

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

E.A.Chuliyev, D.F.Alimova

MATEMATIKA:

kompleks sonlar

**Akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilari uchun
uslubiy qo‘llanma**

NAVOIY - 2014

Ushbu uslubiy qoʻllanma akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari oʻquvchilari uchun “Matematika” fani oʻquv dasturi asosida yozilgan. Unda kompleks sonlar, ular ustida amallar, kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik shakli, trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni koʻpaytirish va boʻlish, kompleks son dan ildiz chiqarish kabi nazariy maʼlumotlar, amaliy mashgʻulotlar uchun mashqlar keltirilgan boʻlib, qoʻllanmadan yuqorida qayd etilgan taʼlim muassasalari oʻquvchilari va oʻqituvchilari foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:

A.A.Jalilov

Navoiy DPI “Umumiy matematika”
kafedrasi dotsenti, p.f.n.

Sh.Toshev

Nurota tumanidagi 7-maktab-internat oliy
toifali matematika fani oʻqituvchisi

Navoiy davlat pedagogika instituti Ilmiy Kengashi tomonidan nashrga
tavsiya etilgan (2014 yil 31 yanvar 6 - sonli qarori)

Kirish

O'zbekiston Respublikasi "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" talablariga muvofiq ta'lim tizimini takomillastirish, uni mazmunan boyitish, ta'lim oluvchilarning chuqur bilim olishlariga erishish, ularning har tomonlama yetuk, barkamol shaxs bo'lib voyaga yetishlarini ta'minlash lozim. Barkamol shaxsni tarbiyalash jamiyat oldida turgan eng muhim vazifadir [1, 2].

Ta'lim muassasalarida tahsil olayotgan yoshlar har bir fanni chuqur va puxta o'zlashtirishlari uchun o'quv adabiyotlariga katta ehtiyoj sezadi. Hozirgi paytda mutaxassislar tomonidan turli fanlar bo'yicha ko'plab darsliklar, o'quv qo'llanmalari yaratilgan. Berilgan mavzular bo'yicha tayyorlangan uslubiy qo'llanmalar ham o'quvchilarga amaliy yordam beradi. Shu maqsadda akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari matematika fani dasturi asosida tayyorlangan ushbu qo'llanma ham shu ezgu maqsadni amalga oshirish uchun qo'yilgan navbatdagi qadamdir. Qo'llanma matematika fanidagi kompleks sonlar mavzusiga bag'ishlangan bo'lib, unda kompleks sonlarga oid ko'plab nazariy ma'lumotlar, amaliy masalalar o'z aksini topgan.

Agar son tushunchasining rivojlanib borishiga nazar tashlasak, uning boshi natural son bo'lib, nol va manfiy butun sonlarning, undan so'ng butunning ulushlari yordamida kasr sonlarning kiritilishi natijasida ratsional son tushunchasiga kelingan bo'lsa, irratsional sonning kiritilishi uni haqiqiy son tushunchasigacha kengaytirdi. Bunga sonlar ustida bajariladigan amallarga to'siq bo'ladigan holatlarni bartaraf qilish maqsadida qabul qilingan yangi tushunchalar sabab bo'ldi.

Agar, $x^2+1=0$ tenglamani qarasak, u haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emasligi ravshandir. Shu misolning o'zi haqiqiy sonlar to'plami hali mukammal emasligini, ya'ni uni yana kengaytirish kerak ekanligini anglatadi [3].

Bu yerda son tushunchasini haqiqiy sondan keyingi navbatdagi mukammallashtirish natijasi bo'lgan kompleks sonlarni va ular ustidagi asosiy algebraik amallarga oid ma'lumotlarni keltiramiz.

Uslubiy qoʻllanmada kompleks sonlarga doir nazariy maʼlumotlar, misol, masalalar va ularning yechimlari, mustaqil yechish uchun amaliy mashqlar, oʻz-oʻzini nazorat qilishga oid savollar mantiqiy ketma-ketlikda bayon etilgan.

Qoʻllanmani tayyorlashdan asosiy maqsad akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari oʻquvchilariga kompleks sonlar haqida batafsil maʼlumot berish hamda shu mavzularga doir turli xil masalalarni yechishda amaliy yordam koʻrsatishdir.

1-§. Kompleks sonlar haqida boshlang'ich ma'lumotlar

Haqiqiy sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari bilan birgalikda darajaga ko'tarish amali hamma vaqt bajariladi. Lekin ildiz chiqarish amali haqiqiy sonlar to'plamida har doim bajarilavermaydi. Masalan, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-81}$ kabi ifodalar hech qanday haqiqiy sonlarga teng emas. Shu sababli, haqiqiy sonlar maydonida, birinchi qarashda juda sodda ko'ringan $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 16 = 0$ va hakoza tenglamalar yechilmaydi. Shuning uchun haqiqiy sonlar to'plamini shunday yangi sonlar to'plami bilan kengaytirish zarurki, bu kengaytirilgan sonlar to'plamida ildiz chiqarish amali doimo bajariladigan bo'lsin. Bu masala XIX asrda uzil-kesil hal qilindi. Kengaytirilgan maydon qanday elementlarni o'z ichiga olishini qarab chiqamiz [3].

Eng avval bu maydon hamma haqiqiy sonlarni o'z ichiga olishi kerak. So'ngra bu maydonda $x^2 = -1$ tenglama yechiladigan bo'lishi kerak, chunki darajaga ko'tarish amaliga teskari amal bu maydonda bajariladi. *Kvadrati -1 ga teng bo'lgan sonni i harfi bilan belgilash va mavhum birlik deb atash qabul qilingan.* Shunday qilib, *i* sonning ta'rifiga ko'ra:

$$i^2 = -1 .$$

Sonlarning yangi to'plami maydon bo'lishini talab qilamiz. Shuning uchun *b* haqiqiy son va *i* mavhum birlik bilan birgalikda ularning ko'paytmasi *bi* ham shu maydonga tegishli bo'lishi kerak. Xuddi shuning singari *a* haqiqiy son va *bi* ko'paytma bilan birgalikda ularning yig'indisi $a + bi$ ham yangi sonlar maydoniga tegishli bo'lishi kerak.

Ta'rif. Kompleks son deb

$$z = a + bi \tag{1}$$

ko'rinishdagi ifodaga aytiladi, bunda a va b – ixtiyoriy haqiqiy sonlar, i – mavhum birlik.

(1) da *a* kompleks sonning *haqiqiy qismi*, *b* mavhum qismining koeffisiyenti, *bi* esa *mavhum qismi* deyiladi. Kompleks sonning (1) ko'rinishda berilishi uning algebraik formada berilishi deyiladi. Masalan, $2 + 3i$ kompleks son

uchun 2 soni haqiqiy qism, $3i$ esa mavhum qism bo‘ladi; mavhum qismning koeffitsiyenti 3 ga teng.

