

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ
TA'LIM VAZIRLIGI**

**A. QODIRIY NOMIDAGI JIZZAX DAVLAT PEDAGOGIKA
INSTITUTI FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI**

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI KAFEDRASI

Himoya qilishga ruxsat beraman
Fizika – matematika fakulteti dekani
_____ dots E.Qurbonov
“ _____ ” _____ 2015 yil

**Fizika – matematika fakulteti
B 5110100 Matematika o'qitish metodikasi
bo'yicha bakalavr darajasini olish uchun**

“Uchburchaklar va ularga doir turli masalalarni yechish” mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Bajaruvchi: JDPI „Matematika o'qitish metodikasi“
bitiruvchisi: _____ Islomov B.

Ilmiy rahbar: _____ o'qt. Urinboyev F.

BMI “Matematika o'qitish metodikasi” kafedrası yig'ilishi qarori bilan
(Qaror № _____ “ _____ ” _____ 2015 yil) himoyaga tavsiya etildi

Kafedra mudiri: dots. O. Abdullayev _____

Jizzax – 2015

MUNDARIJA

KIRISH.	3
1§ Uchburchaklar tengsizligi.	4
2§ Uchburchaklarning turlari..	6
3§ To'g'ri burchakli uchburchakda tomonlar bilan burchaklar orasidagi munosabatlar.	17
4§ Asosiy trigonometrik ayniyatlar.	19
5§ Teskari teorema.....	23
6§ Uchburchakdagi metrik munosabatlar.	27
7§ Uchburchakdagi ajoyib nuqtalar.	32
8§ Masalalar.	37
XULOSA.	43
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.	44

KIRISH

Masalaning qo'yilish uchburchaklar va ularga doir turli masalalarni yechish metodikasi qaralgan.

Masalaning dolzarbligi Uchburchaklar mavzusi tabiatda va texnikada ko'pgina masalalarni yechishda muhim ro'l o'ynaydi.

Ishning maqsadi va vazifalari Rivojlangan mamlakatlarda ishlab chiqarish texnologiyalarining yangilanayotganligi, qisqa muddatda fan sohasida yuz berayotgan o'zgarishlar, texnik vositalarning tobora keng qo'llanilayotganligi kadrlarning o'z bilimlarini tegishli sohalar bo'yicha yangiliklar bilan muntazam to'ldirib turishi lozimligini taqozo etmoqda. Bu o'zgarishlar zaminida geometriya fanining ham ahamiyati katta. Shu sababli ushbu bitiruv malakaviy ishida uchburchak tomonlari va burchaklari orasidagi metrik munosabatlar chuqur o'rganilgan, aniqroq qilib aytganda elementar geometriyaning uchburchaklarga doir metrik munosabatlari sinuslar teoremasi, kosinuslar teoremlarining isboti va ularga doir misollar, masalalar qaralgan.

Bitiruv isining asosiy maqsadi uchburchaklar va ularga doir turli masalalarni yechish masalasini o'rganishdan iborat bu ishlar bilan R.Dekart, A.Jirar va boshqalar shug'ullanishgan.

Ishning ilmiy ahamiyati Ishning ilmiy ahamiyati berilgan uchburchaklar mavzusini ayrim formulalar yordamida tekshirishdan iborat.

Ishning amaliy ahamiyati. Ishning amaliy ahamiyati uchburchaklarga oid masalalar yechimi qaraladi.

Ishning tuzilishi. Malakaviy bitiruv ishi mundarija kirish bitta bob Ushbu bitiruv malakaviy ishi kirish, 8 ta paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'lib, uchburchaklar haqida ma'lumot beradi.

Olingan natijalar. Ushbu bitiruv malakaviy ishida quyidagi natijalar olingan:

1. Ixtiyoriy uchburchak ikki tomoni kvadratlari ayirmasi bu tomonlarning uchburchakning uchinchi tomoniga mos proyeksiyalari kvadratlari ayirmasiga teng.
2. Agar ABC uchburchakning BC tomonida ichki D nuqta olingan bo'lsa, $AB^2 \cdot DC^2 + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot DC$ tenglik bajariladi.

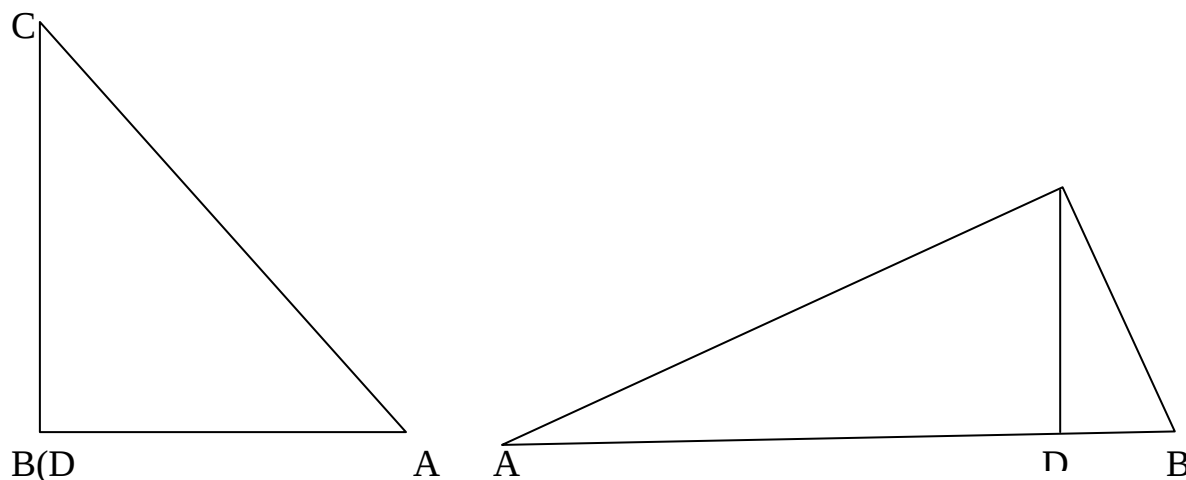
1§ Uchburchaklar tengsizligi

Agar A va B nuqtalar bo'lsa ular orasidagi masofa deb AB kesmaga aytiladi. A va B nuqtalar ustma ust tushsa, ular orasidagi masofa 0 ga teng deb olinadi.

Teorema: Uchta nuqta har qanday bo'lganda ham bu nuqtalarning ham bu nuqtalarning istalgan ikkitasi orasidagi masofa ulardan uchinchi nuqttagacha bo'lgan masofalarning yig'indisidan katta emas.

Bu esa bu masofalarning har biri qolgan ikkitasining yig'indisiga teng yoki undan kichik demakdir.

Isboti: A, B, C – Berilgan uchta nuqta bo'lsin. Agar uchta nuqtadan ikkitasi yoki uchala nuqtaning hammasi ustma ust tushsa, teoremaning tasdigi ravshan. Agar nuqtalarning hammasi xar hil va bir to'g'ri chiziqda yotsa, ulrdan bittasi masalan, B nuqta qolgan ikkitasining orasida u xolda $AB+BC=AC$. Bundan uchta masofaning har biri, qolgan ikkitasining yig'indisidan katta emasligi ko'rinib turibdi. Endi nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi deb faraz qilaylik . (1-rasm)



(1-rasm)

$AB < AC + BC$ ekanini isbotlaymiz. AB tog'ri chiziqqa CD perpendikulyar tushiramiz. Isbotlanganiga ko'ra $AB \leq AD+BD$

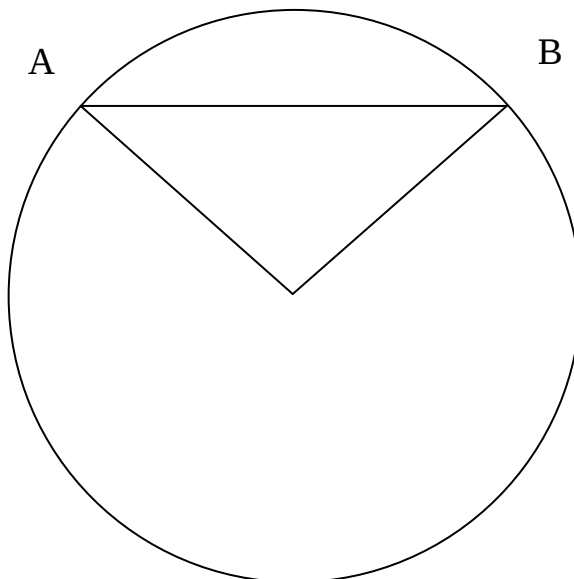
$AD < AC$, $BD < BC$ bo'lgani uchun $AB < AC + BC$. Teorema isbotlandi. Shuni takidlaymizki, nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmagan holda , uchburchak tengsizligi

qatiiydir. Bu esa har qanday uchburchakda har bir tomon qolgan ikki tomon yig'indisidan kichik demakdir.

Masala: aylananing har qanday vatari diametridan katta emasligini va o'zi diametr bo'lgandagina diametriga teng bo'lishini isbotlang.

Yechilishi: (2-rasm) Uchburchak tengsizligiga ko'ra $AB \leq OA + OB = 2R$ shu bilan birga , agar O markaz AB kesmada

O'tmasa , u holda tengsizlik qatiy boladi. Tenglik vatar markazidan o'tgandagina , yani diametr bo'lgandagina o'rinalidir.



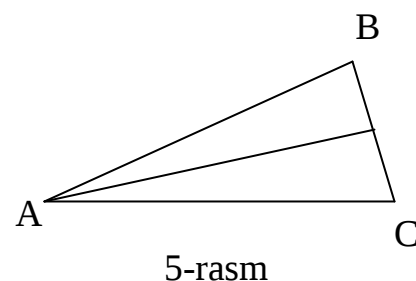
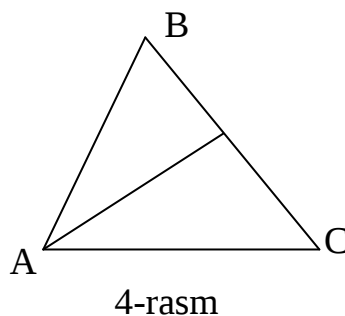
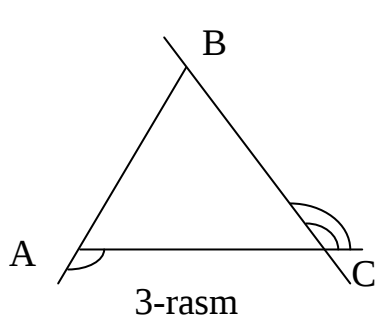
(2-rasm)

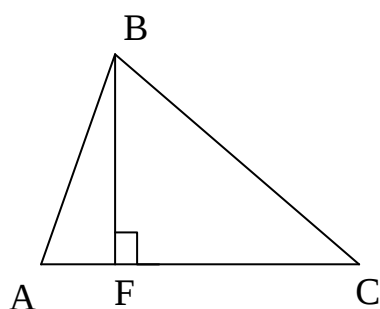
2§.Uchburchaklarning turlari

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta A,B,C nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalarni ketma-ket kesmalar orqali tutashtirib, uchburchak deb atalgan va ABC kabi belgilanadigan shaklni hosil qilamiz. A, B, C nuqtalar uchburchakning uchlari, AB, BC, CA kesmalar uning tomonlari deyiladi (3-rasm). AB, BC, CA kesmalar yopiq siniq chiziq hosil qiladi va shu sababli uchburchakning ta'rifini quyidagicha berish mumkin: tekislikning uch bo'g'indan iborat yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan qismi uchburchak deyiladi. $\angle CAB$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ burchaklar ABC uchburchakning ichki burchaklari deyiladi, ular ba'zan bitta harf orqali belgilanadi: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Uchburchakning AC tomonini C nuqtadan o'ngga davom ettiramiz. Natijada hosil qilingan $\angle BCD$ burchak ABC uchburchakning tashqi burchagi deyiladi.

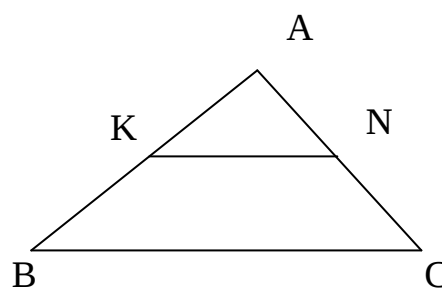
Tomonlariga ko'ra uchburchaklar uch turga: teng yonli, teng tomonli yoki muntazam, turli tomonli uchburchaklarga bo'linadi. Ikki tomoni bir-biriga teng bo'lgan uchburchak teng yonli deyiladi. Uchta tomoni o'zaro teng bo'lgan uchburchak teng tomonli yoki muntazam deyiladi.

