УДК 517. 91/943

О построении формального решения системы дифференциальных уравнений с отклонением аргумента.

Алишев А. Алишев Ш.А.
Джизакское пединститут.

Предметом исследование в настоящий работа является системы уравнений вида

$$\varepsilon^p \frac{d^r x}{dt^r} = A(\tau,\varepsilon)x + B(\tau,\varepsilon)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + \varepsilon^2 f(\tau,x,\varepsilon), \qquad (1)$$

где $x(t,\varepsilon)$, $f(\tau,x,\varepsilon) - n -$мерных векторы, из них $x(t,\varepsilon)$ искомый, $0 \le \tau = \varepsilon t \le L$медленные время, $\varepsilon > 0$-малым параметр, $p,r \ge 1$-натуральное числи, $\Delta(\tau) > 0$, a квадратные матрицы порядка n, $A(\tau,\varepsilon)$, $B(\tau,\varepsilon)$-допускают формальные разложения вида

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad B(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(\tau), \qquad (2)$$

вектор $f(\tau,x,\varepsilon)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точке (τ,x_0,ε).

Для линейных системы уравнений без запаздыванием не критическое случае рассматривал в работе [1].

В данное работе отличие от работе [1] рассматривается так называемый критический случае [2] с применим обобщенной обратная матрица.

Здесь для системы вида (1) строим формальные частных решения. При этом под частным решением системы (1) будем понимать решение, соответствующее определенному корню уравнения

$$\det\left\|\widetilde{A}_0(\tau) - \lambda E\right\| = 0 \qquad (3)$$

где $\widetilde{A}_0(\tau) = A_0(\tau) + B_0(\tau)$, E-единичная матрица.

Теорема 1. Если матрицы $A_s(\tau), B_s(\tau)$ $(s = 0,1,...)$ и скалярная функция $\Delta(\tau)$ при τ на сегмента $[0,L]$, а вектор $f(\tau,x,\varepsilon)$ в области $P(\tau,x,\varepsilon) = P(\tau,x) \times (0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$, где $P(\tau,x)$-некоторая область пространства переменных τ, x, принадлежать к классу c^k (для достаточно большие значений k) и, для $\forall \tau \in [0,L]$ $\Delta(\tau) b_{n1}^{(0)}(\tau) \ne 0$, $(b_{n1}^{(0)}(\tau)$-элементы матрица $B_0(\tau)$, то система (1) имеет формальное частные решение соответствующее нулевого корню уравнения (3)

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_s(\tau) \qquad (4)$$

где $u(\tau,\varepsilon) - n -$мерных неизвестные вектор.

Доказательство. Для доказательство утверждения теоремы надо определить коэффициентами ряда (4) таким образом, чтобы вектор $u(\tau,\varepsilon)$ формально удовлетворял системы (1). Подставляя равенства (4) в систему (1) получим

$$\varepsilon^{p+r}u^{(r)}(\tau,\varepsilon)=A(\tau,\varepsilon)u(\tau,\varepsilon)+B(\tau,\varepsilon)u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)+\varepsilon^2 f(\tau,u,\varepsilon) \qquad (5)$$

Разложим в формальные ряда по степеням малого параметра ε вектор $u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)$:

$$u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{q=0}^{s}\frac{(-\Delta(\tau))^{s-q}}{(s-q)!}\frac{d^{s-q}u_q(\tau)}{d\tau^{s-q}} \qquad (6)$$

Для определения неизвестный элементом ряда (4) подставляем выражения (6) в (5) и прировняем затем коэффициентами при одинаковым степенях параметра ε.

Итак при ε^0 имеем

$$\tilde{A}_0(\tau)u_0(\tau)=0 \qquad (7)$$

Из этого равенства согласно [3], находим

$$u_0(\tau)=\varphi c_0(\tau) \qquad (8)$$

где $c_0(\tau)$-произвольные, отличные от нуля $\forall\tau\in[0,L]$ функция, которые определяем на следующем шаге, φ,n-мерные вектор первое компоненты равны 1, а остальные-нуля является собственные значение матрица $\tilde{A}_0(\tau)$, $\varphi\in N(\tilde{A}_0(\tau))$.

