagi eng kichik algebra α sistemasi yuzaga keltirgan algebra⁴² deyiladi.

Xuddi shunday α sistemasi yuzaga keltirgan σ -algebra aniklanadi.

Agar α to'plamlar sistemasi o'rniga A_1, A_2, \dots, A_n bo'linishni olsak va $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $i \neq j$ bo'lsa, u holda, α sistemasi yuzaga keltirgan A (α)algebra cheklidir, bular bo'sh to'plam va $A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_m}$ lardan iborat.

2- Teorema. Har kandy chekli to'plam algebrasi kandydir bo'linishni yuzaga keltiradi.

Isbot. B chekli algabri, B_ω lar shunday B larni $B \in \beta$, $\omega \in B$. Har kandy $\omega \in \Omega$ uchun $B_\omega = \bigcap_{B \in B_\omega} B$.

Ixtiyoriy $\omega \in \Omega$ va $B \subset \beta$ uchun quyidagi xossa o'rinli.

Agar $\omega \in B$ bo'lsa, $B_\omega \subseteq B$. Agar $\omega \in B_\omega$, u holda $B_\omega \subseteq B_\omega$.

Agar $\omega' \in B_\omega$ u holda $B_{\omega'} \subseteq B_\omega$ va $B_{\omega'} = B_\omega, \omega' \in B_\omega$ hol bajarilmaydi, chunki $B_{\omega'} \subseteq \bar{B}_\omega$ ga

karama-karshidir. B_ω lar ichidan B_1, B_2, \dots, B_r turli to'plam-larni ajratamiz.

Bular $B_1 + \dots + B_r = \Omega$ va $B_i \cdot B_j = \emptyset$ bo'linishni yuzaga keltiradi $i \neq j$. Ixtiyoriy $B \in \beta$ $B = \bigcup_{\omega \in B} B_\omega$ bo'lgani uchun bu bo'linish algebrani hosil qiladi.

3-misol. $A_1 + \bar{A} = \Omega$ bo'linish $\beta = \{\Omega, A, \bar{A}\}$ algebrani yuzaga keltiradi.

4-misol. $A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$ bo'linish $\beta = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_3, A_1 + A_2, A_1 + A_3, A_2 + A_3\}$ algebrani hosil qiladi.

2-Ta'rif: Agar ixtiyoriy $i_k, 1 \leq i_k \leq r_k, k = 1, \dots, n$ uchun

$P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_n})$ bajarilsa, $\alpha_k : A_{k_1} + A_{k_2} + \dots + A_{k_r} = \Omega$ bo'linish bog'liqsiz⁴³ deyiladi.

3-Ta'rif: $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ bajarilsa, A_1, A_2, \dots, A_n algebralar (σ - algebra) bog'liqsiz deyiladi.

3-Teorema. A_1, A_2, \dots, A_n algebralar bog'liqsiz bo'lishi uchun ularni yuzaga keltiruvchi $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bo'linish bog'liqsiz bo'lishi zarur va etarli.

Bu teoremani isbotlash uchun quyidagi lemmani isbotlaymiz:

Lemma. Agar A va B bog'liqsiz bo'lsa, u holda \bar{A} va B bog'liqsiz, agar A_1 va B bog'liqsiz bo'lsa, A_2 va B bog'liqsiz bo'lib, $A_1 A_2 = \emptyset$ bo'lsa, $A_1 + A_2$ va B bog'liqsiz bo'ladi.

Isbot. A va \bar{A} larni bog'liqsizligidan

$$P(B\bar{A}) = P(B/AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A}),$$

ya'ni B va \bar{A} bog'liqsiz. A_1 va B larning bog'liqsizligidan $P(A_1 B) = P(A_1)P(B)$ va

$$P((A_1 + A_2)B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) = P(A_1)P(B) + P(A_2) \cdot P(B) = (P(A_1) + P(A_2))P(B) =$$

$$= P(A_1 + A_2) \cdot P(B) \text{ demak, } A_1 + A_2 \text{ va } B \text{ bog'liqsiz.}$$

3-teoremaning isboti. α_i bo'linish yuzaga keltirgan A_i larning bog'liqsizligidan α_i lar bog'liqsizligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $A \in \mathcal{A}$ juft-jufti bilan bog'liqsiz α_i dagi hodisalardan iborat bo'lgani uchun, lemmadan teoremaning etarli kismining isboti ham kelib chiqadi.

3. Bog'liqsiz tajriba. Tajriba bu ehtimollar fazosining berilishini bildiradi. n ta tajriba o'tkazilsa, ehtimollar fazosi berilgan bo'ladi. Biror tajriba natijasida ro'y bergan hodisa, ehtimoli ikkinchi tajribada shu hodisani ro'y berish ehtimoliga bog'liq bo'lmasa bunday tajribaga bog'liqsiz tajriba deyiladi. Agar n ta tajribalar ketma-ketligi bog'liqsiz bo'lsa A_1, A_2, \dots, A_n σ -algebralar bog'liqsizdir.