Tomonlari har xil uzunliklarga ega bo'lgan uchburchak turli tomonli deyiladi. Burchaklariga ko'ra uchburchaklar uch xil bo'ladi. Barcha ichki burchaklari o'tkir bo'lgan uchburchak o'tkir burchakli deyiladi. Bitta ichki burchagi o'tmas bo'lgan uchburchak o'tmas burchakli deyiladi. Bitta ichki burchagi 90° ga teng bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli deyiladi.





6-rasm



7-rasm

Ta’rif. Uchburchakning A uchini uning qarshisidagi BC tomonning o’rtasi K bilan tutashtiruvchi AK kesma uchburchakning medianasi deyiladi (4-rasm). Ta’rifdan korinadiki, ABC da uchta mediana o’tkazish mumkin. AD nur ABC dagi $\angle BAC$ ni teng ikkiga bo’lsin, ya’ni $\angle BAD = \angle DAC$ hamda AD nurning uchburchak BC tomoni bilan kesishish nuqtasi D bo’lsin. U vaqtda AD kesma ABC uchburchak A burchagining bissektrisasi deyiladi (5-rasm). Ravshanki, uchburchakda uchta bissektrisa o’tkazish mumkin. ABC uchburchakning A uchidan BC to’g’ri chiziqqa perpendikulyar tushiramiz va F ularning kesishish nuqtasi bo’lsin. U vaqtda AF kesma uchburchakning balandligi deyiladi (6-rasm). Uchburchakda uchta balandlik o’tkazish mumkin. ABC uchburchakning AB va AC tomonlari o’rtalari K va N nuqtalarni tutashtiruvchi kesma uchburchakning o’rta chizig’i deyiladi (7-rasm). Uchburchakda uchta o’rta chiziq o’tkazish mumkin.

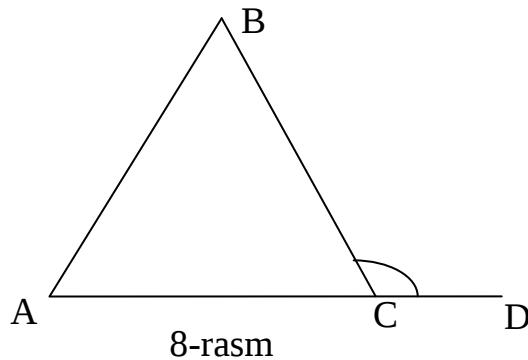
1-teorema. Uchburchakning o’rta chizig’i uning asosiga parallel va asosi uzunligining yarmiga teng:

(1)

2- teorema. Uchburchak ichki burchaklarining yig’indisi 180° ga teng.

3-teorema . Uchburchakning tashqi burchagi unga qo’shni bo’lmagan ichki burchaklar yig’indisiga teng (8-rasm):

$$\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC. \quad (2)$$



Isboti. Ikkita shartdan foydalanamiz: birinchidan, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng; ikkinchidan, uchburchakning tashqi burchagi bilan uchburchakning unga qo'shni bo'lgan burchagi yig'indisi ham 180° ga teng. Bulardan (8-rasm) bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisidan ikkinchisini ayiramiz:

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB - \angle ACB - \angle BCD = 0.$$

U vaqtda

$$\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$$

teorema isbotlandi.

Ikkita ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchak berilgan bo'lib, ularning birini ikkinchisining ustiga qo'yganda mos tomonlari va mos uchlari bir-biri bilan ustma-ust tushsa, ya'ni

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1$$

$$BC = B_1C_1 \text{ va } \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$$

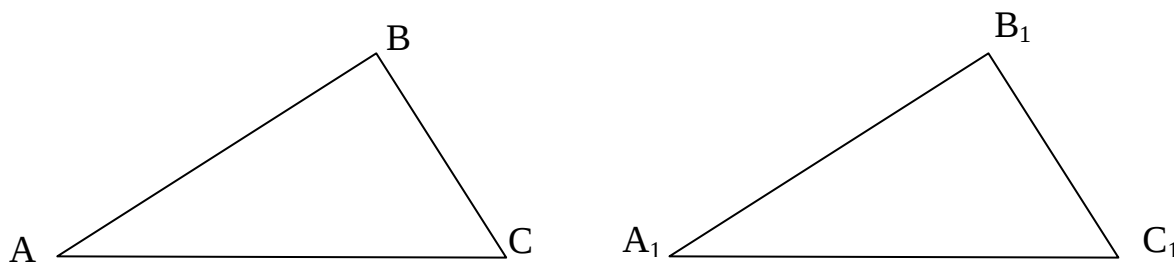
bo'lsa, uchburchaklar o'zaro teng deyiladi (9-rasm). Uchburchaklarning tengligi alomatlarini.

1. Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi, mos ravishda, ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi, ya'ni agar $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, va $\angle A = \angle A_1$ bo'lsa (10-rasm), $ABC = A_1B_1C_1$ bo'ladi.

2. Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi, mos ravishda, ikkinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga

teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi, ya'ni agar $AB = A_1B_1$ va $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ bo'lsa (9-rasm), $ABC = A_1B_1C_1$ bo'ladi.

3. Agar bir uchburchakning uchta tomoni, mos ravishda, ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi, ya'ni agar $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ bo'lsa (9-rasm), $ABC = A_1B_1C_1$ bo'ladi.



9-rasm

Teng yonli uchburchak va uning xossalari.

ABC berilgan bo'lib, unda $AB = BC$, ya'ni u teng yonli bo'lsin. Bu uchburchak quyidagi xossalarga ega.

1. Teng yonli uchburchakning uchidan uning asosiga o'tkazilgan bissektisa ham mediana, ham balandlik bo'ladi. Boshqacha aytganda, agar ABC da $AB = BC$ va $\angle ABD = \angle DBC$ bo'lsa (10-rasm), u vaqtda $BD \perp AC$ va $AD = DC$ bo'ladi.

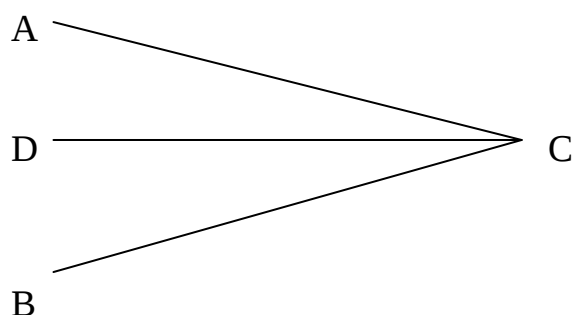
2. Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklar o'zaro teng, ya'ni agar ABC da $AB = BC$ bo'lsa (10-rasm), $\angle A = \angle C$ bo'ladi.

Isboti . Teng yonli ABC da ($AB = BC$) B uchining BD bissektisasini o'tkazamiz, ya'ni $\angle ABD = \angle DBC$. 1-xossaga muvofiq,

$$BD \perp AC \text{ va } AD = DC.$$

Endi ABD ni ABC ning BD medianasi bo'yicha buramiz. Modomiki, $\angle DBC = \angle DBA$ ekan, ABD ni BDC ustiga qo'yganda, BA tomon BC tomon bo'ylab boradi. $DC = DA$ bo'lganligidan, A nuqta C nuqta bilan ustma-ust tushadi hamda BA va BC tomonlar ham ustma-ust tushadi, $BA = BC$. Endi $BC = BA$ va $CD = DA$ bo'lganligidan, ular orasidagi burchaklar ham o'zaro teng bo'ladi, ya'ni $\angle BAD = \angle BCD$. Xossa isbotlandi. Teng yonli uchburchakda yon tomonlarga o'tkazilgan:

a) balandliklar; b) medianalar; d) bissektrisalar, mos ravishda, o‘zaro teng bo‘ladi. Teng tomonli uchburchakning ixtiyoriy uchidan o‘tkazilgan balandlik, mediana va bissektrisa ustma-ust tushadi.



10-rasm

Uchburchaklarning o‘xshashligi.

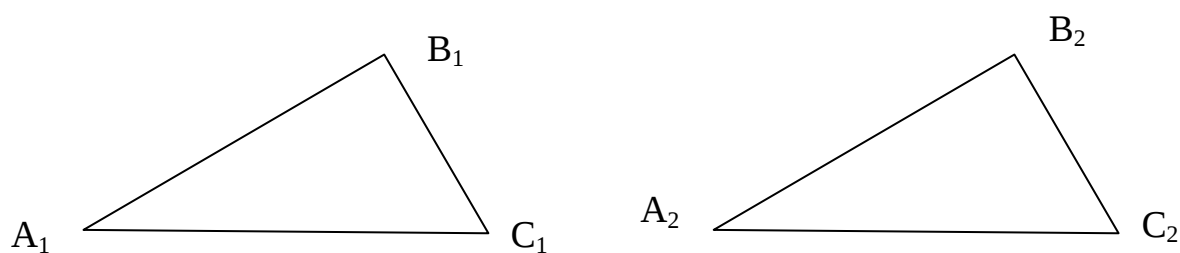
Agar ikkita $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ uchburchak berilgan bo‘lib (11-rasm):

1) ularning mos tomonlari o‘zaro proporsional, ya’ni

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

2) ularning mos burchaklari o‘zaro teng, ya’ni $\angle A_1 = \angle A_2$.

$\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$ bo‘lsa, bu uchburchaklar o‘xshash deyiladi.



11-rasm.

O‘xshash uchburchaklar mos tomonlarining nisbati bu uchburchaklarning o‘xshashlik koeffitsiyenti deb ataladi:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = k$$

Uchburchaklarning o‘xshashligi $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ kabi yoziladi. O‘xshash, lekin bir-biriga teng bo‘lmagan uchburchaklarning mavjud bo‘lishini isbotlaymiz.

1 - t e o r e m a . Agar burchakning tomonlari parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilsa, hosil qilingan uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.

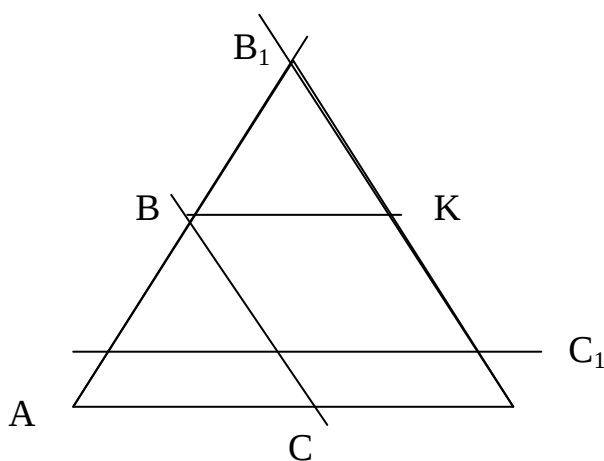
I s b o t i . Bizga $\angle BAC$ berilgan bo‘lib, uning tomonlari o‘zaro parallel BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilgan (12-rasm), ya‘ni $BC \parallel B_1C_1$ bo‘lsin. Buning natijasida hosil qilingan $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ ning o‘xshashligini isbotlaymiz.

Ularda $\angle A$ —umumiy va o‘zaro parallel BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar va BB_1 kesuvchi hosil qilgan $\angle ABC$ hamda $\angle AB_1C_1$ mos burchaklar sifatida bir-biriga tengdir, $\angle ABC = \angle AB_1C_1$. Bundan esa uchburchaklarning uchinchi burchaklari ham o‘zarotengligi kelib chiqadi $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

Endi uchburchaklarning mos tomonlari proporsionalligini ko‘rsatamiz. $\angle BAC$ ning tomonlari o‘zaro parallel BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilganligidan, Fales teoremasiga ko‘ra bo‘ladi. Bu tenglikning har ikkala tomoniga 1 ni qo‘shib, umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{BB_1}{AB} + 1 = \frac{CC_1}{AC} + 1, \quad \frac{BB_1 + AB}{AB} = \frac{CC_1 + AC}{AC}, \quad \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$$

Uchinchi tomonlarning ham proporsionalligini ko‘rsatamiz.



12-rasm.

