

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ
TA'LIM VAZIRLIGI**

**A. QODIRIY NOMIDAGI JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA
INSTITUTI FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI KAFEDRASI**

Himoya qilishga ruxsat beraman:
Fizika – matematika fakulteti dekani
_____ f.m.f.n.E.Qurbonov
“ _____ ” _____ 2015 yil

**Fizika – matematika fakulteti
5110100-Matematika o'qitish metodikasi
ta'lim yo'nalishibo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun
“Tarkibida noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va
tengsizliklarni yechish” mavzusidagi**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajaruvchi: JDPI „matematika o'qitish metodikasi“
ta'lim yo'nalishi

bitiruvchisi: _____ Hasanova Z.
Ilmiy rahbar: _____ o'q. Parmonov A.

BMI “Matematikani o'qitish metodikasi” kafedrası yig'ilishi qarori bilan
(Qaror № _____ “ _____ ” _____ 2015 yil) himoyaga tavsiya etildi

Kafedra mudiri: dots. O. Abdullayev _____

Jizzax – 2015

MUNDARIJA

Kirish	3
I BOB. SONNING BUTUN VA KASR QISMI HAQIDA.....	5
1.1. Sonning butun va kasr qismi, xossalari	5
1.2. Sonning butun va kasr qismi qatnashgan funksiyalar, grafiklari..	8
1.3. Sonli funksiyalar.....	17
II BOB. TARKIBIDA NOMA'LUMNING BUTUN VA KASR QISMI QATNASHGAN TENGLAMA HAMDA TENGSIZLIKLARNI YECHISH.....	20
2.1. Noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish.....	20
2.2. Noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalar sistemasini yechish.....	31
2.3. Noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tengsizliklarni yechish.....	34
HULOSA.....	37
Adabiyotlar ro'yhati.....	39

Kirish

O'zbekiston respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi qonuni va «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»da ta'lim jarayonida yangi pedagogik texnologiyalardan foydalanish, o'quvchilar bilimini nazorat qilish va obyektiv baholash tizimini takomillashtirish ta'kidlangan. 1995-2010 yillar davomida o'quvchilar va talabalar bilimini reyting buyicha baholash nizomi xalq ta'limi vazirligi tomonidan 10 marta, oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 4 marta o'zgartirildi. 1993 yil respublikamizda Davlat test markazi tashkil etildi. Bunday o'zgarishlar bizning pedagogikamiz uchun noan'anaviy bo'lgan pedagogik o'lchashlar (pedagogicheskiye izmereniya, educational measurement) deb nomlanuvchi yo'nalishning rivojlanishi bilan bog'liqdir.

Ushbu BMI da sonning butun va kasr qismi mavzusi qaraladi. Bu mavzu umumta'lim maktablari, kasb-hunar kollejlari, akademik litseylarda yetarlicha o'rganilmagan. Akademik litsey dasturida 2 soat miqdorida ajratilgan. Bu esa o'quvchilar ongida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish ko'nikmasini kam shakllantiradi. Biz ushbu BMI da sonning butun va kasr qismi tushunchasi, uning xossalari, butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish usullarini batafsil qarab o'tamiz.

Masalaning qo'yilishi. Sonning butun va kasr qismi hamda uning xossalarini, sonli funksiyalar va uning amaliy tadbirlarini o'rganish. Sonning butun va kasr qismining ta'rifidan va uning xossalaridan foydalangan holda tarkibida noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish.

Tadqiqot ob'ekti. Tarkibida noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklar hamda tenglamalar sistemasi.

Tadqiqot maqsadi. Tarkibida noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish bo'yicha ko'rsatmalar ishlab chiqib, misol va masalalar yordamida yoritib berish.

Ishning ilmiy tadqiqot metodlari. O'quvchilar ongida tarkibida noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish ko'nikmasini shakllantirish.

Ishning tuzilishi. Bitiruv malakaviy ishi ikki bob va oltita paragrafdan iborat. Birinchi bobda sonning butun va kasr qismi, uning xossalari, tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan funksiyaning grafiklari, sonli funksiyalar va uning amaliy tadbirlari haqida umumiy tushunchalar berilgan. Ikkinchi bobda tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklar hamda tenglamalar sistemasini yechish usullari yo'ritilgan.

I BOB. SONNING BUTUN VA KASR QISMI HAQIDA

1.1. Sonning butun va kasr qismi, xossalari

Ushbu BMI da sonning butun va kasr qismi mavzusi qaraladi. Bu mavzu umumta'lim maktablari, kasb-hunar kollejlari, akademik litseylarda yetarlicha o'rganilmagan. Akademik litsey dasturida 2 soat miqdorida ajratilgan. Bu esa o'quvchilar ongida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish ko'nikmasini kam shakllantiradi. Biz ushbu BMI da sonning butun va kasr qismi tushunchasi, uning xossalari, butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish usullarini batafsil qarab o'tamiz.

Maktabda matematikani o'qitishdan maqsad- o'quvchilarga mustahkam bilim berish, boshqa fanlarni o'rganish va bilimini oshirishga yordam berishdir. O'qish bilan birga fanga muntazam qiziqish uyg'otishdir. O'quvchilardagi qobiliyatni aniqlash va uni rivojlantirishdir. Bu BMI dagi materiallar matematikadagi masalalarni yanada chuqurroq o'rganishga yordam beradi. Sonning butun va kasr qismi mavzusini kengaytiradi. Natijada o'quvchilar turli bosqichlardagi olimpiadalarda yaxshi o'rin egallaydi.

Qoldikli bo'lish teoremasiga asosan har qanday $a \in \mathbb{Z}$ va $m \in \mathbb{N}$ uchun

$$a = mq + r, \quad 0 \leq r < m \quad (1)$$

Bog'lanish mavjud va yagona edi. (1) ning ikkala tomonini m ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m} \quad 0 \leq \frac{r}{m} < 1. \quad (2)$$

Demak, q son $\frac{a}{m}$ kasr sonidan kichik bo'lgan butun sonlarning eng kattasi ekan.

Ta'rif: a sonining **butun qismi** deb, a dan katta bo'lmagan butun sonlarning eng kattasiga aytiladi va $[a]$ yoki $E(a)$ orqali belgilanadi. O'qilishi: " a ning butun qismi" yoki "antye a " (fransuzcha entire - butun).

Misol: $[3]=3$; $[4.8]=4$; $[-2]=-2$; $[-5.3]=-6$

Ta'rif: Sonning kasr qismi deb, uning noldan kichik emas, ammo birdan kichik qismiga aytiladi va $\{x\}$ kabi belgilanadi.

Har qanday haqiqiy x sonni: $x=[x]+\{x\}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Misol. $\{2,4\} = 0,4$; $\{3,6\} = 0,6$; $\left\{\frac{5}{3}\right\} = \frac{2}{3}$; $\{-3,2\} = 0,8$; $\{3\} = 0$.

Sonning kasr qismining ta'rifidan ko'rinib turibdiki, $0 \leq \{x\} < 1$ o'rinli.

Sonning butun qismi quyidagi xossalarga ega:

1-xossa. $a, b \in Z$ bo'lganda, $[a + b] = [a] + [b]$ bo'ladi.

2-xossa. $a, b \in R$ bo'lganda $[a + b] \geq [a] + [b]$ bo'ladi.

$$[9+10]=[9]+[10]=19; \quad [9,8 + 9,9] \geq [9,8] + [9,9]$$

$$[19,7] \geq 9 + 9$$

$$19 > 18$$

3-xossa. Ixtiyoriy haqiqiy x va a butun son uchun $[x+a]=[x]+a$ o'rinlidir.

Isboti: $x=[x]+\{x\}$ bo'lgani uchun $x+a=[x]+\{x\}+a$ shu bilan birga $[x]+\{x\}+a \leq x+a+1$. U holda $[x]+a$, $x+a$ dan oshmaydigan eng katta butun son. Shunday qilib $[x+a]=[x]+a$.

4-xossa. Ixtiyoriy haqiqiy x va ixtiyoriy natural n soni uchun $[nx] \geq n[x]$ o'rinli.

Isboti: $x=[x]+\{x\}$ foydalanamiz. U holda $nx=n[x]+n\{x\}$ $n[x]$ butun son bo'lgani uchun $[nx]=[n[x]+n\{x\}]$. n va $\{x\}$ lar nomanfiy sonlar bo'lgani uchun $[n\{x\}] \geq 0$ bundan esa

$$[nx] \geq [n[x]] = n[x].$$

5-xossa. Agar $[a]=[b]$ bo'lsa, $-1 < a-b < 1$ bo'ladi.

Isboti: $a=[a]+\{a\}$ va $b=[b]+\{b\}$ bo'lganidan $a-b=([a]+\{a\})-([b]+\{b\})=$
 $=([a]-[b])+(\{a\}-\{b\})=\{a\}-\{b\}$. Lekin $0 \leq \{a\} < 1$, $0 \leq \{b\} < 1$.

Shunga ko'ra (va qarama-qarshi ma'nodagi tengsizliklarni hadlab ayirish mumkinligiga asoslansak):

$$0 \leq \{a\} < 1$$

$$1 > \{b\} \geq 0$$

$$-1 \leq \{a\} - \{b\} < 1.$$

6-xossa. Agar a soni butun va nomanfiy bo'lsa, $[na] \geq n[a]$ bo'ladi.

Isboti: $[na] = [n([a] + \{a\})] = n[a] + n\{a\}$, bunda $n\{a\} \geq 0$.

Demak, $[na] \geq n[a]$.

Bularga qo'shimcha ravishda yana ushbu xossalarini kiritish mumkin.

1) Ta'rifdan $[a] \leq a < [a]+1$ asosiy tengsizlik kelib chiqadi.

