

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўл ёзма ҳуқуқида

УДК 539.3

ЖАББОРОВ ОЙБЕК РАХМАНОВИЧ

**ЎЗАРО ЭКСЦЕНТРИК ЖОЙЛАШГАН ЮПҚА СФЕРИК ҚОБИҚЛАР-
НИНГ НОСТАЦИОНАР ТЕБРАНИШИ**

5A480103 – амалий математика ва ахборот технологиялари

Магистр

академик даражасини олиш учун ёзилган

ДИССЕРТАЦИЯ

Илмий раҳбар:

ф.-м.ф.д. Шукуров О.М.

ҚАРШИ 2012 йил

М У Н Д А Р И Ж А

	Саҳифа лар
КИРИШ... ..	3
I- БОБ. СФЕРИК ҚОБИҚ ВА ИДЕАЛ СУЮҚЛИКЛАР МУҲИТИ-НИНГ АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАРИ	7
§1.1. Юпқа сферик қобиқ ҳаракат тенгламалари.....	7
§1.2. Идеал суюқликлар муҳитининг ҳаракат тенгламалари.....	12
§1.3. Идеал суюқликлар муҳиtida чегаравий шартларнинг қўйилиши ...	15
II- БОБ. ДИНАМИК МАСАЛАЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ АЛМАШ-ТИРИШЛАР ВА ОРТОГОНАЛ КўПҲАДЛАР	19
§2.1. Лаплас интеграл алмаштиришлари ва унинг хоссалари	19
§2.2. Тасвирлардан оригиналга ўтиш усуллари	26
§2.3. Лежандр кўпҳадлари ва Бессель функциясининг баъзи хоссалари	28
§2.4. Бессель функциялари учун қўшиш теоремалари	31
III- БОБ. ЮПҚА СФЕРИК ҚОБИҚЛАРНИНГ НОСТАЦИОНАР ТЕБРАНИШИ	34
§3.1. Масаланинг математик тасвири	34
§3.2. Масаланинг ечиш алгоритми.....	38
§3.3. Оригиналга ўтиш	48
§3.4. Сонли натижалар	51
ХУЛОСА.....	53
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати	54

КИРИШ

Мавзунинг долзарблиги. Замонавий техниканинг ҳар хил соҳаларини ривожланиши ва ностационар ўзаро таъсирда ишлайдиган янги конструкция-ларни яратиш туташ муҳитларда тўлқин тарқалишлари ва қаттиқ ҳамда деформацияланувчи жисмлар билан ўзаро таъсири билан боғлоқ бўлган ностационар тўлқин жараёнларини тадқиқотисиз мумкин эмас.

Масалан, уларга мисол сифатида ностационар зарбали тўлқинлар таъсири натижасида акустик муҳитда жойлашган ҳар хил резервуарларни, сув ости иншоатларини, сферик қаттиқ тўсиқларни атроф муҳит билан ўзаро таъсирини ўрганиш жуда муҳимдир.

Ҳозирги пайтда электрон ҳисоблаш машиналарнинг жуда тез ривож-ланиши, унинг барча параметрларнинг яхшиланиши, яъни оператив ташқи хотиранинг кенглиги, ишлашнинг ишончлиги, ҳисоблаш тезлигининг юқори-лиги ва ихчамлиги фан - техниканинг кўп соҳаларининг мураккаб муаммо-лари ечимини олишга имкон бераяпти. Бундай соҳалар жумласига деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг масалаларини қараш мумкин. Деформацияланувчи қаттиқ жисмлар ностационар тўлқинларнинг тарқалиш-ини ўрганиш муҳим аҳамиятга эгадир. Чунки бу йўналиш бўйича олинган натижалар кемасозликда, самолётсозликда, сув ости иншоатларини лойиҳа-лаштиришда, сейсмологияда зилзилашуносликка оид масалаларни ечишда, саноатда, қурилиш соҳаларида, материалларни мустаҳкамлигини аниқлашда ҳамда бошқа соҳаларда ўз тадбиғини топади. Бу эса охирги йилларда математик моделлаштиришни мураккаб ҳодиса ва жараёнларни текширишда илмий амалий масалаларни ечишга тадбиқ қилинишига асосий сабаб бўлиб хизмат қилмоқда. Деформацияланувчи қаттиқ жисмлар ностационар тўлқин жараёнларни математик моделлаштириш ҳамда алгоритмларини ишлаб чиқиш математика нуқтаи назардан анча мураккаб ва қизиқарли ҳамда долзарб масалалардир.

Бу соҳада олинган натижалар ва йўналишининг ҳозирги ҳолати [1,5,6, 7] адабиётларда батафсил келтирилган берилган.

Кўпгина амалий масалаларда атроф муҳит текисликлар (қаттиқ ёки эркин сирт) ёки сферик сиртлар билан чегараланган бўлиши мумкин. Улар кўп ҳолларда муҳитнинг деформация-кучланиш ҳолатининг ўзгаришига олиб келади.

Кўпбоғламли соҳаларда ностационар тўлқин жараёнларига мос бош-ланғич чегаравий қўйиш, уларнинг самарали ечиш алгоритмларини ишлаб чиқиш ва тўлқинларни тўсиқ ҳамда чегаравий сиртлардан кўпмарта қайтиш-ини ҳисобга олиб, уларни

тарқалишини ва дифракциясини қонуниятларини ўрганиш замонавий деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг муҳим ва долзарб муаммоларини ифодалайди ва ҳисобланади.

Муаммонинг ўрганилганлиги. Ҳозирги вақтда жуда долзарб, лекин кўпбоғламли соҳаларда зарбали тўлқинларнинг тарқалиши ва дифракцияси масалалари кам ўрганилган. Жумладан, бир координатали сиртлар оиласига тегишли бўлмаган сферик сиртлар билан чегараланган соҳаларда ностацио-нар тўлқин жараёнларини ўрганиш катта қизиқиш ўйғотади.

Масалан, акустик ярим фазода тўсиқ (қаттиқ шар, цилиндрик қобик) билан ностационар тўлқинларнинг тарқалиши ва дифракциясининг қонун-иятларини ўрганиш натижалари [1,7,8,23,24,25,26] адабиётларда келтирил-ган.

Тадқиқот объекти ва предмети. Ушбу магистрлик диссертация- сининг тадқиқот объекти идеал суюқликларнинг ўзаро эксцентрик юпқа сферик қобиклар билан чегараланган соҳасида Крихгоф-Ляв типигаги юпқа сферик қобикдан ностационар тўлқин тарқалиши ва ташқи С.П. Тимошенко гипотезаларига асосланиб чиқарилган сферик қобикдан тўлқин қайтиши масаласининг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш ва сферик қобикларни ностационар тебранишини ҳамда улардаги ўртасида ностационар тўлқин жараёнларни ўрганишдир.

Тадқиқот вазифалари. Ушбу магистрлик диссертацияси қуйидаги масалаларни тадқиқ қилишга бағишланган:

- Идеал суюқликларнинг ўзаро эксцентрик чегараланган соҳасида ички Крихгоф Ляв типигаги юпқа сферик қобикдан ностационар тўлқин тарқалиши ва ташқи С.П. Тимошенко гипотезаларига асосланиб чиқарилган сферик қобикдан тўлқин қайтиши жараёнини математик ифодалаш.
- Ўрганиладиган ностационар тўлқин жараёнига мос бошланғич чегаравий масалани ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш.
- Ишлаб чиқилган алгоритм асосида сонли натижалар олиш ва уларининг таҳлили.
- Қобиклар ўртасидаги тўлқин жараёнларига чегаравий сиртлар-нинг таъсирини ўрганиш.

Тадқиқот методлари. Магистрлик диссертациясида идеал суюқлик-ларнинг асосий муносабатлари, муҳитнинг ҳаракат тенгламалари, ортогонал кўпхадлардан, Лаплас

интеграл алмаштиришларидан ва сферик қобикнинг ҳаракат тенгламаларидан фойдаланилди.

Мавзунинг илмийлиги, янгилиги. Ушбу магистрлик диссертацияси- да ўрганилган натижалар қуйидагилар:

- Идеал суюқликларнинг ўзаро эксцентрик чегараланган соҳасида Крихгоф-Ляв типидagi юпқа сферик қобикдан ностационар тўлқин тарқал-иши ва ташқи С.П. Тимошенко гипотезаларига асосланиб чиқарилган сферик қобикдан тўлқин қайтиши жараёнига мос бошланғич чегаравий масала қўй-илди.
- Ўрганиладиган ностационар тўлқин жараёнига мос бошланғич чегаравий масаланинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқилди.
- Ишлаб чиқилган алгоритм асосида сонли натижалар олинди ва улари таҳлили қилинди.
- Қобиклар ўртасидаги тўлқин жараёнларига чегаравий сиртлар-нинг таъсири ўрганилди.

Тадқиқот натижаларини амалий аҳамияти. Диссертацияда ўрганил-ган масалаларнинг ечиш алгоритмларини, олинган натижаларни самолётсоз-ликда, сув ости ва усти иншоотларини лойиҳалаштиришда ҳамда деформа-цияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг масалаларини сонли усуллар ёрдамида ечишда олинган натижаларини ишончлигини баҳолашда, қўлланил-ган усулларни ихтисослик фанлари бўйича махсус курсларда фойдалан-илиши мумкин.

Магистрлик диссертациясининг тузилиши ва ҳажми. Магистрлик диссертацияси кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўй-ҳатидан иборат. Биринчи бобда юпқа сферик қобик тушунчаси, унинг ҳаракат тенгламалари, идеал суюқликлар муҳитининг асосий тушунчалари, ҳаракат тенгламалари ва зарур маълумотлар ҳамда чегаравий шартларнинг турлари, иккинчи бобда ўрганилган асосий масалаларнинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш учун керакли бўлган Лаплас интеграл алмаштиришлари, Лежандр кўпҳади хоссалари ва қўшиш теоремаси, учинчи бобда эса асосий масаланинг математик ифодаси, унинг ечиш алгоритми, муҳит билан қобик ўртасидаги контакт босим ва қобик ўрта сиртининг нормал кўчиши учун олинган аниқ формулалар ва улар асосида олинган сонли натижалар келтирилган. Диссер-тация ҳажми 56 бетдан иборат. Фойдаланилган адабиётлар рўйхати 28 та адабиёт ва журнал мақолаларидан иборат. Магистрлик диссертациясида формулалар, рақамлари иккита

номердан иборат, бу номерлардан бири бобнинг номерини, иккинчиси эса формуланинг номерини билдиради.

I БОБ

СФЕРИК ҚОБИҚ ВА ИДЕАЛ СУЮҚЛИКЛАР МУҲИТИНИНГ

АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАРИ

Идеал суюқликлар муҳтида жойлашган системаларда ностационар тўлқин жараёнларини математик моделлаштириш муҳитнинг ҳаракат тенг-ламаларини танлаш билан боғланган бўлиб, улар қўллаш лозим бўлган чегарада ҳар бир муҳитнинг нотинч ҳаракатини тасвирлайди. Куйида ўрганила-диган ишга ностационар масалаларни ечишда кўп марта синовлардан муво-фақиятли ўтган классик математик моделлар қўлланилиши келтирилган.

Бу бўлимда ўрганиладиган ностационар тўлқин жараёнларини мате-матик ифодалаш учун идеал суюқликларнинг асосий тушунчалари муноса-батлари, ҳаракат тенгламалари, сферик қобикнинг ҳаракат тенгламалари ва бошланғич-чегаравий масалаларнинг қўйилиши, турлари ва уларнинг ифода-лари келтирилган [1, 6, 19, 20].

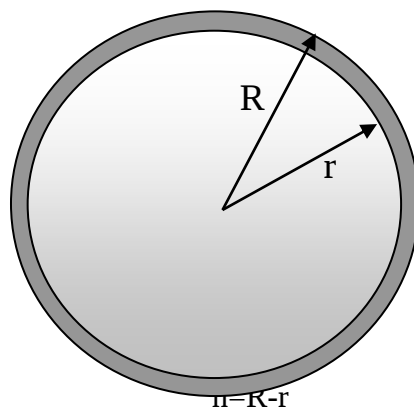
§1.1. Юпқа сферик қобик ҳаракат тенгламалари

Техникада, саноат қурилишларида, ер ости суюқлик сақлаш идишлари сифатида цилиндрлик ёки сферик формаларидаги конструкциялар ишлати-лади. Масалан: ер ости суюқлик ёки газлар учун жойлаштирилган турбалар-ни цилиндрлик қобик сифатида қараш мумкин.

