

НАВОИЙ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛТЕТИ
МАТЕМАТИКА ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ
3^Д – ГУРУХ ТАЛАБАСИ ЗАЙНИДДИНОВА МАҲФУЗАНИНГ
МАТЕМАТИК АНАЛИЗ ФАНИДАН ТАЙЁРЛАГАН

РЕФЕРАТИ

МАВЗУ: Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ҳадлари
ўрнини алмаштириш

БАЖАРДИ: Зайниддинова М.Н.

ТЕКШИРДИ: Норчаев Т.Й.

РЕЖА:

I. Кириш

II. Асосий қисм:

1. Ихтиёрий қаторларнинг яқинлашиши

2. Яқинлашиш принципи

3. Ўзгарувчан ишорали қаторлар

4. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари

А) Группалаш хоссаси

Б) Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ўрин алмаштириш хоссаси

III. Хулоса

IV. Фойдаланилган адабиётлар

Кириш

Биз бу мавзудан Ихтиёрий қаторларнинг яқинлашиши, яқинлашиш принципи, ўзгарувчан ишорали қаторлар, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари, группалаш хоссаси, абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ўрин алмаштириш хоссалари ҳақида маълумотларга эга бўламиз.

ИХТИЁРИЙ ҚАТОРЛАРНИНГ ЯҚИНЛАШИШИ

Яқинлашиш принципи. Ҳадларининг ишоралари ихтиёрий бўлган қаторларнинг яқинлашиши ҳақидаги масаласи текширайлик. Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots a_{n+m} + \dots \quad (A)$$

қаторларнинг яқинлашиши ҳақидаги масала, хусусий йнғиндилар кетма-кетлиги

$$A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m} \quad (1)$$

нинг чекли лимити мавжуд бўлиши ҳақидаги масалага тенг кучлидир. Кетма-кетликнинг чекли лимити мавжуд бўлишининг зарурий ва етарли шарти бўлган умумий шартни берувчи *яқинлашиш принципини* (1) кетма-кетликка нисбатан қайта таърифлаб қаторнинг яқинлашиш принципини ҳосил қиламиз:

(A) қаторнинг яқинлашувчи булиши учун, аввалдан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ берилганда ҳам, шундай номер N мавжуд бўлиши керакки, $n > N$ бўлиб, *исталган* $m = 1, 2, 3, \dots$ да ушбу

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \quad (2)$$

Тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ердаги $n+m$ 52-п^о даги n га боғлиқ бўлмаган, ва, умумийликка зиён келтирмасдан, n дан катта қилиб олиниши мумкин бўлган иккинчи номер n' нинг ролини уйнайди. (Бу шартнинг авторлари Больцано ва Коши иккаласи ҳам уни чексиз қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалага мувофиқ қилиб исботлаганлар.)

Агар қаторни яқинлашувчи деб фараз қилиб, (2) тенгсизликда, хусусан, $m = 1$ десак,

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (n > N \text{ бўлганда})$$

бўлади, яъни $a_{n+1} \rightarrow 0$ ёки, бари бир, $a_n \rightarrow 0$, бу эса қаторни яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартдир. Бу шартнинг ўзигина қаторнинг яқинлашувчи бўлишини таъмин этолмайди, чунки у юқорида баён қилинган шартнинг мазмунини тўла қамраб ололмайди: қаторнинг етарли узокликда турган ҳадларининг айрим-айрим исталганча кичик бўлишидан ташқари, бундай ҳадларнинг йиғиндиси ҳам, ҳадларнинг қанча олинишидан катъи назар, исталганча кичик булиши керак. Буни яққол кўрсатиш учун гармоник $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қаторни олайлик. Қаторнинг умумий ҳади $(= \frac{1}{n})$ га интилади ва шу билан бирга, бу ҳаддан кейин яна $n-1$ та кейинги ҳадларини олсак, уларнинг ҳаммасининг йиғиндиси $> \frac{1}{2}$ бўлиб чиқади.

