

НДПИ физика-математика факультети
математика ўқитиш методикаси таълим
йўналиши 3-д гуруҳ талабаси

**Каримова Дурдонанинг математик анализ
фанидан тайёрлаган**

РЕФФЕРАТ

Текширди: Норчаев Т. Й.

Бажарди: Каримова Д

Навоий - 2014й

Кириш.

Республикамызда Таълим тўғрисидаги қонуннинг қабул қилиниши, кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури замон талабларига жавоб берадиган мутахассисларни тайёрловчи олий ўқув юртларига, айниқса университетларга катта маъсулият юклади. Давлат таълим стандартлари, ўқув дастурлари асосида дарсликлар, ўқув қўлланмаларни яратиш масаласи юзага келди.

Давлат таълим стандартлари барча фанлардан, жумладан математик анализ бўйича мавжуд дарслик ва қўлланмаларга янгича нуқтаи назардан қарашни тақозо этади.

Комплекс сонларни турли шаклларда ифодалаш мавзусида ёзилган рефератдан комплекс сонлар шақида тўлиқ малумотга эга бўлишимиз мумкин. Ушбу рефератда. Комплекс сонларнинг таърифи ва улар устида амаллар. Комплекс сонларнинг геометрик тасвири ва комплекс текислик, Комплекс сонларнинг тригонометрик шакли, Комплекс сонларни даражага кўтариш ва илдиздан чиқариш шақида фикр юритилган вауларга доир турли мисоллар бажариб кўрсатилган.

МАВЗУ: Комплекс сонларни турли шаклларда ифодалаш.

РЕЖА:

I. Кириш.

1. Комплекс сонларнинг таърифи ва улар устида амаллар.
2. Комплекс сонларнинг геометрик тасвири ва комплекс текислик.
3. Комплекс сонларнинг тригонометрик шакли, Комплекс сонларни даражага кўтариш ва илдиздан чиқариш.

Хулоса.

Комплекс соннинг таърифи

Комплекс сонни бу фанга таъриф орқали киритамиз.

1-таъриф. α комплекс сон деб маълум бир тартибда берилган бир жуфта a ва b ҳақиқий сонларга айтилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\alpha = (a, b). \quad (1)$$

Бу ерда a, b лар компоненталар дейилади. Таърифга кўра $(a, b) \neq (b, a)$, яъни компоненталарнинг тартиби ҳам катта аҳамиятга эга. Агар $b = 0$ бўлса, (1) да

$$\alpha = (a, 0) = a \quad (2)$$

деб қабул қиламиз. Бундан кўринадики, барча ҳақиқий сонлар тўплами барча комплекс сонлар тўпламининг қисм тўпламидан иборат экан. $\alpha = (a, b)$ ва $\beta = (c, d)$ комплекс сонлар берилган бўлсин. Агар $a = c$ ва $b = d$ бўлса, $\alpha = \beta$ деб қабул қиламиз.

2-таъриф. α ва β комплекс сонларни қўшишни қуйидагича қабул қиламиз:

$$\alpha + \beta = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \quad (3)$$

Агар $b = d = 0$ бўлса, (3) тенгликдан

$$\alpha + \beta = (a + c, 0) = a + c \quad (4)$$

ҳосил бўлади, яъни ҳақиқий сонларни қўшиш қондаси келиб чиқади.

Икки сон айирмаси тушунчасини ўша (3) қўшиш таърифи-га асосан келтириб чиқарилади. $\alpha = (a, b)$ билан $\beta = (c, d)$ соннинг айирмаси деб, шундай $\gamma = (x, y)$ сонни айтамызки, β ни γ га қўшганда α ҳосил бўлади:

$$(c, d) + (x, y) = (c + x, d + y) = (a, b),$$

бундан

$$c + x = a, \quad d + y = b, \quad \text{яъни } x = a - c, \quad y = b - d;$$

мана шу айирма қуйидагича ёзилади:

$$\alpha - \beta = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \quad (5)$$

3-таъриф. α ва β комплекс сонларни кўпайтиришни қуйидагича қабул қиламиз:

$$\alpha \cdot \beta = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (6)$$

Агар $b=d=0$ бўлса, бундан

$$\alpha \cdot \beta = (ac, 0) = ac \quad (7)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, (4) ва (7) тенгликлардан кўринадикки, иккита ҳақиқий сонни қўшиш ҳамда кўпайтириш комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтиришнинг хусусий ҳоли экан.

Энди юқоридаги қўшиш ва кўпайтириш таърифларига асосланиб, $\alpha = (a, b)$ комплекс сонни бошқача кўринишга келтирамиз:

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (b, 0) \quad (0, 1), \quad (8)$$

бунда

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1) \quad (9)$$

тенгликнинг тўғрилигини (6) га асосан текшириб кўриш кифоя. Ниҳоят, $(0, 1)$ нинг қандай сон эканлигини аниқлаш мақсадида унинг квадратини текшириб кўрайлик, (6) га мувофиқ,

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Одатда бу сон қуйидагича белгиланади:

$$(0, 1) = i, \quad (0, 1)^2 = i^2 = -1. \quad (10)$$

Мана шунга асосан (3) дан комплекс соннинг ушбу

$$\alpha = a + ib$$

алгебраик формаси келиб чиқади, a ва b ҳақиқий сонлар мос равишда комплекс соннинг ҳақиқий ва мавҳум қисми деб юритилади ва қуйидагича символлар билан белгиланади¹:

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha.$$

Шундай қилиб, ҳозирча биз комплекс соннинг икки хил формаси билан танишдик. Келгусида биз комплекс соннинг тўрт хил формага эга эканлигини кўрамиз.