4) Agar $[x]=[y]$, u holda $[x-y] < 1$ bo'ladi.

5) Agar $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ bo'lsa, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ bo'ladi.

6) Ixtiyoriy haqiqiy x son uchun $[[x]] = [x]$

7) Agar $x < y$ bo'lsa, $[x] \leq [y]$ bo'ladi.

1.2. Sonning butun va kasr qismi qatnashgan funksiyalar, grafiklari

$y=[x]$ *funksiya grafigi*

- 1) Aniqlanish sohasi $D(y)=\mathbb{R}$
- 2) Qiymatlar sohasi $E(y)=\mathbb{Z}$
- 3) Bu funksiya juft ham toq ham emas.
- 4) Davriy emas.
- 5) Kamaymaydi.

1. $y=[f(x)]$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini yasang. $y=[f(x)]$

ko'rinishdagi funksiyaning grafigini chizish quyidagi tartibda bajariladi

1) $y=f(x)$ funksiya grafigi chiziladi;

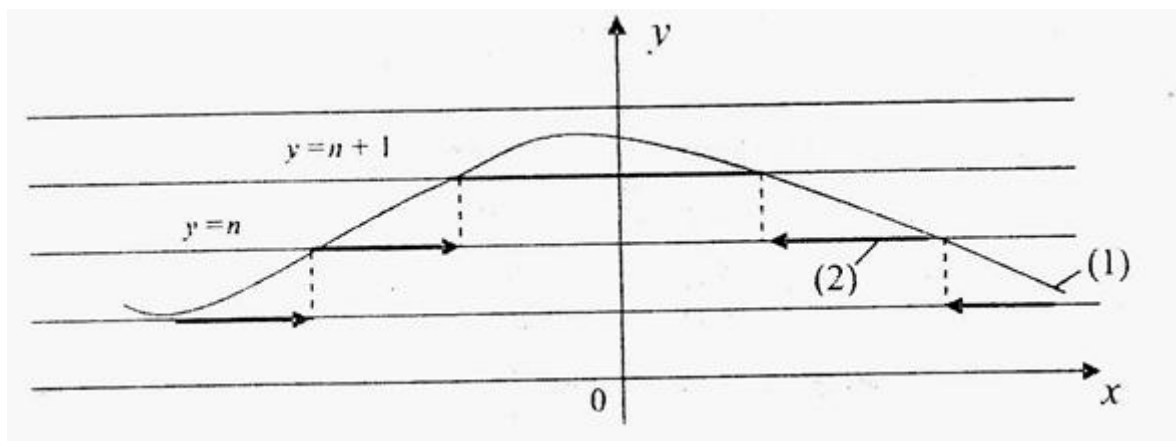
2) $y = n (n \in \mathbb{Z})$ to'g'ri chiziqlar chizilib, $y=n$ va $y=n+1$ to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan oraliqlardan biri qaraladi.

3) $y=n, y=n+1$ to'g'ri chiziqlar bilan $y=f(x)$ funksiya grafigining kesishish nuqtalari $y=[f(x)]$ funksiyaning grafigiga kiradi, qaralayotgan oraliqdagi $y=[f(x)]$

funksiyaning boshqa nuqtalari esa shu oraliqdagi funksiya grafigining $y=n$

to'g'ri chiziqlarga proyeksiyasi sifatida olinadi, chunki bu oraliqda $y=f(x)$

grafigining ixtiyoriy M nuqtasining y_0 ordinatasi $n < y_0 < n+1$ oraliqda bo'lib, uning butun qismi $|y_0|=n$ teng bo'ladi.



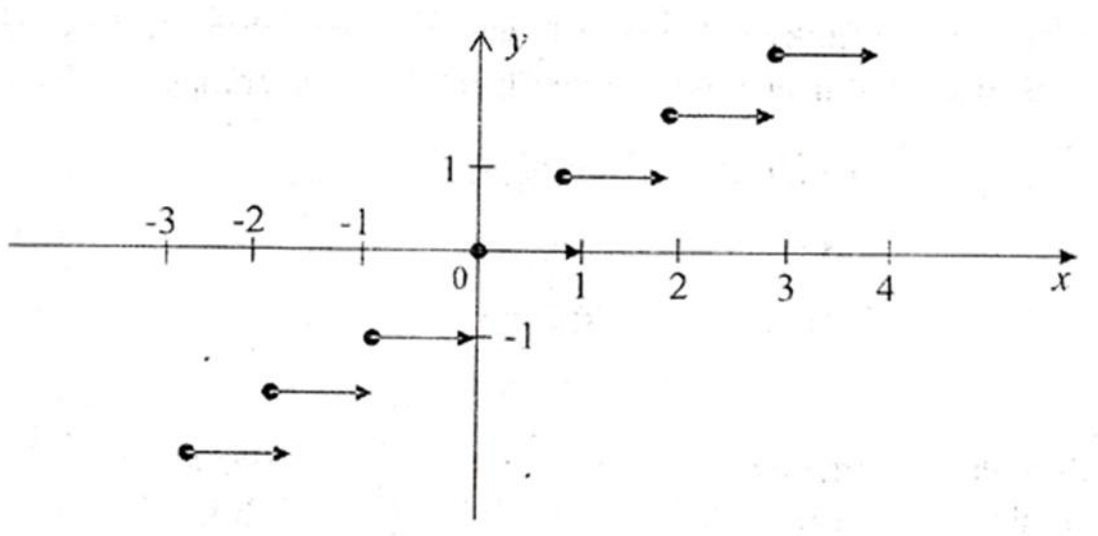
$y=f(x)$ funksiya grafigi joylashgan boshqa oraliqlardagi $y=[f(x)]$ funksiya grafigi ham xuddi 3) banddagi singari chiziladi.

1-misol. $y=[x]$ ($[x]$ ifoda x ning butun qismi) funksiyaning grafigini chizing.

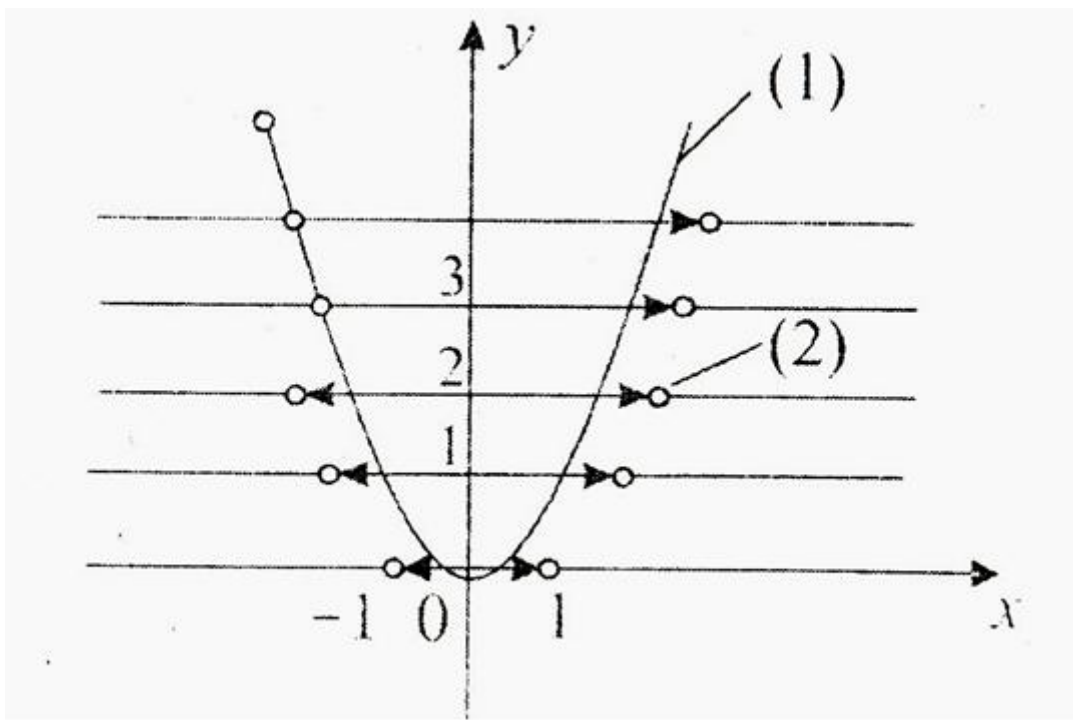
Yechilishi. Agar $x=n+r$ (bunda n -butun son, $0 \leq r \leq 1$) bo'lsa, u holda $[x]=n$, ya'ni u x dan oshmaydigan eng katta butun songa teng bo'ladi. Bu funksiya $x=n$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki:

$$\lim_{x \rightarrow n-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow n-0} [x] = n - 1, \quad \lim_{x \rightarrow n+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow n+0} [x] = n.$$

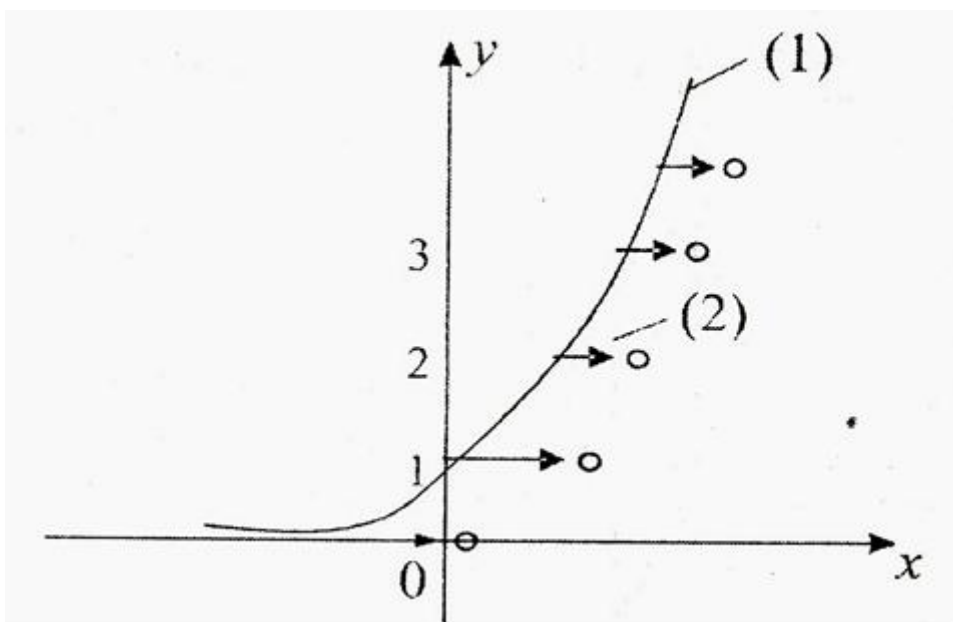
Bu funksiyaning grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan.