Абсолют яқинлашиш. Яқинлашиш принципини бевосита тадбиқ қилиш кўпинча қийин бўлгани сабабли, яқинлашиши соддарок воситалар ёрдами билан аникланиши мумкин бўлган қаторлар синфларини ўрганиш қизиқарлидир.

Мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш, ўнғай аломатлар бор бўлгани туфайли, кўпинча осон эканини кўрдик. Шунинг учун, берилган қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалани мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги масалага келтирилиши мумкин бўлган ҳоллардан бошлаш табиийдир.

Агар қаторнинг ҳамма ҳадлари мусбат бўлмасдан, бирор жойдан бошлаб мусбат бўлса, етарли миқдордаги бошланғич ҳадларни ташлаб, масалани мусбат ҳадли қаторни текширишга олиб келамиз. Агар қаторнинг ҳадлари манфий ёки, ҳеч булмаганда, бирор жойдан бошлаб манфий бўлса, ҳамма ҳадларнинг ишораларини ўзгартириш билан мусбат ҳадли қатор ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган қаторнинг ҳадлари орасида чексиз кўп мусбат ва чексиз манфий ҳадлар бўлган ҳол — чинакам янги ҳол булади.

Қуйндаги таърифни берайлик: *агар*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (A)$$

қатор

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (A^*)$$

қатор билан бир вақтда яқинлашувчи бўлса, (A) қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

Қуйидаги теорема ўринлидир:

Коши теоремаси. (A) қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган (A*) қаторнинг яқинлашувчи бўлишligидан, (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлишligи келиб чиқади.

Исботи яқинлашиш принциpidан дарҳол келиб чиқади:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|$$

тенгсизлик- кўрсатадики, агар (A*) қатор учун яқинлашиш шarti бажарилса, у (A) қатор учун ҳам албатта бажарилади.

Бошқача мулоҳаза қилиш ҳам мумкин. (A) қаторнинг мусбат ҳадларини алоҳида ва манфий ҳадларининг абсолют қийматларини алоҳида қарайлик. Уларни ҳам, буларни ҳам ҳадларнинг (A) қаторида туриш тартибини бузмасдан қайтадан номерлаб чиқайлик, натижада иккита (мусбат) қатор ҳосил бўлади

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots$$

(B)

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m + \dots$$

(C)

(A*) қаторнинг яқинлашувчи бўлишлигидан бу қаторларнинг иккаласининг ҳам яқинлашувчи бўлишлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, у ёки бу қаторларнинг исталган хусусий йиғиндиси B_k ёки C_m (A*) қаторнинг бирор хусусий йиғиндисидан ва, дэмак, бу қаторнинг йиғиндиси (A*) дан кичик бўлади .

Агар энди (A) қаторнинг хусусий йиғиндиси A_n ни олсак, уни қуйидаги айирма кўринишида ёзиш мумкин:

$$A_n = B_k - C_m$$

бу ердаги k ва m лар, мос равишда A_n йиғиндининг таркибидаги мусбат ва манфий ҳадларнинг сонлари бўлиб, улар n га боғлиқ ҳамда n билан бирга чексизликкача ўсадилар. Бу ҳолда, равшанки, чекли лимит

$$A = \lim A_n = B - C \quad (3)$$

мавжуд, бу ерда B ва C лар (B) ва (C) қаторларнинг йиғиндилари, ва шу билан (A) қаторнинг яқинлашувчи эканлиги исботланди. Шу билан бирга бу ерда айтилган теоремадан бошқа яна қўшимча фойдали даъво исботланди: қўйилган шартлар бажарилганда, берилган қаторнинг йиғиндиси, унинг мусбат ҳадларидан тузилган қаторнинг йиғиндисидан манфий ҳадларидан тузилган қаторнинг йиғиндисининг айрилганига тенг.

Шундай қилиб, (A*) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши, (A) қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши учун етарлидир.