Баъзан қуйидагича ҳам ёзилади:

$$a = R(\alpha) = R(a + ib) \quad \text{ва} \quad b = I(\alpha) = I(a + ib), \quad (11)$$

Масалан,

$$R\left(-\frac{1}{2} + 3i\right) = -\frac{1}{2}, \quad I\left(-\frac{1}{2} + 3i\right) = 3.$$

Ушбу

$$\alpha = a + ib \text{ ва } \bar{\alpha} = a - ib$$

кўринишдаги сонлар ўзаро қўшма комплекс сонлар дейилади.

Мисол учун

$$\alpha = \frac{1}{2} + 5i \text{ ва } \bar{\alpha} = \frac{1}{2} - 5i$$

комплекс сонлар қўшма комплекс сонлардир.

Комплекс сонлар устида амаллар

Ҳақиқий сонлар устида бажариладиган тўрт арифметик амалининг комплекс сонлар устида ҳам бажариш қоидалари алгебра курсидан маълум. Шундай бўлса ҳам, бу амалларни қисқача эслатиб ўтамиз.

1 Қўшиш ва айириш

Иккита $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс сонни қуйидаги қоида бўйича қўшилади:

$$\alpha + \beta = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d). \quad (1)$$

Берилган $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс сонларнинг айирмаси деб шундай $\gamma = x + iy$ сонга айтиладики, у сон $\alpha = \beta + \gamma$, яъни $a + ib = (c + x) + i(d + y)$ тенгликни қаноатлантиради. Бу тенгликдан эса

$$c + x = a, \quad d + y = b, \quad \text{яъни } x = a - c, \quad y = b - d$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Демак,

$$\alpha - \beta = \gamma = x + iy \quad \text{ёки} \quad \alpha - \beta = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d). \quad (2)$$

2. Кўпайтириш ва бўлиш

Иккита $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс сонларни қуйидаги қоида бўйича кўпайтирилади:

$$\alpha \cdot \beta = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc). \quad (3)$$

Агар ушбу

$$\alpha = a + ib \text{ ва } \bar{\alpha} = a - ib$$

ўзаро қўшма комплекс сонлар берилган бўлса, уларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ҳар доим ҳақиқий сонлардан иборат бўлади:

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2a, \quad \alpha \bar{\alpha} = a^2 + b^2.$$

Берилган иккита $\alpha = a + ib$ ва $\beta = c + id$ комплекс соннинг $\frac{\alpha}{\beta}$ бўлинмаси деб шундай $\gamma = x + iy$ комплекс сонга айтиладики, у

$$\alpha = \beta\gamma, \text{ яъни } a + ib = (c + id)(x + iy)$$

тенгликни қаноатлантиради.

Тенглиkning ўнг томонидаги кўпайтириш амалини бажаргандан кейин иккала томондаги ҳақиқий ва мавҳум қисмларни таққосласак,

$$cx - dy = a,$$

$$dx + cy = b$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлиб, бу системанинг ечими

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

дан иборат бўлади. Шундай қилиб,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma = x + iy,$$

яъни

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4)$$

Бу тенгликдан кўринадики, агар $c = d = 0$ бўлса, бўлиш амалини бажариб бўлмайди, чунки нолга бўлиш маънога эга эмас.

Комплексе сонларнинг ҳам ҳақиқий сонлар каби қуйидаги хоссаларга бўйсунганини осонгина келтириб чиқариш мумкин:

- 1) рефлексивлик хоссаси: $\alpha = \alpha$;
- 2) симметриклик хоссаси: $\alpha = \beta$ бўлса, $\beta = \alpha$ бўлади;
- 3) транзитивлик хоссаси: $\alpha = \beta$ ва $\beta = \gamma$ дан $\alpha = \gamma$ келиб чиқади.

Китобхонга олий алгебра курсидан маълумки, комплекс сонларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари ҳам ҳақиқий сонлардаги каби қуйидаги қонунларга бўйсунди:

- 1) коммутативлик қонуни: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ва $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
- 2) ассоциативлик қонуни: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ва $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
- 3) дистрибутивлик қонуни: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

Мисоллар.

$$1. \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i, \text{ чунки } i^2 = -1.$$

$$2. \frac{1+i \operatorname{tg} \varphi}{1-i \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(1+i \operatorname{tg} \varphi)^2}{1-i^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1+2i \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \varphi}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{2i \operatorname{tg} \varphi}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi.$$

$$3. \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} (i\sqrt{3}-1)^3 = \frac{1}{8} [(i\sqrt{3})^3 - 3(i\sqrt{3})^2 + 3i\sqrt{3}-1] = 1, \text{ чунки } i^3 = -i.$$

3. Қўшма комплекс сонларнинг хоссалари.
Қўшма комплекс сонларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасига доир баъзи хоссалари билан танишиб ўтамиз. Агар қуйидаги

$$\alpha_1 = a_1 + ib_1 \text{ ва } \alpha_2 = a_2 + ib_2$$

комплекс сонлар берилган бўлса, буларга қўшма бўлган сонлар

$$\bar{\alpha}_1 = a_1 - ib_1 \text{ ва } \bar{\alpha}_2 = a_2 - ib_2$$

дан иборатдир.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

сонга қўшма сон

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$$

дан иборат. Демак,

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$$

ва умуман тўлиқ математик индукция методига асосан,

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \dots + \bar{\alpha}_n \quad (5)$$

эканлигини исботлашни китобхоннинг ўзига тавсия қиламиз.

Шунингдек,

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Бунга қўшма бўлган сон:

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Иккинчи томондан,

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

Демак,

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2.$$

Умуман,

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 \cdot \dots \cdot \bar{\alpha}_n$$

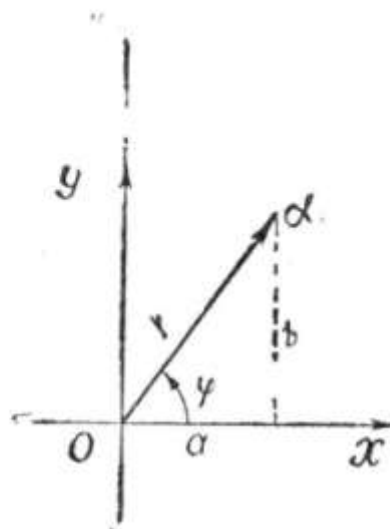
тенглик ўринли эканини текшириш ҳам китобхонга тавсия этилади.