Ер ости ёқилғи сақлаш идишларини сферик қобик сифатида олиш мумкин. Зилзила пайтида уларга зарбани нотаціонар тўлқинларни тушиши уларни тебранишига олиб келади. Шу сабабли, уларнинг мустаҳкамлигини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга. Қалин бўш сферик аппаратлар билан чегара-ланган эластик материалли жисм сифатида қараш мумкин. (1 - расм)

Бу ҳолда қалин сферик қобикнинг ташқи сиртини эркин сирт ҳисоблаб ички сиртига бирор текис тақсимланган сирт кучлари таъсир этганда унинг кучланишини ва деформация ҳолатини ўрганиш мумкин.

Юпқа сферик қобикларнинг ҳаракат тенгламаларини мураккаброк бўлиб, уларни келтириб чиқариш гипотеза (тахмин)ларга асосланган. Энг кўп тарқалган ҳаракат тенгламаларидан.



1-расм.

Кирхгоф-Ляв гипотезаси ва С. П. Тимошенко гипотезаларига асосланиб чиқарилган сферик қобик ҳаракат тенгламаларидандир. Юпқа сферик қобик деб аталишига сабаб унинг қалинлиги ва бошқа ўлчовларига нисбатан анча кичик бўлади.

Кирхгоф-Ляв гипотезасига кўра:

А) қобикнинг ўрта сиртига перпендикуляр тўғри чизиқли ва деформацияланган элементи деформациядан сўнг ҳам тўғри чизиқли ва деформацияланган ўрта сиртга перпендикуляр ҳолда қолади.

Б) ўрта сиртга паралел юзалардаги нормал кучланишларни эътиборга олиш мумкин.

Тимошенко гипотезасига кўра:

ўрта сиртга ўтгазилган нормалнинг деформациядан сўнг силжиш бурчаги эътиборга олинади.

Юпқа сферик қобик ҳаракат тенгламаси сифатида С. П. Тимошенко гипотезасига асосланиб чиқарилган ҳаракат тенгламасидан фойдаланамиз у куйдаги кўринишига эга [6, 11]:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= L_{11}(u) + L_{12}(w) + L_{13}(\Phi) + \alpha_0 q \\
\gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= L_{12}(u) + L_{22}(w) + L_{23}(\Phi) + \alpha_0 p \\
\gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} &= L_{21}(u) + L_{32}(w) + L_{33}(\Phi)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Бу ерда L_{ij} - дифференциал операторлар.

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - (\alpha_1 + \operatorname{ctg}^2 \theta), \quad L_{12} = \alpha_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_{13} = -\alpha_7 \\
L_{12} &= -\alpha_2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad L_{22} = -\alpha_7 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \alpha_3 \\
L_{23} &= -\alpha_7 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right); \quad L_{31} = -\alpha_4, \quad L_{32} = \alpha_4 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
L_{23} &= \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - (\alpha_5 + \operatorname{ctg}^2 \theta) \\
\alpha_0 &= \frac{1 - v^2}{\delta}, \quad \alpha_1 = v + \alpha_7, \quad \alpha_2 = 1 + \alpha_1, \\
\alpha_3 &= 2 \cdot (1 + v), \quad \alpha_4 = 12 \cdot \alpha_6 / \delta, \quad \alpha_5 = v + \alpha_4, \\
\alpha_6 &= \frac{(1 - v^2) \cdot k^2}{2\delta}, \quad \alpha_7 = \delta \alpha_6, \quad k^2 = 0,86.
\end{aligned}$$

Бу ерда w , u – кўчиш векторининг нормал ва тангенциал компонентлари;

Φ - сферик қобик ўрта сиртига ўтгазилган нормални бурилиш бурчаги. δ - юпка сферик қобик қалинлиги; p ва q -лар ички сиртга таъсир қилувчи нормал ва тангенциал кучланишлардир.

Бошланғич шартлар:

$$u|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \Phi|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \tag{1.2}$$

Кирхгоф-Ляв гипотезаси асосан чиқарилган юпка сферик қобик ҳаракат тенгламларида ўрта сиртга ўтгазилган нормалнинг бурчаги эътиборга олинмайди.

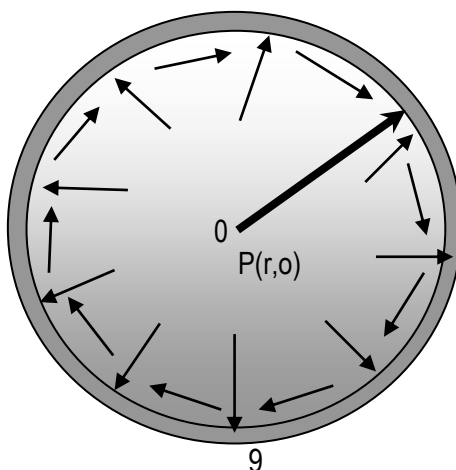
Бу гипотеза асосида қурилган юпка сферик қобик ҳаракат тенгламалари куйдаги кўринишга эга [1, 4, 13, 14]:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - (v + \operatorname{ctg}^2 \theta) u_1 \right] + \\
& + \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + (v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right] - (1 + v) \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \beta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (1.3) \\
& \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + (1 + v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + (2 - v + \operatorname{ctg}^2 \theta) u_1 \right] + \\
& + (1 + v) \left(\operatorname{ctg} \theta u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^4 w_1}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} + (1 + v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \operatorname{ctg} \theta \right] \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \\
& + 2(1 + v) w_1 = -\beta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \beta_2 q.
\end{aligned}$$

Бу ерда u_1 , w_1 кўчиш векторининг тангенциал ва нормал ташкил этувчилари, q - сферик қобикқа таъсир этувчи кучланиш.

$$\beta_1 = \frac{\gamma(1 - v^2)c^2}{E}, \quad \beta_2 = \frac{R(1 - v^2)\rho c^2}{Eh}.$$

Бунда E - Юнг модули; v - Пуассон коэффициенти, h - қобик қалин-лиги; γ - қобик материали зичлиги; ρ - ташки муҳит зичлиги; c -ташки муҳит-да товуш тезлиги (2-расм).



Юпқа сферик қобик.

2 - расм.

Бу тенгламалар системаси учун бошлангич шартлар:

$$u_1|_{\tau=0} = w_1|_{\tau=0} = \frac{\partial u_1}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = \frac{\partial w_1}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0 \quad (1.4)$$

кўринишда бўлади.

Ҳаракат тенгламалар системаси параболик типга тегишлидир ҳамда бу ҳаракат тенгламалар системаси кўпгина статик ва динамик масалаларни ечишда ўзининг яхши томонларини кўрсатган.

§1.2. Идеал суюкликлар муҳитининг ҳаракат тенгламалари.

Акустик муҳит тўлқинлар тарқалиши (дифракцияси) масалаларида туташ муҳитлар механикасининг математик моделларидан биридир ва у идеал суюкликлар муҳитининг чизиклаштирилган моделини ифодалайди.

Идеал суюкликлар ҳаракати ўзгарувчиларниг икки хил системасида ўрганиш мумкин. Биринчиси Эйлер ўзгарувчилари системаси, иккинчиси Лагранж ўзгарувчилар системаси деб юрилади. Эйлер ўзгарувчиларида ихтиёрий вақтда муҳит нуқтасининг тезлигини, ундаги босимни ва бошқа динамик характеристикаларини ўрганиш мумкин. Лагранж ўзгарувчиларида муҳитнинг алоҳида нуқтасининг ҳаракати ўрганилади. Ўзининг соддалигига кўра Эйлер ўзгарувчилари системасида суюклик ҳаракатини ўрганиш кенг тарқалган.

Идеал суюклик деб шундай муҳитга айтиладики, унда ихтиёрий сиртдаги кучланиш вектори шу сиртга ортогонал, яъни перпендикулярдир.

Бундай муҳит учун кучланиш тензори [1, 6, 10]

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix}$$

кўринишига эга. Бу ерда p - суюқликдаги босим. Суюқлик ҳаракат тенглама-ларини Эйлер ўзгарувчиларида қараймиз. Идеал суюқликнинг ҳаракатини асосий тенгламаси

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad} \bar{p}, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot V_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot V_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot V_z$$

кўринишида. Бу ерда ρ - суюқлик зичлики; $\vec{F}$ - ҳажмий кучлар зичлиги, $\vec{V}$ - тезлик вектори; t - вақт, p - босим. (1.5) вектор тенгламага туташ муҳитнинг узлуксизлик тенгламасини қўшамиз:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div} \vec{V} = 0. \quad (1.6)$$

(1.5) ва (1.6) тенгламлар системаси беш номаълумли (p - босим, ρ - зичлик ва учта $\vec{V}$ - тезлик проекциялари) тўртта тенгламалардан иборат. Бу система тўлиқ бўлиши учун яна битта тенглама қўшиш лозим. Суюқлик ҳаракати жараёни баротропик бўлса, яъни босим фақат зичликка боғлиқ.

У ҳолда

$$p = p(\rho) \quad (1.7)$$

тенглама олинади.

Гидродинамиканинг кўп масалалари учун суюқлик ҳаракати потен-циалидир. Бу ҳолда $\vec{V}$ тезлик потенциал φ функция билан

$$\vec{V} = \text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (1.8)$$

боғланишга эга. Суюқлик ҳаракати потенциали бўлишнинг зарурий ва етарли шарти $\vec{V}$ вектор функциянинг роторини нолга тенгличидир:

$$\text{rot} \vec{V} = 0. \quad (1.9)$$

Ностационар тўлқин жараёнларини ифодалашда суюқлик ҳаракати акустик модели кенг тарқалган. Бу модель кичик амплитудали тўлқин жараёнларини яхши тасвирлайди.

Муҳитнинг гидродинамик характеристикаларини

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}',$$

бу ерда «0» индекс бошланғич, яъни муҳитнинг тинч ҳолатига мос келувчи параметрларни билдиради. Штрих билан ҳаракат натижасида юзага келган параметр белгиланган дастлаб, тинч ҳолатда $\vec{V}_0 = 0$ бўлади.

$$\left| \frac{\rho'}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{\vec{V}}{c} \right| \ll 1$$

тенгсизликларни эътиборга олиб, (1.5) – (1.7) тенгламаларни системасининг чизиқли қисмини оламиз:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \cdot \text{grad} p' = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \cdot \text{grad} \vec{V}' = 0 \quad (1.11)$$

$$p' = c^2 \cdot \rho' \quad (1.12)$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0}}, \quad \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

(1.12) ни (1.10) - (1.11) тенгламалар системасига қўйиб, тезлик потенциалига нисбатан.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi \quad (1.13)$$

тўлқин тенгламасини оламиз. Бу ерда Δ - Лаплас оператори.

Тезлик потенциал босим билан

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.14)$$

боғланишга эга.

Куйидаги ўлчовсиз миқдорларни киритиб (штрихлар ўлчовсиз миқдорларни билдиради):

$$\varphi' = \frac{\varphi}{c_* R}, \quad \gamma_0 = \frac{c_*}{c}, \quad \beta_0 = \frac{\rho_0 c^2}{\rho_* c_*^2}, \quad p' = \frac{p}{\rho_* c_*^2}, \quad \mathbf{V}' = \frac{\mathbf{V}}{c_*}, \quad \tau = \frac{ct}{R} \quad (1.15)$$

(1.13) ва (1.14) муносабатларни (бу ерда штрихлар тушириб қолдирилган):

$$\gamma_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi, \quad p = -\beta_0 \gamma_0^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad (1.16)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

§1.3 Ностационар чегаравий масалаларнинг қўйилиши

Ўрганилаётган система ўз ичига эластик қаттиқ жисмларни ҳамда идеал суюқликларни олиш мумкин. Идеал суюқлик бутун фазони тўлди-риши ёки чегараланган ҳажмда бўлиши мумкин. Бундай системаларнинг динамик ҳолатини назарий ўрганиш муҳит ҳаракатини тасвирловчи тенгла-малар системасини мос чегарвий шартлар ҳамда бошланғич шартлар билан биргаликда ечишга келтирилади. Чегаравий шартларнинг тури муҳитни, жисмни чегараловчи сиртнинг физик табиатига боғлиқ. Агар идеал суюқлик-ни чегараловчи Γ сирти қаттиқ ва қўзғалмас бўлса, у ҳолда зарра тезлиги-нинг V_n нормал ташкил этувчи нолга тенг [1, 19, 20], яъни (3-расм)

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{n} \right) \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (1.18)$$

Бу ерда $\vec{n}$ - Γ сиртга ўтгазилган нормал орт.