(A) қатор яқинлашувчи бўлиб, (A*) қатор эса узоклашувчи бўлган ҳоллар бўлиши мумкин, бу каби ҳолларни қуйида учратамиз. Шундай бўлганда (A) қаторга **абсолютмас(шартли) яқинлашувчи қатор** дейилади.

(A) қаторнинг абсолют яқинлашувчи эканлигини тайинлаш учун, мусбат ҳадли (A*) қаторга, аввалги параграфда ўрганнган, ҳамма яқинлашиш аломатларини татбиқ қилиш мумкин. Лекин узоклашиш аломатлари билан эҳтиёт булиш керак: агар (A*) қатор узоклашувчи бўлса-да, (A) қатор (абсолютмас, шартли) яқинлашувчи бўлиб қолиши мумкин. Бундан факат Коши ва

Даламбер аломатлари истисно, чунки улар (A^*) қаторнинг узоклашувчи эканини таъкидласа, бу— (A^*) қаторнинг умумий ҳади $|a_n|$ нолга интилмайди демакдир, бу ҳолда a_n ҳам нолга интилмайди, ва, демак, (A) қатор узоклашувчи. Шунинг учун Коши ва Даламбер аломатларини ихтиёрий қаторга мувофиқлаштириб айтиш мумкин. Буни, масалан, Даламбер аломати учун қилайлик.

Даламбер аломати. $D_n^* = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ нисбат учун аниқ

$$D^* = \lim D_n^*$$

лимит мавжуд бўлсин; бу ҳолда, $D^* < 1$ бўлганда, берилган (A) қатор абсолют яқинлашувчи бўлиб, $D^* > 1$ бўлганда эса, у узоклашувчи бўлади.

М и с о л л а р. 1) Даламбер аломатини (a) ва (b) қаторларга, $x > 0$ деган талабни олиб ташлаб, тадбиқ қилайлик. У ҳолда қуйидаги натижага эга бўламиз:

(а) қатор x нинг барча қийматлари учун абсолют яқинлашувчи;

(б) қатор $-e < x < e$ булганда, абсолют яқинлашувчи бўлиб, $x > e$ ёки $x < -e$ бўлганда узоклашувчи бўлади ($x = \pm e$ бўлганда яқинлашувчи бўлишнинг зарурий шarti бузилади)

Қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \pm \frac{x^n}{n} \pm \dots$$

Учун

$$D_n^* = \frac{n}{n+1} |x|, \quad D_n^* = |x|$$

Демак, $|x| > 1$ бўлганда абсолют яқинлашувчи бўлиб, $|x| < 1$ узоклашувчи бўлади, чунки у гармоник қатор ҳадларининг ишораларини ўзгартириш натижасида ҳосил бўлган, $x = 1$ бўлганда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

қатор ҳосил бўлади, бу қаторнинг яқинлашувчи бўлмаслиги ҳақидаги савол ҳозирча очик қолдирилади.

Ўзгарувчан ишорали қаторлар. Аввалги номердаги мулоҳазалар ёрдами билан берилган қаторнинг фақат абсолют яқинлашувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқлаш мумкин, аммо шартли яқинлашувчи қаторларга уларни тадбиқ қилиб бўлмайди. Шунинг учун баёнимизнинг охирида, қаторларнинг ўзгарувчан ишорали қаторлар деб аталувчи битта махсус, лекин муҳим синфини текширайлик, Бу синфнинг қаторлари орасида шартли (абсолютмас) яқинлашувчилари ҳам бор.

Ўзгарувчан ишорали қаторлар деб, ҳадлари навбат билан мусбат ва манфий ишорага эга булган қаторларга айтилади. Бундай қаторни ёзганда ҳадларининг ишораларини очик-ойдин кўрсатиб, масалан

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + (-1)^{n-1} C_n + \dots \quad (4)$$

каби ёзиш қулайдир (бу ерда $C_n > 0$ деб ҳисобланади)

Бундай қаторларга нисбатан Лейбниц 1714 йилдаёқ қуйидаги содда теоремани айтган эди.