Комплекс соннинг геометрик тасвири ва комплекс текислик

Текисликда тўғри бурчакли xOy Декарт координаталари системасини танлаб, унинг абсциссалар ўқига $\alpha = a + ib$ нинг ҳақиқий қисми a ни, ординаталари ўқига эса мавҳум қисми-

нинг коэффициенти b ни жойлаштирсак, текисликда (a, b) нуқтага эга бўламиз. Ана шу нуқтани $z = a + ib$ комплекс соннинг геометрик тасвири деб қабул қилинади. Шунга кўра бундан кейин „комплекс z сон“ дейиш ўрнига баъзан „ z -нуқта“ ҳам дейилади ва аксинча.

Шундай қилиб, бу усул билан ҳар бир комплекс сонга текисликда биргина нуқта ва аксинча, текисликдаги ҳар бир нуқта учун битта комплекс сон мос келишини кўриш мумкин. Бошқача айтганда, текисликнинг барча нуқталари тўплами билан барча комплекс сонлар тўплами орасида ўзаро бир қиймаглик мослик ўрнатилади.



1-чизма.

Агар $b=0$ бўлса, $z=a$ ҳақиқий сонга тегишли нуқта абсциссалар ўқида ётади, шу сабабли Ox -ҳақиқий ўқ деб аталади. Агар $a=0$, $b \neq 0$ бўлса, $z=ib$ мавҳум сонга тегишли нуқта ординаталар ўқида ётади, шу сабабли Oy мавҳум ўқ, xOy текислик эса комплекс текислик дейилади (1-чизма).

Берилган $z = a + ib$ комплекс сонга мос нуқта ўша соннинг образи, аксинча z сон ўша нуқтанинг аффикси деб аталади.

Кўпинча z комплекс соннинг геометрик тасвири сифатида координаталар бошини текисликдаги z нуқта билан тугаштирувчи векторни ҳам қабул қилинади.

Комплекс соннинг тригонометрик шакли

Одатда $z = a + ib$ шаклидаги комплекс сонни алгебраик кўринишдаги комплекс сон дейилади. Комплекс соннинг тригонометрик шаклини ҳосил қилиш учун 1-чизмага мурожаат қиламиз:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi. \quad (7)$$

Бундаги r комплекс z сонни тасвирлаган векторнинг узунлигини ифодалайди, уни z соннинг модули, φ бурчакни эса z нинг аргументи дейилади ва у қуйидагича ёзилади:

$$|z| = |a + ib| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \arg z = \varphi.$$

z комплекс сонга мос бўлган векторга биргина узунлик ва чексиз кўп бурчаклар мос келиши юқоридаги чизмадан кўришиб турибди:

$$\varphi, \varphi + 2\pi, \varphi + 4\pi, \dots$$

Шу сабабли одатда бурчакнинг умумий кўриниши

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (8)$$

каби белгиланиб ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\varphi = \arg z$ ни аргументнинг бош қиймати дейилади.

1-чизмага биноан:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \text{ бундан: } \varphi = \arctg \frac{b}{a}. \quad (9)$$

Энди (7) га асосан

$$z = a + ib = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (10)$$

бўлиб, ўнг томон z нинг тригонометрик шакли (формаси) дейилади. Комплекс текисликнинг ҳар бир нуқтаси r нинг $[0, +\infty)$ дан олинган тайин бир қиймати ва φ нинг $[0, 2\pi)$ дан олинган тайин бир қиймати билан тўла аниқланади. Шунинг учун (10) да $0 \leq r < \infty$ ва $0 \leq \varphi < 2\pi$ деб қабул қилинади.

Қўшма комплекс z ва $\bar{z}$ сонларга мос нуқталар абсциссалар ўқига нисбатан симметрик бўлади. Шу сабабли, z ва $\bar{z}$ га тегишли векторларнинг узунликлари бир-бирига тенг бўлиб, бурчаклари қарама-қарши ишорага эга ва абсолют қийматлари тенгдир:

$$|\bar{z}| = |z| \text{ ва } \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Масалалар ечишда кўпинча комплекс соннинг тригонометрик шаклидан фойдаланиш қулайдир.

Математик анализ курсидан Эйлернинг қуйидаги машҳур формуласи маълум:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

бунда φ — ҳақиқий сон. У ҳолда (10) дан z комплекс соннинг ушбу кўрсаткичли формаси

$$z = re^{i\varphi} \quad (11)$$

келиб чиқади, бунда

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad 2 < e < 3, \quad e = 2,718281828459045, \dots$$

Шундай қилиб, ҳар қандай комплекс сон тўрт хил формага эга экан:

$$z = (a, b), \quad z = a + ib, \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = re^{i\varphi}, \quad (12)$$

буларда $i^2 = -1$. Табиий, комплекс соннинг бир формасидан иккинчисига ўтиш мумкин. Мураккаб масалаларни ҳал этишда (12) даги сўнгги икки форма ишни жуда осонлаштирилади.

Мисоллар.

1. $1+i$ сон тригонометрик шаклга келтирилсин.

$$a=1, \quad b=1, \quad r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

чунки $(1,1)$ нуқта биринчи чоракда ётади, демак,

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

ёки умумий кўринишда:

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right], \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. $-i$.

$$-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

3. $-1=\cos\pi+i\sin\pi$,

чунки $a=-1$, $b=0$, $\varphi=\pi$.