B nuqtadan $BK \parallel AC$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (12-rasm). $BC \parallel B_1C_1$, $BK \parallel CC_1$ bo‘lganligidan $KC_1 = BC$ bo‘ladi. Shunday qilib, $\angle AB_1C_1$ burchakning tomonlari o‘zaro parallel BK va AC_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilgan, ya‘ni $BK \parallel AC_1$. Endi, yuqoridagiga o‘xshash, Fales teoremasidan foydalanib,

$\frac{B_1C_1}{KC_1} = \frac{AB_1}{AB}$ yoki $\frac{B_1C_1}{BC_1} = \frac{AB_1}{AB}$ ekanligini isbotlaymiz. Shunday qilib, $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$

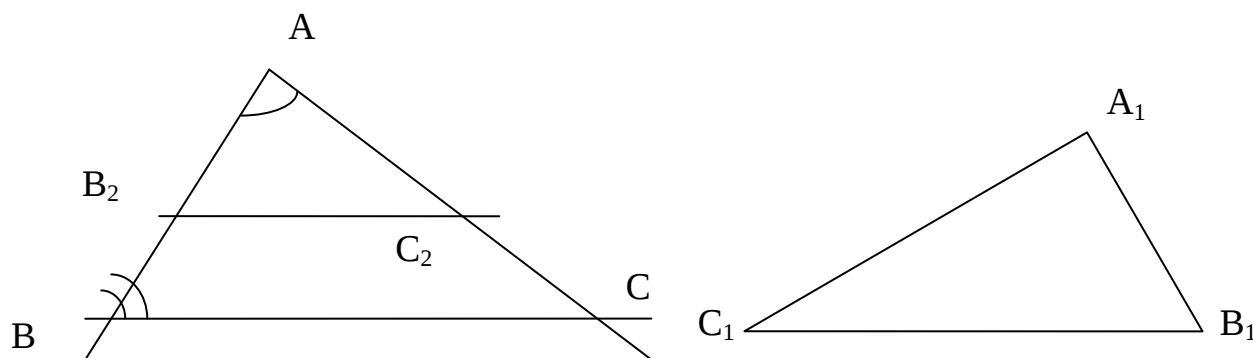
bo'ladi. Endi uchburchaklarning o'xshashlik alomatlarini qaraymiz.

2 - t e o r e m a (uchburchaklar o'xshashligining birinchi alomati). Agar bir uchburchakning ikki burchagi ikkinchi uchburchakning, mos ravishda, ikki burchagiga teng bo'lsa, bu uchburchaklar o'xshash bo'ladi.

I s b o t i. Teoremaning sharti bo'yicha, $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ lar uchun $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ tengliklar bajariladi (13-rasm).

Endi $\angle C$ va $\angle C_1$ ning o'zaro tengligi va uchburchaklar mos tomonlarining proporsionalligini ko'rsatish qoldi, xolos. Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi formulasidan,

$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1$. AB tomonda A nuqtadan boshlab $AB_2 = A_1B_1$ kesmani ajratamiz va B_2 nuqta orqali $B_2C_2 \parallel BC$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. 1- teorema ko'ra, $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$. Endi $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ tenglikni isbotlash qoldi. Yasashga ko'ra $AB_2 = A_1B_1$, shartga ko'ra, $\angle A = \angle A_1$. Modomiki, $B_2C_2 \parallel BC$ ekan, mos burchaklar sifatida $\angle AB_2C_2 = \angle ABC$ bo'ladi. Lekin shartga ko'ra $\angle B = \angle B_1$ va shuning uchun $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$. Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$. Modomiki, $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ ekan, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, ya'ni: 11-chizma bo'ladi. Teorema isbotlandi.



13-rasm

3-t e o r e m a (uchburchaklar o'xshashligining ikkinchi alomati). Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning (13-rasm.) mos tomonlariga

proporsional bo'lib, ular orasidagi burchaklar o'zaro teng bo'lsa, uchburchaklar o'xshash bo'ladi.

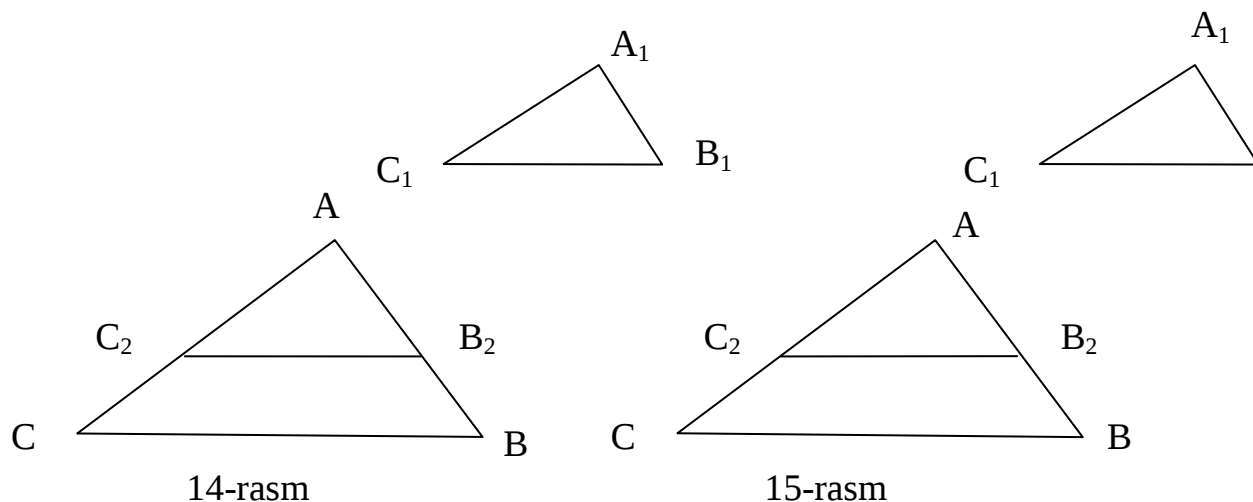
I s b o t i . Teoremaning shartiga ko'r va $\angle A = \angle A_1$ (14-rasm). AB tomonda A uchdan boshlab,

$AB_2 = A_1B_1$ kesma ajratamiz va B_2 nuqtadan $B_2C_2 \parallel B_1C_1$ to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. U vaqtda $\triangle AB_2C_2 \propto \triangle ABC$ va bo'ladi. Yasash bo'yicha $AB_2 = A_1B_1$ bo'lganligidan, hosil qilingan proporsiyalarni (nisbatlarni) taqqoslaymiz. Proporsiyalarning chap tomonlari teng bo'lganligidan ularning o'ng tomonlari ham teng bo'lishi kerak: Bundan $AC_2 = A_1C_1$ bo'lishi kelib chiqadi. U vaqtda ikki tomoni va ular orasidagi burchagi teng bo'lgan $\triangle A_1B_1C_1$ va $\triangle AB_2C_2$ o'zaro teng, ya'ni $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ bo'ladi. Demak, $\triangle A_1B_1C_1 \triangle ABC$, teorema isbotlandi.

4-teorema (uchburchaklar o'xshashligining uchinchi alomati). Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta mos tomonlariga proporsional bo'lsa, bu uchburchaklar o'xshash bo'ladi.

I s b o t i . Shartga ko'ra , Biz $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ bo'lishini isbotlashimiz kerak (15-rasm). $\triangle ABC$ ning A uchidan $AB_2 = A_1B_1$,

$AC_2 = A_1C_1$ kesmalarni ajratamiz. O'xshashlikning yuqorida isbotlangan birinchi alomatiga binoan $\triangle AB_2C_2$ va $\triangle ABC$ bo'ladi. $AC_2 = A_1C_1$ bo'lganligidan, yuqorida yozilgan proporsiyalardan $B_2C_2 = B_1C_1$



bo'lishi kelib chiqadi. U vaqtda uchburchaklar tengligining uchinchi alomati bo'yicha $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ bo'ladi. Yasashga ko'ra $AB_2 = A_1B_2$, $AC_2 = A_1C_1$ hamda isbotlanganiga asosan $B_2C_2 = B_1C_1$ bo'ladi. Modomiki, $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$ va $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ ekan, $ABC \sim A_1B_1C_1$. O'xshash uchburchaklarning qo'shimcha xossalari ham qarab chiqamiz.

5- t e o r e m a . O'xshash uchburchaklarning perimetrlari ularning o'xshash tomonlari kabi nisbatda bo'ladi.

I s b o t i . ΔABC da P —perimetr, a, b, c — uning tomonlari, $\Delta A_1B_1C_1$ da esa, P_1 —perimetr, a_1, b_1, c_1 —uning tomonlari bo'lsin va shartga ko'ra, $\Delta ABC \sim A_1B_1C_1$ (16-rasm). O'xshash uchburchaklarning aniqlanishidan, ularning o'xshash tomonlari proporsional bo'ladi: Bundan $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ tenglikni $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ ko'rinishda yozib olamiz.

Oxirgi tenglikning har ikki (16-rasm) tomoniga 1 ni qo'shamiz:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{a_1}{b_1} + 1$$

yoki

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a_1+b_1}{b_1}, \frac{a+b}{a_1+b_1} = \frac{b}{b_1}$$

Shunga o'xshash

$$\frac{b+c}{b_1+c_1} = \frac{c}{c_1}$$

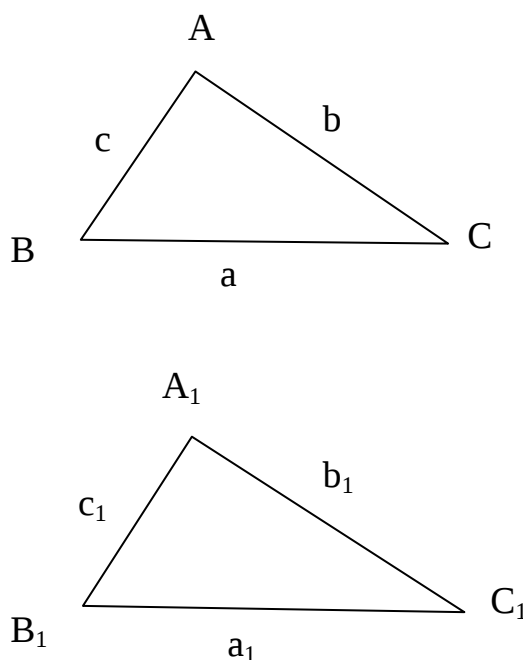
deb yozish mumkin. U holda

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{a_1+b_1+c_1}{c_1}, \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{c}{c_1}$$

munosabatni olamiz. Berilishiga ko'ra

$P = a + b + c$, $P_1 = a_1 + b_1 + c_1$ bo'lganligidan, talab qilingan munosabatlarni olamiz. Teorema isbotlandi.

6 - t e o r e m a . O'xshash uchburchaklarning yuzlari ularning o'xshash tomonlari kvadratlari kabi nisbatda bo'ladi, ya'ni $S_{\Delta ABC}$ ning yuzi, $S_1 - \Delta A_1B_1C_1$ ning yuzi, a va a_1 , b va b_1 , mos ravishda, ularning o'xshash tomonlari bo'lsa (16-rasm).



16-rasm

I s b o t i . O'xshash $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ da $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = \gamma$ bo'lsin. Unda ularning yuzlari, mos ravishda, $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ va $S_1 = \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \gamma$ bo'ladi. S ni S_1 ga bo'lamiz: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ bo'lganligidan, yuqorida isbotlanganiga asosan, Shu sababli, va teorema isbotlandi.

I z o h . Agar o'xshash uchburchaklarning perimetrlari, mos ravishda, P va P_1 bo'lsa, 5-teoremada isbotlangani bo'yicha, o'xshash uchburchaklar yuzlarining nisbati uchun munosabat o'rinli bo'ladi.

To'g'ri burchakli uchburchak

T a ' r i f . Bitta ichki burchagi 90° bo'lgan uchburchak to'g'ri burchakli deyiladi (17-rasm $\angle C = 90^\circ$). Uchburchakning to'g'ri burchak hosil qiluvchi AC va BC tomonlari uning katetlari, to'g'ri burchak qarshisida yotgan AB tomoni uning gipotenuzasi deyiladi. Endi to'g'ri burchakli uchburchakning xossalarini ko'rib o'tamiz.

1 - t e o r e m a . Agar to'g'ri burchakli uchburchakning to'g'ri burchagi uchidan gipotenuzaga balandlik o'tkazilgan bo'lsa:

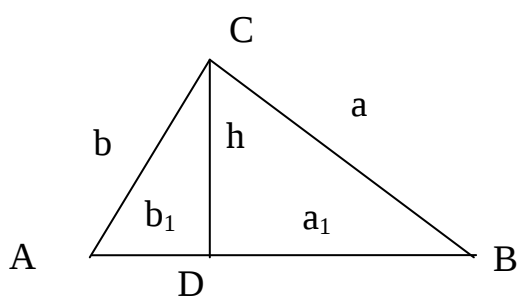
1) balandlik gipotenuzada u hosil qilgan kesmalar orasida o'rtta proporsional miqdordir;

2) har bir katet gipotenuza va bu katetning gipotenuzaga proyeksiyasi orasida o'rtta proporsional miqdordir.

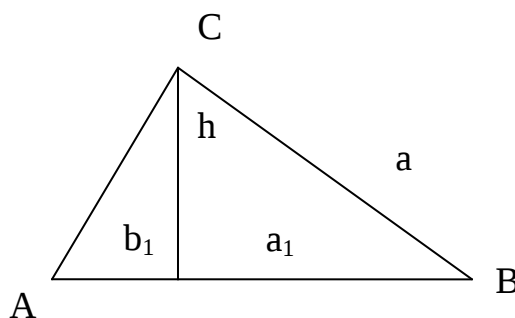
I s b o t i . Berilgan uchburchakning katetlari va gipotenuzasini, $AC=b$, $BC=a$, $AB = c$ deb, katetlarning gipotenuzaga proyeksiyalarini $AD = b_1$, $DB = a_1$ deb belgilaymiz (17-rasm).