2-misol. $y=[x^2]$ funksiyaning grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan.



3-misol. $y=[2^x]$ funksiyaning grafigi 4-chizmada tasvirlangan.

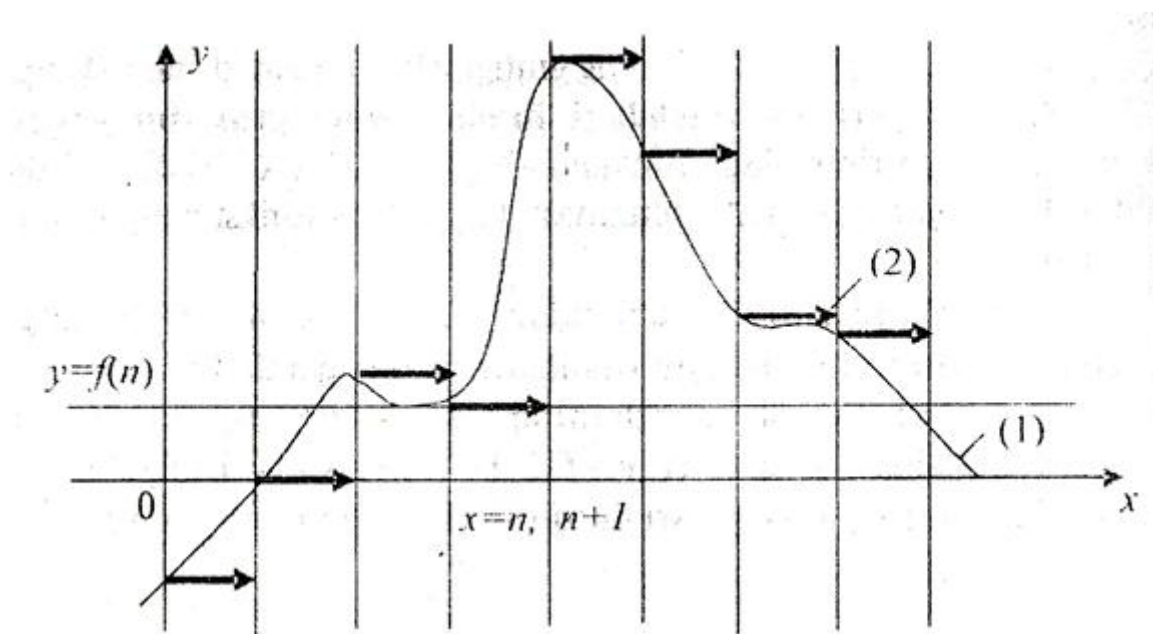


2. $y=f([x])$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini yasash. $y=f([x])$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini chizish quyidagi tartibda bajariladi

1) $y=f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi;

2) $x = n$ ($n \in \mathbb{Z}$) to'g'ri chiziqlar chizilib, $x=n$, $x=n+1$ to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan oraliqlardan biri qaraladi;

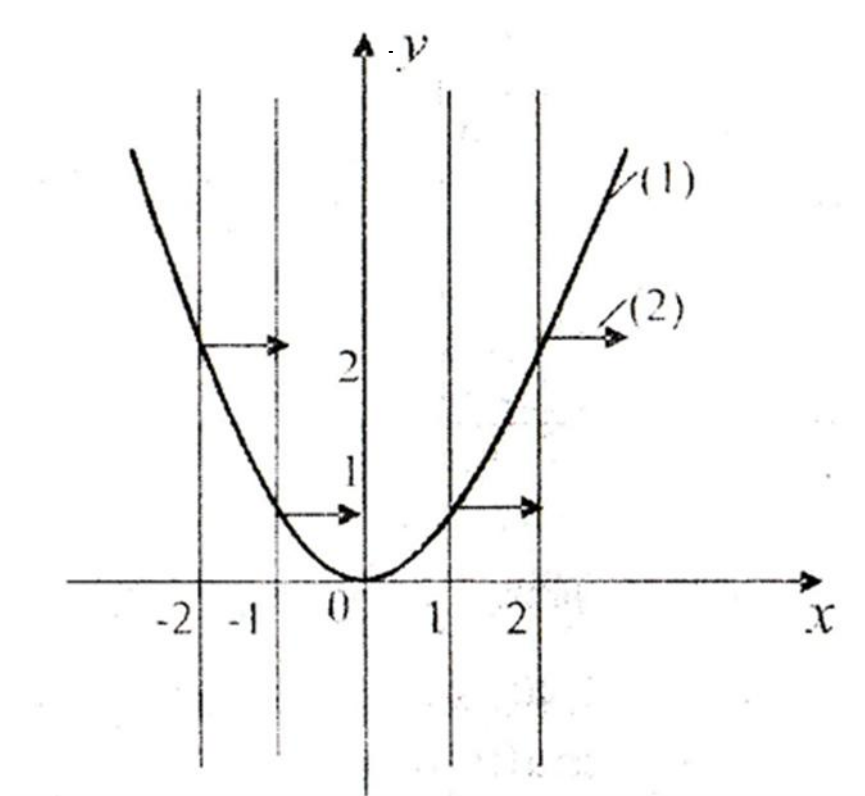
3) $y=f(x)$ funksiya grafigining $x=n$, $x=n+1$ to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari $y=f([x])$ funksiya grafigiga kiradi, chunki ularning absissalari butun sonlardan iborat, qaralayotgan oraliqdagi $y=f([x])$ funksiya grafigining boshqa nuqtalari esa shu oraliqdagi funksiya grafigining $y=f(n)$ to'g'ri chiziqqa proyeksiyasi sifatida olinadi, chunki bu oraliqdagi ixtiyoriy N nuqtaning x_0 absissasi $n < x_0 < n+1$ da bo'lib uning butun qismi $[x_0]=n$ bo'ladi.



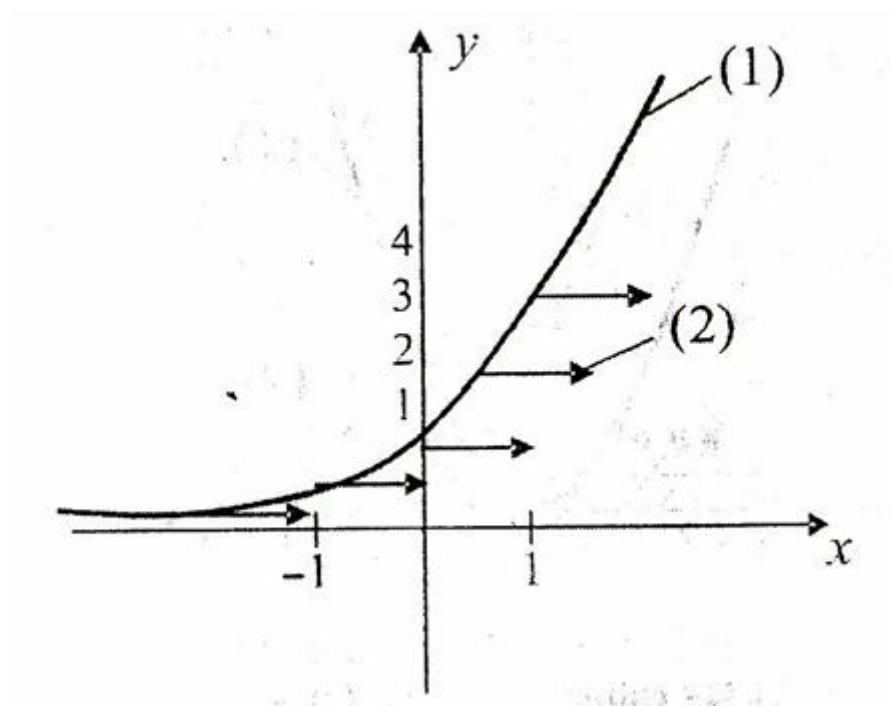
4) $y=f(x)$ funksiya grafigi joylashgan boshqa oraliqlardagi $y=f([x])$ funksiya grafigi xuddi 3) bandidagi singari chiziladi.

$y=f([x])$ ko'rinishdagi funksiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.

4-misol. $y=[x]^2$ funksiyaning grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan.



5-misol. $y=2^{[x]}$ funksiyaning grafigi 7-chizmada tasvirlangan.



3. $y=\{f(x)\}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini yasash.

$\{f(x)\}=f(x)-[f(x)]$ bo'lgani uchun $y=\{f(x)\}$ funksiya grafigini chizish $y=f(x)$ va $y=[f(x)]$ funksiyalar ayirmasining grafigini chizishga keltiriladi.