Приравнивая при ε^1, получаем

$$\tilde{A}_0(\tau)u_1(\tau)=\tilde{B}_0(\tau)u_0(\tau)-\Delta(\tau)B_0(\tau)\frac{du_0}{d\tau} \qquad (9)$$

уравнение (9) с учетом (8) имеет вид

$$\tilde{A}_0(\tau)u_1(\tau)=-(\tilde{B}_0(\tau)\varphi c_0(\tau)+\Delta(\tau)B_0(\tau)\frac{du_0}{d\tau}),\ \text{где}\ \tilde{B}_0(\tau)=A_1(\tau)+B_1(\tau). \qquad (10)$$

Для разрешимости уравнения (10) необходимо и достаточна выполнения условия разрешимости вида

$$(\psi,(\tilde{B}_0(\tau)\varphi c_0(\tau)-\Delta(\tau)B_0(\tau)\frac{dc_0}{d\tau}))=0, \qquad (11)$$

где $\psi-n$--мерных вектор строка, которая последние координата равны 1, а остальные-нулю, $\psi\in N(A_0^*(\tau))$, $A_0^*(\tau)$. комплексные сопряженные матрица к матрица $A_0(\tau)$.

Равенство (11) запишем следующем образом

$$(\psi,\Delta(\tau)B_0(\tau)\varphi)\frac{dc_0}{d\tau}-(\psi,\tilde{B}_0(\tau)\varphi)c_0(\tau)=0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) запишем в координатам форме

$$\frac{dc_0(\tau)}{d\tau}+\beta_0(\tau)c_0(\tau)=0,\quad \text{где}\ \beta_0(\tau)=\frac{b_{n1}^{(0)}(\tau)}{\Delta(\tau)b_{n1}^{(0)}(\tau)}. \qquad (13)$$

Таким образом получаем линейных однородных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функции $c_0(\tau)$. Интегрируя уравнения (13) находим

$$c_0(\tau)=e^{\int f_0(\tau)d\tau} \qquad (14)$$

здесь постоянная интегрирование считаем равно единица.

Условиях разрешимости для уравнения (10) выполняется, то находим

$$u_1(\tau) = -\widetilde{A}_0^{+}(\tau)\left[\widetilde{B}_0(\tau)\varphi c_0(\tau) + \Delta(\tau)B_0(\tau)\frac{dc_0(\tau)}{d\tau}\right] + \varphi c_1(\tau), \qquad (15)$$

где $c_1(\tau)$-неизвестная функции определяется следующим шаге, а $\widetilde{A}_0^{+}(\tau)$-обобщенно-обратная матрица к матрица $\widetilde{A}_0(\tau)$ [2].

Теперь приравнивая при ε^2 в уравнения (5), и учитывая (6) имеем

$$\widetilde{A}_0(\tau)u_1(\tau) = -\left(\widetilde{B}_0(\tau)u_1(\tau) + \Delta(\tau)B_0(\tau)\frac{du_1}{d\tau}\right) + Q_0(\tau), \qquad (16)$$

где

$$Q_0(\tau) = [A_2(\tau) + B_1(\tau)]u_0(\tau) + \frac{\Delta^2(\tau)}{2!}B_0(\tau)\frac{d^2u_0}{d\tau} + \Delta(\tau)B_1(\tau)\frac{du_0}{d\tau} + f(\tau,u_0),.$$

Для уравнения (16) имея виду (15) условия разрешимости запишем

$$(\psi,(B_0(\tau)\varphi c_1(\tau)) + \Delta(\tau)B_0(\tau)\frac{dc_1(\tau)}{d\tau} - R_0(\tau)) = 0, \qquad (17)$$