1. $CD = h$ balandlik tushirish natijasida hosil qilingan $\triangle ACD$ va $\triangle BCD$ to'g'ri burchakli bo'ladi, chunki $CD \perp AB$. Endi $\angle CAD = \alpha$ bo'lsin. To'g'ri burchakli uchburchak o'tkir burchaklarining yig'indisi 90° ga teng bo'lganligidan $\angle ACD = 90^\circ - \alpha$ bo'ladi. U vaqtda $\angle DCB = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$, ya'ni $\angle DCB = \angle CAD$. Endi $\triangle ACD$ va $\triangle BCD$ ning ikkita burchaklari o'zaro teng bo'lganligidan, $\triangle ACD \sim \triangle BCD$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu uchburchaklarda mos tomonlarining nisbatini tuzamiz: bundan talab qilingan, $h_2 = a_1 \cdot b_1$ tenglik kelib chiqadi.

2. $\triangle ABC$ va $\triangle ACD$ lar o'xshash bo'ladi, chunki ularning har ikkalasi ham to'g'ri burchakli va ularda $\angle A$ umumiydir, ya'ni $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Bu uchburchaklarda mos tomonlarning nisbati bo'ladi, bundan $b_2 = b_1 - c$ bo'lishi kelib chiqadi. Endi $\triangle ABC$ va $\triangle BDC$ ning o'xshashligidan (ularning har ikkalasi ham to'g'ri burchakli va ularda $\angle B$ umumiydir), talab qilingan ikkinchi $a^2 = a_1 \cdot c$ tenglik kelib chiqadi.



17-rasm



18-rasm

2-t e o r e m a (Pifagor). To'g'ri burchakli uchburchakda gipotenuza uzunligining kvadrati katetlar uzunliklarining kvadratlari yig'indisiga teng.

I s b o t i . Agar $\triangle ABC$ da $AB = c$ -gipotenuza, $BC = a$ va $AC = b$ - katetlar bo'lsa, Pifagor teoremasi $c^2 = a^2 + b^2$ ko'rinishda yoziladi (18-rasm). $\triangle ABC$ da $CD \perp AB$

balandlik o'tkazamiz va katetlarning gipotenuzaga proyeksiyalarini $AD = b_1$ va $DB = a_1$ kabi belgilaymiz. 1- teorema asoslanib, AC va BC katetlar uchun $b^2 = b_1 \cdot c$ va $a^2 = a_1 \cdot c$ munosabatlarni olamiz va ularni hadmahad qo'shamiz:

$b^2 + a^2 = b_1 c + a_1 c = c(b_1 + a_1) = c \cdot c$, ya'ni $b^2 + a^2 = c^2$. Teorema isbotlandi.

3§ To'g'ri burchakli uchburchakda tomonlar bilan burchaklar orasidagi munosabatlar.

A B C- to'g'ri burchakli uchburchak , uning to'g'ri burchagi C va A uchidagi o'tkir burchagi α gat eng bo'lsin. Tarifga ko'ra α burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati $\cos \alpha$ ga teng.

A burchakning sinusi deb ($\sin \alpha$ bilan belgianadi) α burchak qarshisida yotgan BC katetning AB gepotenuzaga nisbatiga aytiladi.

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$$

A burchakning tangensi deb ($\tan \alpha$ bilan belgilanadi) α burchak qarshisida yotgan BC katetning yopishgan AC katetga nisbatiga aytiladi.

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$$

Burchaklarning sinusi va tangensi, kosinusi singari burchakning faqat kattaligiga bog'liq. Haqiqatdan ham pifagor teoremasiga ko'ra ;

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

Ta'rifga ko'ra: $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$ BC ning qiymatini qo'yamiz.

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{AB^2 - AC^2}{AB^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

$\cos \alpha$ burchakning faqat kattaligiga bog'liqligi sababli $\sin \alpha$ ham faqat burchakning kattaligiga bog'liq.

Ta'rifga ko'ra: $\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$ surat va maxrajni AB ga bo'lamiz:

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Bundan $\tan \alpha$ ham faqat burchakning kattaligiga

bog'liq ekanligi ko'rinadi. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ va $\tan \alpha$ ning ta'riflaridan quydagi qoidalarga ega bo'lamiz:

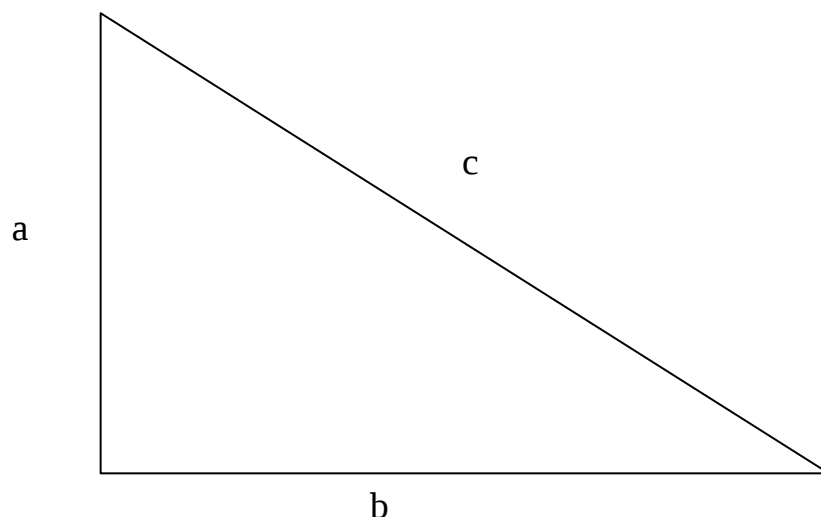
α burchak qarshisidagi katet gipotenuza bilan $\sin \alpha$ ning ko'paytmasiga teng.

α burchakka yopishgan katet gipotenuza bilan $\cos \alpha$ ning ko'paytmasiga teng.

α burchak qarshisidagi katet ikkinchi katet bilan $\tan \alpha$ ning ko'paytmasiga teng.

Bu qoidalar to'g'ri burchakli uchburchakning tomonlaridan birini va o'tkir burchagini bilan holda qolgan ikkita tomonini topish imkonini beradi. Ikkita tomonni bilgan holda o'tkir burchaklarini topish imkonini beradi.

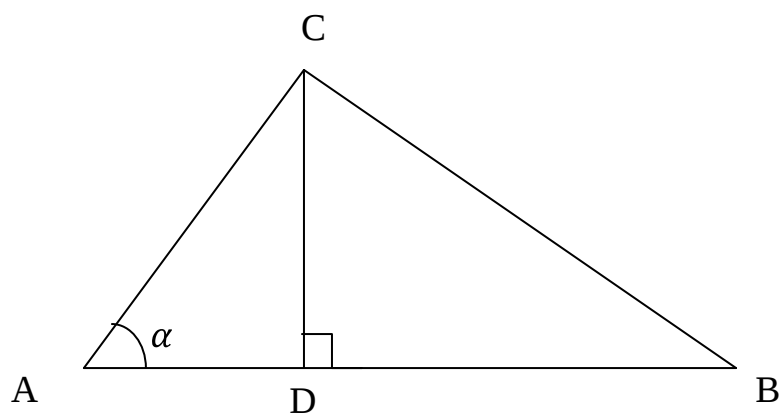
$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha, \quad a = b \tan \alpha$$



19-rasm

Masala: to'g'ri burchakli uch burchakli uchburchakning c gipotenuzasi va o'tkir burchali α berigan Katetlarni, ularning gipotenuzaga tushirilgan proeksiyalarini va gipotenuzaga tushirilgan balandligini toping.

Yechilishi (20-rasm) : $AS = AB \cos \alpha = c \cos \alpha$



(20-rasm).

$$BC = AB \sin \alpha = c \sin \alpha ; \quad AD = AC \cos \alpha = c \cos^2 \alpha;$$

$$BD = BC \sin \alpha = c \sin^2 \alpha; \quad CD = AC \sin \alpha = c \cos \alpha$$

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$ va $\operatorname{tg} \alpha$ uchun maxsus jadvallar tuzilgan. Bu jadvallar berilgan α burchak bo'yicha $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ va $\operatorname{tg} \alpha$ ni topish yoki $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ning qiymatlari tegishli burchaklarni topish imkonini beradi.

Hozirgi vaqtda shu maqsadda odatda mikrokalkulyatorlar ishlatiladi.

4§ Asosiy trigonometrik ayniyatlar

Biz ayniyatlardan birini bilamiz:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Quyidagi ayniyatlarni

Isbotlaymiz;

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

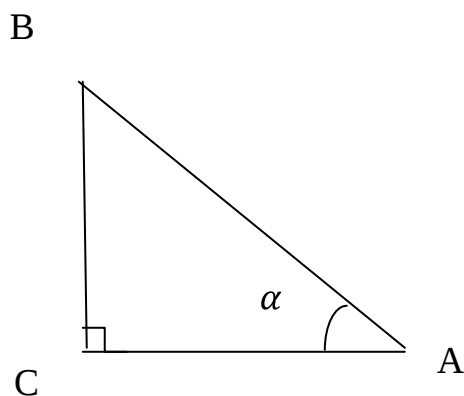
$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

A uchidagi burchagi α gat eng bo'lgan to'g'ri burchakli ixtiyoriy ABC uchburchakni olamiz; (21-rasm) Pifagor tioremasiga binoan;

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$

Tenglikning ikkala qismini AB^2 ga bo'lamiz ;

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1$$



21-rasm

Ammo $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Shunday qilib, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Bu tenglik ayniyatdir . u har qanday α o'tkir burchak uchun to'g'ri.

Ikkinchi ayniyatni hosil qilish uchun hosil qilingan ayniyatning ikkala qismini $\cos^2\alpha$ ga bo'lamiz.

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{yoki} \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ aniyaing ikkala qismi $\sin^2\alpha$ ga teng bo'lib,

Uchinchi ayniyatni hosil qilamiz. $1 + \frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$

Bu ayniyatning ahamiyati shundan iboratki, ular $\sin\alpha, \cos\alpha$ va $\tan\alpha$ dan birini bilgan holda qolan ikkitasini imkonini beradi.

Masala; agar $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ bo'lsa , $\sin\alpha$ va $\tan\alpha$ ning qiymatini hisoblang

Yechilishi; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ bo'lgani uchun:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}. \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}$$

Ba'zi burchaklarning sinus, kosinus va tangenslari uchun qiymatlar.

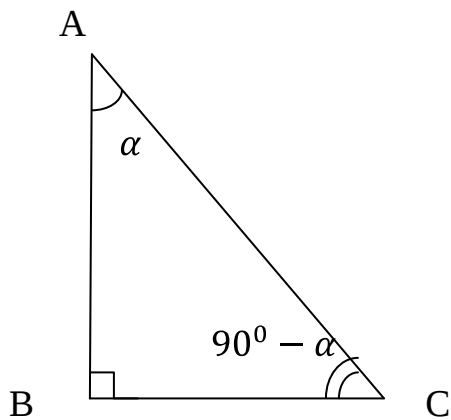
Har qanday o'tkir α burchak uchun $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Isboti; ABC uchburchak A uchidagi o'tkirkburchagi α ga teng bo'gan to'ri burchakli uchburchak bo'lsin (22-rasm). U holda uning B uchidagi o'tkir burchagi $90^\circ - \alpha$ ga teng.

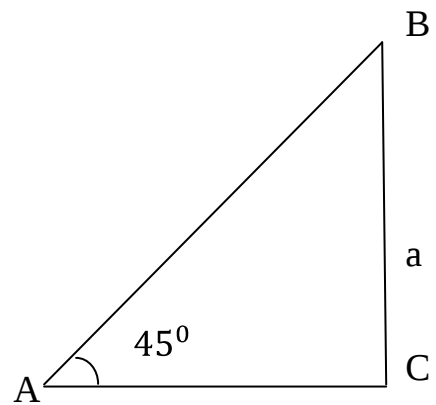
Ta'rifga binoan : $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AC}{AB}$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{BC}{AB}$

Ikkinchi va uchinchi tengliklardan : $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$. Birinchi va to'rtinchi tengliklardan: $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. teorema isbotlandi.

45°li burchakning sinusi , kosinusi va tangensini topamiz: Buning uchun o'tkir burchagi 45° ga tengbo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasaymiz. (23-rasm).



22-rasm



23-rasm

Bu uchburchakning ikkinchi o'tkir burchagi ham 45° ga teng, shu sababli tengyonli. Uchburchakning katetlari a ga teng bo'lsin. Pifagor teoremasiga ko'ra gipotenuza $a\sqrt{2}$ ga boladi. Quydagilarni topamiz:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

30° li burchakning sinusi, kosinusi va tangensini topamiz.