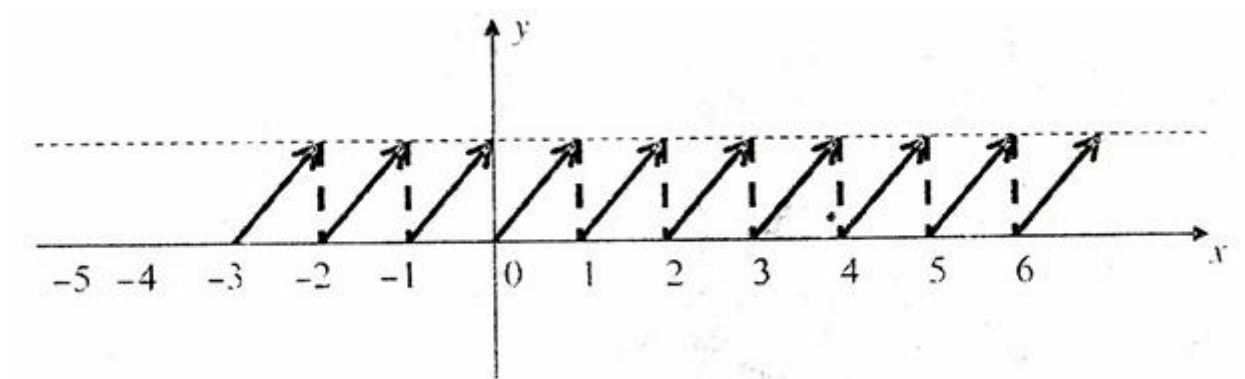
1) $y=f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi;

2) $y = n$ ($n \in Z$) to'g'ri chiziqlar chiziladi;

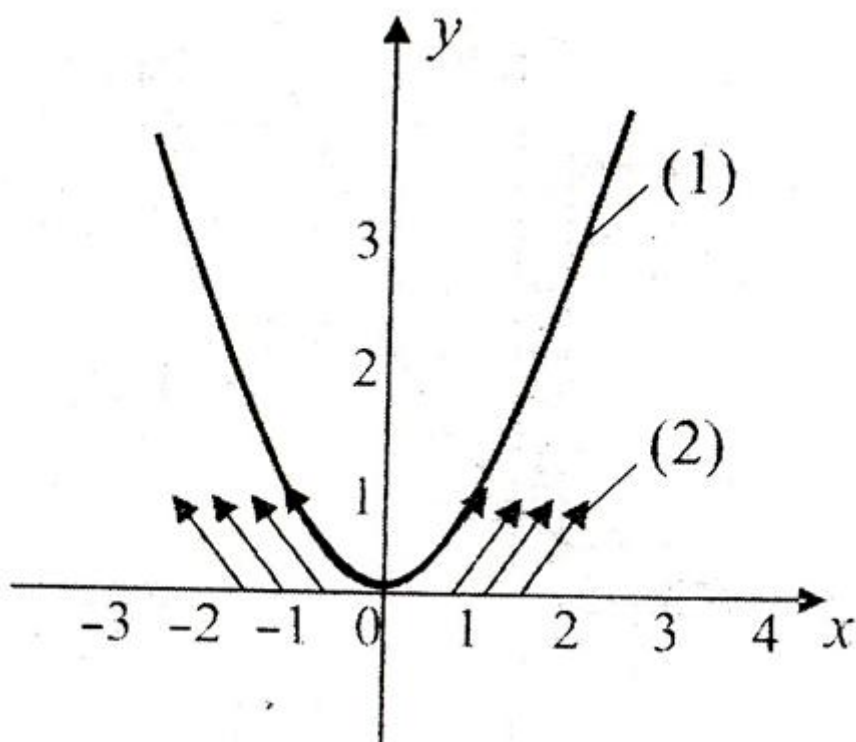
3) $y=n$ to'g'ri chiziqlar bilan $y=f(x)$ funksiya grafigining kesishgan nuqtalaridan ordinatalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi, natijada funksiyaning $y=\{f(x)\}$ qiymatlari hosil bo'lgan to'rtburchakka tushadi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi yuqori yarim tekislikdagi to'rtburchakka tushgan qismini n masofa pastga, pastki tekislikdagi to'rtburchakka tushgan $|n|+1$ qismini masofagacha yuqoriga ko'chiriladi.

$y=\{f(x)\}$ ko'rinishdagi funksiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.

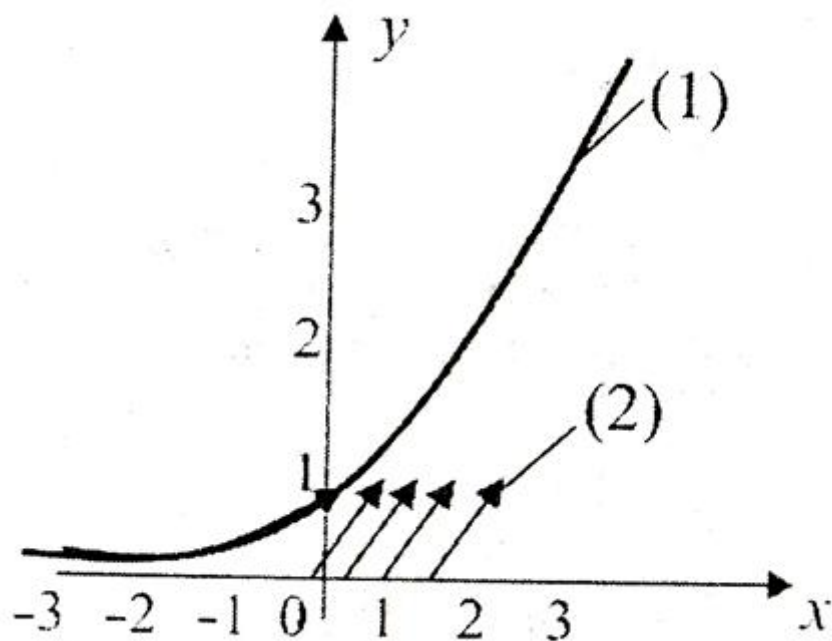
6 – misol. $y=\{x\}$ funksiyaning grafigi quyidagi grafikda tasvirlangan.



7 – misol. $y = \{x^2\}$ funksiyaning grafigi quyidagi grafikda tasvirlangan.



8 – misol. $y = \{2^x\}$ funksiyaning grafigi quyidagi grafikda tasvirlangan.



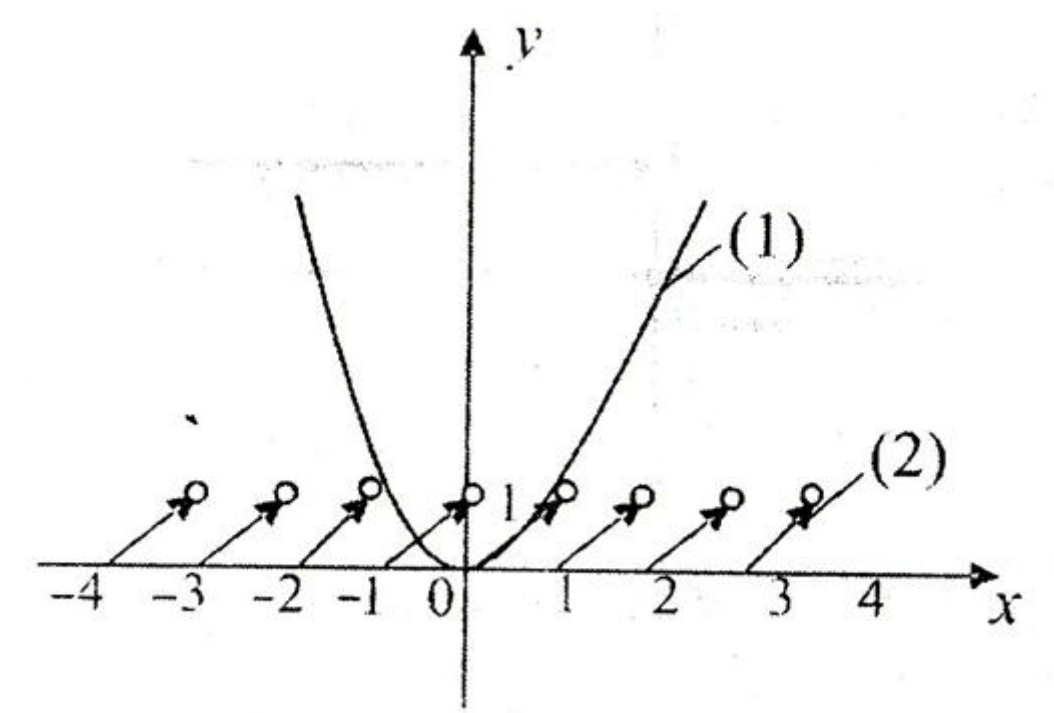
4. $y=f(\{x\})$ ko'rinishdagi funktsiyaning grafigini yasash. $y=f(\{x\})$ davriy funksiya bo'lib, uning davri $\omega = 1$ ga teng. $y=f(\{x\})=f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ funksiyaning bu xususiyatlarini e'tiborga olgan holda, uning grafigi quyidagi tartibda chiziladi:

1) $[0;1]$ da $y=f(x)$ funksiyaning grafigi chiziladi;