“Kompleks” so‘zi (lotincha *complexys*) “murakkab” degan ma‘noni beradi, $a + bi$ ko‘rinishidagi sonlarga bu nom dastlab nemis matematigi Gauss (1777-1855) tomonidan berilgan. “Mavhum” (*imaginare*) nomi fransuz matematigi Dekart tomonidan 1637 yilda kiritilgan [3, 4, 5, 14].

Ta’rif. Ikkita $z_1 = a_1 + b_1i$ va $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleks son agar $a_1 = a_2$; $b_1 = b_2$ bo‘lsa, ya’ni haqiqiy qismi bilan mavhum qismlar o‘zaro teng bo‘lgandagina va faqat shu holdagina teng deyiladi.

Bilamizki, teng bo‘lmagan haqiqiy sonlar uchun “katta” va “kichik” munosabatlari aniqlangan. Masalan, $5 > 4$, $0 < 7$ va hokazo. Teng bo‘lmagan kompleks sonlar uchun bunday munosabatlarni aniqlab bo‘lmaydi. Masalan, ushbu ikki sondan qaysi biri katta ekanini aytib bo‘lmaydi: $2 + 3i$ yoki $5 - 7i$, $0 + 2i$ yoki $0 + 4i$ va hokazo.

Agar $z = a + bi$ da $a=0$ bo‘lsa, $z = bi$ – sof mavhum son; $b = 0$ bo‘lsa, $z = a$ haqiqiy son bo‘ladi. Demak, haqiqiy va sof mavhum sonlar kompleks sonlarning xususiy holi ekan. O‘z navbatida har qanday haqiqiy yoki sof mavhum sonni (1) ko‘rinishda yozish mumkin.

Masalan, $5 = 5 + 0i$; $0 = 0 + 0i$; $-3 = -3 + 0i$; $3i = 0 + 3i$.

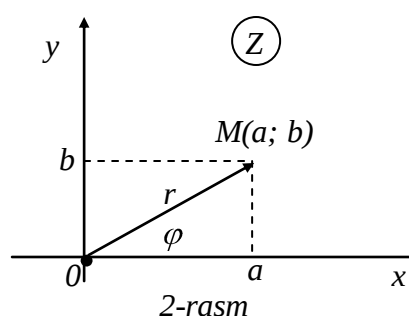
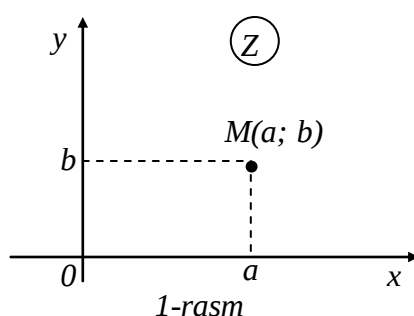
2-§. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik hamda ko‘rsatkichli shakllari

Kompleks sonning geometrik tasviri. Haqiqiy sonlarni to‘g‘ri chiziqning nuqtalari bilan tasvirlash mumkin bo‘lgani kabi, kompleks sonlarni tekislikning nuqtalari bilan geometrik usulda tasvirlash mumkin. Berilgan a va b sonlarga koordinatalar tekisligida birgina $M(a;b)$ nuqta va birgina $z=a+bi$ kompleks son mos keladi. Demak, $z=a+bi$ kompleks sonning geometrik tasviri uchun koordinatalari a va b bo‘lgan nuqtani ko‘rsatish mumkin va aksincha. Agar koordinatalar tekisligini olsak, undagi har bir $M(a; b)$ nuqtaning holatini ham uning absissasi a va ordinatasi b larning berilishi to‘liq aniqlaydi. Shu sababli,

$z=a+bi$ kompleks soniga koordinatalar tekisligidagi $M(a; b)$ nuqtani mos qo'yish mumkin (1-rasm). Bu o'rinda, o'rnatilgan bunday moslik o'zaro bir qiymatli ekanligini ham ta'kidlaymiz [3, 6, 12, 13, 15, 16].

Agar koordinatalar tekisligining nuqtalariga yuqoridagidek kompleks sonlar mos qo'yilgan bo'lsa, uni *kompleks tekislik* deb yuritiladi va odatda, uning o'ng yuqori burchagiga doiracha ichiga z harfi yozib qo'yiladi (1-rasm).

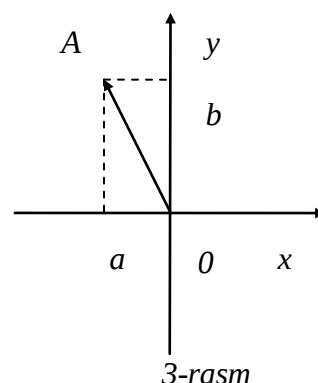
Bu kompleks sonning *geometrik tasviridir*. Shu bilan birga uning *geometrik tasviri sifatida*, $M(a; b)$ nuqtaning radius-vektorini ham qabul qilish mumkin (2-rasm).



Shunday qilib, *barcha kompleks sonlar to'plami bilan tekislikning barcha nuqtalari to'plami o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi*.

Koordinatalar boshidan chiqib, A nuqtada tugaydigan $\vec{OA}$ vektorni tekislikning har bir A nuqtasi bilan bog'lash mumkin (3-rasm).

Shuning uchun kompleks sonlarni geometrik jihatdan boshqacha izohlash mumkin. Har bir $z=a+bi$ kompleks sonni geometrik jihatdan koordinatalar boshidan chiqib $(a;b)$ koordinali A nuqtada tugovchi $\vec{OA}$ vektor kabi tasvirlash mumkin. Bunda $\vec{OA}$ vektorning koordinatalari ham A nuqtaning koordinatalari kabi, ya'ni $(a;b)$ bo'ladi. Barcha kompleks sonlar bilan tekislikning koordinatalar boshidan chiquvchi barcha vektorlar orasidagi moslik ham o'zaro bir qiymatli ekanini ko'rsatish oson.



Kompleks sonlarning vektor bilan tasvirlanishidan foydalanib, ikki kompleks sonning yig'indisi uchun qabul qilgan ta'rifni tushuntirish oson:

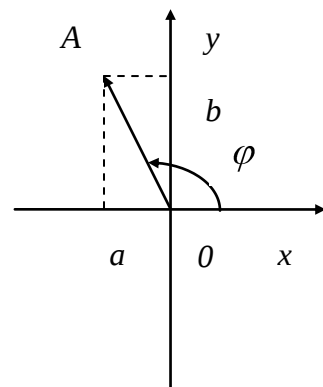
$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.