Teng tonli ABC uchburchak olamiz. (24-rasm). Uning AD medianasini o'tkazamiz.

U bissektrisa va balandlik bo'ladi. Shu sababli ABD uchburchak A uchidagi o'tkir burchagi 30° ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakdir. Teng tomonli uchburchakning toni a ga teng bo'lsin. U holda $BD = \frac{a}{2}$ Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Demak

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

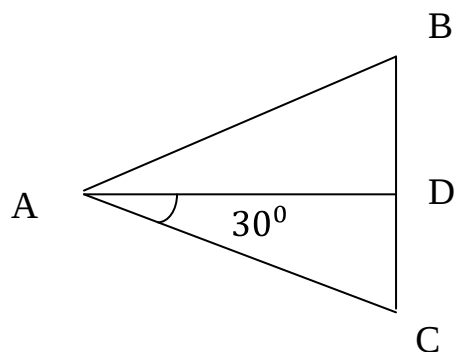
$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ bo'lgani uchun;

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$



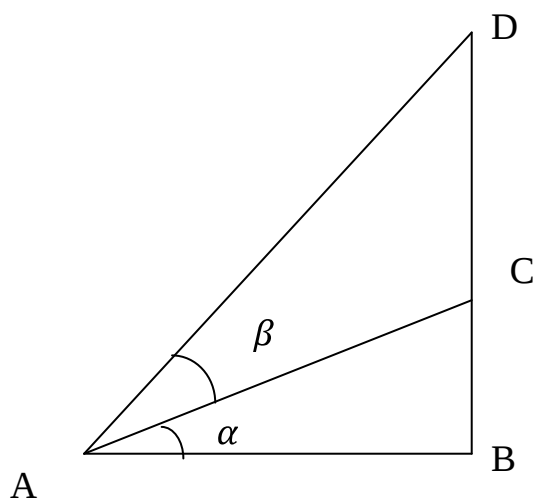
24-rasm

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}$$

Burchakning o'sishi bilan sinus, kosinus va tangensning o'zgarishi.

Teorema. O'tkir burchakning kattalashishi bilan $\sin \alpha$ va $\operatorname{tg} \alpha$ orta boradi (o'sadi), $\cos \alpha$ esa kamaya boradi.

Isboti . α va β - o'tkir burchaklar, shu bilan birga $\alpha < \beta$ bo'lsin. α va β burchaklarni AB yarim to'g'ri chiziqdan bitta yarim tekislikka qo'yamiz. (25-rasm).



25-rasm

B nuqta orqali AB ga perpendikulyar to'g'ri chiziq tushiramiz. Bu to'g'ri chiziq bizning burchaklar tomonlarini C va D nuqtalarda kesib o'tadi. $\alpha < \beta$ bo'gani uchun C nuqta B va D nuqtalar orasida yotadi. Shu sababli $BC < BD$.

Demak bir nuqtadan to'g'ri chiziqqa o'tkaziladigan og'malarning xossalriga ko'ra, $AC < AD$. $\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$, $\cos\beta = \frac{AB}{AD}$ bo'lgani uchun $\cos\alpha > \cos\beta$, ya'ni burchak kattalashganda kosinus kamayadi. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, $\cos\alpha$ esa α burchak kattalashganda kichiklashadi, shuning uchun $\sin\alpha$ kattalashadi. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, α kattalashganda $\sin\alpha$ kattalashadi, $\cos\alpha$ esa kichiklashadi, shu sababli α kattalashganda $\operatorname{tg}\alpha$ kattalashadi. Teorema isbotlandi.

5§ Teskari teorema

Teorema: To'g'ri chiziqning har bir nuqtasidan unga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin va faqat bitta.

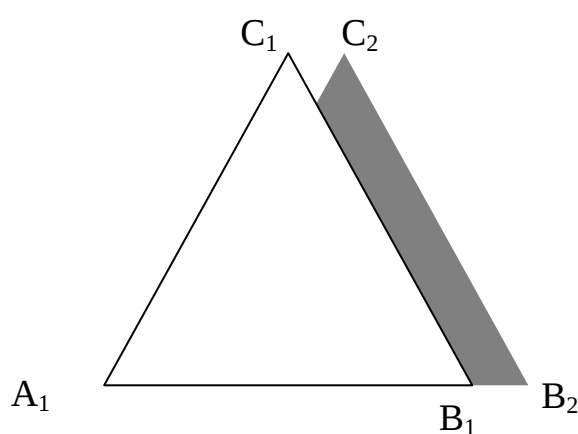
Biz yuqoridagi teoremada ishlatgan isbotlash usuli teskarisidan iabotlash usuli deyiladi. Bu isbotlash usuli shundan iboratki, biz unda oldin teorema tasdiqlagan fikrga qarama qarshi fikr to'g'ri deb faraz qilamiz. Shundan keyin aksiomalar va oldin isbotlangan teoremalarga

Asoslanib, mulohazalar yuritish yolibilan teorema shartiga zidlik qiladigan, yoki biror aksiomaga, yoki ilgari isbotlangan teoremaga zid keladigan hulosaga kelimiz. Shunga asoslanib, farazimiz noto'g'ri, demak, teoremadagi tasdiq to'g'ri degan hulosaga kelimiz.

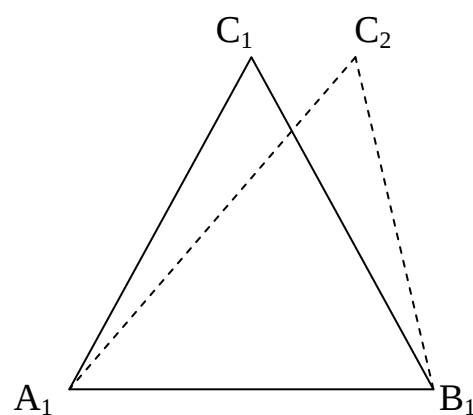
Buni yuqoridagi teoremaning isboti misolida tushuntiramiz. Teoremada to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi orqali unga faqat bitta perpendikulyar o'tkazish mumkin, deb tasdiqlanadi. Biz bunday to'g'ri chiziqlardan ikkita o'tkazish mumkin deb faraz qilib, berilgan yarim to'g'ri chiziqdan boshlab berilgan yarim tekislikka gradus o'lchovlari bir xil (90°) bolgan ikkita burchak qo'yish mumkin, degan hulosaga keldik. Bu esa burchaklarni qo'yish aksiomasiga zid. Bu

aksiomaga binoan berilgan yarim to'g'ri chiziqdan berilgan yarim tekislikka berilgan gradus o'lchovli faqat bitta burchak qo'yish mumkin.

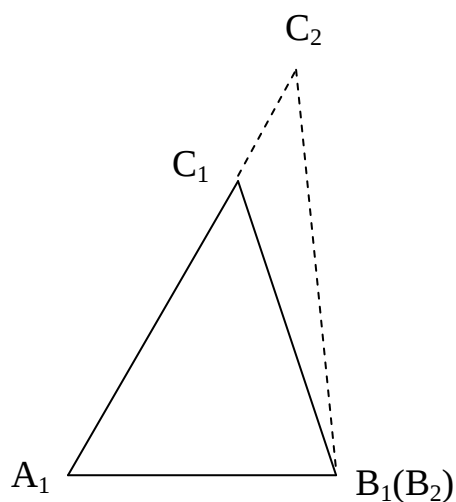
To'g'ri chiziqqa nisbatan C_1 uchi yotgan yarim tekislikdagi uchburchak bo'lib, ABC uchburchakka teng bo'lsin (26-a rasm). $A_1B_1=A_1B_2$ bo'lgani uchun B_2 uch B_1 uch bilan ustma-ust tushadi (26-b rasm). $A_1B_1=A_1C_2$ bo'lgani uchun C_2 uch C_1 uch bilan ustma-ust tshadi. (26-d rasm). Shunday qilib, $A_1B_1C_1$ uchburchak $A_2B_2C_2$ uchburchak bilan ustma-ust tushadi. Demak; ABC uchburchakka teng. Teorema isbotlandi. $B_1A_1C_1 = B_2A_1C_2$ bo'lgani uchun A_1C_2 nur A_1C_1 nur bilan ustma – ust tushadi.(26-c rasm)



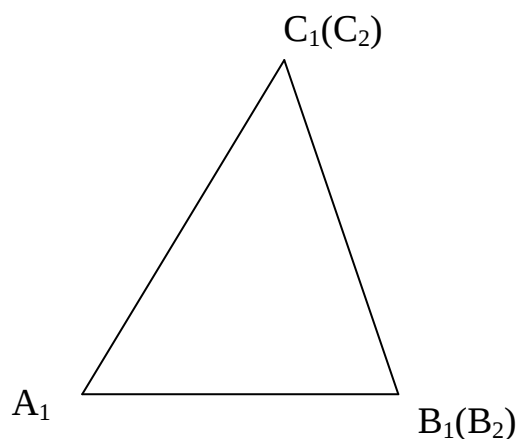
26-(a) rasm



26-(c) rasm



26-(b) rasm

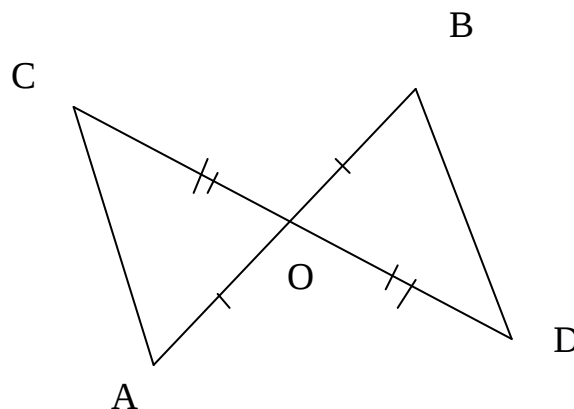


26-(d) rasm

Masala: AB va CD kesmalar o nuqtada kesishadi, bu o nuqta shu kesmalardan har birining o`rtasi. Agar  $AC=10m$  bo`lsa, BD kesma nimaga teng ?

Yechilishi: uchburchaklar tengligining 1- alomatiga ko`ra AOC va BOD uchburchaklar teng (27-rasm).

Ularda AOC va BOD burchaklar vertikal burchaklar bo`gani uchun teng,  $OA=OB$ ,  $OC=OD$ , chunki O nuqta AB va CD kesmalarning o`rtasi. AOC va BOD uchburchaklarning tengligidan ularning AC va BD tomonlari tengligi kelib chiqadi. Masala shartiga ko`ra $AC=10m$, shuning uchun $BD=10m$.



27-rasm

Teoremlarni isbotlashda aksiomalardan foydalanish

Teoremlarni isbotlashda aksiomalardan va oldin isbotlangan teoremlardan foydalanishga ruxsat eilishini bilamiz. Odatda isbotda aksiomaning ro`yxatdagi nomeriga emas, balki uning mazmniga havola qilinadi. uchburchaklar tengligining 1- alomatini isbotlashda yuqoridagi teoremada xuddi shunday ish bajardik. Bu isbotni, unda foydalanilgan aksiomalarni ko`rsatish bilan yana bir marta tahlil qilamiz.

Isbot ushbu so`zlar bilan boshlanadi: «  $C_2C_2$  uchburuchak  $B_2$  uchi  $A_1B_1$  nurda va  $C_2$  uchi  $A_1B_1$  to`g`ri chiziqqa nisbatan  $C_1$  uchi yotgan yarim tekislikdagi uchburchak bo`lib, ABC uchning burchakkan teng bo`lsin ».

Bunday uchburchak biz bilamizki, 8- aksiomaga asosan mavjud. Shundan keyin B_1 va B_2 uchlarning ustma ust tushishi $A_1B_1 = A_1B_2$

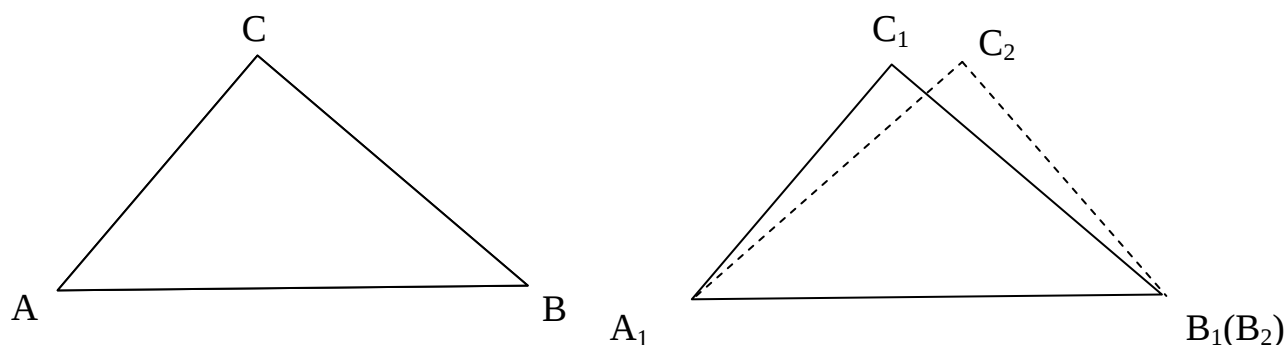
Ekaniga asosan tasdiqlanadi. Bu yerda kesmalarni qo'yish aksiomasidan (6-aksioma) foydalaniladi. So'ngra A_1C_2 va A_1C_1 nurlarning ustma ust tushishi . $B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_1C_2$ ekaniga asosan tasdiqlanadi. Bunda burchaklarni qo'yish aksiomasidan (7-aksioma) foydalaniladi.