каттиқ сирт бетон

3-расм

Агар Γ сирт – эркин сирт бўлса, унда босим нолга тенг бўлади, яъни (4-расм)

$$p|_{\Gamma} = 0 \quad (1.19)$$



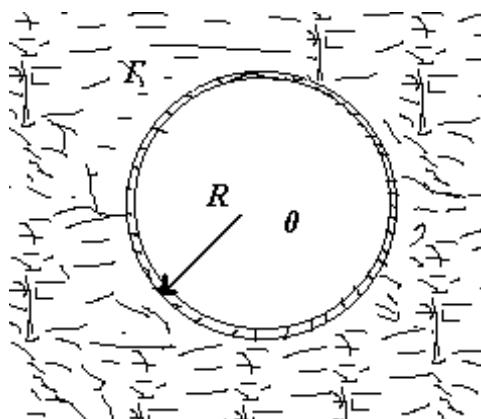
эркин сирт сув сирти юзаси.

4-расм

Агар идеал суюқлик ва эластик қобик умумий Γ сирт билан чегараланган бўлса, у ҳолда Γ сиртда суюқлик зарчаси тезлигини ташкил этувчи эластик қобик заррача тезлиги ташкил этувчиларга тенг бўлади. (5-расм)

$$\left(\vec{V}_n \cdot \vec{n} \right) \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (1.20)$$

Бу ерда w - қобик заррачасининг кўчиши.



Сферик қобик идеал суюқлик ичида.

5-расм

Агар идеал суюқлик ва эркин муҳит умумий Γ -сирт бўйича уринса, у ҳолда Γ сиртда чегаравий шарт. (6-расм)

$$\left(\vec{V}^{(I)} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{\Gamma} = \left(\vec{V}^{(II)} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{\Gamma}, \quad (1.21)$$

$$p \cdot \cos(nx)\Big|_{\Gamma} = \sigma_{nx}\Big|_{\Gamma}, \quad p \cdot \cos(ny)\Big|_{\Gamma} = \sigma_{ny}\Big|_{\Gamma}, \quad p \cdot \cos(nz)\Big|_{\Gamma} = \sigma_{nz}\Big|_{\Gamma}$$

кўринишда бўлади.



6-расм

Масалан, сув билан сув ости иншоати.

Агар иккита ўзаро аралашмайдиган идеал суюқликлар умумий Γ сирт бўйича уринса, у ҳолда Γ сиртда чегаравий шарт (7-расм)

$$\left(\vec{V}^{(I)} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{\Gamma} = \left(\vec{V}^{(II)} \cdot \vec{n}\right)\Big|_{\Gamma} \quad (1.22)$$

$$p^{(I)}\Big|_{\Gamma} = p^{(II)}\Big|_{\Gamma}$$

кўринишга эгадир.

Бундан ташқари агар мухит чегараланмаган вазни тўлдирса. У ҳолда чексизликда тўлқиннинг сўнишини эътиборга олиш зарур.

Бу чегара шартлардан ташқари бошлангич шартлар ҳам мавжуд бўлиши керак. Дастлаб, система тинч ҳолатда бўлгани учун тезлик, босим, кўчиш ва бошқа параметрлар $\tau = 0$ да нолга тенг деб олинади.



7-расм

масалан сув ва керосин.

2-Боб

ДИНАМИК МАСАЛАЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ АЛМАШТИРИШЛАР ВА ОРТОГОНАЛ КЎПҲАДЛАР

Бу бобда асосий масаланинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш учун зарур бўлган ва деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг ностационар масалаларини ечишда кўп ишлатиладиган Лаплас интеграл алмаштиришлари, оригиналга ўтиш усуллари, Лежандр ортогонал кўпҳадлари ҳамда Бессель функцияларининг баъзи хоссалари ҳамда қўшиш теоремаси келтирилган.

§ 2.1. Лаплас интеграл алмаштиришлари ва унинг хоссалари

Деформацияланувчи каттик жисмлар механикасининг динамик масала-ларини ечиш учун жуда кўп математик усулларни қўллаш мумкин. Бу усулларга мисол сифатида интеграл алмаштиришлар усули, ўзгарувчиларни ажратиш усули, ясси тўлкинлар усули, Вольтерр ва Адамарнинг умумлашган усулларида бирортасини танлаб олиш динамик масалани қўйилишининг физик маъноси билан боғлиқ. Кейинги бир неча ўн йилликлар ичида математик физиканинг масалаларни, механика ва техниканинг динамик масалаларини ечиш учун интеграл алмаштиришларга асосланган операцион методлар жуда тез-тез ва муваффақиятли қўлланила бошланди[6,13,15,22,28].

Масалан, Лаплас интеграл алмаштиришлари шундай методлардан бири бўлиб, у p комплекс ўзгарувчининг тасвир $F(p)$ бир қийматли функциясини унга мос t ҳақиқий ўзгарувчининг оригинал $f(t)$ функцияси билан боғлай-ди. Бу $f(t)$ ва $F(p)$ жуфтлар ўртасидаги ўзаро бир қийматли мослик кўп ҳолларда амалий мақсадда жадваллар ёрдамида аниқланади.

Лаплас интеграл алмаштиришлари шу билан характерланадики, $f(t)$ оригиналлар устида амалга ошириладиган кўпгина муносабатлар ва операцияларга уларнинг $F(p)$ тасвирлари устида амалга оширадиган анча содда муносабатлар ва операциялар мос келади.

Хусуссан, улар дифференциал ва интеграл тенгламаларни ечиш учун қўлланилади. Ечиш усули $f(t)$ оригиналларни ўз ичига олувчи берилган тенгламани $F(p)$ Лаплас алмаштиришларининг тасвирларига нисбатан, фазодаги мос эквивалент тенгламага алмаштиришдан иборатдир.

Бундан Лаплас алмаштиришлари вақт бўйича қўлланилганда хусусий ҳосилали дифференциал тенглама тасвирлар фазосида оддий дифференциал тенгламага алмашади. Оддий дифференциал тенглама эса номаълум функциянинг тасвирига нисбатан чизиқли алгебраик тенгламага келтири-лади.

Тасвирлар фазосида олинган натижаларнинг оригиналлари қолдиқлар назарияси ёки бошқа усуллар ёрдамида топилади.

Умуман олганда, Лаплас интеграл алмаштиришлари ёрдамида ўрганиладиган ностационар жараёни математик ифодаловчи бошланғич- чегаравий масаланинг аналитик ечими олинади. Ностационар масалаларнинг аниқ ечимини топиш муҳим аҳамиятга эга, чунки аналитик ечим берилган носта-ционар жараёни таҳлил қилишда ишончли натижаларни беради ҳамда аниқ формулаларни сонли усуллар ёрдамида олинган натижаларнинг тўғрилигини текширишда ва хатолигини баҳолашда катта аҳамиятга эгадир.

Лаплас интеграл алмаштиришларини қўллаб ностационар масалаларни ечишда куйидаги тўртта этапни амалга ошириш керак бўлади.

1. Номаълум оригинал функциянинг $F(p)$ тасвирга ўтиш.
2. $F(p)$ тасвирга ўтишда унга мос $f(t)$ оригинал устида баъзи операция алмаштиришни бажариш алмаштиришдан сўнг $F(p)$ функцияга нисбатан содда тенглама оддий дифференциал тенглама билан алмаштирилади ва ҳокоза.
3. Тасвирлар фазосида олинган тенглама $F(p)$ га нисбатан ечилади.
4. Олинган $F(p)$ тасвирнинг оригинал $f(t)$ га ўтилади. Бу изланаётган функция бўлади. Масалалар шу усулда ечилади. Асосий математик қийин-чилик охириги этапда, яъни топилган $F(p)$ тасвир ифодаларидан оригиналга ўтишдир. Оригинал ўтишни бир неча хил усулда амалга ошириш мумкин.

- а) сонли усуллар ёрдамида
- в) қолдиқлар назарияси ёрдамида
- г) қаторга ёйиш усули ёрдамида.

Айтайлик, $0 \leq t < \infty$ ярим ўқида ҳар қандай чекли $[a, b]$ ораликда ўзининг абсолют қийматлари билан интегралланувчи $f(t)$ функция берилган бўлсин. $p = \sigma + i\tau$ комплекс параметр киритамиз ва $f(t)$ функциянинг Лаплас интеграл алмаштиришини

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

тенглик билан аниқлаймиз.

Агар p параметрининг киймати учун (2.1) интеграл яқинлашувчи бўлса, $f(t)$ функцияга Лаплас интеграл алмаштиришни қўллаш мумкин. $f(t)$ функцияга оригинал дейилади, агар у куйидаги хоссаларга эга бўлса:

1. $f(t)$ функция $0 \leq t < \infty$ ўқида аниқланган ва чекли ораликда абсолют киймати билан интегралланувчи.

2. $t < 0$ да $f(t)$ функция нолга тенг.

3. p параметрининг ҳеч бўлмаганда битта кийматида $f(t)$ функцияга Лаплас алмаштиришларини қўллаш мумкин. $F(p)$ функцияга $f(t)$ функция-нинг Лаплас интеграл алмаштиришлари бўйича тасвири дейилади.

Лаплас интеграл алмаштиришларининг асосий хоссалари.

1. Чизиқлилиқ хоссаси.

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t), \quad f_i(t) \div F_i(p) \text{ ва } f(t) \div F(p)$$

бўлса, у ҳолда

$$F(p) = \sum_{i=1}^n F_i(p)$$

бўлади.

2. Эркин ўзгарувчининг масштабини ўзгартириш.

Айтайлик, $f(t) \div F(p)$ бўлсин, ўзгармас $\lambda > 0$ бўлганда $f(\lambda t)$ нинг тасвири аниқлансин.

$$L\{f(\lambda t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda}(\lambda t)} f(\lambda t) d\lambda t$$

$\lambda t = z$ десак,

$$L\{f(z)\} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda}z} f(z) dz$$

ёки

$$f(z) \div L\{f(z)\} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda} z} f(z) dz$$

Бунда

$$f(t) \div F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

билан алмаштирсак,

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

натижага эга бўламиз.

3. $f'(t)$ ҳосиланинг тасвири.

Айтайлик, $f(t) \div F(p)$ бўлсин. $f'(t)$ нинг тасвирини топиш керак.

$$L\{f'(t)\} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt$$

интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$L\{f'(t)\} = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt ,$$

$$L\{f'(t)\} = pL\{f(t)\} - f(0), \text{ яъни } f'(t) \div pF(p) - f(0)$$

Хусусан, агар $f(0) = 0$ бўлса, $f'(t) \div pF(p)$. Оригинални дифференциаллаш бу тасвирни p сонга кўпайтириш демакдир.

Шунга ўхшаш

$$f^{(n)}(t) \div p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right]$$

эканлигини аниклаш қийин эмас, буни исботлаш учун $f^{(n)}(t)$ гача кетма-кетлик $f'(t) \div pF(p)$ қўлланилиши керак.

Хусусан, агар $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0)$ бўлса, $f^{(n)}(t) \div p^n F(p)$ бўлади, яъни $f(t)$ функциянинг n - тартибли ҳосиласининг тасвири, функция тасвирини p^n нинг кўпайтмасига тенгдир.

4. Интегралнинг тасвири. $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$ функцияни қарайлик.