$z=a+bi$ kompleks songa koordinatalari $(a;b)$ bo'lgan $O\vec{A}$ vektor mos kelsin (4-rasm). Bu vektor uzunligini r bilan, uning x o'qi bilan hosil qiladigan burchagini φ bilan belgilaymiz. Sinus va kosinusning ta'rifiga ko'ra:

$$\frac{a}{r} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin \varphi.$$

Shuning uchun $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Lekin bunday holda $z=a+bi$ kompleks sonni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:



4-rasm

$$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (2)$$

Ma'lumki, har qanday vektor uzunligining kvadrati uning koordinatalari kvadratlarining yig'indisiga teng. Shu sababli $r^2 = a^2 + b^2$, bundan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ burchak esa quyidagicha topiladi:

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

(2) ga kompleks sonning *trigonometrik shakli* deb ataladi. Ta'rif bo'yicha kiritilgan $z=a+bi$ esa uning *algebraik shakli* deb yuritiladi. Agar Eyler formulasi deb ataluvchi $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ni hisobga olsak (2) ni $z = r e^{i\varphi}$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu *kompleks sonning ko'rsatkichli shakli* deb ataladi.

r kompleks son z ning *moduli* ($|z|$), φ esa *argumenti* ($\arg z$) deyiladi. Demak,

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg z = \arg(a + bi) = \arctg \frac{b}{a}. \quad (4)$$

Bu yerda, har bir kompleks son o'zining yagona moduliga ega ekanligini, ammo uning argumenti cheksiz ko'p bo'lishini aytamiz. Haqiqatdan ham agar M nuqtani koordinatalar boshi atrofida to'liq aylantirsak, u yana o'zining avvalgi holatiga qaytadi, demak, $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, burchaklar ham z kompleks son argumenti

bo'lar ekan. Odatda, φ ni z ning bosh, $\varphi+2\pi k$ ni esa umumiy argumenti deyilib ($0\leq\varphi<2\pi$), ularni mos ravishda

$$\varphi = \arg z; \quad \varphi + 2\pi k = \arg z, k \in \mathbb{Z}$$

kabi belgilash qabul qilingan.

Nolga teng bo'lgan kompleks sonning moduli nolga teng: $|0|=0$. Nolning argumenti uchun har qanday φ burchakni qabul qilishi mumkin:

$0 = 0(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Shuning uchun nolning argumenti *aniqlanmagan*.

Agar $a > 0$ haqiqiy son bo'lsa, ma'lumki uni $a = a + 0i$ ko'rinishda yozish mumkin. U holda

$$r = \sqrt{a^2 + 0^2} = a; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{0}{a} = 0; \quad \cos \varphi = \frac{a}{a} = 1.$$

Demak, $\varphi = 0^\circ$ va $a = a(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$, yoki umumiy ko'rinishda:

$$a = a(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k). \quad (5)$$

Agar $a < 0$ haqiqiy son bo'lsa, $r = \sqrt{(-a)^2 + 0^2} = |a|$; $\operatorname{tg} \varphi = 0$; $\cos \varphi = \frac{a}{|a|} = -1$.

Demak, $\varphi = \pi$ va $a = |a|[\cos(2\pi k + \pi) + i \sin(2\pi k + \pi)]$. (6)

Kompleks sonlarni trigonometrik shaklda tasvirlashga doir bir necha misol qaraymiz.

1-misol. $z = 1 + i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. Bu sonning r modulini va φ argumentini topamiz:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Demak, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, bundan $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$. Shunday qilib,

$$z = 1 + i = \sqrt{2} [\cos(\frac{\pi}{4} + 2n\pi) + i \sin(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)],$$

bunda n – istalgan butun son. Odatda, kompleks son argumentning cheksiz ko'p

qiymatlari orasidan 0 bilan 2π orasida tanlab olinadi. Qaralayotgan misolda $\frac{\pi}{4}$

shunday qiymatdir. Shuning uchun $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

2-misol. $z = \sqrt{3} - i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. $r = \sqrt{3+1} = 2$; $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$.

Shuning uchun 2π gacha karrali burchak aniqligida $\varphi = -\frac{11}{6}\pi$; demak,

$$z = \sqrt{3} - i = 2(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi) .$$

3-misol. $z = 3 + \sqrt{3} i$ sonni kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

$$\text{Yechish. } r = \sqrt{a^2 + b^2} , \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (7)$$

formulalarga asosan:

$$r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{va} \quad \cos \varphi = \frac{a}{r} ;$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{r} \quad \text{dan} \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 , \quad \sin \varphi = \frac{1}{2} > 0 .$$

Demak, φ burchak I chorakdagi burchak bo'lib, $\varphi = 30^\circ$. Ya'ni,

$$z = 3 + \sqrt{3} i = 2\sqrt{3}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) , \quad \text{yoki umumiy holda}$$

$$z = 3 + \sqrt{3} i = 2\sqrt{3}[\cos(\frac{\pi}{6} + 2\pi k) + i \sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)] .$$

4-misol. $z = 3$ va $z = -2$ sonlarni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. (5) va (6) formulalarga asosan,

$$3 = 3 (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) ,$$

$$-2 = 2 [\cos (2\pi k + \pi) + i \sin (2\pi k + \pi)] .$$

5-misol. $z = 6(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ sonini algebraik shaklda yozing.

$$\text{Yechish. } \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$$z = 6(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}) = -3\sqrt{3} + 3i .$$

6-misol. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ni trigonometrik shaklda ifodalang.

$$\text{Yechish. } r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi = 60^\circ \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) .$$

3-§. Kompleks sonlar ustida amallar

Endi kompleks sonlar ustida asosiy to'rt arifmetik amallarni ta'riflaymiz.

1. Qo'shish. Ta'rif. Berilgan $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning $z_1 + z_2$ yig'indisi deb,

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

ga aytiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, kompleks sonlarni qo'shish uchun ularning haqiqiy qismlarini alohida va mavhum qismlarining koeffitsientlarini alohida qo'shib, mos yig'indilarni haqiqiy qism va mavhum qism koeffitsienti qilib yozish kifoyadir, ya'ni

$$(z_1 + z_2) = (\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2) + (\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2)i. \quad (8)$$

Qo'shish amali uchun haqiqiy sonlarda bo'lgan xossalar bu yerda ham saqlanib qoladi:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z + (-z) = 0, \quad z + 0 = z, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Bulardan tashqari

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad \bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$$

ekanligini ko'rish osondir.

1-misol. $(3+i) + (4+5i) = (3+4) + (1+5)i = 7+6i.$

2-misol. $(-3+5i) + (2-7i) = (-3+2) + (5-7)i = -1-2i.$

3-misol. $(5+6i) + (7-6i) = (5+7) + (6-6)i = 12+0i.$

4-misol. $(4+9i) + (-4+i) = (4-4) + (9+1)i = 0+10i.$

5-misol. $(3-7i) + (-3+7i) = (3-3) + (-7+7)i = 0+0i.$

Haqiqiy sonlar sohasida 0 soni bor, bu sonni boshqa istalgan haqiqiy songa qo'shish bu sonni o'zgartirmaydi:

$$a + 0 = a.$$

Kompleks sonlar sohasida $0 + 0i$ soni ham shunga o'xshash rol o'ynaydi. Haqiqatan, $a + bi$ kompleks son har qanday bo'lganda ham

$$(a+bi) + (0+0i) = (a+0) + (0+b)i = a+bi.$$

$a+bi$ va $-a-bi$ kompleks sonlar qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi, ularning yig'indisi nolga teng, ya'ni $(a+bi) + (-a-bi) = 0.$

2. Ayirish. Bu amal qo‘shishga teskari amal sifatida ta’riflanadi.

Ta’rif. Berilgan z_1 va z_2 kompleks sonlarning ayirmasi $z_1 - z_2$ deb shunday z kompleks songa aytiladiki, bu sonning z_2 bilan yig‘indisi z_1 ni beradi, ya’ni

$$z + z_2 = z_1.$$

Bu ta’rif bo‘yicha

$$(z_1 - z_2) = (\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2) + (\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2)i \quad (9)$$

formulani olish qiyin emas.