Nihoyat, A_1C_1 va A_2C_2 ekanligidan foydalanib, C_1 va C_2 uchlarning ustma ust tushishi tasdiqlanadi. Buyerda yana 6- aksiomadan foydalaniladi. Biz yuqoridagi teoremaning bu isboti asiomalgagina tayanishini ko'rib turibmiz.

Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomati.

Teorema: (uchburchaklarning bir bir tomoni va unga yopishgan burch aklari bo'yich tenglik alomati). Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari boshqa uchburchakning mos tomoni va unga yopishgan burchaklariga teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.

Isboti: ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$ $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1$ va $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1$ Bo'lsin (28-rasm).uchburchaklarning tengligini isbotlaymiz:



28-rasm

$A_1B_2C_2$ uchburchak B_2 uchi A_1B_1 nurda va C_2 uchi A_1B_1 to'g'ri chiziqqa nisbatan C_1 uchi yotgan yarim tekislikdagi uchburchak bo'lib , ABC uchburchakka teng bo'lsin. $A_1B_2 = A_1B_1$ bo'lgani uchun B_2 uch B_1 uch bilan ustma ust tushadi.

$\sphericalangle B_1A_1C_2 = \sphericalangle B_1A_1C_1$ va $\sphericalangle A_1B_1C_2 = \sphericalangle A_1B_1C_1$ bo'lgani uchun A_1C_2 nur A_1C_1 nur bilan, B_1C_2 nur esa B_1C_1 nur bilan ustma ust tushadi. Bundan C_2 uchning C_1 uch bilan ustma ust tushishi kelb chiqadi. Shunday qilib $A_1B_1C_1$ uchburchak $A_1B_2C_2$

uchburchak bilan ustma ust tushadi, demak, ABC uchburchakka teng. Teorema isbotlandi.

6§ Uchburchakdagi metrik munosabatlar.

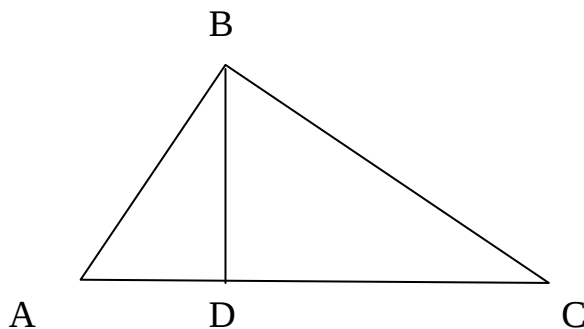
1- teorema. Ixtiyoriy uchburchak ikki tomoni kvadratlari ayirmasi bu tomonlarning uchburchakning uchinchi tomoniga mos proyeksiyalari kvadratlari ayirmasiga teng.

I s b o t i. $\triangle ABC$ ning B uchidan $BD \perp AC$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz (29-rasm). U vaqtda AB tomonning AC tomonga proyeksiyasi AD kesmadan, BC tomonning AC tomonga proyeksiyasi DC kesmadan iborat bo'ladi. Demak, $BC^2 - AB^2 = DC^2 - AD^2$ bo'lishini isbotlash kerak bo'ladi. Balandlik o'tkazish natijasida hosil bo'lgan to'g'ri burchakli $\triangle ABD$ va $\triangle DBC$ ni qaraymiz. Pifagor teoremasiga ko'ra mos ravishda:

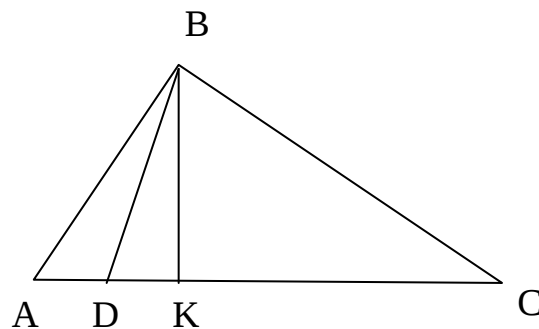
$AB^2 = AD^2 + BD^2$, $BC^2 = BD^2 + DC^2$ munosabatlarni olamiz. Ularning ikkinchisidan birinchisini ayirib, talab qilingan $BC^2 - AB^2 = DC^2 - AD^2$ tenglikni olamiz. Teorema isbotlandi.

2 - t e o r e m a (Stuart). Agar ABC uchburchakning BC tomonida ichki D nuqta olingan bo'lsa, $AB^2 \cdot DC^2 + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot DC$ tenglik bajariladi.

I s b o t i. $\triangle ABC$ ning A uchidan $AK \perp BC$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz (30-rasm). K nuqta D va C nuqtalar orasida yotadi, deb faraz qilamiz. Ikkita to'g'ri burchakli $\triangle AKC$ va $\triangle ADK$ ni qaraymiz va Pifagor teoremasiga ko'ra $\triangle AKC$ dan $AC^2 = AK^2 + KC^2$; $\triangle ADK$ dan $AK^2 = AD^2 - DK^2$ munosabatlarni olamiz. Ulardan $AC^2 = AD^2 + KC^2 - DK^2 = AD^2 + (KC + DK)(KC - DK)$ yoki,



29-rasm



30-rasm

$$AC^2 = AD^2 + DC(KC - DK) = AD^2 + DC(DC - 2DK),$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DK \text{ bo'ladi.}$$

To'g'ri burchakli $\triangle ABK$ va $\triangle ADK$ dan $AB^2 = AK^2 + BK^2$ va $AK^2 = AD^2 - DK^2$ munosabatlarni olamiz. Ulardan, $AB^2 = AD^2 + BK^2 - DK^2 = AD^2 + (BK - DK)$

$(BK + DK)$ bo'lishi kelib chiqadi. $BK - DK = BD$, $BK = BD + DK$ ekanligini hisobga olsak, $AB^2 = AD^2 + BD(BD + DK) = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DK$

bo'ladi. Endi AC^2 uchun hosil qilingan ifodani BD ga, AB^2 uchun olingan ifodani DC ga ko'paytirib, hosil qilingan ifodalarni qo'shamiz:

$$\begin{aligned} AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC &= AD^2(BD + DC) + DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC = AD^2 \cdot BC + \\ &+ DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC = AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD (DC + BD) = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot \\ &+ BC, \text{ ya'ni bundan talab qilingan tenglik olinadi. Stuart teoremasidan foydalanib,} \\ &\text{uchburchak medianasi, balandligi, bissektrisasi uzunliklarini hisoblaymiz.} \end{aligned}$$

Uchburchakning balandligi.

Berilgan $\triangle ABC$ ning tomonlari $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo'lsin (31-rasm). Unda $AK \perp BC$ balandlik o'tkazamiz. Agar $\angle B < 90^\circ$ bo'lsa, to'g'ri burchakli ABK va ACK uchburchaklardan $b^2 = AK^2 + KC^2$, $AK^2 = c^2 - BK^2$ ifodalarni topamiz. Ulardan $b^2 = c^2 - BK^2 + (a - BK)^2 = c^2 - BK^2 + a^2 - 2a \cdot BK + BK^2$,

$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BK$ bo'ladi. Bundan $BK = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ kelib chiqadi. Olingan ifodani AK uchun yuqorida olingan ifodaga keltirib qo'yamiz:

$$AK^2 = c^2 + BK^2 - c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) 2 \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) =$$

$$\frac{(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2} = \frac{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}{4a^2}$$

Bundan

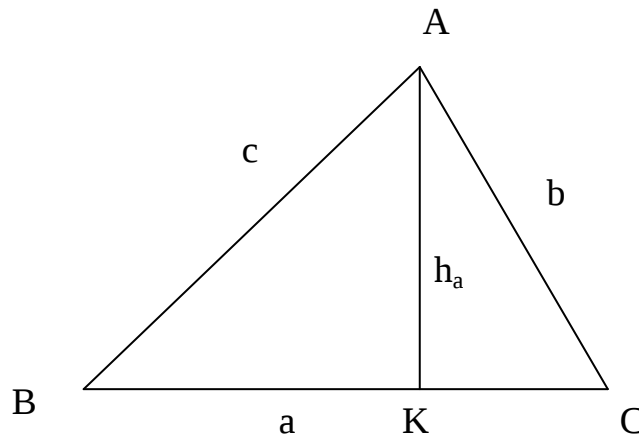
$AK^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2}$ bo'ladi. $a + b + c = 2p$ deb belgilab, qolgan ko'paytuvchilarni p orqali ifodalaymiz:

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a),$$

$$a + c - b = 2(p - b), \quad a + b - c = 2(p - c).$$

Natijada AK balandlik uchun $AK^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}$ va

$AK = h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ifodani olamiz. Qolgan h_b va h_c balandliklar uchun ham, yuqoridagiga o'xshash, 20-chizma. formulalarni hosil qilamiz.



31-rasm

Uchburchakning bissektrisasi.

Uchburchak burchagi bissektrisasining ba'zi xossalarni ko'rib o'tamiz.

1 - t e o r e m a . Burchak bissektrisasining nuqtalari burchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotadi.

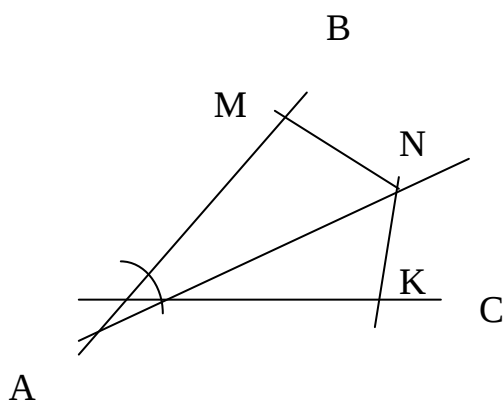
I s b o t i . AD to'g'ri chiziqli BAC burchakning bissektrisasi, ya'ni $\angle BAD = \angle DAC$ bo'lsin (32-rasm). AD bissektrisada ixtiyoriy K nuqtani olib, bu nuqtadan burchakning tomonlariga $KN \perp AC$, $KM \perp AB$ perpendikularlar

tushiramiz. Hosil qilingan to'g'ri burchakli AKM va AKN uchburchaklarda gipotenuza umumiy va $\angle MAK$, $\angle KAN$ o'tkir burchaklar teng bo'lgani uchun, ular o'zaro teng bo'ladi: $\triangle KMA \cong \triangle KNA$. Teng uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi. Shuning uchun, $KM = KN$. Teorema isbotlandi.

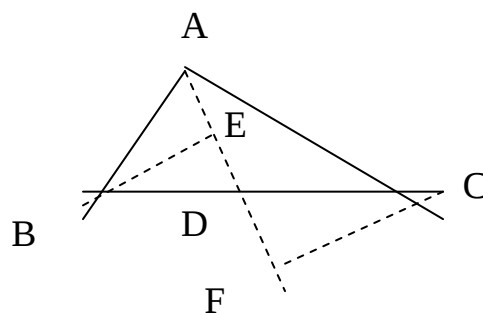
2 - t e o r e m a . Uchburchak ichki burchagining bissektrisasi qarshisidagi tomonni unga yopishgan tomonlarga proporsional qismlarga bo'ladi.

I s b o t i . AD kesma $\triangle ABC$ ichki $\angle A = \alpha$ burchagining bissektrisasi bo'lsin, ya'ni $\angle BAD = \angle DAC = (\text{33-rasm})$ bo'lishini isbotlash kerak. Uchburchakning B va C uchlaridan AD to'g'ri chiziqqa perpendikularlar tushiramiz: $BE \perp AD$, $CF \perp AD$. U vaqtda $\triangle ABE$ va $\triangle ACF$ lar to'g'ri burchakli va ularda $\angle BAE = \angle CAF$ bo'lganligidan, ular o'xshash bo'ladi, ya'ni $\triangle ABE \sim \triangle ACF$. Bundan $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, $\triangle BDE$ va $\triangle CDF$ lar to'g'ri burchakli va vertical burchaklar bo'lgani uchun $\angle BDE = \angle CDF$ tenglik o'rinli, demak, uchburchaklar

o'xshashdir, ya'ni $\triangle BDE \sim \triangle CDF$. Bundan yoki (b) kelib chiqadi.