Айтайлик, $f(t) \div F(p)$ бўлганда $\int_0^t f(t)dt$ нинг тасвирини топиш керак ва уни

$\varphi(p)$ деб белгилаб қуйидагиларни ёзамиз.

$$\varphi'(t) = f(t) \text{ , } \varphi(0) = 0 \text{ , } \varphi'(t) \div p\varphi(p) \text{ ёки } f(t) \div p\varphi(p)$$

иккинчи томондан $f(t) \div F(p)$.

Демак, $\varphi(p) = \frac{F(p)}{p}$, яъни $\int_0^t f(t)dt \div \frac{F(p)}{p}$ муносабатни кетма-кет қўллаш

натижасида

$$\int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 \div \frac{1}{p^n} F(p)$$

муносабат келиб чиқади.

5. $t^n f(t)$ функциянинг тасвири.

Аввал бу функция тасвирга эга бўлиш-бўлмаслигини аниқлайлик.

$$|t^n f(t)| < M_n e^{(s+\lambda)t} \text{ ,}$$

яъни $t^n f(t)$ функция тасвирга эга функциялар синфига қарашли экан. Энди шу тасвирни топайлик.

$$L\{t^n f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t) dt$$

интеграл ҳам $\operatorname{Re} p > s_0 + \lambda$ соҳада текис яқинлашувчидир. λ кичик бўлгани учун (унинг ихтиёрийлигидан) уни $\operatorname{Re} p > s_0$ соҳа десак ҳам бўлади.

$$\begin{aligned} L\{t^n f(t)\} &= (-1)^n \int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} L\{f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p). \end{aligned}$$

Демак,

$$t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

6. Тасвирни интеграллаш.

Теорема: Агар $\int_0^\infty F(p)dp$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\frac{f(t)}{t}$

функциянинг тасвири бўлади. $\frac{f(t)}{t} \div \int_0^\infty F(p)dp$, яъни тасвирни интеграллаш бу оригинални t га бўлиш демакдир.

7. **Силжиш теоремаси.** $F(p + \lambda) \div e^{-\lambda t} f(t)$, яъни тасвир аргументини λ га силжитиш оригинални $e^{-\lambda t}$ га кўпайтириш демакдир.

Ҳақиқатдан

$$e^{-\lambda t} f(t) \div \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} f(t)dt = F(p + \lambda).$$

8. **Кечикиш теоремаси.** Ихтиёрий мусбат τ учун $f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ ўринлидир. (Оригинални τ вақтга кечикиб ишлатиш тасвирни $e^{-p\tau}$ га кўпай-тиришга тенг).

9. **Кўпайтириш теоремаси:** Агар $F(p) \div f(t)$ ва $G(p) \div g(t)$ бўлса, бу икки тасвирнинг кўпайтмаси тасвир бўлади, шу билан бирга

$$F(p)G(p) \div \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (2.2)$$

тасвирдан оригиналга ўтиш қолдиқлар назарияси ёрдамида қуйидагича амалга оширилади.

Агар тасвир $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ кўринишга эга ва p_n — лар $F(p)$ функциянинг

қутблари ҳамда n_k — лар уларга мос қутб қарралиси бўлса, у ҳолда $F(t)$ оригинал

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{ F(p)(p - p_k)e^{pt} \}$$

формула ёрдамида топилади.

Агар $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ функция оддий p_n – кутбларга эга бўлса, у ҳолда $f(t)$

оригинал $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k \cdot t}$ тенглик ёрдамида ҳисобланади.

Агар тасвир $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$ кўринишга эга бўлса, у ҳолда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

оригинал кўринишда бўлади.

Тасвирнинг $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ ифодасини $B(p)F(p) = A(p)$ кўринишида ёзиб,

$a(t)$, $b(t)$ ва $f(t)$ функцияларга мос равишда $A(p)$, $B(p)$ ва $F(p)$ тас-вирларнинг

оригиналлари бўлса, у ҳолда 9-хоссага кўра $\int_0^{\tau} b(t) f(\tau - t) dt = a(t)$ интеграл тенгламани

олиш мумкин ва бу интеграл тенгламани сонли ечиш усуллари билан $f(t)$ оригинални топиш мумкин.

§2.2. Тасвирлардан оригиналга ўтиш усуллари

$F(p)$ - тасвир рационал-каср функция, яъни $F(p) = \frac{u(p)}{v(p)}$ кўринишда. Бу ерда

$u(p)$ ва $v(p)$ лар p параметрнинг мос равишда m ва n даражали ($m < n$) кўпхадлари.

Агар $v(p)$ кўпхадни содда кўпайтирувчиларга ажратиш мумкин бўлса [15], яъни

$$v(p) = (p - p_1)^{k_1} (p - p_2)^{k_2} \dots (p - p_r)^{k_r},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$$

ўринли бўлса, у ҳолда $F(p)$ функцияни

$$\frac{A_{j,s}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}}$$

кўринишдаги элементар касрлар йиғиндисига ёйиш мумкин.

Демак,

$$F(p) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} \frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \quad (2.3)$$

Бу йигиндининг барча $A_{j,s}$ коэффициентлари

$$A_{j,s} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{p \rightarrow p_j} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}} \left[(p-p_j)^{k_j} F(p) \right] \right\}$$

формула ёрдамида аниқланади.

Агар $v(p)$ функциянинг барча илдизлари оддий, яъни

$$v(p) = (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_r), \quad p_j \neq p_k, \quad j \neq k$$

бўлса, у ҳолда йигинди соддалашади.

$$F(p) = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{p-p_j}, \quad A_j = \frac{u(p_j)}{v'(p_j)} \quad (2.4)$$

$F(p)$ функция каррала кутбларга эга бўлганда, яъни (2.3) нинг оригинали

$$F(p) = \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^{k_j} A_{j,s} \frac{t^{k_j-s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}} e^{p_j t}$$

кўринишга эга. $F(p)$ функция оддий кутбга эга бўлганда, яъни (2.4) нинг оригинали

$$f(t) = \sum_{j=1}^n \frac{u(p_j)}{v'(p_j)} e^{p_j t}$$

формула билан аниқланади.

Агар $F(p)$ тасвир $\frac{1}{p}$ нинг $|p| > R$ да $(R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq \infty)$ яқинлашувчи

даражали қатори кўринишида

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

бўлса, у ҳолда оригинал

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

кўринишда бўлади.

§ 2.3. Лежандр кўпхадлар ва Бессель функцияларнинг баъзи хоссалари

Сонли усулларнинг кенг кўламда ривожланиши ҳамда сонли экс-периментнинг ахамиятини ошиши муносабати билан махсус функцияларга кизиқиш юкори даражада унди. Бу икки ҳолат билан боғланган. Биринчидан, физик ходисаларнинг математик модели ишлаб чиқишда баъзи эффектлар-нинг нисбий ролини аниқлаш мақсадида дастлабки масалани аналитик формада ечимини олиш учун соддалаштиришга тўғри келади.

Иккинчидан, ЭХМ ёрдамида мураккаб масалаларни ечишда ишончли ва самарали ҳисоблаш алгоритмларни танлаш учун соддалаштирилган маса-лаларни фойдаланиш қулайдир.

Энг кўп фойдаланиладиган махсус функциялар сифатида ортогонал кўпхадлар, цилиндрик ва сферик функцияларни келтириш мумкин.

Назарий ва математик физиканинг куп масаласини ечиш, жумладан, иссиқлик жараёнларини ўрганиш. Муҳитларда электромагнит, ностационар акустик ва эластик тўлқинларнинг тарқалишини ўрганиш ҳар хил махсус функциялардан фойдаланишга олиб келади.

Сабаби, амалиётда махсус функциялар ҳар хил дифференциал тенг-ламаларнинг ечими кўринишида пайдо бўлади.

Энди (1.12) тўлқин тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалалар-нинг ечимини тўлиқ бўлмаган ўзгарувчиларни ажратиш усулидан фойдала-ниб излаймиз.

Бунда изланаётган номаълум потенциални

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r, \tau) P_n(\cos\theta), \quad (2.5)$$

кўринишда тасвирлаймиз. Бу ерда $P_n(\cos\theta)$ -Лежандра кўпхадлари[2,3,18, 21].

$P_n(x)$ кўпхадлар куйидаги оддий дифференциал тенгламани қаноат-лантиради (штрих билан x бўйича ҳосилалар белгиланган):

$$\left[(1-x^2) P_n'(x) \right]' = -n(n+1) P_n(x). \quad (2.6)$$

Бундан эса $P_n(\cos\theta)$ функциялар

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \right] = -n(n+1) P_n(\cos\theta) \quad (2.7)$$

дифференциал тенгламанинг ечими эканлиги маълум бўлади.

(2.5) қаторни (1.12) тўлқин тенгламасига қўйиб ҳамда (2.7) тенгликни ва $[0, \pi]$ ораликда $\{P_n(\cos\theta)\}$ функциялар системасининг тўлиқлигини ҳисоб-га олиб, гиперболик типдаги куйидаги

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \tau^2} = \Delta_n \varphi_n, \quad \Delta_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2}. \quad (2.8)$$

тенгламага эга бўламиз.

Лежандр ортогонал кўпхадлари бўйича берилган $p(\tau, \theta)$ функцияни қаторга ёйиш вақтида қатор коэффицентларни аниқлаш учун бу кўпхадлар-ни ортогоналлигин эътиборга оламиз:

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}, \quad (2.9)$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta.$$

Бу ерда δ_{mn} - Кронекер белгиси.

(1.12) тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг ечимни тузиш учун кенг фойдаланилаётган методлардан бири ўлчовсиз τ вақт бўйи-ча Лаплас интеграл алмаштиришларни қўллашдир.

Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида бу тенгла-ма куйидаги кўринишга эга:

$$\Delta \varphi^L - \gamma_0^2 s^2 \varphi^L = 0, \quad (2.10)$$

бу ерда s - интергал алмаштириш параметри, индекс L алмаштириш транс-формантасини билдиради.

(2.5) қатордан фойдаланиб, (2.10) тенгламанинг умумий ечимини

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \left[A_n^L(s) K_{n+1/2}(r\gamma_0 s) + B_n^L(s) I_{n+1/2}(r\gamma_0 s) \right] P_n(\cos\theta), \quad (2.11)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу ерда $I_{n+1/2}(x)$ ва $K_{n+1/2}(x)$ - Бесселнинг биринчи ва иккинчи тур модифицирланган функциялари [2, 3, 9, 27].

Агар муҳит ҳаракати чегараланмаган соҳада қаралаётган бўлса, у ҳолда чексизликда тўлқиннинг сўниши шартини ҳисобга олиш зарур. Бу Бессель функцияларининг хоссаларига кўра $B_n^L(s) \equiv 0$ тенгликка олиб келади. Чекли соҳа ҳолида

эса потенциалларнинг чегараланганлиги шартини фойдаланиш керак. Бу ҳолда (2.11)

ечимдан $A_n^L(s) \equiv 0$ тенглик келиб чиқади.

Функциялар ва кўпхадлар учун куйидаги белгилашлардан фойдаланамиз [6, 28]:

$$\begin{aligned} G_{nj}(s) &= R_{nj}(-s)e^s - R_{nj}(s)e^{-s}, \quad j = 0, 4, \\ R_{n3}(s) &= R_{n1}(s) - R_{n0}(s), \quad R_{n4}(s) = R_{n2}(s) - R_{n0}(s), \\ R_{n0}(s) &= \sum_{k=0}^n A_{nk} s^{n-k}, \quad R_{n1}(s) = \sum_{k=0}^{n+1} B_{nk} s^{n+1-k}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$A_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!2^k}, \quad B_{nk} = A_{nk} + kA_{n,k-1} \quad (k \neq 0), \quad B_{n0} = A_{n0},$$

$R_{n0}(s)$ кўпхад $R_{n1}(s)$ ва $R_{n2}(s)$ кўпхадлар билан

$$\begin{aligned} \left[R_{n0}(s)s^{-n-1}e^{-s} \right]' &= -R_{n1}(s)s^{-n-2}e^{-s}, \quad \left[R_{n1}(s)s^{-n-2}e^{-s} \right]' = -R_{n2}(s)s^{-n-3}e^{-s}, \\ R_{n1}(s) &= R_{n+1,0}(s) - nR_{n0}(s) \end{aligned} \quad (2.13)$$

муносабатлар орқали боғланган [6].