Лейбниц теоремаси. Агар ўзгаручан ишорали (4) қаторнинг ҳадлари абсолют қийматлари бўйича монотон камайса:

$$C_{n+1} \leq C_n \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (5)$$

ва нолга интилса,

$$\lim C_n = 0$$

у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.

Исботи. Жуфт тартибли хусусий йиғинди C_{2m} ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$C_{2m} = (C_1 - C_2) + (C_3 - C_4) + \dots + (C_{2m-1} - C_{2m}).$$

Ҳар бир қавс, (5) га кўра, мусбат сон бўлгани сабабли, m нинг ўсиши билан C_{2m} йиғиндининг ҳам ўсиши равшан. Иккинчи томондан, C_{2m} ни

$$C_{2m} = C_1 - (C_2 - C_3) - \dots - (C_{2m-2} - C_{2m-1}) - C_{2m}.$$

кўринишда ёзиб олинса, C_{2m} нинг юқоридан чегараланганлигини кўришосон

$$C_{2m} \leq C_1$$

У ҳолда, монотон ўзгарувчи ҳақидаги теоремага кўра m чексиз ўсганда C_{2m} хусусий йиғинди чекли лимитга эга:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m} = C$$

Тоқ тартибли хусусий йиғинди C_{2m-1} га ўтсак: $C_{2m} = C_{2m-1} + C_{2n}$ эканини кўрамиз. Умумий ҳад нолга интилгани сабабли.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} C_{2m-1} = C$$

Бундан, берилган қаторнинг йиғиндиси C экани келиб чиқади.

Эслатма. Жуфт тартибли хусусий йиғинди C_{2m} ларнинг қатор йиғиндиси C га ўсиб

яқинлашишини кўрдик. C_{2m-1} ни

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1})$$

Кўринишда ёзиб, тоқ тартибли хусусий йиғиндиларнинг C га камайиб интилишини кўриш осон. Шундай қилиб, ҳамма вақт.

$$C_{2n} \leq C \leq C_{2n-1}$$

Хусусан,

$$0 < C < C_1$$

бўлади деб даъво қилиш мумкин.

Бу кўрилаётган қаторнинг қолдиғини жуда содда ва осон баҳолашга имкон беради (қолдиқнинг ўз ҳам ўзгарувчан ишорали қатордир). Яъни қолдиқ:

$$\tau_n = (-1)^{n-1} \{C_n - C_{n+1} + \dots\}$$

дан иборат (6) га кўра мусбат ва c_n дан кичик.

Шундай қилиб, ҳаммаҳолларда Лейбниц тилидаги қаторнинг қолдиғи, ўзининг биринчи ҳадининг ишорасига эга бўлиб, абсолют қиймати бўйича ундан *кичик бўлади*.

Бу фактдан қаторлар ёрдамида тақрибий ҳисоблашларда кўп фойдаланадилар.

Лейбниц тилидаги қаторларга энг содда мисоллар сифатида қуйидаги қаторларни олиш мумкин:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Ва

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Бу иккала қаторнинг яқинлашувчи бўлишлиги исботланган теоремадан келиб чиқади.

Шу билан бирга, бу қаторлар ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қаторлар узоқлашувчидирлар: (а) қатор учун у гармоник қатор бўлиб, (б) қатор учун эса

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

қатор ҳосил бўлиб, унинг узоқлашувчи бўлишлиги хусусий йиғиндиси

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} H_n$$

тенгсизликни қаноатлантиришидан келиб чиқади.

Шундай қилиб, (а) ва (б) қаторлар абсолютмас (шартли) яқинлашувчи қаторларга биринчи мисоллар бўла олади. қуйида биринчи қаторнинг йиғиндиси $\ln 2$, иккинчисининг йиғиндиси эса $\frac{\pi}{4}$ эканини кўрсатамиз.