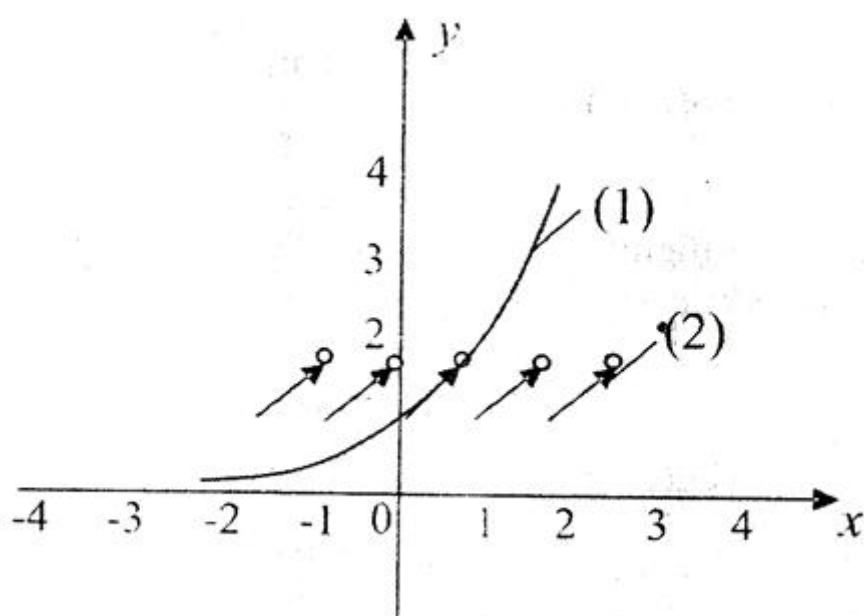
2) $y=f(\{x\})$ funksiyaning davriyligini e'tiborga olib, $y=f(x)$ funksiya grafigi davriy davom ettiriladi.

$y=f(\{x\})$ ko'rinishdagi funktsiyalarning grafigini yasashga doir misollar keltiramiz.

9-misol. $y=\{x\}^2$ funksiyaning grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan.



10-misol. $y=2^{\{x\}}$ funksiyaning grafigi quyidagi chizmada tasvirlangan.



1.3. Sonli funksiyalar.

Ta'rif. Aniqlanish sohasi yo qiymatlar sohasi, yoki har ikkalasi ham butun sonlar to'plami bo'lgan funksiya *sonly funksiya* deyiladi.

1. Berilgan n natural sonning natural bo'luvchilari sonini $\tau(n)$ orqali belgilaylik. Ma'lumki, har qanday $n > 1$ natural sonni

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \quad (1)$$

shaklda yozish mumkin edi. (1) shakldagi sonning barcha natural bo'luvchilari

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \quad (2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda

$$0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1; 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2; \dots; 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k. \quad (3)$$

n sonning barcha bo'luvchilarini toppish uchun (2) dagi β_i larning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarini qarab chiqish kerak. Har bir β_i (3) ga asosan, $\alpha_i + 1$ ta qiymat qabul qiladi.

β_i larning har xil qiymatlariga mos keluvchi qiymatlar soni

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

ga teng. Demak,

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

Misol. $n=504$ natural bo'luvchilari sonini toping.

$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ bo'lgani uchun $\tau(504) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ ekanini topamiz.

2. Biz oldingi bandda n sonining barcha natural bo'luvchilari sonini ifodalovchi funksiyanı topdik. Endi shu natural bo'luvchilarning yig'indisi qaysi formula orqali berilishini tekshiramiz.

n sonining barcha natural bo'luvchilarining yig'indisini $\sigma(n)$ yoki $\sum_{n \mid d} d$ orqali belgilaylik.

Quyidagi ko'paytmani qaraylik:

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}) =$$

$$= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} \quad (4)$$

Bu yerda har bir $\beta_i (i = \overline{1, k})$ bir-biriga bog'liqsiz ravishda 0 dan α_i gacha qiymatlarni qabul qiladi. Geometrik progressiya hadlari yig'indisini topish formulasidan foydalanib, (4) yig'indini quyidagicha yozamiz:

$$\sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \quad (5)$$

Ikkinchi tomondan, (5) ning chap tomonidagi har bir $p_i^{\beta_i} (i = \overline{1, k}) (0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$

son n sonning bo'luvchisidir. n sonning har bir bo'luvchisi $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$

ko'rinishida yoziladi. Demak, (5) tenglik n sonning natural bo'luvchilari yig'indisini ifodalovchi formula ekan, ya'ni

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Misol. 504 ning barcha natural bo'luvchilari yig'indisini toping.

$$\sigma(504) = \sigma(2^3 \cdot 3^2 \cdot 7) = \frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{2+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1} = 1560.$$

Maktab matematika kursida juda ko'p sonli funksiyalar mavjud. Sonli funksiyalardan yana birini ko'rib o'tamiz.

Misol. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2001$ ko'paytma nechta nol bilan tugaydi?

Yechish. Berilgan ko'paytmaning kanonik shakli $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \dots \cdot p^{\alpha_n}$

bo'lsin. α_1 va α_3 natural sonlarni topamiz.

α_3 soni 1 dan 2001 gacha bo'lgan natural sonlar orasidagi 5, 25, 125, 625 sonlariga bo'linuvchi barcha natural sonlarning soniga teng:

$$\alpha_3 = \left[\frac{2001}{5} \right] + \left[\frac{2001}{25} \right] + \left[\frac{2001}{125} \right] + \left[\frac{2001}{625} \right] = 400 + 80 + 16 + 3 = 499.$$

Xuddi shu kabi

$$\alpha_1 = \left[\frac{2001}{2} \right] + \left[\frac{2001}{4} \right] + \left[\frac{2001}{16} \right] + \dots + \left[\frac{2001}{1024} \right] = 1880$$

ekanini aniqlaymiz.

$2^{1880} \cdot 5^{499}$ ko'paytma 499 ta nol bilan tugagani sababli, berilgan ko'paytma ham 499 ta nol bilan tugaydi.

II BOB. TARKIBIDA NOMA'LUMNING BUTUN VA KASR QISMI QATNASHGAN TENGLAMA HAMDA TENGSIZLIKLARNI YECHISH.

2.1. Noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish

Butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni bir necha guruhlariga bo'lib o'rganganimiz ma'qul. Biz ushbu paragrafda bu usullardan bir nechtasini ko'rib o'tamiz.

1. $[f(x)]=a$ ko'rinishidagi tenglama.

Noma'lum sonning butun qismi belgisi ostida qatnashgan tenglamalardan $f(x)=[g(x)]$ ko'p uchraydi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning ko'rinishiga qarab yuqoridagi tenglama quyidagicha yechilishi mumkin:

$[g(x)] = k$ tenglamani aralash sistema bilan almashtirish

$$k \leq g(x) < k+1$$

bunda $f(x)=k$.

Misol 1. $[x^2-5x+6]=1$ tenglamani yeching.

Yechish: $1 \leq x^2-5x+6 < 2$

$$a) \quad x^2-5x+5 \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ va } x > \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

$$b) \quad x^2-5x+4 < 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad x \in (1; 4)$$

Shunday qilib, $x \in \left(1; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 4\right)$

Misol 2. $[10^x]=0 \Rightarrow 10^x < 1 \Rightarrow x < 0$ yechim $x \in (-\infty; 0)$

Misol 3. $[\lg(3x)]=2 \Rightarrow 2 \leq \lg(3x) < 3 \Rightarrow 100 \leq 3x < 1000 \Rightarrow \frac{100}{3} \leq x < \frac{1000}{3}$

Misol 4. $x^2 - 5[x] - 3 = 0 \Rightarrow [x] = \frac{x^2 - 3}{5} \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{5} \leq x < \frac{x^2 - 3}{5} + 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 3 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 2 > 0 \end{cases}$

Bu tengsizliklar sistemasining yechimi : $\frac{5 - \sqrt{37}}{2} \leq x < \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \leq x < \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$

Birinchi oraliqda yechim yo'q. Ikkinchi oraliqda esa $x = \sqrt{23}$ va $x = \sqrt{28}$

Misol 5. $\text{Lg}[x] = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: $[x] = 10 \Rightarrow 10 \leq x < 11$

Misol 6. $[\sin x + \cos x] = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: $1 \leq \sin x + \cos x < 2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) < 2$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Javob: $x \in [2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$

Misol 7. Ushbu tenglamani yeching: $[19x] + 98 \cdot [x] = 1998$

Yechish: 1) Agar $k + \frac{n}{19} \leq x < k + \frac{n}{19} + 1, k \in \mathbb{Z}$ bo'lsa, $n = \{0; 1; \dots; 18\}$ u

holda $19k + n \leq 19x < 19k + n + 1 \quad [x] = k,$

$[19x] = 19k + n$ bularni berilgan tenglamaga qo'yib:

$19k + n + 98k = 1998$ bu yerdan $117k + 98n = 1998$

$k = \frac{1998 - 98n}{117} = 17 + \frac{9 - n}{117}$ yuqoridagilarni hisobga olsak, $n = 9$ va $k = 17$ ni

hosil qilamiz. $x = [17\frac{9}{19}; 18\frac{9}{19})$

2) Bu usulda tenglamani sistema bilan almashtiramiz.

$$\begin{cases} [x] = k, k \in \mathbb{Z} \\ k \leq x < k + 1 \\ [19x] + 98k = 1998 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq x < k + 1 \\ [19x] = 1998 - 98k \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k \leq x < k + 1 \\ 1998 - 98k \leq 19x < 1999 - 98k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19k \leq 19x < 19k + 19 \\ 1998 - 98k \leq 19x < 1999 - 98k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 19k < 1999 - 98k \\ 1998 - 98k < 19k + 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 117k < 1999 \\ 117k > 1979 \end{cases} \Rightarrow k = 17$$

Sistemaning uchinchi tenglamasini $k=17$ uchun yechamiz, natijada

$$17\frac{9}{19} \leq x < 17\frac{10}{19}$$

Misol 8. $[x^2+2x-2]=1$ tenglamani yeching.