У ҳолда Бесселнинг биринчи ва иккинчи тур сферик функциялари элементар функциялар орқали куйидагича ифодаланади [2, 3, 9, 21, 22]:

$$I_{n+1/2}(s) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi s} s^n} G_{n0}(s), \quad K_{n+1/2}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \frac{e^{-s}}{s^n} R_{n0}(s). \quad (2.14)$$

Кейин ишда $K_{n+1/2}(x)$ ва $I_{n+1/2}(x)$ Бессель функцияларининг куйидаги баъзи

хоссалари фойдаланилади. $f_n(s)$ орқали $\sqrt{\frac{\pi}{2s}} I_{n+1/2}(x)$ ёки $\sqrt{\frac{\pi}{2s}} K_{n+1/2}(x)$

функциялардан бирини белгилаймиз. У ҳолда $f_n(s)$ функциялар учун куйидаги муносабатлар ўринли бўлади [27]:

$$\begin{aligned} f_{n-1}(s) + f_{n+1}(s) &= \frac{2n+1}{s} f_n(s), \\ \frac{n+1}{s} f_n(s) + \frac{d}{ds} f_n(s) &= f_{n-1}(s), \\ nf_{n-1}(s) - (n+1)f_{n+1}(s) &= (2n+1) \frac{d}{ds} f_n(s). \end{aligned} \quad (2.15)$$

§2.4. Бессель функциялари учун қўшиш теоремалари

Асосий ўрганиладиган масалани ечишда ҳар хил $r_i, \theta_i, \vartheta_i$ ва $r_j, \theta_j, \vartheta_j$ ($i \neq j$) сферик координаталар системасида қараладиган (1.17) кўринишдаги функциялар ўртасидаги боғланишни топиш зарурияти юзага келади.

Бу боғланишлар Бесселнинг $I_{n+1/2}(s)$ ва $K_{n+1/2}(s)$ биринчи ва иккинчи тур модифицирланган функцияларга қўлланиладиган қўшиш теоремалари ёрдамида ифодаланади [1, 18, 27]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{sr_i}} K_{n+1/2}(sr_i) P_n^{(p)}(\cos\theta_i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)(m-p)!}{(m+p)!} \times \\
 & \times \sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n} b_{\sigma}^{(nmp)} \frac{1}{s\sqrt{r_j r_{ij}}} K_{\sigma+1/2}(sr_{ij}) I_{m+1/2}(sr_j) P_m^{(p)}(\cos\theta_j), \quad (r_j < r_{ij}), \\
 & \frac{1}{\sqrt{sr_i}} K_{n+1/2}(sr_i) P_n^{(p)}(\cos\theta_i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{(2m+1)(m-p)!}{(m+p)!} \times \\
 & \times \sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n} b_{\sigma}^{(nmp)} \frac{1}{s\sqrt{r_j r_{ij}}} I_{\sigma+1/2}(sr_{ij}) K_{m+1/2}(sr_j) P_m^{(p)}(\cos\theta_j), \quad (r_j > r_{ij}), \\
 & \frac{1}{\sqrt{sr_i}} I_{n+1/2}(sr_i) P_n^{(p)}(\cos\theta_i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n} (2m+1)(m-p)!}{(m+p)!} \times \\
 & \times \sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n} b_{\sigma}^{(nmp)} \frac{1}{s\sqrt{r_j r_{ij}}} I_{\sigma+1/2}(sr_{ij}) I_{m+1/2}(sr_j) P_m^{(p)}(\cos\theta_j),
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$b_{\sigma}^{(nmp)} = (-1)^p \sigma \sqrt{\frac{(n+p)!(m+p)!}{(n-p)!(m-p)!}} (nm00/\sigma 0) (nmp, -p/\sigma 0) ,$$

$$(nm00/\sigma 0) = \begin{cases} (-1)^{\sigma+1/2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)!}{\left(\frac{l}{2}-n\right)!\left(\frac{l}{2}-m\right)!\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)!} \times \\ \times \left[\frac{(2\sigma+1)(l+2n)!(l-2m)!(l-2\sigma)!}{(l+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{агар } l - \text{ жуфт булса,} \\ 0, & \text{агар } l - \text{ тоқ булса,} \quad l = n + m + \sigma \end{cases}$$

$$(nmp, -p/\sigma 0) = \sigma \left[\frac{2\sigma+1}{(n+m+\sigma+1)!} (m+\sigma-n)!(n+\sigma-m)!(n+m-\sigma)! \times \right.$$

$$\times (n^2-p^2)!(m^2-p^2)! \left. \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{\max(m-p-\sigma, 0) \leq k \leq \min(m+n-\sigma, m-p, n-p)} (-1)^k [k!(n+m-\sigma-k)!(k+\sigma+p-n)! \times$$

$$\times (m-p-k)!(k+p+\sigma-m)!(n-p-k)!]^{-1},$$

Бу ерда r_{ij} - икки сферик системаларининг марказлари орасидаги масофа; $b_{\sigma}^{(nmp)}$ - Клебша-Гордон коэффициентлари [9, 12, 18].

III – БОБ

ЮПҚА СФЕРИК ҚОБИҚЛАРНИНГ НОСТАЦИОНАР ТЕБРАНИШИ

Магистрлик диссертациясининг охирги бобида ўзаро эксцентрик жойлашган икки юпқа сферик қобиқлар ўртасида идеал суюқликлар билан тўлдирилган системанинг ностационар тебраниши жараёни ўрганилган. Муҳит билан юпқа сферик қобиқ ўртасидаги контакт кучланиш ва қобиқнинг кинематик характеристикалари аниқланган. Муҳитдаги босим учун аниқ формула топилган [16, 17].

§ 3.1. Масаланинг математик ифодаси

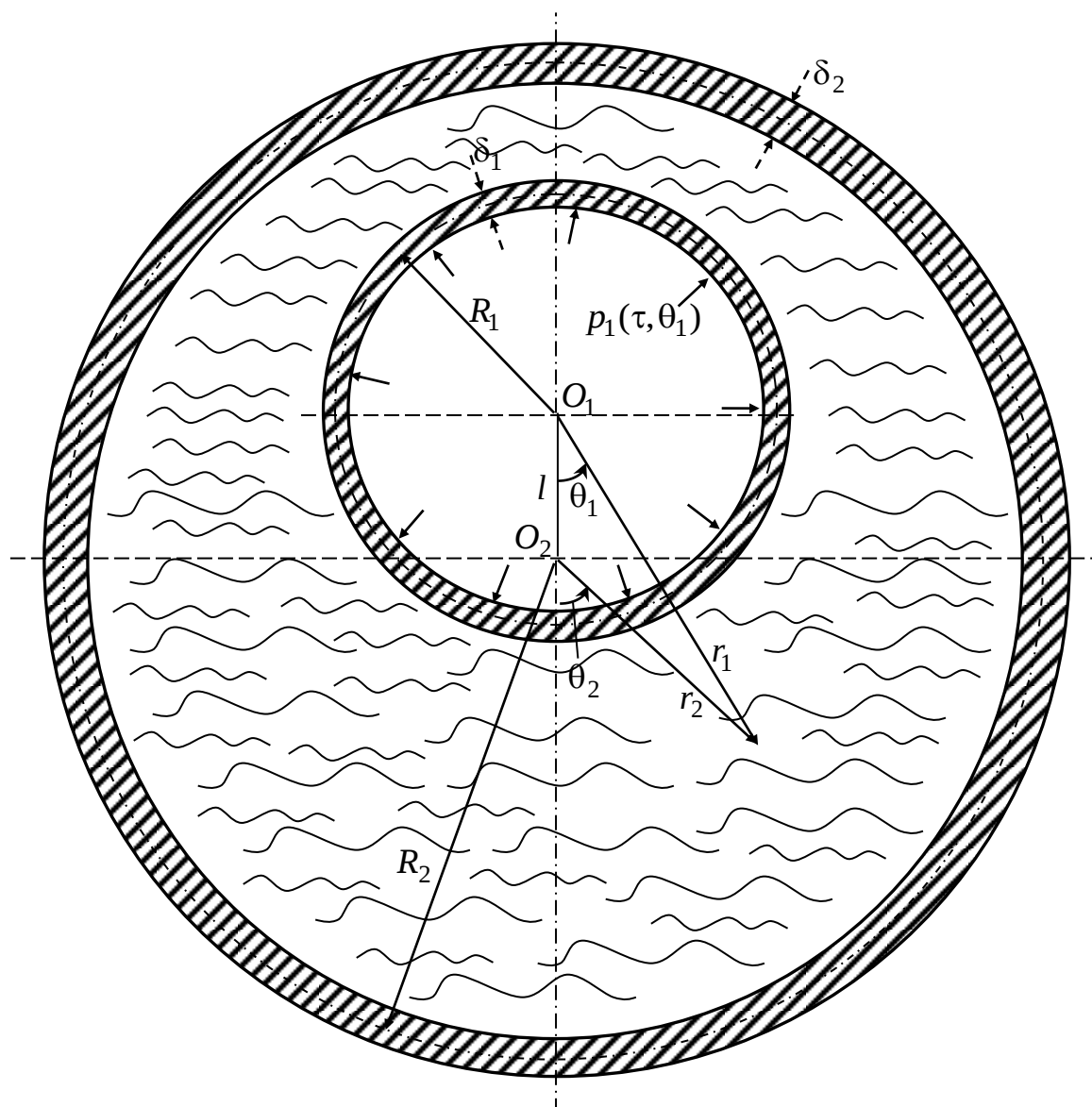
Айтайлик, бизга ўзаро эксцентрик жойлашган юпқа сферик қобиқлар билан чегараланган идеал суюқликлар фазоси берилган бўлсин (8-расм).

Бошланғич $\tau = 0$ вақтда ички сферик қобиқнинг ички сиртига нормал $p_1(\tau, \theta_1)$ куч таъсир этади ва суюқликда тўлқин тарқалиб, бутун система тинч ҳолатдан чиқади.

Ташқи юпқа сферик қобиқнинг ҳаракат тенгламаси сифатида С. П. Тимошенко гипотезасига асосланиб чиқарилган ҳаракат тенгламасидан фойдаланамиз [6, 10, 11]:

$$\begin{aligned}\gamma^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} &= L_{11}(u_2) + L_{12}(w_2) + L_{13}(\Phi_2) \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} &= L_{12}(u_2) + L_{22}(w_2) + L_{23}(\Phi_2) + \alpha_0 p_{02} \\ \gamma^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2} &= L_{21}(u_2) + L_{32}(w_2) + L_{33}(\Phi_2)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Бу ерда w_2 , u_2 – кўчиш векторининг нормал ва тангенциал компонентлари;



Φ_2 - сферик қобик ўрта сиртига ўтгазилган нормални буралиш бурчаги. δ_2 - юпқа сферик қобик қалинлиги; p_{02} - ташқи қобикнинг ички сиртга суюқлик томонидан таъсир қилувчи нормал кучдир.

Акустик муҳит билан ташқи қобик ўртасидаги контакта шарт куйидаги кўринишга эга:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_2} \right|_{r_2=R_2} = \frac{\partial w_2}{\partial \tau}. \quad (3.2)$$

Ички юпқа сферик қобикнинг ҳаракат тенгламаси сифатида Кирхгоф-Ляв типидagi ҳаракат тенгламасини оламиз [1, 13, 14]:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - (v + \operatorname{ctg}^2 \theta) u_1 \right] + \\ & + \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + (v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial w_1}{\partial \theta} \right] - (1 + v) \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = \beta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (3.3) \\ & \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + (1 + v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + (2 - v + \operatorname{ctg}^2 \theta) u_1 \right] + \\ & + (1 + v) \left(\operatorname{ctg} \theta u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) + \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^4 w_1}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 w_1}{\partial \theta^3} + (1 + v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \operatorname{ctg} \theta \right] \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \\ & + 2(1 + v) w_1 = -\beta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \beta_2 (p_{01} + p_1), \quad p_{01} = - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{r=1}. \end{aligned}$$

Бу ерда u_1 , w_1 - сферик қобикнинг ўрта сирти нукталаридаги кўчиш вектори компоненталари ва p_{01} - ички сферик қобикнинг ташқи сиртига суюқлик томонидан таъсир этувчи контакт куч;

Акустик муҳит билан ички қобик ўртасидаги контакта шарт куйидаги кўринишга эга:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r_1} \right|_{r_1=R_1} = \frac{\partial w_1}{\partial \tau}. \quad (3.4)$$

Масаланинг ўқ симметриклигини ҳисобга олиб, идеал суюқликнинг нотинч ҳаракати φ тезлик потенциалига нисбатан тўлқин тенгламаси билан тасвирланади:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi, \quad (3.5)$$

Бу ерда Δ - сферик координат системасида Лаплас оператори.