Biz xususi holda tajriba natijasida A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligini kuzatamiz.

n ta bog'liqsiz tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishi ehtimoli P va ro'y bermaslik ehtimoli $q = 1 - p$ bo'lsin.

n ta tajriba o'tkazilganda kuzatilayotgan A hodisaning m marta ro'y berib, $n - m$ ro'y bermaslik imkoniyatlarining soni C_n^m ga teng ekanini ko'rish kiyin emas.

n ta ketma-ket o'tkazilgan tajribani bitta murakkab tajriba desak, bu murakkab tajriba natijasida ro'y beradigan hodisaning ko'rinishi A_1, A_2, \dots, A_n bo'lib, $A_i (i = \overline{1, n})$ A ga yoki \bar{A} ga teng bo'ladi. Bunday hodisalar soni 2^n ga teng. Hakikatan ham, A_1, A_2, \dots, A_n hodisalar ichida:

1) $A_i = A (i = \overline{1, n})$ shartni kanoatlantiruvchi hodisalar bitta

Bittasi \bar{A} , kolganlari A dan iborat bo'lgan hodisalar n ta, chunki \bar{A} ni n ta o'rniga bir martadan ko'yish bilan n ta turli hodisa hosil qilish mumkin;

$(n - m + 1)n - m$ tasi \bar{A} , kolganlari A dan iborat bo'lgan hodisalar soni n ta o'rniga $n - m$ ta \bar{A} larni joylashtirishlar soni $C_n^{n-m} = C_n^m$ ga teng va hokazo.

Demak, biz ko'rayotgan murakkab tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

ga teng ekan. Agar n ta tajriba kuzatilgan A hodisaning m marta ro'y berish hodisasini B desak,

$$B = (A \cdot A \cdot \dots \cdot A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}) \cup (A \cdot \bar{A} \cdot A \cdot \dots \cdot A \cdot \bar{A}) \cup \dots \cup (\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A) \quad (1)$$

bo'lib, u C_n^m ko'shiluvchidan iborat bo'ladi. Tajribalar ketma-ketligi bir-biriga boqq'lik bo'lmagani

$$\text{uchun } P\left(\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_m \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \dots \cdot \bar{A}}_{n-m}\right) = P(A) \cdot P(A) \cdot \dots \cdot P(A) \cdot P(\bar{A}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}) = P^m q^{n-m}$$

bo'ladi. (1) tenglikning o'ng tomonidagi C_n^m ta hodisaning ikkitasi bir vaktida ro'y bermasligidan

$P_n(B) = C_n^m P^m q^{n-m}$ kelib chiqadi. Agar A hodisaning n ta tajribada m marta ro'y berish ehtimolini

$P_n(m)$ deb belgilasak, $P_n(m) = C_n^m P^m q^{n-m}$ (2) hosil bo'ladi. (2) ni Bernulli formulasi deyiladi.

$P_n(m)$ ehtimollar uchun $\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1$ o'rinli bo'lishini ko'rish kiyin emas. Hakikatan ham,

$$\sum_{m=0}^n C_n^m P^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1 \quad (2) \text{ ifoda } (px + q)^n \text{ bilan yoyilmasining } x^m \text{ katnashgan hadining}$$

koeffitsenti bo'lgani uchun $P_n(m)$ larni ehtimolning binomial taqsimot qonuni deyiladi.

Fiksirlangan n ta $P_n(m)$ ehtimol m ning funksiyasi ekani ravshan. Bu funktsiyani tekshiraylik.

Quyidagi nisbatni ko'ramiz:

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} \quad (3)$$

a) Agar $(n-m)p > (m+1)q$, ya'ni $np - q > m$ bo'lsa, (3) tenglikdan $P_n(m+1) > P_n(m)$ Natijaga ega bo'ladi.

Yukoridagi tekshirishlardan ko'rinadiki, $P_n(m)$ ehtimol m ning o'sishi bilan, avval o'sib borib, eng katta qiymatiga erishib, m ning keyingi o'sishlaridan esa kamayuvchi funktsiya bo'lar ekan.

Bundan tashkari, agar $np - q$ butun son bo'lsa, $P_n(m)$ ehtimol m ning ikkita $m_0 = np - q$ va $m_0' = np - q + 1$ eng katta qiymatga erishish-ligini ko'ramiz

Agar karalayotgan hodisaning eng katta ehtimoli yuz berishlar sonini μ desak, $np - q$ son butun bo'lmaganda, ushbu $np - q < \mu < np + p$ tengsizliklar hosil bo'ladi. Ular n ta tajribada A hodisaning engkatta ehtimoli yuz berish soni yotadigan chegarani ko'rsatadi.