Kompleks sonlarni ayirish ham haqiqiy sonlardagi xossalarga egadir:

$$z - z = 0, \quad z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

Undan tashqari, $z - \bar{z} = (2 \operatorname{Im} z) \cdot i$, $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2}$ larni keltirib chiqarish mumkin.

O‘z-o‘zidan ma’lumki, kiritgan ta’rifimiz har bir kompleks son dan istalgan boshqa kompleks sonni ayirish mumkinligiga kafil bo‘lmaydi. Bunday ayirishning mumkinligi va yagonaligi quyidagi teoremadan aniqlanadi.

Teorema. Ixtiyoriy ikki kompleks son $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ uchun $z_3 = z_1 - z_2$ ayirma mavjud va yagonadir.

1-misol. $(5-2i) - (4+6i) = (5-4) + (-2-6)i = 1-8i$.

2-misol. $(-3+4i) - (5+6i) = (-3-5) + (4-6)i = -8-2i$.

3-misol. $(2+i) - (9+i) = (2-9) + (1-1)i = -7+0i$.

4-misol. $(3+4i) - (3-i) = (3-3) + (4+1)i = 0+5i$.

5-misol. $(7-i) - (7-i) = (7-7) + (-1+1)i = 0+0i$.

3. Ko‘paytirish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarni ko‘paytirish xuddi haqiqiy koeffitsiyentli ikki hadlarni ko‘paytirishdek bajarilishini talab qilish tabiiydir, ya’ni:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i + b_1 b_2 i^2.$$

Ammo i sonning ta’rifiga ko‘ra $i^2 = -1$.

Shuning uchun $b_1 b_2 i^2 = -b_1 b_2$, demak,

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Bu formula ikki kompleks sonni ko‘paytirishning ta’rifi uchun asos qilib olinadi.

Ta'rif. Berilgan $z_1 = a_1 + b_1i$ va $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi $z_1 \cdot z_2$ deb,

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \quad (10)$$

bilan aniqlanuvchi kompleks songa aytiladi.

Bu amal ham haqiqiy sonlardagi xossalarini saqlab qoladi:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad z \cdot 1 = z; \quad z \cdot 0 = 0;$$

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3;$$

$$z_1 \cdot (z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3.$$

Undan tashqari,

$$z \cdot \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

lar to'g'riligiga ishonch hosil qilish osondir.

Eslatma. Agar kompleks sonlarni ikki had deb qabul qilib, ikki hadni ikki hadga ko'paytirish qoidasi bu yerda o'rinli deb qaralsa, $i^2 = -1$ ekanligini eslagan holda (10) ko'paytirish formulasini olish mumkin. Shu sababli bu formula yoddan ko'tarilgan taqdirda mazkur eslatmadan foydalanish o'rinlidir.

Masalan, $z_1 = 1 + i$ va $z_2 = 2 - 3i$ larni ko'paytiraylik:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(2 - 3i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 2 - i - 3 \cdot (-1) = 5 - i.$$

$$1\text{-misol.} \quad (2 - i) \cdot (3 + i) = 6 + 2i - 3i - i^2 = 7 - i.$$

$$2\text{-misol.} \quad (-5 - 2i) \cdot (-4 + 5i) = 20 - 25i + 8i - 10i^2 = 30 - 17i.$$

$$3\text{-misol.} \quad (2 + 3i) \cdot (6 - 5i) = 12 - 10i + 18i - 15i^2 = (12 + 15) + (18 - 10)i = 27 + 8i.$$

$$4\text{-misol.} \quad (4 + i) \cdot (4 - i) = 16 - 4i + 4i - i^2 = (16 + 1) + (-4 + 4)i = 17 + 0i.$$

$$5\text{-misol.} \quad (1 + i^2) = (1 + i) \cdot (1 + i) = 1 + i + i + i^2 = (1 - 1) + 2i = 0 + 2i.$$

Ixtiyoriy $a + bi$ kompleks son uchun ushbu tenglik bajariladi:

$$(a + bi) \cdot (0 + 0i) = 0 + 0i.$$

4. Bo'lish. Bu amal ko'paytirishga teskari amal sifatida ta'riflanadi.

Ta'rif. Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning bo'linmasi

$z_1 : z_2$ yoki $\frac{z_1}{z_2}$ deb, shunday z kompleks songa aytiladiki, uning z_2 bilan

ko'paytmasi z_1 ni beradi, ya'ni $z \cdot z_2 = z_1$ bo'ladi.

Bu ta'rifdan foydalanib,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \quad (11)$$

formulani chiqarish qiyin emas.

Agar kasrning surat va maxrajini bir xil kompleks songa (noldan farqli) ko'paytirish bu yerda ham o'rinli ekanligini e'tiborga olinsa, surat va maxrajni maxrajining qo'shmasiga ko'paytirish yo'li bilan bo'lish amalini, (11) formula yoddan ko'tarilgan taqdirda, bajarish mumkin. Masalan,

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{(2-i) \cdot (3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{3^2+4^2} = \frac{6-11i-4}{25} = \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i = 0,08 - 0,44i;$$

$$\frac{3+i}{2+3i} = \frac{(3+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i+2i-3i^2}{4-9} = \frac{9-7i}{13} = \frac{9}{13} - \frac{7}{13}i.$$

Shuningdek, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish

osondir.

Teorema. $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ bo'linma $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlar

uchun, faqat $a_2+b_2i \neq 0$ bo'lgandagina mavjud va yagonadir.

$$1 - \text{misol.} \quad \frac{3-2i}{3+4i} = \frac{(3-2i) \cdot (3-4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-18i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{1-18i}{25} = \frac{1}{25} - \frac{18}{25}i.$$

$$2 - \text{misol.} \quad \frac{9-7i}{2-3i} = \frac{(9-7i) \cdot (2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{18+13i-21i^2}{4-9i^2} = \frac{39+13i}{13} = 3+i.$$

2-misolni yuqorida berilgan teoremadan foydalanib yechaylik, ya'ni

$\frac{9-7i}{2-3i} = x+yi$ bo'lsin. U holda $(x+yi) \cdot (2-3i) = 9-7i$ yoki

$$(2x+3y) + (2y-3x)i = 9-7i.$$

Ikki kompleks sonning tengligiga ko'ra,

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 2y-3x=-7 \end{cases}.$$

Bu sistema tenglamalaridan birinchisi 3 ga, ikkinchisini 2 ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni hadma-had qo'shsak,

$$13y = 13 \quad \text{yoki} \quad y = 1.$$

y ning qiymatini tenglamalardan biriga qo'yib $x = 3$ ni topamiz.

Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari ustida ko'paytirish, bo'lish va quyida ko'riladigan darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallarini bajarish birmuncha yengil ko'chadi.

4-§. Haqiqiy va sof mavhum sonlar. Qo'shma kompleks sonlar

Tekislikning absissalar o'qida yotgan barcha nuqtalarini ayrim-ayrim qaraymiz. Bu nuqtalar $(a, 0)$ koordinatalarga ega bo'ladi va, demak, $a = 0i$ ko'rinishdagi kompleks sonlarga mos keladi. $a_1 + 0i$ va $a_2 + 0i$ - ikkita shunday sonlar bo'lsin. Quydagi munosabatlarning o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish oson:

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i ;$$

$$(a_1 + 0i) - (a_2 + 0i) = (a_1 - a_2) + 0i ;$$

$$(a_1 + 0i) \cdot (a_2 + 0i) = a_1 a_2 + 0i ;$$

$$\frac{a_1 + 0i}{a_2 + 0i} = \frac{a_1}{a_2} + 0i \quad (a_2 \neq 0) .$$

Bu munosabatlar $a + 0i$ ko'rinishdagi barcha kompleks sonlar, ya'ni mavhum qismlarining koeffitsiyentlari nolga teng bo'lgan sonlar o'zlariga mos kelgan haqiqiy sonlar kabi bir-biri bilan qo'shiladi, ayriladi, ko'paytiriladi va bo'linadi. Bu sonlarning geometrik tasvirlari ham shularga mos keladigan haqiqiy sonlarning tasvirlari kabidir: bu sonlarning har biri ham, boshqa sonlar absissalar o'qining nuqtalari bilan tasvirlanadi. Bu hol bizga $a + 0i$ kompleks son bilan a haqiqiy sonni farq qilmaslik imkonini beradi. Shu sababli bundan keyin biz $a + 0i$

o'rniga to'g'ridan-to'g'ri a yozaveramiz, jumladan $0 + 0i = 0$. Shu sababga ko'ra haqiqiy sonlarga yoki $a + 0i$ ko'rinishdagi kompleks sonlarga mos keluvchi nuqtalar joylashgan absissalar o'qi *haqiqiy o'q* deb ataladi [7, 8, 9, 11, 12].

Haqiqiy sonlar barcha kompleks sonlar to'plamiga qanday kirishi endi bizga ravshan.

Ordinatalar o'qining nuqtalari $(0, b)$ koordinatalarga ega, shuning uchun ular $0 + bi$ ko'rinishdagi sonlarga, ya'ni haqiqiy qismlari nolga teng bo'lgan kompleks sonlarga mos keladi. Bu sonlar shu bilan xarakterlanadiki, ularning kvadratlari ($b \neq 0$ dagina) doim manfiy bo'ladi. Haqiqatan,

$$(0 + bi)^2 = (0 + bi)(0 + bi) = 0 + 0 \cdot bi + b \cdot 0i - b^2 = -b^2 + 0i = -b^2.$$

Jumladan, $(0 + i)^2 = -1$.

Hali matematikaga kompleks sonlar kiritilmagan vaqtlarda sonlarning kvadrati manfiy bo'lishini tasavvur qilish qiyin edi. Shuning uchun $0 + bi$ ko'rinishdagi kompleks sonlar *sof mavhum sonlar* nomini oldi. Bundan buyon bu sonlarni $0 + bi$ ko'rinishida emas, to'g'ridan-to'g'ri bi ko'rinishida yozaveramiz. Barcha sof mavhum sonlar joylashadigan ordinatalar o'qi *mavhum o'q* deb ataladi.

Qo'shma kompleks sonlar. $a - bi$ kompleks son $a + bi$ kompleks songa qo'shma deyiladi. Masalan, $2 - 3i$ soni $2 + 3i$ soniga qo'shmadir. $5 + 4i$ soni $5 - 4i$ soniga qo'shma, $-6i$ soni $6i$ soniga qo'shmadir va hokazo.

a - ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. U holda:

$$a = a + 0i = a - 0i.$$

Shuning uchun har qanday haqiqiy son o'zining qo'shmasiga tengdir.

Shunday qilib, *barcha kompleks sonlardan faqat haqiqiy sonlarga o'zining qo'shmasiga teng.*

O'zaro qo'shma ikki kompleks sonning ko'paytmasi haqiqiy sonidir. Ya'ni

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Mavhum birlikning darajalari. Ta'rifga ko'ra i sonning birinchi darajasi i sonning o'zi, ikkinchi darajasi esa -1 :

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1.$$

i sonning yuqori darajalari quyidagicha topiladi:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i; \quad i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1 \text{ va hokazo. Ravshanki, har qanday natural } n \text{ da}$$

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Masalan,

$$i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1.$$

$$i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i.$$

5-§. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni

ko'paytirish va bo'lish

Aytaylik, $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ kompleks sonlar berilgan bo'lsin. U holda, ularning ko'paytmasi

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_1))$$

bo'lib, trigonometriyadagi qo'shish teoremlariga asosan

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (12)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bundan ko'rinadiki, trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko'paytirish uchun modullarini ko'paytirish argumentlarini esa qo'shish kifoya ekan.

1-misol. $2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ) \cdot 3(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ) = 6(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 6.$

2-misol. $5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ) \cdot 4(\cos 13^\circ + i \sin 13^\circ) = 20(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 20\left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}i.$

3-misol. $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$$= 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 6 \cdot (0 + i) = 6i.$$

Xuddi shunga o'xshash, ularning bo'linmasi uchun

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

formulani olish mumkin. Ya'ni, ikki kompleks son bo'linmasining moduli bo'luvchi va bo'linuvchi modullarining bo'linmasiga teng; nolga teng bo'lmagan

ikki kompleks son bo'linmasining argumenti bo'linuvchi va bo'luvchi argumentlarining ayirmasiga teng.

$$1\text{-misol. } \frac{2(\cos 150 + i \sin 150)}{3(\cos 105 + i \sin 105)} = \frac{2}{3}(\cos 45 + i \sin 45) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1+i) .$$

$$2\text{-misol. } \frac{\cos 70 + i \sin 70}{\cos 100 + i \sin 100} = \cos(-30) + i \sin(-30) = \cos 30 - i \sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i .$$

$$3\text{-misol. } 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) : 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right).$$

6-§. Kompleks sonni darajaga ko'tarish

Berilgan z kompleks sonning natural ko'rsatkichli n -darajasi z^n deb,

$$z^1 = z$$

ga, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ bo'lganda,

$$z^n = z^{n-1} \cdot z$$

ga aytiladi.