Суюқлик заррачаси v тезлиги ва p босим φ тезлик потенциал билан куйидагича

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad (3.6)$$

боғланишларга эга.

Бошланғич шартлар:

$$u_2|_{\tau=0} = w_2|_{\tau=0} = \Phi_2|_{\tau=0} = \frac{\partial u_2}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = \frac{\partial w_2}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0, \quad (3.7)$$

$$\varphi|_{\tau=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = u_1|_{\tau=0} = w_1|_{\tau=0} = \frac{\partial u_1}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = \frac{\partial w_1}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0$$

кўринишда бўлади.

§ 3.2. Масаланинг ечиш алгоритми.

(3.1) - (3.7) бошланғич - чегаравий масалага τ вақт бўйича Лаплас интеграл алмаштиришларини қўллаймиз (L Лаплас алмаштиришларининг трансформантаси, s - интеграл алмаштириш параметри).

У ҳолда Лаплас алмаштиришларининг тасвирлар фазосида куйидаги-ларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} \gamma^2 s^2 u_2^L &= L_{11}(u_2^L) + L_{12}(w_2^L) + L_{13}(\Phi_2^L) \\ \gamma^2 s^2 w_2^L &= L_{12}(u_2^L) + L_{22}(w_2^L) + L_{23}(\Phi_2^L) + \alpha_0 p_{02} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\gamma^2 s^2 \Phi_2^L = L_{21}(u_2^L) + L_{32}(w_2^L) + L_{33}(\Phi_2^L)$$

$$\frac{\partial \varphi^L}{\partial r_2}\bigg|_{r_2=R_2} = s w_2^L \quad (3.9)$$

$$\left(1 + \frac{h^2}{12R^2}\right) \left[\frac{\partial^2 u_1^L}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u_1^L}{\partial \theta} - (v + \operatorname{ctg}^2 \theta) u_1^L \right] +$$

$$+ \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 w_1^L}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 w_1^L}{\partial \theta^2} + (v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial w_1^L}{\partial \theta} \right] - (1 + v) \frac{\partial w_1^L}{\partial \theta} = \beta_1 s^2 u_1^L \quad (3.10)$$

$$\frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 u_1^L}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 u_1^L}{\partial \theta^2} + (1 + v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \frac{\partial u_1^L}{\partial \theta} + (2 - v + \operatorname{ctg}^2 \theta) u_1^L \right] +$$

$$+ (1 + v) \left(\operatorname{ctg} \theta u_1^L + \frac{\partial u_1^L}{\partial \theta} \right) + \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^4 w_1^L}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 w_1^L}{\partial \theta^3} + (1 + v + \operatorname{ctg}^2 \theta) \operatorname{ctg} \theta \right] \frac{\partial w_1^L}{\partial \theta} +$$

$$+ 2(1 + v) w_1^L = -\beta_1 s^2 w_1^L + \beta_2 (p_0^L + p_s^L),$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^L}{\partial r_1} \right|_{r_1=R_1} = s w_1^L, \quad (3.11)$$

$$s^2 \varphi^L = \Delta \varphi^L \quad (3.12)$$

Масаланинг ўқ симметриклигини ва соҳада ечимнинг чегараланганлигини эътиборга олиб, тасвирлар фазосида (3.12) тенгламанинг ечимини

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r_1}} \tilde{A}_n^L(s) K_{n+1/2}(r_1 s) P_n(\cos \theta_1) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r_2}} \tilde{B}_p^L(s) I_{p+1/2}(r_2 s) P_p(\cos \theta_2) \quad (3.13)$$

йиғиндилар кўринишда излаймиз. Бу ерда $I_{p+1/2}(x)$, $K_{n+1/2}(x)$ - Бессель биринчи ва иккинчи тур модифицирланган функцияси; $P_n(x)$ - Лежандр ортогонал кўпхадлари; $\tilde{A}_n^L(s)$, $\tilde{B}_p^L(s)$ - чегаравий шартлардан аниқланувчи s параметрнинг номаълум функциялари; r_1 ва θ_1 - лар бошланғич нўқтаси ички сферик қобик марказида бўлган сферик системанинг координаталари; r_2 ва θ_2 - лар эса бошланғич нуктаси ташқи сферик қобик марказида бўлган сферик системанинг координаталари;

$I_{n+1/2}(x)$ функциялар учун [1, 12, 18] қўшиш теоремаларидан фойдаланиб, $(r_1, \theta_1, \vartheta_1)$ сферик координаталар системасида φ^L потенциалнинг тасвири куйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\varphi^L(r_1, \theta_1, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1n}^L(r_1, s) P_n(\cos \theta_1); \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1n}^L(r_1, s) = \frac{1}{r_1^{n+1} s^n} & \left[R_{n0}(r_1 s) A_n^L(s) e^{-r_1 s} + G_{n0}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) e^{ls} - \right. \\ & \left. - G_{n0}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) B_p^L(s) e^{-ls} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$C_{np}^{(1)}(s) = \frac{2n+1}{2ls} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{(-1)^{\sigma}}{(ls)^{\sigma}} R_{\sigma 0}(-ls),$$

$$C_{np}^{(2)}(s) = \frac{2n+1}{2ls} \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_{\sigma}^{(n0p0)} \frac{(-1)^{\sigma}}{(ls)^{\sigma}} R_{\sigma 0}(ls),$$

$$A_n^L(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \tilde{A}_n^L(s), \quad B_n^L(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \tilde{B}_n^L(s).$$

Бундан (3.6) боғланишларга кўра суюқлик заррачаси тезлиги ва контакт босим каторларининг коэффициентлари учун $(r_1, \theta_1, \vartheta_1)$ сферик координаталар системасида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{1n}^L(r_1, s)}{\partial r} = -\frac{1}{r_1^{n+2} s^n} & \left[R_{n1}(r_1 s) A_n^L(s) e^{-r_1 s} + G_{n1}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) e^{ls} - \right. \\ & \left. - G_{n1}(r_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) B_p^L(s) e^{-ls} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} p_{01n}^L(s) = -\frac{1}{R_1^{n+1} s^{n-1}} & \left[R_{n0}(R_1 s) A_n^L(s) e^{-R_1 s} + G_{n0}(R_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) B_p^L(s) e^{ls} - \right. \\ & \left. - G_{n0}(R_1 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) B_p^L(s) e^{-ls} \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

ифодадарни оламиз.

Ички қобикнинг w_1^L , u_1^L кинематик параметрларини, $p_1^L(s, \theta_1)$ берилган босим ва контакт $p_{01}^L(s, \theta_1)$ босимни $P_n(\cos \theta_1)$ Лежандр ва $C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_1)$ Гегенбауэр ортогонал кўпхадлари бўйича каторларга ёйамиз:

$$w_1^L = \sum_{n=0}^{\infty} w_{1n}^L(s) P_n(\cos \theta_1), \quad u_1^L = -\sin \theta_1 \sum_{n=1}^{\infty} u_{1n}^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta_1), \quad (3.18)$$

$$p_1^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n}^L(s) P_n(\cos\theta_1), \quad p_{01}^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_{01n}^L(s) P_n(\cos\theta_1), \quad (3.19)$$

Бу ҳолда каторларнинг коэффициентларига нисбатан қобик сиртдаги чегаравий шартнинг куйидаги кўринишига эга бўламиз:

$$\left. \frac{\partial \varphi_{1n}^L}{\partial r_1} \right|_{r_1=R_1} = s w_{1n}^L(s), \quad (3.20)$$

(3.18) ва (3.19) каторларни (3.10) тенгламалар системасига қўйиб ва u_{1n}^L , w_{1n}^L коэффициентга нисбатан тенгламалар системасини оламиз ҳамда уни коэффициентларга нисбатан ечиб, куйидаги тенгликларни оламиз:

$$\begin{aligned} u_{1n}^L(s) &= \frac{\Delta_{un}^{(2)}(s)}{\Delta_n(s)} (p_{01n}^L(s) + p_{1n}^L(s)), \\ w_{1n}^L(s) &= \frac{\Delta_{wn}^{(2)}(s)}{\Delta_n(s)} (p_{01n}^L(s) + p_{1n}^L(s)), \end{aligned} \quad (3.21)$$

бунда

$$\begin{aligned} \Delta_n(s) &= s^4 + a_{n1}s^2 + a_{n2} \\ \Delta_{un}^{(2)}(s) &= b_{n3}\Delta_{wn}^{(2)}(s), \\ \Delta_{wn}^{(2)}(s) &= b_1s^2 + b_{n2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$a_{n1} = \frac{E}{\gamma(1-v^2)c^2} \left\{ 2(1+v) + (n^2 + n - 1 + v) \left[1 + \frac{h^2}{12R^2}(n^2 + n + 1) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned} a_{n2} &= \left[\frac{E}{\gamma(1-v^2)c^2} \right]^2 \left\{ (n^2 + n - 2)(1-v^2) + \frac{h^2}{12R^2}(n^2 + n - 1 + \right. \\ &\quad \left. + v) \left[(n^2 + n)(n^2 + n - 1 + v) - 2(1+v)(n^2 + n - 1) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$b_1 = \frac{R\rho}{h\gamma},$$

$$b_{n2} = \frac{R\rho}{h\gamma} \frac{E}{\gamma(1-v^2)c^2} \left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) (n^2 + n - 1 + v)$$

$$a_{n3} = \frac{E}{\gamma(1-v^2)c^2} \left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) (n^2 + n - 1 + v)$$

$$b_{n3} = -\frac{E}{\gamma(1-v^2)c^2} \left[1 + v + \frac{h^2}{12R^2} (n^2 + n - 1 + v) \right].$$

$p_{01n}^L(s)$ нинг (3.17) ифодасини (3.21) га қўйиб, $w_{1n}^L(s)$ коэффициентлар учун

$$w_{1n}^L(s) = -\frac{1}{R_1^{n+1}s^{n-1}} \frac{\Delta_{wn}^{(2)}(s)}{\Delta_n(s)} \left[R_{n0}(R_1s)A_n^L(s)e^{-R_1s} + G_{n0}(R_1s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s)B_p^L(s)e^{ls} - \right. \\ \left. - G_{n0}(R_1s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s)B_p^L(s)e^{-ls} \right] + \frac{\Delta_{wn}^{(2)}(s)p_{1n}^L(s)}{\Delta_n(s)} \quad (3.23)$$

ифодани оламиз.

Юқоридаги (3.14) қатордек, $K_{n+1/2}(x)$ функциялар учун [1,12,18] қўшиш теоремаларидан фойдаланиб, $(r_2, \theta_2, \vartheta_2)$ сферик координаталар системасида φ^L потенциалнинг тасвирни куйидаги

$$\varphi^L(r_2, \theta_2, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n}^L(r_2, s) P_n(\cos \theta_2) \\ \varphi_{2n}^L(r_2, s) = \frac{1}{r_2^{n+1}s^n} \left[(-1)^n G_{n0}(r_2s) B_n^L(s) + \right. \\ \left. + R_{n0}(r_2s) \sum_{p=0}^{\infty} (C_{np}^{(1)}(s)e^{ls} - C_{np}^{(2)}(s)e^{-ls}) A_p^L(s)e^{-r_2s} \right] \quad (3.24)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Юқоридагига ўхшаш, (3.6) боғланишларга кўра суюқлик заррачаси тезлиги ва контакт босим қаторларининг коэффициентлари $(r_2, \theta_2, \vartheta_2)$ сферик координаталар системасида

$$\frac{\partial \varphi_{2n}^L(r_2, s)}{\partial r} = -\frac{1}{r_2^{n+2}s^n} \left[(-1)^n G_{n1}(r_2s) B_n^L(s) + \right. \\ \left. + R_{n1}(r_2s) \sum_{p=0}^{\infty} (C_{np}^{(1)}(s)e^{ls} - C_{np}^{(2)}(s)e^{-ls}) A_p^L(s)e^{-r_2s} \right] \quad (3.25)$$

$$p_{02n}^L(s) = -\frac{1}{R_2^{n+1}s^{n-1}} \left[(-1)^n G_{n0}(R_2s) B_n^L(s) + \right. \\ \left. + R_{n0}(R_2s) \sum_{p=0}^{\infty} (C_{np}^{(1)}(s)e^{ls} - C_{np}^{(2)}(s)e^{-ls}) A_p^L(s)e^{-R_2s} \right] \quad (3.26)$$

кўринишларга эга бўлади.