Yukoridagi tengsizliklardan μ ning anik bitta butun songa teng bo'lishini ko'rish kiyin emas: $\mu = [np - q] + 1$,

Agar $np - q < 0$ bo'lsa, $P_n(0) > P_n(1) > \dots > P_n(n)$

va $np - q = 0$ bo'lganda $P_n(0) = P_n(1) > \dots > P_n(n)$ bo'lishini ko'rish kiyin emas.

3- misol. $n = 8, m = 3, p = q = \frac{1}{2}$ U holda $P_n(m) = P_8(3) = C_8^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$,

$$\mu = [np - q] = \left[8 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = [3,6] = 3 \quad P_8(4) = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8^8}{1 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{35}{128}$$

BERNULLI SXEMASI UCHUN LOKAL LIMIT TEOREMA

REJA:

1. Binomial taksimot.
2. Puasson taksimot.
3. Muavr – Laplasning lokal teoremasi.

Binomial taksimot. n ta bog'liqsiz tajribada A hodisaning P ehtimollik bilan ro'y berishlar soni μ $P(\mu = m) = C_n^m P^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $q = 1 - p$ (1) ga tengligi ma'lum. Agar n va m lar etarlicha katta bo'lsa, (1) formuladan foydalanish kiyin bo'ladi, hatto EHM ni ko'llab hisoblagan takdir ham $P^m q^{n-m}$ kichik onni EHM ga joylashtirishda kiyinchik tug'diradi, buning uchun $P(m_1 \leq \mu \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m P^m q^{n-m}$ ehtimollikni hisoblash yana ham kiyin bo'ladi.

1-Misol. "Coca-sola" ko'shma korxonasida ishlab chikilgan ichimlik har bir shishasining ishga yaroksizligi ehtimolliqi $P = 0,0005$ ga teng bo'lgan holda, 10000 shisha soca-sola dan 5 tasining ichishga yaroksiz chikish ehtimolligini toping.

Yechish. $P = 0,0005, n = 10000, m = 5, q = 0,9995, P_{10000}(5) = C_{10000}^5 (0,0005)^5 (0,9995)^{9995}$.

Buni hisoblash katta kiyinchilikga olib keladi.

1. Puason teoremasi.

1-Teorema. (Puasson teoremasi). Agar $p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ da $np \rightarrow a$, bo'lsa, u holda ixtiyoriy tayinlangan $m = 0, 1, 2, \dots$, uchun $P(\mu = m) = C_n^m P^m q^{n-m} \rightarrow \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ bo'ladi.

Isbot. Bernulli formulasidan $P(\mu = m) = \frac{(np)^m}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) (1-p)^{n-m}$ (2)

$n \rightarrow \infty, np \rightarrow a$ da $(1-p)^n \rightarrow e^{-a}$

Ikkinchi tomondan $\left| P(\mu = m) - \frac{a^m}{m!} e^{-a} \right| \leq \frac{a^2}{n}$ (3)

Bu tengsizlik va (2) ifodadan teoremaning isboti kelib chikadi.

Bernulli sxemasida har bir bog'liqsiz tajribada A hodisa ro'y berishi ehtimolliqi turlicha P_i ro'y bermaslik ehtimolliqi $q_i = 1 - p_i$ bo'lgan holda A hodisaning n ta bog'liqsiz tajribada μ marta ro'y berish ehtimolliqi $p(\mu = m) = P_n(m, P_1, P_2, \dots, P_n)$ ni hisoblaymiz, bu sxema uasson sxemasi deyiladi.

Xususan $P(\mu = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$, $P(\mu = 1) = p_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_n + q_1 p_2 q_3 \cdot \dots \cdot q_n + \dots + q_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_{n-1} p_n$,
 $P(\mu = n) = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n$

2-Teorema. Bernulli sxemasida $\sigma = \sqrt{npq} \rightarrow \infty$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy

$$C > 0 \text{ da } |x| = \left| \frac{m - np}{\sigma} \right| \leq C \text{ uchun } P\left(\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(1))$$

tekis bajariladi, m manfiy bo'lmagan butun son.

Isbot. $m = np + x\sigma$ hisobga olib, $P(\mu = m) = P\left(\frac{\mu - np}{\sigma} = x\right) = \frac{n!}{m!(n-m)!} P^m q^{n-m}$

ifodani logarifmlaymiz.

$$\ln p(\mu = m) = \ln n! - \ln m! - \ln(n-m) + m \ln p + (n-m) \ln q$$

Ushbu $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{-\theta_n}$, $\theta_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ Stirling formulasini $\ln n! = n \ln n + \ln \sqrt{2\pi n} - n + \theta_n$

ko'rinishda yozamiz.