где

$$R_0(\tau) = \widetilde{B}_0(\tau)\widetilde{A}_0(\tau)\left[\Delta(\tau)B_0(\tau)\varphi\frac{dc_0(\tau)}{d\tau} - \widetilde{B}_0(\tau)\varphi c_0(\tau)\right] + \Delta(\tau)B_0(\tau)\widetilde{A}_0^{+}(\tau)\times$$

$$\times\left[\Delta(\tau)B_0(\tau)\varphi\frac{dc_0(\tau)}{d\tau} - \widetilde{B}_0(\tau)\varphi c_0(\tau)\right] + Q_0(\tau).$$

Равенство (17) запишем в координатном форме

$$\frac{dc_0(\tau)}{d\tau} + \beta_0(\tau)c_1(\tau) = \alpha_0(\tau), \qquad \text{где } \alpha_0(\tau) = \frac{q_{nn}^{(0)}(\tau)}{\Delta(\tau)b_{n1}^{(0)}(\tau)}. \qquad (18)$$

Уравнения (18) являются линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка поэтому общее решение имеют вид

$$c_1(\tau) = e^{-\int\beta_0(\tau)d\tau}\left[\int\alpha_0(\tau)e^{\int\beta_0(\tau)d\tau}d\tau + \gamma_0\right] \qquad (19)$$

где постоянная интегрирования γ_0-определяется из начального условия.

Так как для уравнения (16) выполняются условия разрешимости, то определим неизвестная вектор $u_2(\tau)$.

$$u_2(\tau) = \widetilde{A}_0^{+}(\tau)\left[\widetilde{B}_0(\tau)\varphi c_1(\tau) + \Delta(\tau)B_0(\tau)\varphi\frac{dc_1(\tau)}{d\tau} + Q_0(\tau)\right] + \varphi c_2(\tau), \qquad (20)$$

где $c_2(\tau)$-как предыдущим неизвестная функция, определяются следующим шаге.

Аналогичным способом можно продолжить определение неизвестных векторов ряда (4) и далее. Следовательно, этот алгоритм позволяет определить любой элемент формального ряда (4), что и завершает доказательство теоремы.

Теперь сформулируем теорему указывающую на асимптотический характер в смысле [3] построенного решения (4).

Теорема 2. Пусть для системы дифференциальных уравнений (1) выполняются условия теоремы 1 и вектор-функции $f(\tau,x,\varepsilon)$ удовлетворяет условия Лепщица с постоянной l:

$$\|f(\tau,x,\varepsilon)-f(\tau,x_m,\varepsilon)\|\le l\|x-x_m\| \tag{21}$$

а также

$$x(t,\varepsilon)\big|_{t=0}=x_m(t,\varepsilon)\big|_{t=0},\quad \left.\frac{d^q x}{dt^q}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^q x_m}{dt^q}\right|_{t=0},\quad q=1,2,...,r-1 \tag{22}$$

где $x(t,\varepsilon)$-точное, $x_m(t,\varepsilon)-m-$приближенного решение системы (1). Тогда для произвольного $L>0$ существует постоянная $a>0$, не зависящая от ε и такое, что $\forall\tau\in[0,L],\ \varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, имеет место неравенство

$$\|x(t,\varepsilon)-x_m(t,\varepsilon)\|\le\varepsilon^m a,\quad \left\|\frac{d^q x}{dt^q}-\frac{d^q x_m}{dt^q}\right\|\le\varepsilon^m a,\quad q=1,2,...,r-1 \tag{23}$$

Литературы.

1. Кушнер В.А. Асимптотические решение некоторых систем линейных дифференциальных уравнения высший порядков. –В кн. Суммирование расходящихся рядом и дифференциальные уравнения с малым параметром. К., КГПН, 1985. С. 37-43.

2. Алишев А. Об асимптотическом представлении решений системы нелинейных дифференциальных уравнений.-Известия АН УзССР, сер. Физ-мат. наук, №2, 1981, с. 3-10.

3. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. –К.: Науково думка, 1966.-225 с.