ЯҚИНЛАШУВЧИ ҚАТОРЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Группалаш хоссаси. Чексиз қаторнинг йиғиндиси тушунчаси, арифметика ва алгебрада қараладиган чекли сондаги қўшилувчининг йиғиндиси тушунчасидан л и м и т г а ўтиш а м а л и борлиги билан анча фарқ қилади. Оддий йиғиндиларнинг баъзи хоссалари чексиз қаторларнинг йиғиндилари учун ўринли бўлса-да, бу ҳол, кўпинча маълум шартлар бажарилганда рўй беради; биз бу шартларни ўрганишимиз керак. Бошқа ҳолларда йиғиндининг биз одатланиб қолган хоссалари бутунлай бузилади, демак, бу масалада, умуман, эҳтиётликни сақлаш керак.

Яқинлашувчи

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (A)$$

Қаторни кўрайлик; унинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

қаторнинг йиғиндиси A га яқинлашади. Қаторнинг ҳадларини, уларнинг жойланишини ўзгартирмасдан, ихтиёрий равишда группаларга бирлаштирайлик:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad a_{n_1+1} + \dots + a_{2n}, \dots, \quad a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}, \dots$$

Бу ерда (n_k) — натурал қатордан ажратилган номерларнинг бирор ўсувчи хусусий кетма-кетлиги.

Теорема. Бу йиғиндилардан тузилган

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) \dots \quad (\tilde{A})$$

қатор ҳар доим яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси берилган қатор йиғиндиси A га тенг бўлади.

Бошқача айтганда: яқинлашувчи қатор группалаш хоссасига эга.

Ҳақиқатан, янги қаторнинг хусусий йиғиндиларидан ташкил топган

$$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_k, \dots$$

кетма-кетлик (1) кетма-кетликнинг $A_{n1}, A_{n2}, \dots, A_{nk}, \dots$ қисмий кетма-кетлигидан иборат ва, демак, у худди шу A лимитга яқинлашади.

Ҳозирча, одатдаги йиғиндилар билан тўла ўхшашликни кўрамиз; агар группалаш хоссасини тескари тартибда татбиқ қилсак, бу ўхшашлик бузилади. Агар ҳар бир ҳади чекли сондаги қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлган яқинлашувчи $(\tilde{A})$ қатор берилган бўлса, қавсларни ташлаш натижасида ҳосил бўлган янги (A) қатор узоқлашувчи бўлиб қолиши мумкин. Оддий бир мисол: равшанки,

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots,$$

қатор яқинлашувчи, лекин ундан қавсларни ташлаш натижасида ҳосил бўлган

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

қатор узоқлашувчидир.

Агар қавсларни ташлаш натижасида ҳосил бўлган (A) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг йиғиндиси, албатта $(\tilde{A})$ қаторнинг йиғиндисига тенг булади. Бу юқорида исботлангандан келиб чиқади.

Эслатма. Баъзи ҳолларда (A) қаторнинг яқинлашувчи бўлишини олдиндан таъмин этиш мумкин. Бундай ҳилдаги энг содда ҳол, $(\tilde{A})$ даги ҳар бир қавснинг ичидаги ҳамма қўшилувчилар бир хил ишорага эга бўлганда ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан, бу ҳолда n, n_{k-1} йиғинди монотон ўзгаради, демак, у $A_{nk-1} = \tilde{A}_{k-1}$ билан $A_{nk} = \tilde{A}_k$ орасида ётади. k етарли катта бўлганда кейинги йиғиндилар $(\tilde{A})$ қаторнинг йиғиндиси $(\tilde{A})$ дан исталганча кам фарқланади, демак, n етарли катта бўлганда худди шу мулоҳаза $\tilde{A}_k$ йиғиндига нисбатан ҳам тўғри, шунинг учун $A_n \rightarrow \tilde{A}$ дир.

Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ўрин алмаштириш хоссаси. Йиғиндиси A бўлган яқинлашувчи (A) қатор берилган бўлсин. Унинг ҳадлари ўринларини ихтиёрий равишда алмаштириб, янги

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k + \dots$$

(A')

Қаторни ҳосил қиламиз. Бу қаторнинг ҳар бир a'_k ҳади берилган қаторнинг бирор аниқ ҳади a_{nk} га тенгдир.

(A') қатор яқинлашувчи бўладими ва яқинлашувчи бўлса унинг йиғиндиси берилган қаторнинг

йиғиндиси A га тенг бўладими, деган савол туғилади. Бу масалани текширганда абсолют ва абсолютмас яқинлашувчи қаторларни кескин фарқлантириш керак бўлади.

Дирихле теоремаси. Агар (A) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, ундан ҳадларининг ўринларини алмаштириш натижасида ҳосил бўлган (A') қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси берилган қаторнинг йиғиндиси A га тенг бўлади. Бошқача қилиб айтганда, абсолют яқинлашувчи қатор ўрин алмаштириш хоссасига эга.

Исботи. Исботлашни икки қисмга бўлиб ўтказайлик.

(а) Аввал, берилган (A) қаторни мусбат ҳадли қатор деб фараз қилайлик.

(A') қаторнинг ихтиёрий хусусий йиғиндиси (A'_k) ни кўрайлик.

$$a'_1 = a'_{n_1}, a'_2 = a'_{n_2}, \dots, \quad a'_k = a'_{n_k}$$

Бўлгани сабабли, n' ни ҳамма $n_1, n_2, \dots, n_k$ номерлардан катта қилиб олсак,

$$A'_k \leq A_{n'}, \text{ бўлади ва, демак, албатта}$$

$$A'_k \leq A.$$

Бу ҳолда (A') қатор яқинлашувчи бўлади ва : унинг йиғиндиси A' A дан катта бўла олмайди:

$$A' \leq A$$

Лекин (A) қатор ҳам (A') дан ҳадларининг ўринларини алмаштириш билан ҳосил бўлади, шунинг учун, юқоридагига ўхшаш йўл билан,

$$A \leq A'$$

га эга бўламиз ҳосил қилинган иккита муносабатни солиштириб, талаб қилинган $A' = A$ тенгликка келамиз.

(б) Энди (A) ихтиёрий а б с о л ю т яқинлашувчи қатор бўлсин.

Мусбат

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots (A^*)$$

қатор яқинлашувчи бўлгани сабабли, исботланганга кўра, ҳадларининг ўринларини ҳар қандай қилиб алмаштирганда ҳам қатор яқинлашувчи бўлиб қолаверади, демак абсолют яқинлашиш ҳақидаги теоремага кўра, (A) қатор ҳам ўзининг (абсолют) яқинлашувчилигини сақлайди.

Сўнгра (A) қатор абсолют яқинлашувчи бўлган ҳолда, унинг йиғиндиси каби ифодаланишини кўрган эдик, бу ерда B ва C лар (A) қаторнинг мос равишда, мусбат ва манфий ҳадларининг

абсолют қийматларидан тўзилган мусбат ҳядли (B) ва (C) қаторларнинг йиғиндилари. (A) қаторда ҳадларнинг ўринларини алмаштириш натижасида бу қаторларда ҳам ҳадларнинг ўринлари алмашади, лекин бу ҳодиса (исботланганга кўра) уларнинг йиғиндилари B ва C га таъсир этмайди. Демак, (A) қаторнинг йиғиндиси ҳам аввалгисича қолади, шунини исботлаш талаб қилинган эди.

Абсолютмас яқинлашувчи қатор бўлган ҳол. Энди абсолютмас яқинлашувчи қаторларни текширишга ўтайлик ва уларнинг ўрин алмаштириш хоссасига эга эмасликларини кўрсатайлик.