4. $-1+i\sqrt{3}$.

$$r=\sqrt{3+1}=2, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3},$$

чунки берилган сонга мос $(-1, \sqrt{3})$ нуқта иккинчи чоракда ётади; демак,

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Комплекс сонларни даражага кўтариш ва илдиздан чиқариш

1. Кўпайтириш. Биз олдин тригонометрик шаклда берилган сонларни кўпайтириш устида тўхталиб ўтамиз.

$$\alpha_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad \alpha_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \dots,$$

$$\alpha_{n-1} = r_{n-1}(\cos \varphi_{n-1} + i \sin \varphi_{n-1}), \quad \alpha_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

комплекс сонлар берилган бўлсин, (3) даги каби кўпхадларни кўпайтириш қондасига асосан, улардан биринчи иккитасининг кўпайтмасини топайлик:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot \alpha_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].\end{aligned}\quad (11)$$

Демак, тригонометрик шаклда берилган иккита комплекс сонни кўпайтириш учун уларнинг модулларини ўзаро кўпайтириб, аргументларини қўшиш керак, деган жуда содда қондага эга бўлдик. Бу қондани кетма-кет татбиқ этиб, тригонометрик шаклда берилган n та комплекс соннинг кўпайтмасини ҳисоблаш учун ушбу қондага эга бўламиз:

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].\quad (12)$$

Математик индукция методидан фойдаланиб, бу формуланинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Шундай қилиб, бир қанча комплекс сонларни ўзаро кўпайтириш учун уларнинг тригонометрик шаклидан фойдаланиш қулай экан.

Сўнгги (12) тенгликдан қуйидаги натижа ҳам келиб чиқади:

$$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n|,\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\arg (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \arg \alpha_1 + \\ &+ \arg \alpha_2 + \dots + \arg \alpha_n,\end{aligned}\quad (14)$$

яъни кўпайтманинг модули кўпайтувчиларнинг модуллари кўпайтмасига тенг, шунингдек, кўпайтманинг аргументи кўпайтувчиларнинг аргументлари йиғиндисига тенг.

Мисоллар.

$$1. \alpha = 2 (\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ), \quad \beta = 3 (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ).$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= 6 [\cos (35^\circ + 25^\circ) + i \sin (35^\circ + 25^\circ)] = 6 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + i 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$2. \alpha = \frac{1}{3} (\cos 11^\circ + i \sin 11^\circ), \quad \beta = \frac{5}{2} (\cos 19^\circ + i \sin 19^\circ),$$

$$\gamma = \frac{12}{25} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

У ҳолда

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{2}{5} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot (1 + i).$$

2. Даражага кўтариш. Агар (12) формуладаги $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сонлар ўзаро тенг, яъни $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ бўлса, у вақт-

да уларнинг модуллари ўзаро ва аргументлари ҳам ўзаро тенг бўлади:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_n = r, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi.$$

(12) дан:

$$a^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n \varphi + i \sin n \varphi). \quad (15)$$

Демак, тригонометрик шаклдаги комплекс сонни n -даражага кўтариш учун унинг модулини шу даражага кўтариб, аргументини n га кўпайтириш керак.

Даража кўрсаткичи манфий бўлса ҳам (15) формула ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатан ҳам,

$$\begin{aligned} [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-n} &= \frac{1}{[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{\cos n \varphi + i \sin n \varphi} = \\ &= r^{-n} \cdot \frac{\cos n \varphi - i \sin n \varphi}{\cos^2 n \varphi + \sin^2 n \varphi} = r^{-n} [\cos (-n \varphi) + i \sin (-n \varphi)], \end{aligned}$$

демак,

$$[r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^{-n} = r^{-n} [\cos (-n \varphi) + i \sin (-n \varphi)]. \quad (16)$$

Мисоллар:

1. $(1 + i)^9$ ҳисоблаб чиқилсин.

Дастлаб қавслар ичидаги сонни тригонометрик шаклга келтириб оламиз:

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Энди, (15) формулага асосан, буни даражага кўтариб соддалаштирамиз:

$$\begin{aligned} (1 + i)^9 &= (\sqrt{2})^9 \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = 16 \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 16 \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 16 + 16i. \end{aligned}$$

2. $(\sqrt{3} - i)^{12}$ ҳисоблансин.

Маълумки,

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right). \quad (17)$$

Демак, (15) формулага асосан:

$$(\sqrt{3} - i)^{12} = 2^{12} [\cos (22\pi) + i \sin (22\pi)] = 2^{12}.$$

3. **Муавр формуласи.** (15) формуладаги r ихтиёрий мусбат сондир. Хусусий ҳолда $r=1$ фараз этсак (15) дан

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi \quad (18)$$

Муавр формуласи ҳосил бўлади.

Бу формуланинг чап томонидаги қавсни, Ньютон биноми формуласига асосан, очиб чиққандан сўнг: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ ва умуман, ихтиёрий мусбат бутун k учун:

$$i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i \quad (18')$$

эқанини эътиборда тутиб, ўша тенгликнинг иккала томонидаги комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини тенглаштириб, ушбу формулаларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \cos n \varphi &= \cos^n \varphi - C_n^2 \cdot \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cdot \cos^{n-4} \varphi \times \\ &\times \sin^4 \varphi - \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sin n \varphi &= n \cdot \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - C_n^3 \cdot \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \\ &+ C_n^5 \cdot \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

яъни каррали бурчакнинг косинус ва синусларини оддий бурчакнинг синус ва косинуслари орқали ифодаловчи формулаларни ҳосил қиламиз. Хусусий ҳолда $n=2$ десак, тригонометриядан маълум бўлган

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \\ \sin 2\varphi &= 2 \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

формулаларга келамиз.

Мисоллар:

1. $\cos 3\varphi$ ва $\sin 3\varphi$ лар $\cos \varphi$ ва $\sin \varphi$ нинг даражалари орқали ифода қилинсин.