Aytaylik, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ bo'lsin. U holda, (12) ga asosan

$$z^2 = z \cdot z = (r \cdot r)(\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)) = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = (r^2 \cdot r)(\cos(2\varphi + \varphi) + i \sin(2\varphi + \varphi)) = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi),$$

- - - - -

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (13)$$

ni olamiz. Bu kompleks sonni darajaga ko'tarish formulasidir ($n \in \mathbb{N}$).

Agar $|z| = r = 1$ bo'lsa, (13) formuladan

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (14)$$

ni olamiz. Bu formula fransuz matematigi Muavr nomi bilan *Muavr formulasi* deb yuritiladi.

Bu formulaning tatbiqlaridan biri sifatida $\cos n\varphi$ va $\sin n\varphi$ ni $\cos \varphi$ va $\sin \varphi$ lar orqali ifodalash formulalarini keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham, (14) ning o'ng tomonidagi ikki hadning n - darajasini Nyuton binomi formulasi bo'yicha yoyib, i ning darajalari bo'lgan

$$i^{4k-3}=i, \quad i^{4k-2}=-1, \quad i^{4k-1}=-i, \quad i^{4k}=1, \quad k \in \mathbb{N}$$

larni hisobga olib, kompleks sonlarning tenglik shartidan foydalansak, talab qilingan formulalarga ega bo'lamiz. Masalan, $n=4$ uchun

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^4 &= \cos^4 \varphi + i \sin^4 \varphi, \\ \cos^4 \varphi + 4\cos^3 \varphi \cdot i \sin \varphi + 6\cos^2 \varphi \cdot i^2 \sin^2 \varphi + 4\cos \varphi \cdot i^3 \sin^3 \varphi + i^4 \sin^4 \varphi &= \\ &= \cos^4 \varphi + i \sin^4 \varphi; \\ \cos^4 \varphi + i(4\cos^3 \varphi \sin \varphi) - 6\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - i(4\cos \varphi \sin^3 \varphi) + \sin^4 \varphi &= \\ &= \cos^4 \varphi + i \sin^4 \varphi; \\ (\cos^4 \varphi - 6\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + i(4\cos^3 \varphi \sin \varphi - 4\cos \varphi \sin^3 \varphi) &= \\ &= \cos^4 \varphi + i \sin^4 \varphi. \end{aligned}$$

Oxirgidan,

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= \cos^4 \varphi - 6\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi, \\ \sin^4 \varphi &= 4(\cos^3 \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin^3 \varphi). \end{aligned}$$

Bu yerda ham haqiqiy sonlar uchun darajaga ko'tarish amalining xossalari saqlanib qoladi. Undan tashqari,

$$(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$$

ham o'rinalidir.

1-misol. $z = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$ kompleks sonni $n=4$ darajaga ko'taring.

Yechish. (13) formulaga asosan:

$$z^4 = 2^4(\cos 4 \cdot 25^\circ + i \sin 4 \cdot 25^\circ) = 16(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ);$$

2-misol. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ kompleks sonni 15-darajaga ko'taring.

Yechish. Avval z kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz.

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2} > 0$$

Bo'lgani uchun burchak, φ – birinchi chorakda bo'ladi,

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\varphi = 30^\circ, \quad z = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ.$$

(13) formulaga va trigonometrik funksiyalarning keltirish formulalariga asosan:

$$z^{15} = \cos 15 \cdot 30^\circ + i \sin 15 \cdot 30^\circ = \cos 450^\circ + i \sin 450^\circ = \cos(360^\circ + 90^\circ) + i \sin(360^\circ + 90^\circ) = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = 0 + i \cdot 1 = i.$$

3-misol. $z = \sqrt{2}(-1+i)$ kompleks sonni 9-darajaga ko'taring.

Yechish. z kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz.

$$r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \quad \text{bo'lgani uchun } \varphi \text{ burchak ikkinchi chorakda}$$

bo'ladi. $\operatorname{tg} \varphi = -1, \quad \varphi = 135^\circ;$

$$z = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ);$$

(13) va trigonometrik funksiyalarning keltirish formulalariga asosan:

$$\begin{aligned} z^9 &= 2^9(\cos 9 \cdot 135^\circ + i \sin 9 \cdot 135^\circ) = 512(\cos 1215^\circ + i \sin 1215^\circ) = 512 \\ &[\cos(360^\circ \cdot 3 + 135^\circ) + i \sin(360^\circ \cdot 3 + 135^\circ)] = 512(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \\ &= 512\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 256\sqrt{2}(-1+i). \end{aligned}$$

7-§. Kompleks sondan ildiz chiqarish

z kompleks sonning n -darajali ($n \in \mathbb{N}$) ildizi $\sqrt[n]{z}$ deb shunday θ kompleks songa aytiladiki, uning n -darajasi z ni beradi, ya'ni

$$\theta^n = z \tag{15}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrik shaklda berilgan bo'lsin.

$$\theta = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$$

bo'lsin deylik. (15) va (14) larga asosan

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ni olamiz.

Endi, $z \neq 0$ bo'lganda, oxirgidan

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

kelib chiqadi. Oxirgi olingan tenglamalar haqiqiy sohada tenglamalardir. Ulardan

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

larni, demak,

$$\sqrt[n]{z} = \theta_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0; 1; \dots; n-1 \quad (16)$$

formulani olamiz. Bu yerda k ning qolgan qiymatlarida sinus va kosinusning davriylik xossasi tufayli k ning yuqoridagi qiymatlarida olingan ildizlar takrorlanadi, ya'ni yangi ildiz qiymati kelib chiqmaydi. Demak, noldan farqli kompleks sonning n -darajali ildizi mavjud va u rosa n ta qiymatga ega bo'lar ekan. Kezi kelganda θ ning natural ko'rsatkichli ildizi θ ning o'zi bo'lib, faqat bitta qiymatga egaligini aytamiz.

1-misol. $\sqrt[3]{1}$ kompleks sohada hisoblansin.

Yechish. 1 ni trigonometrik shaklda yozamiz:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0$$

Bundan $r=1$, $\varphi=0$ ni olamiz va ularni (16) ga qo'yib,

$$\sqrt[3]{1} = \theta_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \quad k = 0; 1; 2$$

ni olamiz.

$$k=0 \Rightarrow \theta_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$k=1 \Rightarrow \theta_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k=2 \Rightarrow \theta_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Demak, 1 ning kub ildizi kompleks sohada uchta qiymatga ega ekan, haqiqiy sohada esa faqat bitta 1 qiymatga egaligi bizga ma'lum.

2-misol. $\sqrt[4]{-1}$ ildiz kompleks sohada hisoblansin.

Yechish. Bu ildiz haqiqiy sohada mavjud emasligi ma'lum.