Аввало қуйидагига эътибор берайлик. (A) қатор яқинлашувчи, лекин абсолютмас яқинлашувчи деб фараз қилайлик. Қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан

$$\lim a_n = 0$$

эканлиги келиб чиқади. Аввалги номерда эслатилган

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (B), \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m \quad (C)$$

қаторлар учун, равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_k = 0 \quad \text{ва} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_m = 0 \quad (2)$$

бўлса-да, бу ҳолда уларнинг иккаласи ҳам узоқлашувчи бўлади. Ҳақиқатан, агар (A) қаторнинг дастлабки n та ҳадининг орасида k та мусбат ва m та манфий ҳад бўлса, у ҳолда

$$A_n = B_k - C_m, \quad A_n^* = B_k + C_m$$

бўлади. Бу тенгликларнинг иккинчиси (B) ва (C) қаторларнинг иккаласининг ҳам бир вақтда яқинлашувчи бўла олмаслигини кўрсатади, чунки акс ҳолда фаразимизга зид ўларок, (A*) қатор ҳам яқинлашувчи бўлар эди. Биринчи тенгликдан эса, бу қаторларнинг бири яқинлашувчи бўлиб, иккинчиси узоқлашувчи бўла олмаслиги келиб чиқади, чунки акс ҳолда (A) қатор ҳам узоқлашувчи бўлар, бу эса фаразимизга зид бўлар эди.

Энди қуйидаги ажойиб теоремани исботлайлик.

Риман теоремаси. Агар (A) қатор абсолютмас яқинлашувчи бўлса, аввалдан чекли ёки $\pm\infty$ га тенг бўлган ҳар қандай сон L берилган бўлмасин, бу қаторда ҳадларнинг ўринларини шундай алмаштириш мумкинки, ҳосил бўлган янги қаторнинг йиғиндиси худди шу L га тенг бўлади.

Исботи. L чекли сон бўлган ҳолни кўрайлик. Аввало шунга эътибор берайлик: (B) ва (C) қаторларнинг узоқлашувчи бўлишидан, уларнинг ҳамма қолдиклари ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади, демак, бу қаторларнинг ҳар бирида, исталган жойдан бошлаб, шунча ҳад олиш

мумкинки, уларнинг йиғиндиси исталган сондан катта бўлади.

Бундан фойдаланиб (А) қатор ҳадларининг ўринларини қуйидагича ўзгартирайлик.

Аввал, берилган қаторда ҳадларининг жойланиш тартибини бузмасдан, шунча мусбат ҳадини олайликки, уларнинг йиғиндиси L дан катта бўлсин:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k_1} > \Delta$$

Бу йиғиндига, ҳадларнинг жойлашиш тартибини бузмасдан, шунча манфий ҳадлар қўшайликки, ҳосил бўлган янги йиғинди Δ дан кичик бўлсин:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - c_3 - \dots - c_{m_1} < \Delta$$

Бундан сўнг, яна мусбат ҳадлардан шунчасини жойлаштирайликки, натижада

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - c_3 - \dots - c_{m_1} + \\ + b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2} > L$$

бўлсин. Сўнгра, қолган манфий ҳадлардан шунчасини оламизки, натижада

$$b_1 + \dots + b_{k_1} - c_1 - \dots - c_{m_1} + \\ + b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2} - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2} < L$$

бўлсин ва ҳ. к. Бу жараёни чексиз давом эттирилган деб фараз қиламиз; Равшанки, (А) қаторнинг зар бир ҳади, ўз ишораси билан, аниқ жойда учрайди.

Агар, ҳар гал талаб қилинган тенгсизликни ҳосил қилиш учун b ёки c ҳадлар керагидан ортиқ олинмаса, L сонидан у ёки бу томонга четлашиш, абсолют қиймати бўйича, охириги ёзилган ҳаддан катта бўлмайди. Бу ҳолда (2) дан, равшанки,

$$(b_1 + \dots + b_{k_1}) - (c_1 + \dots + c_{m_1}) + \\ + (b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2}) - (c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2}) + \dots$$

қаторнинг йиғиндиси L бўлади. Қавсларни очгандан кейин ҳосил бўлган қатор ҳам шу L йиғиндига эга бўлади. Место для формулы.