Бунинг учун (19) ва (20) формулаларда $n=3$ деб олинган етарли:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi, \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

2. $\sin^3 x$ ни каррали x нинг биринчи даражали синус ва косинуси орқали ифода қилинг.

Бунинг учун қуйидагича белгилаймиз:

$$\alpha = \cos x + i \sin x,$$

бундан:

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\cos x + i \sin x} = \frac{\cos x - i \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos x - i \sin x.$$

Сўнгги икки тенгликни даражага кўтарилса, Муавр формуласига биноан:

$$\alpha^k = \cos kx + i \sin kx, \quad \alpha^{-k} = \cos kx - i \sin kx.$$

Бундан

$$\cos kx = \frac{1}{2} (\alpha^k + \alpha^{-k}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i} (\alpha^k - \alpha^{-k}) \quad (22)$$

формулалар келиб чиқади. Энди, $k = 1$ фараз этилса, (22) нинг иккинчиси-дан қуйидаги, биз излаётган натижа ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= -\frac{1}{8i} (\alpha - \alpha^{-1})^3 = -\frac{1}{8i} (\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^{-1} - \alpha^{-3}) = \\ &= -\frac{1}{8i} [(\alpha^3 - \alpha^{-3}) - 3(\alpha - \alpha^{-1})]. \end{aligned}$$

Буларнинг ўрнига (22) дан қийматлари келтириб қўйилса:

$$\sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x).$$

3. $\cos^6 x$ ни қаррали x нинг биринчи даражали синус ва косинуси орқали ифода қилинг.

Бунинг учун $k = 1$ фараз этиб, (22) нинг биринчисидан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \frac{1}{2^6} (\alpha + \alpha^{-1})^6 = \frac{1}{64} (\alpha^6 + 6\alpha^4 + 15\alpha^2 + 20 + 15\alpha^{-2} + \\ &+ 6\alpha^{-4} + \alpha^{-6}) = \frac{1}{64} [(\alpha^6 + \alpha^{-6}) + 6(\alpha^4 + \alpha^{-4}) + 15(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 20]. \end{aligned}$$

Мана шу йиғиндиларнинг ўрнига (22) дан мос қийматлари қўйилса,

$$\cos^6 x = \frac{1}{32} (\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10).$$

4. Қуйидаги йиғинди аниқлашми: $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + C_n^8 - C_n^{10} + \dots$.

Бунинг учун $(1+i)^n$ ни Ньютон биноми бўйича ёйиб чиқамиз:

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= 1 + C_n^1 \cdot i + C_n^2 \cdot i^2 + C_n^3 \cdot i^3 + C_n^4 \cdot i^4 + \dots + \\ &+ C_n^{n-1} \cdot i^{n-1} + i^n, \end{aligned} \quad (23)$$

бундаги i нинг даражалари (18') га кўра ушбу

$$i, -1, -i, +1$$

қийматлардангига иборат бўлади.

Иккинчи томондан, $1+i$ ни тригонометрик шаклга келтирсак,

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ҳосил бўлади. Муавр формуласидан фойдалансак,

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \quad (24)$$

тенгликка эга бўламиз. Энди, (23) билан (24) нинг чап томонлари бир хил бўлгани учун ўнг томонлари ҳам ўзаро тенг бўлади. Шу сабабли

$$2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + \\ + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots)$$

бўлиб, унинг икки томонини солиштирсак, қуйидаги сўнгги натижага эришамиз:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}, \quad (25)$$

$$C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}. \quad (26)$$

Хусусий ҳолда, $n = 10$ деб олсак,

$$1 - C_{10}^2 + C_{10}^4 - C_{10}^6 + C_{10}^8 - C_{10}^{10} = 32 \cdot \cos \frac{5\pi}{2} = 0,$$

$$C_{10}^1 - C_{10}^3 + C_{10}^5 - C_{10}^7 + C_{10}^9 = 32 \cdot \sin \frac{5\pi}{2} = 32$$

Шу усул билан бошқа мисолларни ҳам ечиш мумкин.

4. Комплекс соннинг илдизлари. Комплекс соннинг квадрат илдизларини топиш масаласи ўрта мактабда ҳам ўрганилади. Биз комплекс соннинг ҳар қандай даражали илдизларини топиш билан шуғулланамиз.

1. $\alpha = a + ib$ сон берилган бўлсин. Агар $\alpha = \beta^n$ бўлса, β сон α нинг n -даражали илдизи дейилиб,

$$\beta = \sqrt[n]{\alpha} \quad (27)$$

кўринишда ёзилади. Мана шу β илдизни топиш талаб қилинади. Дастлаб берилган α сонни тригонометрик шаклга келтирамиз:

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Қавсларни очиб тенгликнинг икки томонидаги комплекс сонларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини тенглаш билан ушбу

$$\rho^n \cdot \cos n\theta = r \cos \varphi, \quad \rho^n \sin n\theta = r \sin \varphi \quad (29)$$

тенгликларга эришамиз. Бундан:

$$\rho^{2n} (\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta) = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

ёки

$$\rho^n = r \text{ ва } \rho = \sqrt[n]{r}. \quad (30)$$

Бунинг чап томонидаги ρ мусбат сон бўлгани учун ўнг томонини ҳам, мусбат ҳақиқий r соннинг n -даражали, аниқ бир мусбат илдизидан иборат, деб тушуномқ лозим. Энди, (29) нинг чап томонидаги ρ^n ўрнига (30) дан қийматини қўйсак, ушбу

$$\cos n\theta = \cos \varphi, \quad \sin n\theta = \sin \varphi \quad (31)$$

тенгликлар келиб чиқади.