Ташқи қобикнинг w_2^L , u_2^L , Φ_2^L кинематик параметрларини ва контакт $p_{02}^L(s, \theta_2)$ босимни $P_n(\cos\theta_2)$ Лежандр ва $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_2)$ Гегенбауэр ортогонал кўпхадлари бўйича қаторларга ёйамиз:

$$w_2^L = \sum_{n=0}^{\infty} w_{2n}^L(s) P_n(\cos\theta_2), \quad u_2^L = -\sin\theta_2 \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_2), \quad (3.27)$$

$$p_{02}^L = \sum_{n=0}^{\infty} p_{02n}^L(s) P_n(\cos\theta_2), \quad \Phi_2^L = -\sin\theta_2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2n}^L(s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_2) \quad (3.28)$$

Бу ҳолда қаторларнинг коэффицентларига нисбатан ташқи қобик сиртдаги чегаравий (3.9) контакт шартнинг қуйидаги кўринишига эга бўламиз:

$$\left. \frac{\partial \varphi_{2n}^L}{\partial r_2} \right|_{r_2=R_2} = s w_{2n}^L(s), \quad (3.29)$$

(3.27) ва (3.28) қаторларни (3.8) тенгламалар системасига қўйиб ва u_{2n}^L , w_{2n}^L ва Φ_{2n}^L коэффицентга нисбатан тенгламалар системасини оламиз:

$$\begin{aligned} (\gamma_2^2 s^2 - l_{11n}) u_{02n}^L - l_{12n} w_{02n}^L - l_{13n} \Phi_{02n}^L &= 0, \\ -l_{21n} u_{02n}^L + (\gamma_2^2 s^2 - l_{22n}) w_{02n}^L - l_{23n} \Phi_{02n}^L &= \alpha_0 p_{02n}^L \\ -l_{31n} u_{02n}^L - l_{32n} w_{02n}^L + (\gamma_2^2 s^2 - l_{33n}) \Phi_{02n}^L &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

(3.30) тенгламалар системасини $u_{02n}^L(s)$, $w_{02n}^L(s)$, $\Phi_{02n}^L(s)$ коэффи-циентларга нисбатан ечиб, улар учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\begin{aligned} u_{02n}^L(s) &= \frac{\alpha_0 \Delta_{2un}^{(2)}(s)}{\Delta_{2n}(s)} p_{02n}^L(s), \\ w_{02n}^L(s) &= \frac{\alpha_0 \Delta_{2wn}^{(2)}(s)}{\Delta_{2n}(s)} p_{02n}^L(s), \\ \Phi_{02n}^L(s) &= \frac{\alpha_0 \Delta_{2\Phi n}^{(2)}(s)}{\Delta_{2n}(s)} p_{02n}^L(s). \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \text{Бу ерда } \Delta_{2n}(s) &= \gamma_1^6 s^6 - \gamma_1^4 (l_{11n} + l_{22n} + l_{33n}) s^4 + \gamma_1^2 (l_{11n} l_{22n} + l_{11n} l_{33n} + l_{22n} l_{33n} - \\ &- l_{13n} l_{31n} - l_{32n} l_{23n} - l_{12n} l_{21n}) s^2 - l_{11n} l_{22n} l_{33n} - l_{12n} l_{23n} l_{31n} - l_{13n} l_{21n} l_{32n} + \\ &+ l_{22n} l_{13n} l_{31n} + l_{11n} l_{32n} l_{23n} + l_{33n} l_{12n} l_{21n}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{2un}^{(2)}(s) = \gamma_1^2 l_{12n} s^2 + l_{13n} l_{32n} - l_{12n} l_{33n}, \quad (3.32)$$

$$\Delta_{2wn}^{(2)}(s) = \gamma_1^4 s^4 - \gamma_1^2 (l_{11n} + l_{33n}) s^2 + l_{11n} l_{33n} - l_{13n} l_{31n},$$

$$\Delta_{2\Phi n}^{(2)}(s) = \gamma_1^2 l_{32n} s^2 + l_{12n} l_{31n} - l_{11n} l_{32n}.$$

$p_{02n}^L(s)$ нинг (3.26) ифодасини (3.31) га қўйиб, $w_{2n}^L(s)$ учун

$$w_{02n}^L(s) = -\frac{1}{R_2^{n+1} s^{n-1}} \frac{\alpha_0 \Delta_{2wn}^{(2)}(s)}{\Delta_{2n}(s)} \left[(-1)^n G_{n0}(R_2 s) B_n^L(s) + \right. \\ \left. + R_{n0}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} (C_{np}^{(1)}(s) e^{ls} - C_{np}^{(2)}(s) e^{-ls}) A_p^L(s) e^{-R_2 s} \right] \quad (3.33)$$

ифодани оламиз.

(3.16) ва (3.23) ифодаларни (3.20) чегаравий шартга, (3.25) ва (3.33) ифодаларни эса (3.29) чегаравий шартга қўйиб ва баъзи элементар алмаштир-ишлардан сўнг, иккита чексиз чизиқли алгебраик тенгламалар системасини оламиз ҳамда уларни қуйидагича матрицали тенгламалар

$$\mathbf{M}^{(1)} \mathbf{A} v^2 z + \mathbf{T}_1^{(1)} \mathbf{B} - \mathbf{T}_1^{(2)} \mathbf{B} v^2 - \mathbf{T}_1^{(3)} \mathbf{B} z^2 + \mathbf{T}_1^{(4)} \mathbf{B} v^2 z^2 = \mathbf{k}^{(1)} v z, \\ \mathbf{L}_1^{(1)} \mathbf{B} z - \mathbf{L}_1^{(2)} \mathbf{B} x^2 z + \mathbf{F}_1^{(1)} \mathbf{A} x^2 - \mathbf{F}_1^{(2)} \mathbf{A} x^2 z^2 = 0. \quad (3.34)$$

$$v = e^{-R_1 s}, \quad x = e^{-R_2 s}, \quad z = e^{-ls}$$

кўринишида тасвирлаб, ёзиб қўямиз.

Бу ерда $\mathbf{T}_1^{(i)}$ ва $\mathbf{F}_1^{(k)}$ лар мос равишда элементлари $T_{np1}^{(i)}(s)$, $F_{np1}^{(k)}(s)$ бўлган чексиз матрицалар; $\mathbf{M}^{(1)}$ ва $\mathbf{L}_1^{(k)}$ лар эса мос равишда элементлари $M_n^{(1)}(s)$ ва $L_{n1}^{(k)}(s)$ бўлган чексиз диагональ матрицалар ($i = \overline{1,4}$, $k = \overline{1,2}$); $\mathbf{k}^{(l)}$ - элементлари $k_n^{(l)}(s)$ бўлган чексиз вектор; $\mathbf{A}$ ва $\mathbf{B}$ лар компоненталари $A_n^L(s)$, $B_n^L(s)$ бўлган чексиз номаълум векторлар ҳамда улар қуйидаги кўринишга эга:

$$M_n^{(1)}(s) = \Delta_n(s) R_{n1}(R_1 s) - R_1 s^2 \Delta_{wn}^{(2)}(s) R_{n0}(R_1 s) \\ T_{np1}^{(1)}(s) = M_n^{(1)}(-s) C_{np}^{(1)}(s), \quad T_{np1}^{(2)}(s) = M_n^{(1)}(-s) C_{np}^{(2)}(s), \\ T_{np1}^{(3)}(s) = M_n^{(1)}(s) C_{np}^{(1)}(s), \quad T_{np1}^{(4)}(s) = M_n^{(1)}(s) C_{np}^{(2)}(s), \\ k_n^{(1)}(s) = -s^n R_1^{n+2} \Delta_{wn}^{(2)}(s) p_{sn}^L(s)$$

$$L_{n1}^{(1)}(s) = (-1)^n \left[\Delta_{2n}(s) R_{n1}(-R_2 s) - R_2 s^2 \alpha_0 R_{n0}(-R_2 s) \Delta_{2wn}^{(2)}(s) \right],$$

$$L_{n1}^{(2)}(s) = (-1)^n \left[\Delta_{2n}(s) R_{n1}(R_2 s) - R_2 s^2 \alpha_0 R_{n0}(R_2 s) \Delta_{2wn}^{(2)}(s) \right],$$

$$F_{np1}^{(1)}(s) = \left[\Delta_{2n}(s) R_{n1}(R_2 s) - R_2 s^2 \alpha_0 R_{n0}(R_2 s) \Delta_{2wn}^{(2)}(s) \right] C_{np}^{(1)}(s),$$

$$F_{np1}^{(2)}(s) = \left[\Delta_{2n}(s) R_{n1}(R_2 s) - R_2 s^2 \alpha_0 R_{n0}(R_2 s) \Delta_{2wn}^{(2)}(s) \right] C_{np}^{(2)}(s).$$

(3.34) матрицали тенгламалар системасининг ечимини экспоненталар бўйича чексиз қатор кўринишида излаймиз:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \sum_{ikm=0}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{ikm}^{(1)}(s) \\ \mathbf{b}_{ikm}^{(1)}(s) \end{pmatrix} z^m + \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{ikm}^{(2)}(s) \\ \mathbf{b}_{ikm}^{(2)}(s) \end{pmatrix} z^{-m-1} \right\} x^i v^{-n-1}. \quad (3.35)$$

бу ерда $\mathbf{a}_{ikm}^q(s)$ ва $\mathbf{b}_{ikm}^q(s)$ - лар элементлари мос равишда $a_{ikm}^{(q,p)}(s)$, $b_{ikm}^{(q,p)}(s)$ ($q = 1, 2$) бўлган чексиз вектор устунлар.