Энди $L = \pm\infty$ бўлсин. Бу ҳолда мусбат сонларни (ҳадларни) шундай талабни қаноатлантирадиган қилиб олиш мумкинки, бунда ҳосил бўлган йиғиндилар 1, 2, 3, ... лардан кетма-кет катта бўла борсин; сўнгра мусбат ҳадларнинг ҳар бир группасидан кейин биттадан манфий ҳад

жойлаштирамиз. Шу йўл билан, равшанки, йиғиндиси $\pm\infty$ га тенг бўлган қатор тузилган бўлар эди. Шунга ўхшаш йиғиндиси $-\infty$ бўлган қатор ҳам ҳосил қилиш мумкин.

Исботланган бу факт, қаторнинг абсолютмас (шартли) яқинлашувчи бўлиши унинг мусбат ва манфий ҳадларнинг ўзаро қисқариб кетиши натижасида рўй беришини қайд этадиган ва шу сабабли бундай қаторлар учун ҳадларнинг қайси тартибда бирин-кетин келиши ҳаёт муҳим роль ўйнайди, абсолют яқинлашувчилик эса шу ҳадларнинг камайиш тезлигига асослангандир ва ҳадларнинг жойлашиш тартибига боғлиқ эмас.

Ми сол. Шартли (абсолютмас) яқинлашувчи эканлиги аввалдан маълум бўлган

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \dots \quad (3)$$

Қаторни кўрайлик. Бу қаторни йиғиндиси $\ln 2$ эканини куйида кўрамиз (биз учун бу ерда йиғиндининг нолдан фарқлилиги муҳимдир) Қатор ҳадларининг ўринларини шундай ўзгартирайликки, битта мусбат ҳаддан кейин иккита манфий ҳад келсин:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}} + \dots \quad (4)$$

Бундай ўзгартиришдан кейин қаторнинг йиғиндиси икки баравар камаяди.

Ҳақиқатан ҳам, агар бу қаторларнинг хусусий йиғиндиларини мос равишда A'_n ва A_n лар орқали белгиласак, у ҳолда

$$\begin{aligned} A'_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} A_{2m} \end{aligned}$$

ва, демак,

$$A'_{3m} \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$$

Лек ин,

$$A'_{3m-1} = A'_{3m} + \frac{1}{4m} \quad \text{ва} \quad A'_{3m-2} = A'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2}$$

лар ҳам уша $\frac{1}{2} \ln 2$ лимитга интилади, демак, (4) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси ўша соннинг худди ўзидир.

ХУЛОСА

Биз бу мавзудан Ихтиёрий қаторларнинг яқинлашиши, яқинлашиш принципи, ўзгарувчан ишорали қаторлар, яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари, группалаш хоссаси, абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ўрин алмаштириш хоссалари ҳақида маълумотларга эга бўлдик ва улар юзасидан мисоллар ишлаб, билим ва кўникмаларимизни оширдик.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ф.Г.Михайлович “Основы математического анализа”
2. Б.П.Демидович “Сборник задач и упражнений по математическому анализу” Москва 1969.
3. А.Садуллаев ва бошқалар. “Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами” 1-т. Тошкент 1993.
4. Т.Азларов, Х. Мансуров. “Математик анализ” 1-том. Тошкент 1994.
5. Ё.У.Соатов “Олий математика” 3-т. Тошкент 1996.
6. Т.Т.Тўйчиев, Д.Х.Джумабоев “Математик анализ фанидан 1-курс талабалари учун лаборатория ишлари” Тошкент 2003.
7. Ҳикматов.А.Х., Турдиев.Т. “Математик анализ”, 1-том. Тошкент 1990.
8. www.ziyounet.uz