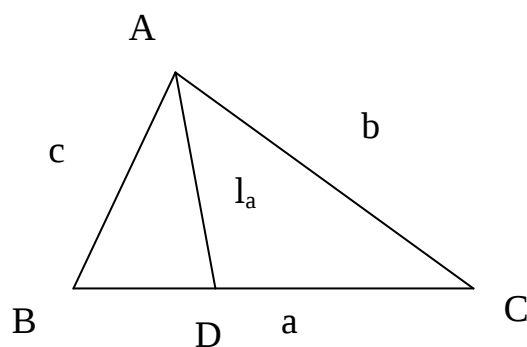


33-rasm



34-rasm

Hosil qilingan (a), (b) tengliklarni taqqoslab, talab qilingan tenglikni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi. Endi uchburchak bissektrisalarini hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz. Tomonlari $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo'lgan $\triangle ABC$ da AD bissektrisini o'tkazamiz (35-rasm) va uning l_a uzunligini a, b, c orqali ifodalaymiz. Uchburchak ichki burchagi bissektrisasining xossasiga ko'ra munosabatlarni olamiz. Bu qiymatlarni Stuart teoremasidagi



35-rasm

$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = BD \cdot DC \cdot BC + AD^2 \cdot BC$ ifodaga keltirib qo'yamiz:

$$\text{Oxirgi ifodani } a \text{ ga qisqartirib, } l_a^2 = \frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$

Yoki $l_a = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c}$ ifodaga ega bo'lamiz. Agar yuqoridagi kabi, $a + b + c = 2p$ deb belgilasak, $b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$ bo'ladi.

U holda oxirgi formula $l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}$ ko'rinishni oladi.

Uchburchakning medianasi.

$\triangle ABC$ da AD medianasi va AK balandlik o'tkazilgan bo'lsin (36-rasm). Kesmalar uzunliklari uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$AB = c, AC = b, BC = a, AD = m_a. \text{ AD medianasi bo'lganligidan } BD = DC = \frac{a}{2}$$

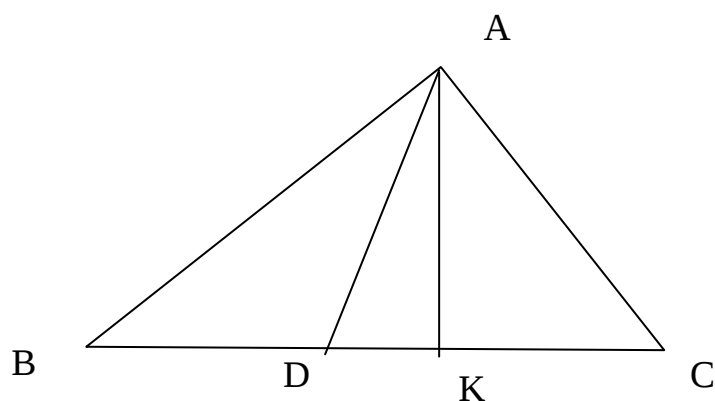
Endi $\triangle ABC$ uchun Stuart teoremasini yozamiz:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD \cdot BC \text{ yoki}$$

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a^2}{4} \cdot a \text{ Bu tenglikning ikkala tomonini } a \text{ ga}$$

$$\text{qisqartiramiz: } \frac{b^2 + c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Bunda } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \text{ ifodani olamiz.}$$



36-rasm

Yuqoridagiga o'xshash, m_b , m_c medianalar uchun ushbu

ifodalarni olamiz: $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

7§ Uchburchakdagi ajoyib nuqtalar.

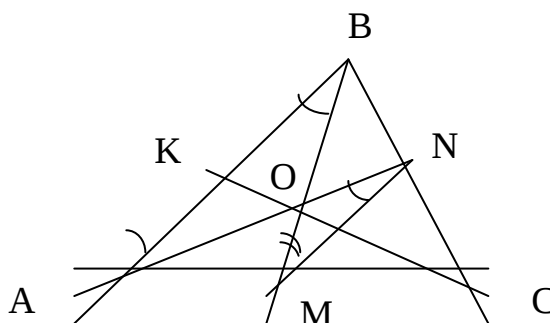
1 - t e o r e m a . Uchburchakning medianalari bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida uchdan hisoblaganda 2:1 kabi nisbatda bo'linadi.

I s b o t i . M nuqta AC tomonning o'rtasi, N nuqta BC tomonning o'rtasi bo'lsin deb faraz qilamiz, ya'ni $MA = MC$, $NB = NC$ (37-rasm). N nuqta B va C nuqtalar orasida yotganligidan, B va C nuqtalar AN to'g'ri chiziqdan turli tomonlarda yotadi. AN va AC to'g'ri chiziqlar uchun A nuqta umumiy, demak, ularning boshqa umumiy nuqtalari bo'lishi mumkin emas. Shuning uchun AC to'g'ri chiziqda yotuvchi M nuqta va B nuqta AN to'g'ri chiziqdan turli tomonlarda yotadi. Natijada AN va BM medianalar biror O nuqtada kesishadi. Modomiki, M va N, mos ravishda, AC va BC tomonlarning o'rtalaridan iborat ekan, MN kesma $\triangle ABC$ ning o'rta chizig'i bo'ladi va $MN \parallel AB$. Ikkita o'zaro parallel AB va

MN to'g'ri chiziqlar AN va BM to'g'ri chiziqlar bilan kesilgan. U vaqtda hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar o'zaro teng: $\angle BAN = \angle ANM$, $\angle ABM = \angle BMN$. Endi $\triangle ABO$ da ikkita burchak $\triangle MON$ ning mos burchaklariga

tengligidan, ular o'xshash bo'ladi, ya'ni $\triangle ABO \sim \triangle MON$, ularning mos tomonlari proporsional:

Shunday qilib, AN va BM medianalar kesishish



37-rasm

nuqtasi O da $\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{OM} = \frac{CO}{OK} = \frac{2}{1}$ nisbatda bo'linadi. BO va CO bissektrisalarini qarab chiqib, ular ham O kesishish nuqtasida $\frac{BO}{OM} = \frac{CO}{OK} = \frac{2}{1}$ nisbatda bo'linishini olamiz.

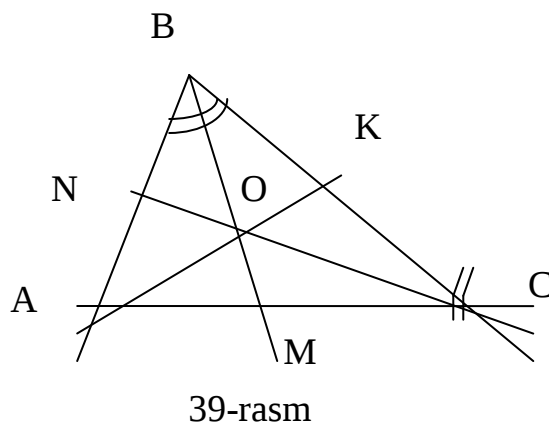
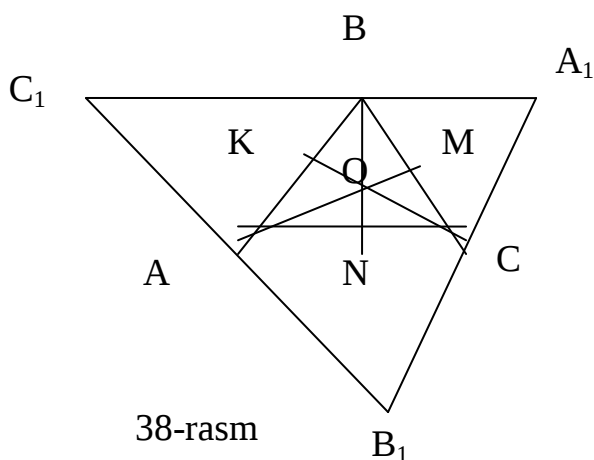
Teorema isbotlandi.

2- teorema. Uchburchakning hamma balandliklari bitta nuqtada kesishadi.

I s b o t i . Berilgan uchburchakning A, B, C uchlaridan uning qarama-qarshi tomonlariga parallel $A_2C_2 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishishi natijasida $A_1B_1C_1$ hosil bo'ladi (38-rasm). Yasashga ko'ra $C_1B \parallel AC$, $C_1A \parallel BC$, $A_1C \parallel AB$, $BA_1 \parallel AC$. Shunday qilib, AC_1BC va ABA_1C to'rtburchaklar parallelogramm va $C_1B = AC$, $BA_1 = AC$, $BA_1 \parallel AC$. Bundan $C_1B = BA_1$ bo'lishini, ya'ni B nuqta A_1C_1 kesmaning o'rtasi ekanligini olamiz. Shunga o'xshash, A va C nuqtalar, mos ravishda,

B_1C_1 va A_1B_1 tomonlarning o'rtalari bo'lishini ko'rsatish mumkin. ABC uchburchakning B uchidan BN balandlik o'tkazamiz. Lekin $A_1B_1C_1$ da BN balandlik uning A_1C_1 tomoniga o'tkazilgan o'rta perpendikulardir. Shunga o'xshash, CK va MA balandliklar, mos ravishda, A_1B_1 va B_1C_1 tomonlarga o'rta perpendikularlardan iborat. Har qanday uchburchakda o'rta perpendikularlar bitta nuqtada kesishganligidan, MA, NB va KC balandliklarning bitta O nuqtada kesishishi kelib chiqadi.

1 - t a ' r i f . Uchburchak balandliklarining kesishish nuqtasi O uchburchakning ortomarkazi deyiladi.



3 - t e o r e m a . Uchburchakning uchta bissektrisasi bitta nuqtada kesishadi.

I s b o t i : $\triangle ABC$ ichki burchaklarining AK, BM va CN bissektrisalarini o'tkazamiz (39-rasm). Modomiki, K nuqta BC kesmaning ichki nuqtasi bo'lib, M nuqta AC tomonda yotar ekan, B va M nuqtalar AK bissektrisadan turli tomonlarda yotadi. Demak, AK va BM bissektrisalar bitta O nuqtada kesishadi. Burchak bissektrisasining xossasiga ko'ra, O nuqta ichki A burchakning AC va AB tomonlaridan, shuningdek, B burchakning AB va BC tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgandir. Demak, O nuqta ichki C burchakning AC va BC tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgan, ya'ni O nuqta C burchakning CO bissektrisasida yotar ekan. Teorema isbotlandi.

2 - t a ' r i f . Uchburchak burchaklari bissektrisalarining kesishish nuqtasi uchburchakning inmarkazi deyiladi.

Uchburchakning yuzi.

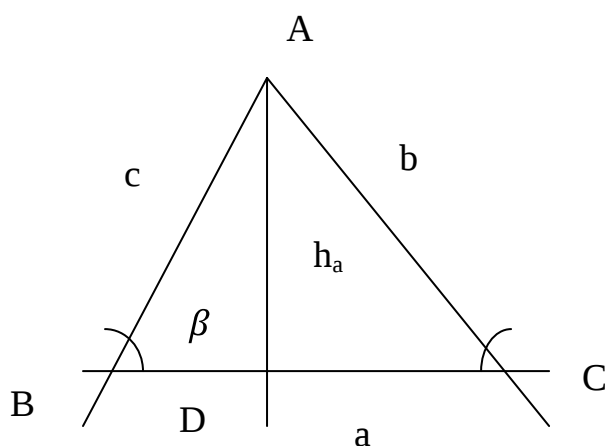
Har bir geometrik shakl (uchburchak, ko'pburchak va h.k) tekislikning ma'lum bir qismini egallaydi. Ularni taqqoslash imkoniyati bo'lishi uchun „yuz“ tushunchasi kiritilgan. „Shaklning yuzi“ tushunchasi uchun quyidagi xossalar bajariladi (o'rinli):

1. Har bir shakl (ko'pburchak, uchburchak) musbat son bilan ifodalangan yuzga ega.

2. Teng shakllar (uchburchak, ko'pburchaklar) teng yuzga ega bo'ladi.
3. Agar shakl (uchburchak, ko'pburchak) bir necha qismlarga bo'lingan bo'lsa, uning yuzi uni tashkil qiluvchi qismlar yuzlarining yig'indisiga teng.

Bizga tomonlari $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo'lgan $\triangle ABC$ berilgan bo'lsin (40-rasm). Uchburchakning A uchidan $AD \perp BC$ balandlik o'tkazamiz va uning uzunligini $AD = h_a$ deb belgilaymiz.

1. Agar $\triangle ABC$ da $BC = a$ asos va $AD = h_a$ balandlik ma'lum bo'lsa, uchburchakning yuzi: $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ formula bo'yicha hisoblanadi.