Тригонометриядан маълумки,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

У ҳолда (31) тенгликларга кўра:

$$n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

бундан

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

Шундай қилиб, бизга номаълум бўлган θ бурчак чексиз кўп қийматларга эга экан. Энди, (30) ва (32) даги ρ ва θ нинг қийматларини (28) га қўйиб, унинг чап томонини қисқача β_k билан белгилаймиз:

$$\beta_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (33)$$

бунда $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ қийматларни қабул қилиши мумкин. Бундан комплекс сондан олинган илдизларнинг сони чексиз кўп бўлиши мумкинми, деган савол туғилиши табиийдир. Шунинг учун биз комплекс сонни n -даражали радикалдан чиқарганда ўзаро тенг бўлмаган нечта илдиз келиб чиқишини текшираемиз.

Биз k га турлича мусбат қийматлар берган билан (33) дан келиб чиқадиган илдизлар ҳар хил бўлиб чиқа бермайди. Фақат

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (34)$$

бўлгандагина $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}$ илдизлар ўзаро тенг эмас, чунки (34) га мос бўлган қуйидаги

$$\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} \quad (35)$$

бурчакларнинг бир-биридан фарқи 2π дан кичик, мисол учун:

$$\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} - \frac{\varphi}{n} = \frac{n-1}{n} 2\pi < 2\pi.$$

Энди, $k=n, n+1, n+2, \dots$ бўлганда (33) дан янги илдизлар келиб чиқмаслигини, яъни

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1} \quad (36)$$

илдизларнинг яна такрорланишини кўриш қийин эмас. Шу мақсадда

$$k = np + q \geq n, \quad q = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

деб белгилаймиз, у вақтда:

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(np + q)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2q\pi}{n} + 2p\pi.$$

Ўнг томондаги мана шу бурчакнинг синус ва косинуслари мос равишда ушбу

$$\frac{\varphi + 2q\pi}{n}$$

бурчакнинг синус ва косинусларига тенг бўлгани учун яна (34) ҳол такрорланади.

Шундай қилиб, ушбу муҳим хулосага келдик: комплекс соннинг n -даражали илдизлари сони n та бўлиб, улар (35) га асосан (33) формула орқали топилади.

Мисоллар: Қуйидаги илдизлар ҳисоблансин:

1. $\sqrt[3]{i}$.

Дастлаб i ни тригонометрик шаклга келтирамиз: $r=1$ ва $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун:

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

(33) формулага биноан

$$\beta_k = \sqrt[3]{i} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3},$$

бу ерда $k = 0, 1, 2$. Демак,

$$\beta_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$\beta_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$\beta_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Буларнинг ҳар бирини учинчи даражага кўтарилса, радикал ишораси остидаги i сон келиб чиқади.

$$2. \sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}.$$

Аввал радикал ишораси остидаги комплекс сонни тригонометрик шаклга келтириб оламиз:

$$a = -2, \quad b = -2\sqrt{3}; \quad r = 4, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{3}.$$

Беришган комплекс сонга мос бўлган вектор учинчи чоракда ётгани учун $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Шу сабабли

$$-2-2i\sqrt{3} = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Бундан, (33) формулага асосланиб, тўртинчи даражали илдиэларни топсак бўлади:

$$\beta_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}),$$

$$\beta_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (-\sqrt{3} + i),$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}),$$

$$\beta_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (1 - i\sqrt{3}).$$

$$3. \sqrt[6]{-27}.$$

$$a = -27, \quad b = 0; \quad r = 27, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = 0,$$

лекин (-27) га мос вектор абсциссалар ўқининг манфий томонида ётгани учун $\varphi = \pi$. Демак,

$$-27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$\beta_k = \sqrt[6]{3} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

формуладан $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_5$ ни топамиз.

Масалан,

$$\beta_0 = \sqrt[6]{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \sqrt[6]{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt[6]{3},$$

$$\beta_2 = \sqrt[6]{3} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ва х. к.}$$

$$4. \sqrt[8]{1}.$$

Равшанки,

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Бунга (33) формулани татбиқ қилинса, ушбу

$$\omega_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (37)$$

натижа ҳосил бўлиб, бунда $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; бу формуладан:

$$\begin{aligned} k=0 \text{ бўлганда } \omega_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ k=1 \text{ бўлганда } \omega_1 &= \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \\ k=2 \text{ бўлганда } \omega_2 &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \\ &\dots \dots \dots \\ k=n-1 \text{ бўлганда } \omega_{n-1} &= \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \end{aligned} \quad (38)$$

ҳосил бўлади. Бирининг илдиэларини топиш учун (38) формулалардан фойдаланиш ҳам мумкин. Лекин ҳисоблашни осонлаштириш учун бошқа қулай усулни ҳам келтирамиз. Муавр формуласига мувофиқ:

$$(\omega_1)^k = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томони (37) даги ω_k ни билдиради, демак,

$$\omega_k = \omega_1^k, \quad k = 2, 3, 4, \dots, n-1. \quad (39)$$

ω_k илдиэни топиш учун ω_1 ни k -даражага кўтариш кифоялиги кейинги формуладан кўриниб турибди. Мисол учун,

$$\omega_2 = \omega_1^2, \quad \omega_3 = \omega_1^3, \quad \omega_4 = \omega_1^4.$$

Изоҳ. Бирининг илдиэларини топишнинг маъноси $x^n - 1 = 0$ алгебраик тенгламани ечиш демакдир, чунки уни ечиш учун 1 нинг n -даражали илдиэларини топиш керак, холос.