Yechish: $1 \leq x^2 + 2x - 2 < 2$

1) $x^2 + 2x - 2 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3; x \geq 1$

2) $x^2 + 2x - 2 < 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 4 < 0 \Rightarrow -1 - \sqrt{5} < x < -1 + \sqrt{5};$

Javob: $-1 - \sqrt{5} < x \leq -3; 1 \leq x < -1 + \sqrt{5}$

Misol 9. $[3x-5,2]=0,487$ tenglamani yeching.

Yechish: sonning butun qismining ta'rifiga ko'ra berilgan tenglama yechimga ega emas.

Misol 10. $[2x+0,2]=1$ tenglamani yeching.

Yechish: $1 \leq 2x + 0,2 < 3 \rightarrow 0,8 \leq 2x < 2,8 \rightarrow 0,4 \leq x < 1,4$ tenglamaning yechimi $x \in [0,4; 1,4)$.

Misol 11. $[x+1,3]=-5$ tenglamani yeching.

Yechish: $-6 < x + 1,3 \leq -5 \rightarrow -7,3 < x \leq -6,3$ tenglamaning yechimi $x \in (-7,3; -6,3]$.

Misol 12. $[2x+1,5]=-1$ tenglamani yeching.

Yechish: $-2 < 2x + 1,5 \leq -1 \rightarrow -3,5 < 2x \leq -2,5 \rightarrow -1,75 < x \leq -1,25$

Tenglamaning yechimi $x \in (-1,75; -1,25]$.

2. $[f(x)+a]=b$ ko'rinishidagi tenglamani yechish. (Bunda $a \in \mathbb{Z}$).

Sonning butun qismining $\forall x \in \mathbb{R}$ va $\forall a \in \mathbb{Z}$ uchun $[x+a]=[x]+a$ xossasi o'rinli ekanligini ko'rib o'tgan edik. Shu xossani tenglamaga tadbiq etamiz.

Misol 1. $[x+1]+[x+2]-[x+3]=2$ tenglamani yeching.

Yechish: Yuqoridagi xossaga ko'ra tenglamani $[x]+1+[x]+2-[x]-3=2$ ko'rinishida yozib olamiz. Bu yerdan $[x]=2$ ni hosil qilamiz, uning yechimi $x \in [2; 3)$.

Misol 2. $[x-3]-[x-5]=8$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamani $[x]-3-[x]+5=8$ ko'rinishida yozib olamiz. Bu yerdan $2=8$ ziddiyatli tenglik hosil bo'ladi. Demak berilgan tenglama yechimga ega emas.

Misol 3. $[x+1]+[x-2]+[x+3]=2$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamani $[x]+1+[x]-2+[x]+3=2$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerdan $[x]=0$ ni hosil qilamiz. Demak, berilgan tenglamaning yechimi $x \in [0; 1)$.

3. $[f(x)]=g(x)$ ko'rinishidagi tenglamalar.

Bunday ko'rinishidagi tenglamalarni yechishda tenglikning chap tomonidagi ifodaning butun son ekanligidan o'ng qismining ham butun ekanligini hisobga olib, sonning butun qismining ta'rifidan foydalanamiz.

Misol 1. $2 + 3 \cdot [x] = 4x$ tenglamani yeching.

Ushbu sistemani qaraymiz:
$$\begin{cases} [x] = k \\ k \leq x < k + 1 \\ 2 + 3k = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] = k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2+3k}{4} \\ k \leq \frac{2+3k}{4} < k + 1 \end{cases}$$

Dastlab qo'sh tengsizlikdan $k=-1;0;1;2$ ni topamiz, keyin esa $x=-1.25;0.5;1.25;2$.

Misol 2. $[2x+1]=x+2$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamani $[2x]=x+1$ ko'rinishiga keltiramiz. Bu tenglamaning yechimi x^* bo'lsin. Ko'rinib turibdiki x^* butun son. Tenglamani qo'sh tengsizlik ko'rinishida quyidagicha yozib lamiz;

$$x^* + 1 \leq 2x^* < x^* + 2$$

Ushbu tengsizliklar sistemasiga ega bo'lamiz;

$$\begin{cases} x^* + 1 \leq 2x^* \\ 2x^* < x^* + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^* \geq 1 \\ x^* < 2 \end{cases}$$

Bu tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi yechim $x=1$.

Misol 3. $4-2[x]=3x-1$ tenglamani yeching.

Yechish: $[x]=k$ deb olamiz. Sonning butun qismining ta'rifiga ko'ra,

$k \leq x < k + 1$ o'rinli. Yuqoridagi tenglamadan x ni topamiz $x = \frac{5-2k}{3}$ va bu ifodani tengsizlikka qo'yib,

$$k \leq \frac{5-2k}{3} < k + 1 \rightarrow 3k \leq 5 - 2k < 3k + 3$$

Bu qo'sh tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz;

$$\begin{cases} 3k \leq 5 - 2k \\ 5 - 2k < 3k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 1 \\ k > 2 \end{cases}$$

Berilgan tenglama yechimga ega emas.

4. Belgilash usulidan foydalanib tenglamani yechish.

Barcha tenglamalar kabi sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechishda ham belgilash usuli bilan tenglamani yechish ancha qulayliklar tug'diradi. Buni biz bir nechta misollar yordamida ko'rib o'tamiz.

Misol 1. $4^{[x]} - 6 \cdot 2^{[x]} + 8 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $2^{[x]} = t$ belgilash kiritamiz, u holda berilgan tenglama $t^2 - 6t + 8 = 0$ ko'rinishga keladi. Uning yechimlari $t_1 = 2, t_2 = 4$

Demak,

$$2^{[x]} = 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$$2^{[x]} = 4 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

Javob: $[1; 3)$.

Misol 2. $\{x\}^2 - \frac{3\{x\}}{4} + \frac{1}{8} = 0$ tenglamani yeching.

$$\text{Yechish: } \{x\} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{2}; \quad \{x\} = \frac{1}{2}; \quad \{x\} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Javob: } x = \frac{1}{2} + n; x = \frac{1}{4} + n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Misol 3. $[x]^2 + 8[x] - 9 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $[x] = t$ deb belgilash olamiz. U holda berilgan tenglama $t^2 + 8t - 9 = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimi $t_1 = -9, t_2 = 1$.

$$[x] = -9 \Rightarrow -10 < x \leq -9$$

$$[x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

Tenglamaning yechimi $x \in (-10; -9] \cup [1; 2)$.

Misol 4. $\frac{1}{[x]-1} - \frac{1}{[x]+1} = \frac{1}{4}$ tenglamani yeching.

Yechish: $[x] = t$ deb belgilash olamiz. U holda berilgan tenglama $\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{1}{4}$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimi $t = \pm 3$.

$$[x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$[x] = -3 \Rightarrow -4 < x \leq -3$$

Tenglamaning yechimi $x \in (-4; -3] \cup [3; 4)$.

5. $[f(x)] = [g(x)]$ ko'rinishidagi tenglama.

Sonning butun qismining xossasiga ko'ra agar $[a] = [b]$ bo'lsa, $-1 < a - b < 1$ bo'ladi. Ushbu xossani tadbqiq etib, $[f(x)] = [g(x)]$ ko'rinishidagi tenglamani yechamiz.

Misol 1. $[\frac{x-3}{2}] = [\frac{x-2}{3}]$ tenglamani yeching.

Yechish: Agar ikki son butun qismlari teng bo'lsa, ular ayirmasining moduli birdan kichik bo'ladi: $-1 < \frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3} < 1 \Rightarrow -1 < x < 11$

x ning bu qiymatlarida $-1 < \frac{x-2}{3} < 3$ natijada $\frac{x-2}{3}$ va $\frac{x-3}{2}$ ifodalar bir vaqtda $[-1; 0)$, $[0; 1)$, $[1; 2)$, $[2; 3)$ yotishlari kerak. Tegishli tenglamalar sistemasini yechib berilgan tenglama yechimini hosil qilamiz: $1 \leq x < 2$; $3 \leq x < 7$; $8 \leq x < 9$.

Misol 2. $[\sin x] = [\cos x]$ tenglamani yeching.

Yechish: Agar ikki son butun qismlari teng bo'lsa, ular ayirmasining moduli birdan kichik bo'ladi: $-1 < \sin x - \cos x < 1$ ko'rinishidagi tengsizlikni yechamiz. Muavr formulasiga ko'ra

$$-1 < \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1 \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$$

Bu tengsizlikning yechimi $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Sonning kasr qismi qatnashgan tenglamalar.

Sonning kasr qismining ta'rifiga ko'ra $\{x\}$ ifoda davriy funksiyadir va $0 \leq \{x\} < 1$ ni hisobga olish kerak. Quyidagi tenglamalarni yechib ko'rsatamiz.

Misol 1. $\left\{3x - \frac{9}{4}\right\} = \frac{2}{3}$ tenglamani yeching.

Yechish: $3x - \frac{9}{4} = \frac{2}{3} + n \Rightarrow x = \frac{11}{36} + \frac{n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

Misol 2. $\left\{x + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}$ tenglamani yeching.

Yechish: $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + nx = n + \frac{1}{6}, n \in \mathbb{Z}$

Misol 3. $\left\{3x - \frac{9}{4}\right\} = \frac{2}{3}$ tenglamani yeching.

Yechish: $3x - \frac{9}{4} = \frac{2}{3} + n, 3x = n + \frac{35}{12}, 3x = n + \frac{11}{12}, x = \frac{n}{3} + \frac{11}{36}, n \in \mathbb{Z}$

Misol 4. $\left\{2x - \frac{2}{5}\right\} = \frac{4}{3}$ tenglamani yeching.