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi,$$

$$r=1, \quad \varphi=\pi.$$

Bularni (16) ga qo'yamiz:

$$\sqrt[4]{-1} = \theta_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k = 0; 1; 2; 3.$$

$$\theta_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$\theta_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$\theta_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$\theta_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

3-misol. $\sqrt{1+i}$ ni toping.

Yechish. $r = \sqrt{1+i} = \sqrt{2}; \begin{cases} \sqrt{2} \cos \varphi = 1, \\ \sqrt{2} \sin \varphi = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4};$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\sqrt{1+i} = \theta_k = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2} \right), \quad k = 0; 1.$$

$$\theta_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} + i \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \approx 1,0987 + 0,4551i;$$

$$\theta_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \left(-\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} - i \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \approx -1,0987 - 0,4551i.$$

4-misol. $\alpha = \sqrt[3]{1+i}$ ni toping.

Yechish. $\alpha = \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi/4 + 24\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/4 + 24\pi}{3} \right)$

$$n = 0 \cdot \alpha_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi/4}{3} + i \sin \frac{\pi/4}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right);$$

$$n=1 \cdot \alpha_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi/4 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/4 + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right) = \\ = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$$

$$n=2 \cdot \alpha_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi/4 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi/4 + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Kompleks sonlarni qo'shing:

$$(3+5i) + (2-7i)$$

$$\left(\frac{2}{3} + 1,6i \right) + \left(2\frac{1}{3} - 0,4i \right)$$

2. Kompleks sonlarni ayiring:

$$(4+3i) - (-5+6i)$$

$$\left(4\frac{2}{3} + 1\frac{3}{8}i \right) - \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{8}i \right)$$

3. Kompleks sonlarni ko'paytiring:

$$(6+7i) \cdot (2-11i)$$

$$\left(2\frac{1}{3} + 1,4i \right) \cdot \left(1,6 - 3\frac{1}{2}i \right)$$

4. Bo'lishni bajaring:

$$\frac{3+4i}{5-7i}; \quad \frac{0,2-1,4i}{0,4+3i}$$

5. Amallarni bajaring:

$$a) \text{ agar } z_1 = 2+3i; \quad z_2 = 1+i; \quad z_3 = -2+i \text{ bo'lsa, } z = \frac{z_1 + 3z_2}{z_1 z_2 - z_3};$$

$$b) \text{ agar } z_1 = 8-2i; \quad z_2 = 5+i; \quad z_3 = -1+i \text{ bo'lsa, } z = \frac{z_1(z-z_3)}{z_3^3 + z_1} \text{ ni}$$

hisoblang

$$c) i^{120}; \quad i^{205} \text{ ni hisoblang .}$$

6. Kompleks sonlarni qo'shing:

$$(6+7i)+(-2+3i) ;$$

$$(2\frac{1}{3}+1,8i)+(\frac{2}{3}-0,8i) .$$

7. Kompleks sonlarni ayiring:

$$(7-3i)-(9+11i) ;$$

$$(4,8+1,5i)-(0,8-0,5i) .$$

8. Kompleks sonlarni ko'paytiring:

$$(15+4i)(2-3i); (4,3-2,6i)(0,2+1,4i) .$$

9. Bo'lishni bajaring:

$$\frac{5+6i}{4-3i}; \quad \frac{2,3i-1,4i}{2,4-1,6i} .$$

10. Amallarni bajaring:

$$a) \quad z_1 = 2-3i; \quad z_2 = 4+3i; \quad z_3 = -3+i \quad \text{bo'lsa,} \quad z = \frac{z_1+3z_2}{z_2^2-z_1 \cdot z_2} \quad \text{ni}$$

hisoblang;

$$b) \quad z_1 = 6-3i; \quad z_2 = 1+2i; \quad z_3 = 1-i \quad \text{kompleks sonlar berilgan.} \quad z = \frac{z_2(z_1-z_2)}{z_1^3+z_3} \quad \text{ni}$$

hisoblang;

$$c) \quad i^{121}; \quad i^{200} \quad \text{ni hisoblang} .$$

11. Trigonometrik shaklda ifodalang:

$$a) \quad \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad b) \quad 1-i ; \quad c) \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad d) \quad -1-i\sqrt{3} .$$

12. Amallarni bajaring:

$$a) \quad 3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) ; \quad b) \quad 8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) : \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) ;$$

$$c) \quad \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{21} ; \quad d) \quad \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}} .$$

$$13. \text{Hisoblang:} \quad a) \quad (-\sqrt{3}+i)^6 ; \quad b) \quad \sqrt[5]{-1} .$$

14. Trigonometrik shaklda ifodalang:

$$a) -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{ё) } 1 - i\sqrt{3}; \quad c) \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

15. Amallarni bajaring:

$$a) 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) ;$$

$$b) 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) : 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) ;$$

$$c) \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{24} ; \quad d) \sqrt[6]{1 - i\sqrt{3}} .$$

$$16. \text{Hisoblang:} \quad a) (\sqrt{3} - i)^8 ; \quad b) \sqrt[6]{i} .$$

17. Kompleks sonlar ko'paytmasini toping:

$$a) (-1 - 2)(-2 + 2i); \quad b) (2 + 3i)(3 + 2i).$$

18. Quyidagi kompleks sonlarni ko'paytiring:

$$a) (3,5 - i)(7 - 2i); \quad b) (5 + i)(15 - 3i).$$

19. Kompleks sonlar ko'paytmasini toping:

$$a) (4 - i)(3 + 2i); \quad b) (-7 + 2i)(1 - i).$$

20. Komplek sonlar ko'paytmasini toping:

$$a) \sqrt{3} + i \quad \sqrt{3} - i ; \quad b) 1 - \sqrt{2}i \quad \sqrt{2} + 3i ;$$

$$v) (a - bi)(a + bi) ; \quad g) (2a - i)(-a - bi) ;$$

$$d) \sqrt{3} + 4i \quad 3 - \sqrt{3}i ; \quad j) 1 - \sqrt{5}i \quad 2 + \sqrt{3}i .$$

21. Kompleks sonlar nisbatini toping:

$$a) \frac{2+i}{2-i}; \quad b) \frac{0+4i}{1+i}; \quad v) \frac{5+0i}{-4+3i}.$$

22. Kompleks sonlarni bo'ling:

$$a) \frac{4+6i}{1-i}; \quad b) \frac{10-i}{1+i}; \quad v) \frac{1-2i}{3+2i}; \quad g) \frac{-2-3i}{1+2i}.$$

23. Kompleks sonlarni bo'ling:

$$a) \frac{2+i}{3-i}; \quad b) \frac{6-i}{3+4i}; \quad v) \frac{13+4i}{1+i}; \quad g) \frac{3+4i}{7-2i}.$$

24. Kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing:

a) i ; b) $\frac{-1+i}{1+i}$; c) $\frac{1}{-2+i} - \frac{1}{2+i}$; d) $\frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{2-i}{-1+i}$.

25. $\frac{8-5i}{3-2i}$ nisbatni toping.

26. $\frac{1+i}{2-i}$ nisbatni toping.