Мисол учун $\sqrt[3]{1}$ ни ҳисоблаб чиқайлик, яъни $x^3 - 1 = 0$ тенгламани ечайлик. Демак, $n = 3$. (38) га асосан:

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Энди, (39) га мувофиқ:

$$\omega_2 = \omega_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (i\sqrt{3} - 1)^2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Шундай қилиб, қуйидаги илдиэларга эга бўлдик:

$$1, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Қўшиш ва айиришнинг геометрик тасвири. Механикадан, шунингдек аналитик геометриядан бизга маълумки, иккита векторнинг йиғиндиси шу векторлардан ясалган параллелограммнинг мос диагоналидан иборатдир. Иккинчи томондан,

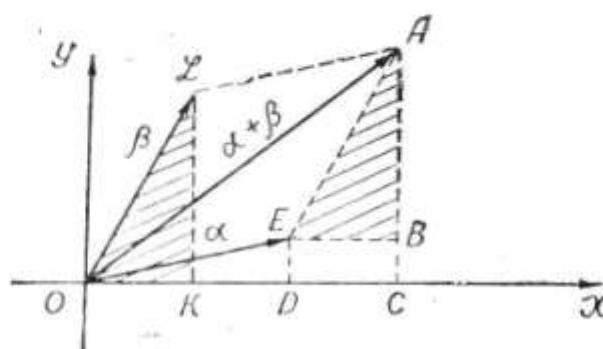
таъриф бўйича, иккита комплекс сонни қўшиш учун уларнинг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ўзаро қўшиш қабул қилинган эди. Энди икки комплекс сонни қўшиш билан уларга мос векторларни қўшиш орасида фарқ йўқлигини кўрсатамиз.

Фараз этайлик, бизга

$$\alpha = a + ib \text{ ва } \beta = c + id$$

комплекс сонлар берилган бўлиб,

$$a = OD, b = DE, c = OK, d = KL$$



2-чизма.

бўлсин (2-чизма).

а) Дастлаб α билан β сонларни таъриф бўйича ўзаро қўшсак

$$\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d) \quad (40)$$

ҳосил бўлади.

б) Иккинчи томондан, комплекс сон геометрик жиҳатдан текисликдаги вектордан иборат эканлиги бизга маълум. Шу сабабли па-

раллелограмм усули билан α ва β ларга мос векторларни қўшсак, $\vec{OA}$ вектор ҳосил бўлади. Биз энди A нуқтанинг координаталари $a + c$ ва $b + d$ лардан иборат эканлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, 2-чизмадаги штрихланган учбурчаклар тенг бўлгани учун $OK = EB$ ва $KL = AB$ бўлади. Бу икки тенг-

$$OC = OD + DC = OD + OK = a + c.$$

$$CA = CB + BA = DE + KL = b + d.$$

Демак, булардан кўринадики, $\vec{OA}$ вектор (40) даги $\alpha + \beta$ йиғиндининг геометрик тасвирини билдиради. Иккинчи турли айтганда, иккита комплекс сонни қўшиш, демак, уларга мос бўлган векторларни параллелограмм усули билан қўшиш демакдир.

2-чизмада кўрсатилган OAL учбурчакнинг томонлари α , β , $\alpha + \beta$ векторларнинг ушбу

$$|\alpha|, |\beta|, |\alpha + \beta|$$

узунликларидан иборатдир. Маълумки; учбурчакнинг бир томони қолган икки томони йиғиндисидан катта бўла олмайди, шунга асосан қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Агар бизга бир неча $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ комплекс сонлар берилган бўлса, уларга мос векторларни юқорида баён қилинган усул билан ўзаро қўшсак,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

йиғиндига мос вектор қўшилувчи векторлардан тузилган синиқ чизиқнинг бошланғич ва охири нуқталарини туташтирувчи (ёпувчи) вектордан иборат бўлади. Равшанки, ёпувчи чизиқнинг узунлиги синиқ чизиқ узунлигидан катта бўла олмайди, яъни

$$|\alpha + \beta + \dots + \delta| \leq |\alpha| + |\beta| + \dots + |\delta|. \quad (41)$$

Тенглик белгисини ҳам ёзишимизга сабаб ҳамма векторлар битта тўғри чизиқда ётиб, бир томонга йўналган бўлиши ҳам мумкин. (41) тенгсизлик йиғиндининг модули қўшилувчилар модулларининг йиғиндисидан катта эмаслигини ифода қилади. Бу тенгсизликни тўғридан-тўғри ҳам исботлаш мумкин. Масалан,

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = \\ &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}\alpha\bar{\beta}, \text{ лекин } -|\alpha| \leq a \leq |\alpha|, \\ &\quad -|\alpha| \leq b \leq |\alpha| \end{aligned}$$

бўлгани учун

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2,$$

бундан:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Шунга ўхшаш α ва β комплекс сонларни айириш учун уларга мос бўлган векторларни айириш кифоядир. Комплекс сонларни қуйидагича

$$\alpha - \beta = (a - c) + i(b - d)$$

айириш бизга маълум, векторларни айириш эса

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

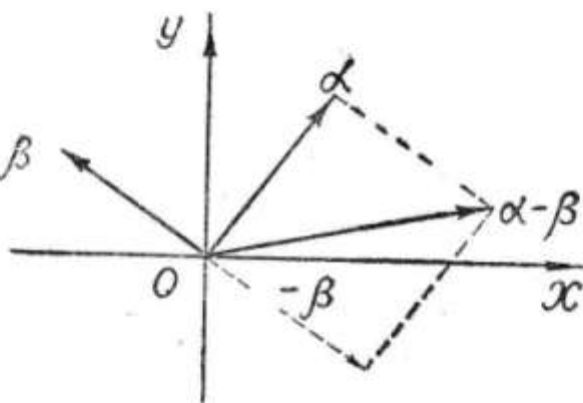
усул билан бажарилади, бундаги $-\beta$ вектор β векторга қарама-қарши йўналгандир (3-чизма).

Агар юқоридаги каби мулоҳаза қилинса (буни ўқувчига қолдирдик), ушбу

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \quad (42)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Кўпайтиришнинг геометрик тасвири. Энди комплекс сонларни кўпайтириш амалини геометрик томондан текширамиз.



3-чизма.

яъни берилган бирор $\beta = c + id$ сонни $\alpha = a + ib$ сонга кўпайтириш қандай геометрик маънога эга, деган саволга жавоб излаймиз.