Yechish: Sonning kasr qismi $[0;1)$ oraliqda bo'lganligi uchun berilgan tenglama yechimga ega emas.

Misol 5. $\{x\}^2 - \frac{3}{4}\{x\} + \frac{1}{8} = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Berilgan tenglamaga $\{x\}=t$ kabi belgilash kiritib, tenglamaning yechimini topamiz, $\{x\} = \frac{1}{4}, \{x\} = \frac{1}{2}, x = n + \frac{1}{4}, x = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Misol 6. $25^{\{x\}} = 5$ tenglamani yeching.

Yechish: $\{x\} = \frac{1}{2}, \{x\} = \frac{1}{2} + n; n \in \mathbb{Z}$

Misol 7. $10^{\{x\}} = 0.8$ tenglamani yeching.

Yechish: Ko'rsatkichli funksiyaning xossasiga ko'ra $\{x\} < 0$ kelib chiqadi, bu esa sonning kasr qismining ta'rifiga ziddir. Demak, berilgan tenglama yechimga ega emas.

7. Butun va kasr qismi qatnashgan tenglama.

$[g(x)] = g(x) - \{g(x)\}$ dan foydalansak berilgan tenglama $f(x) = g(x) - \{g(x)\}$ yoki $g(x) - f(x) = \{g(x)\}$ ko'rinishidagi tenglamaga o'tadi. $\{g(x)\}$ ning xossasidan $0 \leq g(x) - f(x) < 1$ ni hosil qilamiz.

Misol 1. Ushbu tenglamani yeching: $19 \cdot [x] + 97 \cdot \{x\} = 1997$

Yechish: $19 \cdot [x] = 1997 - \{x\}$

$$1900 < [x] \cdot 19 \leq 1997$$

$$100 < [x] \leq 105 \frac{2}{19}$$

Bu yerda $x = \{101; 102; 103; 104; 105\}$

Misol 2. $tg[x] \cdot tg\{x\} = 1$ tenglamani yeching.

Yechish: $tga = \frac{\sin a}{\cos a}$ bo'lgani uchun $\frac{\sin [x]}{\cos [x]} \cdot \frac{\sin \{x\}}{\cos \{x\}} = 1$.

Bu yerdan $\sin [x] \cdot \sin \{x\} = \cos [x] \cdot \cos \{x\}$ bo'lib $[x] \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$;

$\{x\} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Oxirgi tenglikdan $\cos([x] + \{x\}) = 0$; $\cos x = 0$,

demak, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Javob: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Misol 3. $x + \{x\} + [x] = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $x = \{x\} + [x]$ ekanligidan $2x = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Demak, tenglamaning yechimi $x = 0$.

Misol 4. $[2x] + [5x] = 15$ tenglamani yeching.

Yechish: $[2x] \geq 2[x]$ va $[5x]$ dan foydalanamiz. Uholda $[2x]+[5x] \geq 2[x]+5[x]=7[x]$. Uholda $7[x] \leq 15$. $[x]$ butun son bo'lgani uchun $[x] \leq 2$, demak $x < 3$.

$x < 2$ bo'lsin. Uholda $2x < 4$ bo'ladi. $[2x] \leq 3$; $5x < 10$, $[5x] \leq 9$ bundan esa $[2x]+[5x] \leq 12$ kelib chiqadi. Bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib $2 \leq x < 3$. Endi $x = 2 + \{x\}$ dan foydalanamiz. Berilgan tenglamani $[4+2\{x\}]+[10+5\{x\}]=15$ yoki $[2\{x\}]+[5\{x\}]=1$ ko'rinishda yozamiz. $[2\{x\}]$ va $[5\{x\}]$ lar butun musbat sonlar bo'lgani uchun $[2\{x\}] \leq [5\{x\}]$ bo'lgani uchun $[2\{x\}]=0$ va $[5\{x\}]=1$

$$[2\{x\}]=0 \leftrightarrow 0 \leq \{x\} < 1 \leftrightarrow 0\{x\} < 0.5$$

$$[5\{x\}]=1 \leftrightarrow 1 \leq 5\{x\} < 2 \leftrightarrow 0.2 \leq \{x\} < 0.4$$

$x = 2 + \{x\}$ ekanligini hisobga olib $2.2 \leq x < 2.4$ ni hosil qilamiz

Javob: $2.2 \leq x < 2.4$

8. Tenglamani grafik usulida yechish.

Ayrim tenglamalarni analitik usulda yechishda bir muncha qiyinchiliklarga duch kelamiz. Bunday hollarda tenglamani funksiya grafigini bitta koordinatalar tekisligida tasvirlab, ularning kesishish nuqtasini olamiz va kesishish nuqtasini tenglamaning grafigi sifatida olamiz. Bu usul asosida funksiyaning xossalari yoki grafigi yotadi. Buni biz bir nechta misollar yordamida qarab o'tamiz.

Misol 1. $x(x-2)[x] = \{x\} - 1$ tenglamani yeching.

Yechish: Tenglamani $(x-1)(x[x]-[x]-1) = 0$ ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x[x]-[x]-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ [x]=\frac{1}{x-1} \end{cases} \text{ tenglama yechimga ega emas.}$$

Misol 2. $x^3 - [x] = 3$ tenglamani yeching.

Yechish: $x^3 - 3 = [x]$, $y = x^3 - 3$; $y = [x]$ funksiyalar grafiklarini chizamiz.

$$x^3 - 3 = 1; x^3 = 4; x = \sqrt[3]{4}$$

Javob: $x = \sqrt[3]{4}$

Misol 3. $x^2 - 8[x] + 7 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: Bu tenglamani $x^2 - 8x + 7 = -8\{x\}$ yoki $-x^2 + 8x - 7 = 8\{x\}$ ko'rinishda yozib olamiz. $y = -x^2 + 8x - 7$; $y = 8\{x\}$ funksiyalar grafiklarini bitta koordinatalar sistemasida chizamiz. Ko'rinib turibdiki, $x = 1$; $x = 3$; $x = \sqrt{33}$; $x = \sqrt{41}$; $x = 7$. Bu yerda $x=3$ yechim bo'la olmaydi.

Javob: $1; \sqrt{33}; \sqrt{41}; 7$

2.2. Noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalar sistemasini yechish.

Tarkibida ikki va undan ortiq tenglama(Sonning butun va kasr qismi qatnashgan)lar qatnashgan tenglamalar sistemasi va uni yechishni qarab o'tamiz. Bizga ma'lumki sistemaning yechimi sifatida ularning har birini qanoatlantiruvchi umumiy yechimni olamiz. Biz bir nechta misollar yordamida tenglamalar sistemasini yechish usullarini ko'rib o'tamiz.

Misol 1. $\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 8 \\ 3[x] - [y] = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Berilgan sistemaning ikkinchisining har ikkala qismini 3 ga ko'paytirib, ularni hadlab qo'shamiz;

$$\begin{cases} 2[x] + 3[y] = 8 \\ 9[x] - 3[y] = 3 \end{cases} \quad 11[x] = 11 \quad [x] = 1$$

Bu yechimni sistemaning birinchi tenglamasiga olib borib qo'ysak, uholda $2+3[y]=8$, $[y]=2$ hosil bo'ladi, sistemaning yechimi $x \in [1;2)$; $y \in [2;3)$.

Misol 2. $\begin{cases} [x] \cdot y = 1000 \\ x \cdot [y] = 1996 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Tenglamalar sistemasidan x, y lar bir xil ishorali hamda $x \in [0; 1]; y \in [0; 1]$. Faraz etaylik, $x \geq 1, y \geq 1$. U holda

$$\begin{aligned} \begin{cases} [x] = \frac{1000}{y} \\ [y] = \frac{1996}{x} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1000}{y} \leq x < \frac{1000}{y} + 1 \\ \frac{1996}{x} \leq y < \frac{1996}{x} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1000 \leq xy < 1000 + y \\ 1996 \leq xy < 1996 + x \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1000 < 1996 + x \\ 1996 < 1000 + y \end{cases} \Rightarrow y > 996 \end{aligned}$$

Agar $x \geq 1$ shartdan hamda tenglamar sistemasining birinchi tenglamasidan: $1 \leq [x] < \frac{1000}{996}$, ya'ni $[x]=1$ $y=1000$

Ikkinchi tenglamadan esa $x = \frac{1996}{1000}$. $x < 0, y < 0$ bo'lgan hol uchun shunday mulohaza yuritib,

$$x_1 = -1996; y_1 = -\frac{1000}{1996} \quad \text{va} \quad x_2 = -996; y_2 = -\frac{1000}{996}$$

yechimni olamiz.

Misol 3.
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1.1 \\ y + [z] + \{x\} = 2.2 \\ z + [x] + \{y\} = 3.3 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Tenglamalarni hadma-had qo'shib,
 $x+y+z+[x]+[y]+[z]+\{x\}+\{y\}+\{z\}=6.6$ yoki $2(x+y+z)=6.6 \Rightarrow x+y+z=3.3$

Hosil bo'lgan tenglamadan birinchi ikkita tenglama yig'indisini ayiramiz, natijada $[y]+\{x\}=0$ hosil bo'ladi. Bundan esa $y \in [0; 1), x = n$,

$n \in \mathbb{Z}$ ni olamiz. $\{x\}=0$ $[y]=0$ ni sistemaga qo'yamiz. U holda birinchi tenglama $x + \{z\} = 1.1, x \in \mathbb{Z}$ va $\{z\} \in [0; 1)$ bo'lgani uchun oxirgi tenglikdan $x=1$; $\{z\}=0.1$ ni hosil qilamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasi $y+[z]=2.2$ ko'rinishga keladi. $y \in [0; 1)$ bo'lgani uchun va $[z] \in \mathbb{Z}$ bo'lgani uchun oxirgi tenglik faqat $y=0.2$; $[z]=2$ da o'rinli bo'ladi. Natijada $x=1$; $y=0.2$; $z=2.1$ ni hosil qilamiz.