27. Kompleks sonlarning nisbatini toping: $\frac{-2-3i}{1-2i}$.

28. $1+i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

29. $\sqrt{3}-i$ kompleks sonning trigonometrik shaklini aniqlang.

30. $1+0i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

31. $-1+0i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

32. $0+i$ kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

33. $1-i$ kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

34. 3 kompleks sonning trigonometrik shaklini yozing.

35. -5 kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

36. Quyidagi berilgan kompleks sonlarning modullari r va argumentlari φ larni toping hamda ularning trigonometrik shakllarini yozing:

a) $6-6i$; d) $-2i$;
b) $12i-5$; e) $3i-4$;
v) 5 ; j) $\sqrt{3}+i$;
g) $3i$; z) $2+2\sqrt{3}i$.

37. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ kompleks sonning trigonometrik shaklini yozing.

38. Quyidagi $2\cos 20^\circ - i\sin 20^\circ$ kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini yozing.

38. $3 - \cos 15^\circ - i\sin 15^\circ$ kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda ifodalang.

39. Quyidagi kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltiring.

1) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha, \alpha \in R$;

3) $-1 - i\sqrt{3}$;

4) $-2 - 5i$;

5) $-\sin \alpha + i \cos \alpha, \alpha \in R$;

6) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

40. $(1+i)^{25}$ ni hisoblang .

41. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ni hisoblang .

42. $\sqrt[3]{i}$ ni hisoblang .

43. $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$ ni hisoblang .

44. Kompleks sonlarning ildizlarini topilsin.

1) $\sqrt[3]{1+i}$; 4) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$;

2) $\sqrt[4]{-1}$; 5) $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[8]{-i}$; 6) $\sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}}$.

45. Darajaga ko'taring: $(1+i)^{20}$, $(1-i)^{21}$.

46. Ildizdan chiqaring: $\sqrt{5+12i}$.

47. Berilgan z_1 va z_2 kompleks sonlarning yig'indisi va ko'paytmasini toping:

a) $z_1 = 5+4i$, $z_2 = -2+3i$; b) $z_1 = -8-7i$, $z_2 = -3i$;

c) $z_1 = 5+\sqrt{3}i$, $z_2 = 5-\sqrt{3}i$.

48. $z_2 - z_1$ ayirmani va $\frac{z_2}{z_1}$ bo'linmani toping:

a) $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 5$; b) $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$;

c) $z_1 = a - \sqrt{b}i$, $z_2 = a + \sqrt{b}i$.

49. Hisoblang:

$$\begin{aligned} & a) (4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i); \quad b) \frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}; \quad c) \frac{(5+i)(3+5i)}{2i}; \\ & d) \frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}; \quad e) \frac{(2+i)(4+i)}{1+i}; \quad f) \frac{(3-i)(1-4i)}{z-i}; \quad g) (2+i)^3 + (2-i)^3; \\ & h) (3+i)^3 - (3-i)^3; \quad i) \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}; \quad j) \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3. \end{aligned}$$

50. Kompleks sonning haqiqiy qismini toping:

$$a) \quad z = \frac{(1+2i)^3}{i} + i^{19}; \quad b) \quad z = \frac{5+2i}{2-5i} - \frac{3-4i}{4+3i} + \frac{1}{i}.$$

51. Kompleks sonning mavhum qismini toping:

$$a) \quad z = (2-i)^3(2+11i); \quad b) \quad z = \frac{2-3i}{1+4i} + i^6.$$

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks son deganda nimani tushunasiz?
2. Qo'shma kompleks son deb qanday songa aytiladi ?
3. Kompleks sonning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
4. Kompleks sonning ayirmasi deb nimaga aytiladi?
5. Kompleks sonning ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
6. Kompleks sonning bo'linmasi deb nimaga aytiladi?
7. Kompleks sonlar darajaga qanday ko'tariladi ?
8. Kompleks sondan ildiz qanday chiqariladi?
9. Kompleks sonning geometrik tasviri qanday bo'ladi ?
10. Kompleks sonning trigonometrik shakli qanday ko'rinishda bo'ladi ?

Foydalanilgan adabiyotlar

1. I.A.Karimov. Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch. –T.: “Ma'naviyat”, 2008. - 176 b.
2. Неъматова Ш. Математика фанини ўқитишнинг назарий масалалари ва методикаси. –Т.: Тафаккур нашр., 2011 – 368 б.
3. М.Орифхонова ва бошқалар. Математика . –Т.: “Ўқитувчи”, 1974. – 408 б.
4. A.Abduxamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari (akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma). I q. –Т.: O'qituvchi, 2007. -462 b.
5. A.Meliqulov va boshqalar. Matematika (kasb-hunar kollejlari uchun o'quv qo'llanma). I-II q. –Т.: O'qituvchi, 2003.
6. S.Alixonov. Matematika o'qitish metodikasi. –Т.: Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2011. – 304 b.
7. Ёш математиклар қомусий луғати. –Т.: Қомуслар Бош тахририяти, 1991. – 480 б.
8. Р.Иброҳимов. Математикадан масалалар тўплами. Т.: Ўқитувчи, 1995.-116 б.
9. F. Rajabov. Matematika : O'quv qo'llanma: Т.: “O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti”, 2007.-280 b.
10. N.Xamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov. Matematika. –Т.: “Turon -Iqbol” nashriyoti, 2007.-312 b.
11. М.Я. Выгодский. Элементлар математикадан справочник. Т.: Ўқитувчи, 1971.-444 б.
12. Е.С. Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра ва элементлар функциялар (2-қисм). Т.: Ўқитувчи, 1969.-300 б.
13. E.A.Chuliyev. Oliy matematika asoslari (algebra). Uslubiy qo'llanma. Navoiy – 2011. – 35 b.
14. E.A.Chuliyev va boshqalar. Ayrim matematik terminlar, simvollar, belgilashlar va ularning paydo bo'lish tarixi. Uslubiy qo'llanma. Navoiy – 2013. – 36 b.

15. E.A.Chuliyev, D.R.Yuzboyeva. Matematika: to‘plamlar, haqiqiy sonlar. Uslubiy qo‘llanma. Navoiy, 2013, 36 b.
- 16.E.A.Chuliyev, Sh.S.Saksonova. Matematika: trigonometriya. Uslubiy qo‘llanma. Navoiy, 2013, 38 b.

MUNDARIJA

Kirish	3
1-§. Kompleks sonlar haqida boshlang'ich ma'lumotlar	5
2-§. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik hamda ko'rsatkichli shakllari	6
3-§. Kompleks sonlar ustida amallar.....	11
4-§. Haqiqiy va sof mavhum sonlar. Qo'shma kompleks sonlar.....	15
5-§. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish...	17
6-§. Kompleks sonni darajaga ko'tarish	18
7-§. Kompleks son dan ildiz chiqarish	20
Mustaqil yechish uchun misollar	23
Foydalanilgan adabiyotlar.	29