40-rasm

2. $\triangle ABC$ da ikkita $BC = a$, $AB = c$ tomon va ular orasidagi $\angle B = \beta$ ma'lum bo'lsin. Agar $AD = h_a$ uchburchakning balandligi bo'lsa, to'g'ri burchakli $\triangle ABD$ dan $h_a = c \cdot \sin \beta$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada uchburchak yuzini hisoblash formulasi (2) ko'rinishni oladi.

3. Agar $\triangle ABC$ ning uchta tomoni ham ma'lum, ya'ni $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bo'lsa, uchburchakning yuzi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (3)

formula bo'yicha hisoblanadi, bunda uchburchakning yarim perimetri.

(3) uchburchakning yuzi uchun Geron formulasi deyiladi. Bu formulani keltirib chiqarish uchun kosinuslar teoremasidan foydalanamiz. Unga ko'ra, bundan:

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{(2ac)^2}} = \\ &= \frac{1}{2ac} \sqrt{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} = \\ &= \frac{1}{2ac} \sqrt{(2ac - a^2 - c^2 + b^2)(2ac + a^2 + c^2 - b^2)} = \\ &= \frac{1}{2ac} \sqrt{(b^2 - (a - c)^2)((a + c)^2 - b^2)} = \\ &= \frac{1}{2ac} \sqrt{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)} \text{ bo'ladi. Endi}\end{aligned}$$

$$a + b + c = 2p \text{ deb olib,}$$

$$a + c - b = a + b + c - 2p = 2p - 2b = 2(p - b),$$

$$a + b - c = 2(p - c), \quad b + c - a = 2(p - a)$$

munosabatlarni olamiz. Natijada bo'ladi va uchburchakning yuzi formulasi talab qilingan ko'rinishni oladi.

4. Tomonlari $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bo'lgan $\triangle ABC$ ga r radiusli aylana ichki chizilgan bo'lsin (28- chizma). Ichki chizilgan aylananing O markazini uchburchakning uchlari bilan tutashtiramiz va aylananing uchburchakka urinish nuqtalaridan aylananing radiuslarini o'tkazamiz. Natijada $OD \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$ bo'ladi va $\triangle ABC$ uchta $\triangle OAC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ ga bo'linadi. $\triangle ABC$ ning yuzi shu uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC}$. Modomiki, $OD = OE = OF = r$ ekan, $S_{\triangle OAC} = r \cdot \frac{1}{2} AC$ ya'ni $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ (4) bunda p — uchburchakning yarim perimetri, r — uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi.

5. $\triangle ABC$ ga R radiusli aylana tashqi chizilgan bo'lsin. 2- banddagi (2) formulaga asosan, uchburchakning yuzi bo'ladi.

6. Uchburchakning yuzini unga tashqi chizilgan aylananing radiusi va uchburchakning burchaklari orqali ifodalash ham mumkin. Sinuslar teoremasidan

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

bo'lganligidan, $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$, $c = 2R \sin \gamma$. Hosil

qilingan ifodalarni 5-banddagi (5) formulaga qo'ysak, uchburchakning

yuzini hisoblash uchun yangi formulani olamiz.

8§ Masalalar.

1. Uchburchakning ikki tomoni 0,7 va 1,9. Agar uchinchi tomoni butun son ekanligi ma'lum bo'lsa, uni toping.

$$x + 0,7 > 1,9, \text{ yoki } x > 1,2$$

$$1,9 + 0,7 > x, \text{ yoki } x < 2,6.$$

Bu ikki tengsizlikdan $1,2 < x < 2,6$ ni hosil qilamiz. x – butun son, faqat $x=2$ qiymat bu qo'shtengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, uchburchakning noma'lum tomoni 2 ga teng.

2. To'g'ri burchakli uchburchakning a va b katetlari berilgan:

1) $a=3, b=4$ 2) $a=1, b=1$ 3) $a=5, b=6$ bo'lsa gipotenuzasini toping.

1) $a^2+b^2=c^2$ 2) $a^2+b^2=c^2$ 3) $a^2+b^2=c^2$

$$3^2 + 4^2 = c^2$$

$$1^2 + 1^2 = c^2$$

$$5^2 + 6^2 = c^2$$

$$c^2 = 5^2$$

$$c^2 = 2$$

$$c^2 = 25 + 36$$

$$c = 5$$

$$c = \sqrt{2}$$

$$c^2 = 61$$

$$c = \sqrt{61}$$

3. To'g'ri burchakli uchburchakning c gipotenuzasi va a kateti berilgan. Agar $c=5$, $a=3$ bo'lsa, ikkinchi katetini toping.

$$c=5 \quad a=3 \quad a^2+b^2=c^2 \quad b^2 = 25 - 9$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad b^2 = 16$$

$$b^2 = 5^2 - 3^2 \quad b=4$$

4. To'g'ri burchakli uchburchakning ikkita tomoni 3m va 4m ga teng. Uchinchi tomonini toping. (ikkita hol).

1-hol $a=3 \quad b=4$

2-hol $\alpha=90^\circ$

$$a^2+b^2=c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$3^2 + 4^2 = c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 25$$

$$c=5$$

5. To'g'ri burchakli uchburchakning tomonlari 5, 6, 7 sonlariga proporsional bo'lishi mumkinmi ?

$$a=5 \quad b=6 \quad c=7$$

bo'lishi mumkin emas. Chunki $5^2+6^2 \neq 7^2$

6. Rombning diaganallari : 1) 6sm va 8sm 2) 16dm va 30dm. bo'lsa uning tomonini toping.

$$1) d_1=6 \quad d_2=8$$

$$2) d_1=16 \quad d_2=30$$

$$d_1^2+d_2^2=4a^2$$

$$16^2+30^2=4a^2$$

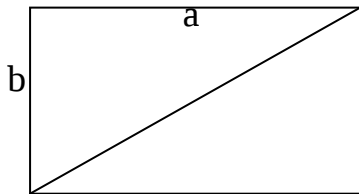
$$6^2+8^2=4a^2$$

$$256+900=4a^2$$

$$a=5$$

$$a^2=289 \quad a=17$$

7. To'g'ri to'rtburchaklarning tomonlari 60sm va 91sm . uning dioganallari nimaga teng?

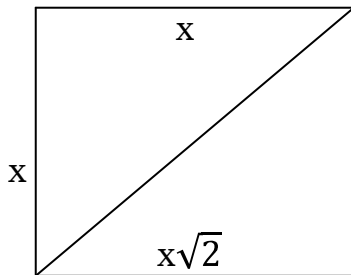


$$d=\sqrt{a^2+b^2} \quad a=60\text{sm}$$

$$d_1=d_2 \quad b=91\text{sm}$$

$$d=\sqrt{60^2+91^2}=109 \quad d=109$$

8. Kvadratning dioganali a ga teng. Kvadratning tomoni nimaga teng?



$$a=x\sqrt{2}$$

$$x^2+x^2=a^2$$

$$2x^2=a^2$$

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}x=a$$

9. Diametri 1,4 m bo'lgan doiraviy temir listdan tomoni 1m bo'lgan kvadrat qirg'ish mumkinmi?

Mumkin emas. Chunki tomoni 1m bo'lgan kvadratning diogonalini

$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ yoki 1,41ga teng bo'ladi. Bu esa diametric 1,4 m bo'lgan doiraviy temir listdan tashqariga chiqib ketadi.

10. Asoslari 5m va 11m , yon tomoni 4m bo'lganteng yonli trapetsiyaning balandligini toping.

$$h=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

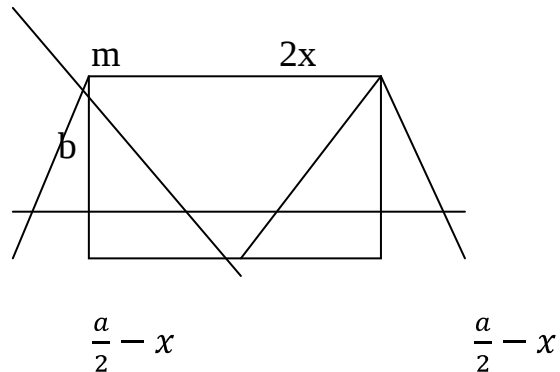


11. Asosi a va yoni b ga teng bo'lgan teng yonli trapetsiyaning asosiga o'tkazilgan medianasini toping.

$$m^2 - x^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

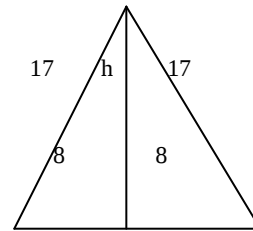
$$m^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} + ax - x^2 + x^2$$

$$m = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} + ax}$$



12. teng yonli uchburchakda yon tomoni 17 sm, asos esa 16 sm. Asosiga tushirilgan balandlikni toping.

$$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$$

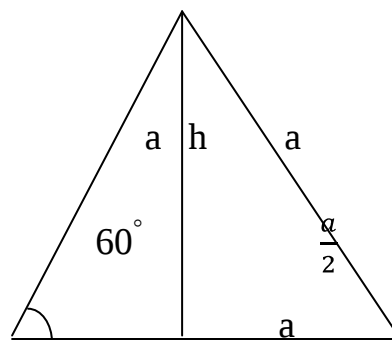


13. Tomoni a bo'lgan teng tomonli uchburchakning balandligini toping.

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$



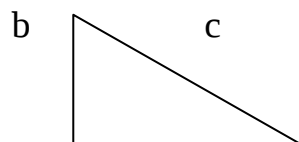
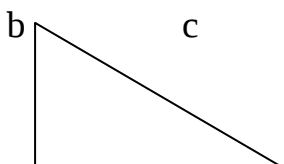
14. a va b kesmalar berilgan. quyidagi kesmalarni qanday yasash kerak:

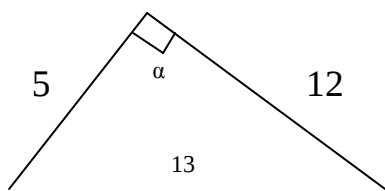
1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$?

1) $c^2 = a^2 + b^2$

pifagor teoremasidan foydalanib yasash

mumkin.



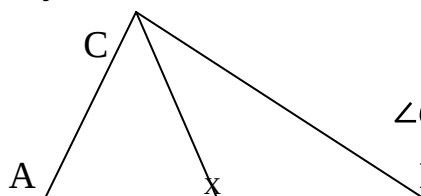


$$13^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cos \alpha$$

$$169 = 25 + 144 - 120 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \alpha = \arccos 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

19. ABC uchburchakning AB tomonida x nuqta belgilangan. CX kesma AC yoki BC tomonlarni hech bo'lmaganda bittasidan kichik bo'lishini isbotlang.



Uchburchak xossasiga ko'ra

$\angle CXA = \angle CXB$ bo'lganda, AC gipatenuza

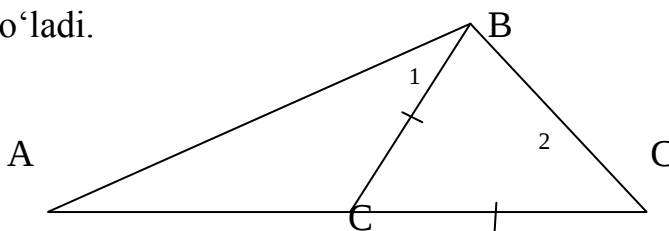
($\triangle ACX$ uchun) va CB gipatenuza ($\triangle ACX$ uchun) bo'ladi. CX ga ega katet. Demak $CX < AC$ va $CX < CB$ ekan. Agar $\angle CXA \neq \angle CXB$ bo'lsa, bu burchaklardan biri o'tmas burchak bo'ladi. Hamda katta burchak qarshisida katta tomon yotadi. Xossaga ko'ra CX yo AC yo CB dan kichik bo'ladi.

20. Rasmda berilganlardan foydalanib, $AB < AC$ ekanligini ko'rsating.

BDC — teng yonli uchburchak (chunki $BD = DC$), demak, $\angle 1 = \angle 2$

bo'ladi. $\angle 1 < \angle ABC$ bo'lgani uchun $\angle 2 < \angle ABC$. Katta burchak qarshisida katta tomon

yotgani uchun $AB < AC$ bo'ladi.



XULOSA

Ushbu bitiruv malakiy ishidan quyidagicha xulosa chiqarish mumkin: uchburchaklar va ular haqidagi juda ko'p ma'lumotlar maktab, litsey va kasb-hunar kollejlarida berilgan, ammo ayrim ma'lumotlar bu bosqichda yetarli bo'lmaydi shuning uchun ushbu bitiruv malakaviy ishida uchburchaklarga oid turli metrik munosabatlar handa Stuart teoremasini isboti bilan keltirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Karimov I.A. O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida. Havfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari. T., "O'zbekiston", 1997, 326b.
2. Karimov I.A. Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari. T., "O'zbekiston", 2009, 56b.