Misol 4.
$$\begin{cases} 2\{x\} - 3\{y\} = 1 \\ 2\{x\} + 4\{y\} = 2 \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Sistemaning ikkinchi tenglamasidan birinchisini hadlab ayiramiz, natijada $\{y\} = \frac{1}{7}$ ni hosil qilamiz, bu yechimni sistemaning birinchi tenglamasiga olib borib qo'ysak, $\{y\} = \frac{5}{7}$ yechimni topamiz. Sistemaning yechimi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} + m \\ y = \frac{5}{7} + n \end{cases} \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Misol 5.
$$\begin{cases} [x + y + 4] = 18 - y \\ [x + 1] + [y - 1] = 18 - x - y \end{cases}$$
 tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Sonning butun qismining xossalariga ko'ra, berilgan sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz;

$$\begin{cases} [x] + [y] + 4 = 18 - y \\ [x] + 1 + [y] - 1 = 18 - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] + [y] = 14 - y \\ [x] + [y] = 18 - x - y \end{cases}$$

Oxirgi hosil bo'lgan sistemani hadlab ayirsak, $x=4$ yechim hosil bo'ladi. x va y ning butun sonlardan iborat ekanligini hisobga olsak, $y=5$ yechimni topamiz.

Berilgan sistemaning yechimi (4;5).

Misol 6. $\begin{cases} 3[x] - 2\{y\} = 6 \\ [x]^2 - 4\{y\} = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish: Berilgan sistemaning birinchi tenglamasining har ikkala qismini 2 ko'paytirib, ikkinchisini hadlab ayiramiz, u holda berilgan sistema $6[x] - [x]^2 = 8$ tenglama hosil bo'ladi. Berilgan tenglamada $[x]=t$ deb belgilash olamiz.

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 4$$

Bundan esa, $[x]=2$, $[x]=4$ kelib chiqadi. Bu yechimlarni sistemaga olib borib qo'ysak;

$$\begin{cases} [x] = 2 \\ \{y\} = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} [x] = 4 \\ \{y\} = 3 \end{cases}$$

Berilgan sistemalardan ikkinchisi yechimga ega emas, demak yechim

$$\begin{cases} 4 \leq x < 5 \\ y = n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2.3. Noma'lumning butun va kasr qismi qatnashgan tengsizliklarni yechish.

Sonning butun va kasr qismining ta'rifidan va ularning xossalaridan foydalangan holda, butun va kasr qismi qatnashgan tengsizliklarni yechishning bir nechta usullarini ko'rib o'tamiz.

1. $[f(x)] \geq a$ ko'rinishdagi tengsizliklar.

Agar $a \in \mathbb{Z}$ bo'lganda yuqoridagi ko'rinishdagi tengsizliklar ikki ko'rinishda qaraladi;

1. Agar $[f(x)] \geq a$ bo'lsa, $f(x) \geq a$ bo'ladi;
2. Agar $[f(x)] > a$ bo'lsa, $f(x) \geq a + 1$ bo'ladi.

Agar $a \notin \mathbb{Z}$ bo'lsa, $[f(x)] \geq a$ yoki $[f(x)] > a$ tengsizlikning yechimi $f(x) \geq [a] + 1$ kabi olinadi.

Misol 1. $[2x - 3] \geq 5$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Yuqoridagi shartlarga ko'ra tengsizlikni yechamiz;

$$2x - 3 \geq 5 \Rightarrow x \geq 4$$

Berilgan tengsizlikning yechimi $x \in [4; \infty)$.

Misol 2. $[3x - 1] > -2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Yuqoridagi shartlardan ikkinchisiga ko'ra,

$$3x - 1 \geq -2 + 1 \Rightarrow x \geq 0$$

Berilgan tengsizlikning yechimi $x \in [0; \infty)$.

Misol 3. $[2x + 5] > 3,4$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Berilgan tengsizlikni quyidagicha yechamiz;

$$2x + 5 \geq [3,4] + 1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Berilgan tengsizlikning yechimi $x \in [-\frac{1}{2}; \infty)$.

Misol 4. $\frac{4[x]+2}{2[x]-3} > 2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Ifodani tengsizlikning bir qismiga o'tkazib yechamiz;

$$\frac{4[x]+2}{2[x]-3} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{8}{2[x]-3} > 0.$$

Bu tengsizlikdan $[x] > 1,5$ hosil bo'ladi.

$$x \geq [1,5] + 1 \Rightarrow x \geq 2.$$

Berilgan tengsizlikning yechimi $x \in [2; \infty)$.

2. $[f(x)] \leq a$ ko'rinishdagi tengsizliklar.

Agar $a \in \mathbb{R}$ bo'lsa, sonning butun qismining ta'rifiga ko'ra,

$[f(x)] \leq a$ (yoki $[f(x)] < a$) ko'rinishidagi tengsizlikning yechimi

$f(x) < [a] + 1$ bo'ladi.

Misol 1. $\left[\frac{2x+3}{1-x} \right] \leq \pi$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $[\pi] = 3$ bo'lgani uchun $\frac{2x+3}{1-x} < 4$ ni hosil qilamiz, uning

yechimi: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup (1; \infty)$ bo'ladi.

Misol 2. $[3x-2] < 3$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $3x-2 < [3]+1$ tengsizlikni yechib, $x < 2$ yechimni hosil qilamiz.

Misol 3. $[x]^2 - 7[x] + 6 \geq 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $[x]=t$ kabi belgilash olamiz, $t^2 - 7t + 6 \geq 0$ tengsizlikni yechamiz;

Bu tengsizlikning yechimi

$$\begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] \leq 1 \\ [x] \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Yechim: $x \in (-\infty; 2) \cup [6; \infty)$.

3. Sonning kasr qismi qatnashgan tengsizliklar.

Sonning kasr qismining ta'rif va xossalardan foydalangan holda kasr qismi qatnashgan tengsizliklarni yechamiz.

Misol 1. $\{x\} < 0,2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Sonning kasr qismining ta'rifidan, $n \leq x < 0,2 + n$ tengsizlik bajariladi. Berilgan tengsizlikning yechimi $x \in [n; n + 0,2)$, $n \in \mathbb{Z}$

Misol 2. $\{x\} > 0,2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Sonning kasr qismining ta'rifidan, $0,2 + n < x < 1 + n$ tengsizlik o'rinli. Berilgan tengsizlikning yechimi $x \in (n + 0,2; n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$

Misol 3. $\{x\} > 2$ tengsizlikni yeching.

Yechish: Sonning kasr qismi $[0;1)$ oraliqda ekanligidan, berilgan tengsizlik yechimga ega emas.

Misol 4. $\{x\}^2 - \frac{5\{x\}}{6} + \frac{1}{6} < 0$ tengsizlikni yeching.

Yechish: $\{x\} = t$ kabi belgilash olib tengsizlikni yechamiz,

$$\frac{1}{3} < \{x\} < \frac{1}{2}; \frac{1}{3} + n < x < \frac{1}{2} + n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

X U L O S A

Mazkur bitiruv malakaviy ishida tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish usullari o`rganilgan. Ishda sonning butun va kasr qismi, tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan funksiyaning grafigini qurish va uning xossalari o`rganildi.

Bitiruv malakaviy ishidan quyidagi xulosalarni olamiz:

- Sonning butun va kasr qismi hamda uning xossalari o`rganildi;
- Tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan ba'zi bir funksiyalar o`rganilda hamda ularning grafigi yasaldi;
- Sonli funksiyalar va uning amaliy tadbiqlari o`rganildi;
- $[f(x)] = a$ ko'rinishidagi tenglamani yechish usullari ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi;
- $[f(x) + a] = b$ ko'rinishidagi tenglamani yechish usullari ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi;
- $[f(x)] = g(x)$ ko'rinishidagi tenglamalarni yechish usullari ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi ;
- Belgilash usulidan foydalanib tenglamani yechish usullari ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi ;
- Sonning kasr qismi qatnashgan tenglamalarni yechish usullari ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi ;
- Butun va kasr qismi qatnashgan tenglamani yechish usullari ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi ;
- Tarkibida butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalarni grafik usulida yechish ko'rsatib o'tildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi;
- Tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglamalar sistemasini yechish usullari yoritib berildi va aniq misollar yordamida yoritib berildi;

- Tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tengsizliklarni yechish usullari yoritib berildi va aniq misollar yordamida yoritildi.
- Tarkibida sonning butun va kasr qismi qatnashgan tenglama va tengsizliklarni yechish usullari bo'yicha ko'rsatmalar ishlab chiqildi.

Adabiyotlar ro'yxati

[1]. Karimov I.A. Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch. T.: Ma'naviyat. 2008 y.

- [2]. Karimov I.A. Barkamol avlod orzusi. Nashr uchun mas`ul Risqiyev T. 1999 y.
- [3]. R.N.Nazarov, B.T. Toshpo'latov, A.D.Do'sumbetov Algebra va sonlar nazariyasi. II qism.T. "O'qituvchi" 1995 y.
- [4]. A. Gaziyeu, I. Ismoilov, M. Yaxshiboyev Funksiyalar va grafiklar. "Voriz" T. 2006 y.
- [5]. Tolagenov B. Matematikadan praktikum. T. "O'qituvchi" 1993 y.
- [6].A. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari (Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun. I qism. T."O'qituvchi" 2008 y.
- [6]. www.sernam.ru
- [7]. www.ziyonet.uz
- [8]. www.xplusy.isnet.ru