Teorema shartiga ko'ra, $m = np\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) \rightarrow \infty$, $k = n - m = nq\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) \rightarrow \infty$ shuning uchun $\ln n!$, $\ln m!$, $\ln k!$ larni hisoblashda Stirling formulasidan foydalanamiz. U holda

$$\ln p(\mu = m) = n \ln n - m \ln m - k \ln k + \ln p + k \ln q + \frac{1}{2} \ln \frac{n}{2\pi mk} + \theta_n - \theta_m - \theta_k \quad (2)$$

Ikkinchi tomondan

$$\begin{aligned} \ln \frac{n}{mk} &= \ln \frac{1}{npq} - \ln\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) - \ln\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) = 2 \ln \frac{1}{\sigma} + o\left(\frac{1}{\sigma}\right), \quad \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right)} = \\ &= o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \frac{1}{k} = o\left(\frac{1}{\sigma^2}\right), \quad \ln(1 + \varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

U holda, (2) dan $\ln p(\mu = m) = -m \ln \frac{m}{np} - k \ln \frac{k}{nq} + \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sigma}\right)$

Bundan

$$\begin{aligned} \ln p(\mu = m) &= -(np + x\sigma) \ln\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) - (nq - x\sigma) \ln\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) + \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + o\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \\ &- (np - x\sigma) \left(\frac{xq}{\sigma} - \frac{x^2 q^2}{2\sigma^2} + o\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right) - (nq - x\sigma) \left(-\frac{xp}{\sigma} - \frac{x^2 p^2}{2\sigma^2} + o\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right) + o\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Teoremaning isboti oxirgi tenglikdan kelib chikadi.

Ilovada $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Funksiyaning x argument musbat kiyamatlariga mos tuzilgan 1-jadval mavjud, $\varphi(x)$ funksining juftligidan bu jadvaldan argumentning manfiy kiyamatlari uchun ham foydalaniladi.

1-misolni Puasson teoremasi yordamida hisoblaymiz:

$$a = np = 10000 \cdot 0,0005 = 5, \quad P(\mu = 5) \sim \frac{5^5}{5!} e^{-5}$$

Ilovadagi 3-jadvaldan $P(\mu = 5) \approx 0,1755$.

2-misol. Tadbirkor ishlab chikkan mahsulotining yukori nav chikishi ehtimolligi 0,2 ga teng bo'lgan holda, 400 ta mahsulotdan 80 tasining yukori navli chikish hodisasi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $n = 400$, $m = 80$, $p = 0,2$, $q = 0,8$

U holda $P_{400}(80) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{8}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = 0$

Ilovadagi 1- jadvaldan $\varphi(0) = 0,3989$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$P_{400}(80) \approx \frac{0,3989}{8} = 0,04986$$

Asl qiymati esa 0,049813272.

ADABIYOTLAR

1. N.P.Antonov va boshqalar, Elementa, matematikadan masalalar tuplami.
2. P.E.Danko, A.G.Popov, Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax, 4.1-3.
3. N.X.Abdullaev va boshqalar. Modelirovaniye biologicheskix protsessov. T- 1979g.
4. B.A.Abdalimov, Oliy matematika. T-1994 yil
5. T.Jo'rayev va boshqalar. Oliy matematika asoslari, 1-I k., T-1999Y
6. Yo.Soatov. Oliy matematika. MP k.. T-1992 y.
7. V.E.Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.
8. V.E.Gmurman. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masala yechish.
9. S.X.Sirojiddinov, M.Mamatov Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari.
10. T.A.Sarimsaqov. H.O'.F.N.
11. Sh.Maqsudov va b. K.O'.F.N.
12. V.P.Minorskiy. Oliy matematikadan masalalar to'plami.
13. Ma'ruzalar matni.
14. Mustaqil yechiladigan misollar to'plami.

MUNDARIJA

1. So'z boshi.....	3
2. 12-Ma'ruza: Funksiyaning limiti.....	4
3. 13-Ma'ruza: Funksiyaning uzluksizligi.....	8
4. 14-Ma'ruza: Hosila.....	19
5. 15-Ma'ruza: Aniqmas integral.....	29
7. 16-Ma'ruza: Aniq integral.....	44
8. 17-Ma'ruza: Defferensial tenglamalar.....	52
9. 18-Ma'ruza: O'zgaruvchisi ajraladigan differensial tenglamalar.....	54
10. 19-Ma'ruza: Bir jinsli differensial tenglamalar va ularga keltiriladigan tenglamalar.....	56
11. 20-Ma'ruza: Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalari.....	61
12. 21-22-Ma'ruza: Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari hamda sonli xarakteristikalari.....	69
13. 23-Ma'ruza: Bog'liqsiz hodisa va bog'liqsiz tajribalar. Bernulli sxemasi. Muavr-Laplasning local va integral teoremlari.....	74
14. ADABIYOTLAR.....	81