Шу мақсадда α ва β сонларни тригонометрик шаклда ёзиб,

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \beta = R(\cos \psi + i \sin \psi)$$

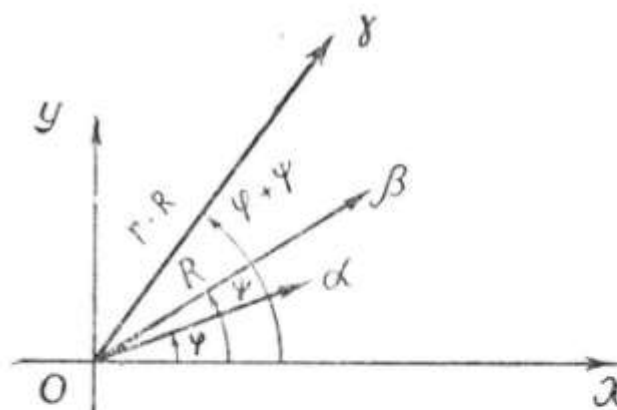
ларни ўзаро кўпайтирсак, (11) формулага асосан,

$$\alpha \cdot \beta = rR[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)] = \gamma$$

ҳосил бўлади ва бундан эса:

$$|\gamma| = rR = |\alpha| \cdot |\beta| \quad \text{ва} \quad \arg \gamma = \varphi + \psi = \arg \alpha + \arg \beta.$$

Демак, α комплекс сонни β га кўпайтиришнинг геометрик маъноси, α га мос векторни ψ бурчакка (соат стрелкасига тесқари) буриб, R марта чўзиш демакдир (4-чизма).



4-чизма.

Шубҳасиз, агар $R < 1$ бўлса, α га мос вектор чўзилмасдан, балки қисқаради. Лекин биз иккала ҳолда ҳам „чўзилади“ деган терминни ишлата берамиз.

Хусусий ҳолда, агар:

а) $\beta = -1 = \cos \pi + i \sin \pi$ бўлса, $R = 1$ бўлиб,

$$\alpha \cdot (-1) = r[\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)],$$

яъни (-1) га кўпайтиришнинг маъноси α га мос векторни π бурчакка буришдан иборатдир.

$$\text{б) } \beta = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

бўлса яна, $R = 1$ бўлиб,

$$\alpha \cdot i = r\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

яъни i га кўпайтиришнинг маъноси α га тегишли векторни $\frac{\pi}{2}$ бурчакка буриш (соат стрелкасига тесқари буриш) демакдир.

Бўлиш амали кўпайтиришга тесқари бўлгани учун α сонни β га бўлишнинг геометрик маъноси юқорида айтилган ҳодисага тесқари бўлади. Бошқача айтганда, α сонни β сонга бўлиш демак, α га мос бўлган векторни соат стрелкаси бўйича ψ бурчакка буриб, R марта қисқартириш (ёки чўзиш) демакдир.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{R(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{r}{R}[\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)].$$

Бундан куринадики,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{r}{R} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \text{ва} \quad \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \varphi - \psi = \arg \alpha - \arg \beta.$$

Хулоса.

Математик анализ талабаларни зарурий маълумотлар мажмуаси (тушунчалар, тасдиқлар ва уларнинг исботи, масалаларини йечиш усуллари ва бошқалар) билан таништиради. Айни пайтда у талабаларни мантиқий фикрлашга, натижавий хулосани тўри чиқаришга ўргатади ҳамда математик маданиятни оширишга хизмат қилади.

Ушбу мустақил ишим орқали мен сонли кетма – кетликнинг юқори ва қуйи лимитларини аниқлаш методикасини олтита режа орқали кўриб ўтдим.

Маълумки, Президентимиз И.Каримовнинг ташаббуслари билан Республикамизда узлуксиз таълим тизимини жорий этилди ҳамда асоси бўлмиш «Таълим тўрисида»ги қонун ва «Кадрлар тайёрлаш миллий дастури» қабул қилинди. (Олий Мажлисининг 1997 йил 29 августдаги IX сессияси) Унда келтирилишича ўқитувчиларнинг шахси ва касбий тайёргарлигидаги қатор камчиликлар, муаммолар аниқланди. Жумладан, ўқитувчиларнинг ўқувчиларга замонавий билим беришига имкон яратадиган замонавий билим, кўникма ва малакаларга эга эмаслиги, ўқитувчи таълим-тарбия жараёнида яқка ҳоким эканлиги, педагогик муносабатлар авторитар принципга асосланиши, ўқитувчи ва ўқувчилар ўртасидаги муносабат мажбурий итоаткорликка асосланганлиги, ўқувчиларда онгли интизомни вужудга келтиришга эътибор берилмаётганлиги, ўқувчиларнинг билиш фаолияти эса билим ва кўникмаларни репродуктив даражада ўзлаштиришга қаратилганлиги, ўқувчиларнинг фаолияти эркин ва мустақил эмаслиги таъкидланиб, уларни бартараф этиш долзарб муаммо эканлиги қайд этилган.

“Ташқаридан қараганда математикани олий ўқув юртларида ўқитиш жуда содда ва асосан қуйидаги икки муаммодан иборатдек кўринади: биринчидан, ўқув режасига кўра ажратилган соатларда баён этиш мумкин бўлган материални ажратиш, ва иккинчидан, уни талабаларга мантиқий баён этиш. Ва бунинг натижасида олий ўқув юрти педагогикаси мазкур масалалар билангина чегараланади деган тасаввур пайдо бўлади. Лекин аслини олганда танлаб олинган ўқув материални ўқитиш муаммолари бир мунча мураккабдир.

ФОЙДАНИЛГАН АДАБИЙОТЛАР.

1. Сирожиддинов С, Ш. Мақсудов, М. Салоҳиддинов.

“Комплекс ўзгарувчи функциялар назарияси”

2. www.ziynet.uz

3. www.google.uz