(3.35) ечимни (3.34) тенгламага қўйиб, тенгликнинг ўнг ва чап томон-ларидаги (ўнг томонда фақат битта нолдан фарқли ҳад бор) x , v , z ўзгарув-чиларнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, $a_{ikm}^{(q,p)}(s)$, $b_{ikm}^{(q,p)}(s)$ функцияларга нисбатан куйидаги тенгламаларнинг рекуррент системасини ва уларга мос бошланғич шартларни оламиз.

$$a_{000}^{(1,n)}(s) = \frac{k_n^{(1)}(s)}{M_{n1}^{(1)}(s)}, \quad a_{ikm}^{(1,n)}(s) = 0, \quad i = 0, 1, \quad k \geq 0, \quad m \geq 1;$$

$$a_{ikm}^{(2,n)}(s) = 0, \quad b_{ikm}^{(1,n)}(s) = 0, \quad b_{ikm}^{(2,n)}(s) = 0, \quad i = 0, 1, \quad k \geq 0, \quad m \geq 0;$$

$$\begin{aligned} b_{ik0}^{(1,n)}(s) = & \frac{L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} b_{i-2,k0}^{(1,n)}(s) - \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) a_{i-2,k0}^{(1,p)}(s) + \\ & + \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) a_{i-2,k0}^{(2,p)}(s), \quad i \geq 2, \quad k \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ik0}^{(2,n)}(s) = & \frac{L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} b_{i-2,k0}^{(2,n)}(s) - \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) a_{i-2,k0}^{(1,p)}(s) + \\ & + \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) a_{i-2,k0}^{(2,p)}(s), \quad i \geq 2, \quad k \geq 0; \end{aligned}$$

$$b_{ikm}^{(1,n)}(s) = \frac{L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} b_{i-2,km}^{(2,n)}(s) + \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) a_{i-2,k,m-1}^{(1,p)}(s),$$

$$i \geq 2, k \geq 0, m \geq 1;$$

$$\begin{aligned} b_{ikm}^{(2,n)}(s) &= \frac{L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} b_{i-2,km}^{(2,n)}(s) - \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) a_{i-2,k,m-1}^{(1,p)}(s) + \\ &+ \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) a_{i-2,k,m+1}^{(2,p)}(s), \quad i \geq 2, k \geq 0, m \geq 1; \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} a_{ikm}^{(1,n)}(s) &= -\frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k-2,m+1}^{(1,p)}(s) + \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,m+1}^{(1,p)}(s) + \\ &+ \frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k-2,m-1}^{(1,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,m-1}^{(1,p)}(s), \end{aligned}$$

$$i \geq 2, k \geq 2, m \geq 1;$$

$$\begin{aligned} a_{ik0}^{(1,n)}(s) &= -\frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k-2,1}^{(1,p)}(s) + \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,1}^{(1,p)}(s) + \\ &+ \frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k-2,0}^{(2,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,0}^{(2,p)}(s), \quad i \geq 2, k \geq 2; \end{aligned}$$

$$a_{ikm}^{(1,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,m+1}^{(1,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,m-1}^{(1,p)}(s),$$

$$i \geq 2, k = 0, 1, m \geq 1;$$

$$\begin{aligned} a_{ikm}^{(2,n)}(s) &= -\frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k-2,m-1}^{(2,p)}(s) + \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,m-1}^{(2,p)}(s) + \\ &+ \frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k-2,m+1}^{(2,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,m+1}^{(2,p)}(s), \end{aligned}$$

$$i \geq 2, k \geq 2, m \geq 1;$$

$$a_{ik0}^{(1,n)}(s) = -\frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k-2,1}^{(1,p)}(s) + \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,1}^{(1,p)}(s) +$$

$$+ \frac{M_1^{(1)}(-s)}{M_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k-2,1}^{(2,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,1}^{(2,p)}(s), \quad i \geq 2, k \geq 2;$$

$$a_{ikm}^{(2,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,m-1}^{(2,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,m+1}^{(2,p)}(s),$$

$$i \geq 2, k = 0, 1, m \geq 1;$$

$$a_{ik0}^{(2,n)}(s) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) b_{i,k,0}^{(1,p)}(s) - \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) b_{i,k,1}^{(2,p)}(s). \quad i \geq 2, k = 0, 1.$$

Лаплас алмаштиришлари тасвирлар фазосида контакт босим ва қобик-нинг ўртаси сирти нуқтасида кўчиш радиал компонентаси Лежандр кўпхад-лари бўйича каторларининг коэффицентлари учун формулалар

$$\begin{aligned} p_{02n}^L(s) = & -\frac{1}{R_2^{n+1} s^{n-1}} \sum_{i,k,m=0}^{\infty} \{(-1)^n G_{n0}(R_2 s) [b_{ikm}^{(1,n)}(s) z^m + \\ & + b_{ikm}^{(2,n)}(s) z^{-m-1}] + R_{n0}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{m-1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{-m-2}] \chi - \\ & - R_{n0}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{m+1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{-m}] \chi \} x^i v^{-k-1}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} w_{02n}^L(s) = & -\frac{1}{R_2^{n+2} s^n} \sum_{i,k,m=0}^{\infty} \{(-1)^n G_{n1}(R_2 s) [b_{ikm}^{(1,n)}(s) z^m + \\ & + b_{ikm}^{(2,n)}(s) z^{-m-1}] + R_{n1}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{m-1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{-m-2}] \chi - \\ & - R_{n1}(R_2 s) \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) [a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{m+1} + a_{ikm}^{(1,p)}(s) z^{-m}] \chi \} x^i v^{-k-1}. \end{aligned}$$

кўринишга эга.

§ 3.3. Оригиналга ўтиш

Оригиналга ўтиш, дастлаб, шуни таъкидлаш керакки, (3.37) даги ташқи чексиз қаторлар экспоненталар бўйича бўлиб, оригиналлар фазосида улар чекли вақт оралиғида чекли йиғиндига айланади.

Бундан ташқари, (3.18), (3.19), (3.27), (3.28) қаторда чекли сондаги ҳадларни олинганда, (3.35) ва (3.37) формулалардаги экспоненталар олдидаги $a_{ikm}^{(q,p)}(s)$, $b_{ikm}^{(q,p)}(s)$ ($q=1,2$) коэффицентлар ҳам s Лаплас интеграл алмаштиришлари параметрининг рационал функциялардир. Бу эса жуда содда ҳолда чегирмалар назарияси ёрдамида уларнинг оригиналлари топиш имконини беради.

Буни, мисол сифатида, масаланинг соддароқ $b_{200}^{(1,n)}(s)$ коэффицент-ларида кўрсатамиз.

Бу коэффицентлар (3.36) рекуррент муносабатлардан аниқланади:

$$b_{200}^{(1,n)}(s) = \frac{L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} b_{000}^{(1,n)}(s) - \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) a_{000}^{(1,p)}(s) + \\ + \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(2)}(s) a_{000}^{(2,p)}(s), \quad n \geq 0,$$

бу ерда

$$b_{000}^{(1,n)}(s) = 0, \quad n \geq 0, \\ a_{000}^{(1,p)}(s) = \frac{k_p^{(1)}(s)}{M_p^{(1)}(s)}, \quad p \geq 0, \quad a_{000}^{(2,p)}(s) = 0, \quad p \geq 0.$$

У ҳолда $b_{200}^{(1,n)}(s)$ коэффицентлар

$$b_{200}^{(1,n)}(s) = - \frac{(-1)^n L_1^{(2)}(s)}{L_1^{(1)}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} C_{np}^{(1)}(s) a_{000}^{(1,p)}(s)$$

кўринишга келади.

$a_{000}^{(1,p)}(s)$ коэффицентлар ва $C_{np}^{(1)}(s)$ функциялар чекли n ва p лар ($1 \leq n, p \leq N$) учун (3.36) лардан келиб чиқадики, рационал функциялар-дир.

Демак, чекли n, p лар учун $b_{200}^{(1,n)}(s)$ коэффицентлар

$$f_{2n}(s) = s^n M_n^2(s) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N M_k(s)$$

махраж эга бўлган рационал функциялардир. Бу ерда l_n - натурал сонлар.

Шундай қилиб, (3.36) рекуррент муносабатлар ва (3.37) формулалар кўрсатадики, экспоненталар олдидаги барча коэффициентлар куйидаги кўринишга эга:

$$F(s) = \frac{f_1(s)}{f_2(s)}, \quad (3.38)$$

бу ерда

$$f_2(s) = s^{l_*} \prod_{k=1}^N M_n^{l_k}(\eta s)$$

- кўпхад, l_* ва l_k - сонлар мос равишда махраж илдизларининг карралиги, $f_1(s)$ кўпхад тартиби $f_2(s)$ кўпхад тартибидан кичик.

Маълумки, $F(s)$ функция чекли сондаги полюслардан ташкари нукта-ларда регулярдир, у ҳолда Жордан леммаси ва Коши теоремасига асосланиб, $F(s)$ функциянинг оригинали $f(t)$ ни

$$f(s) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=s_k} \frac{f_1(s)}{f_2(s)} e^{st}, \quad f_2(s_k) = 0 \quad (3.39)$$

формула ёрдамида ҳисоблаш мумкин [6, 22].

(3.37) дан фойдаланишда $f_2(s)$ кўпхаднинг илдизлари маълум бўлиши керак. Уларни ҳар қандай мавжуд усуллар билан топиш мумкин.

(3.37) дан келиб чиқадики, $F(s)$ функция ихтиёрий тартибли полюс-ларга эга бўлиши мумкин. Агар s_k - $F(s)$ функциянинг оддий полюси бўлса, у ҳолда бу нуктада чегирма

$$\operatorname{res}_{s=s_k} F(s) = \frac{f_1(s_k)}{f_2'(s_k)} e^{s_k t}$$

формула ёрдамида топилади.

Айтайлик, энди s_k - $F(s)$ функциянинг m -инчи тартибли полюси. У ҳолда операцион ҳисобнинг теоремалари ва Лейбницнинг формуласидан [6, 22] фойдаланиб,

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=s_k} F(s) e^{st} &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_k)^m F(s) \right]_{s=s_k} = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k e^{s_k t}}{k!} G^{(m-1-k)}(s)_{|s=s_k}, \quad G^{(j)}(s) = \frac{1}{j!} \left[(s-s_k)^m F(s) \right]^{(j)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ни топамиз.

Оригиналга ўтиш алгоритмини тугаллаш учун $G(s)$ функциянинг ҳосилаларини ҳисоблашни

$$G^{(j)}(s) = \frac{1}{j!} \left[\frac{g_1(s)}{g_2(s)} \right]^{(j)}, \quad \frac{g_1(s)}{g_2(s)} = (s - s_k)^m \frac{f_1(s)}{f_2(s)}, \quad (3.41)$$

кетма-кетлик ёрдамида амалга ошириш керак. Бу ерда $g_1(s)$ ва $g_2(s)$ – кўп-ҳадлар.

$G(s)$ функциянинг $s = s_k$ нуқтадаги ҳосилалари кетма-кетлигини Лейб-ниц формуласидан келиб чиқадиган куйидаги рекуррент формулалар бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$G_j = \frac{G^{(j)}(s_k)}{j!} = \frac{g_{1j}}{g_{2j}} - \frac{1}{g_{2j}} \sum_{k=0}^{j-1} G_k g_{2,j-k}, \quad g_{ij} = g_i^{(j)} / j!, (i=1,2). \quad (3.42)$$

Бу оригиналга ўтиш алгоритми бўйича баъзи сонли экспериментларнинг натижаларини оламиз.

§3.4. Сонли натижалар.

Юқоридаги ишлаб чиқилган масаланинг алгоритми асосида ўтказилган сонли экспериментларнинг натижаларининг графикларини қарайлик. Икки қобик системасига оид сонли экспериментлар ўтказиши учун ички қобик радиуси $R_1 = 1$, ташқи қобик радиуси $R_2 = 2$, уларнинг марказлари орасидаги масофа эса $l = 0.5$ га тенг. Туташ муҳит идеал суюқлик (сув: $c_0 = 1500$ м/сек, $\rho_0 = 1000$ кг/м³), қобик материалари сифатида пўлат олинган: $E_1 = 2.01 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 2.01 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\rho_1 = \rho_2 = 7800$ кг/м³. Бу эластиклик параметрларига куйидаги ўлчовсиз миқдорлар мос келади:

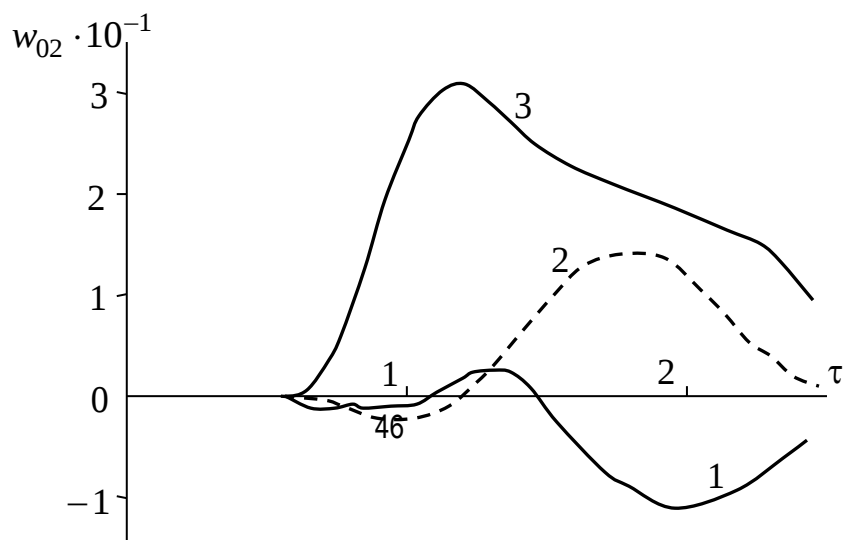
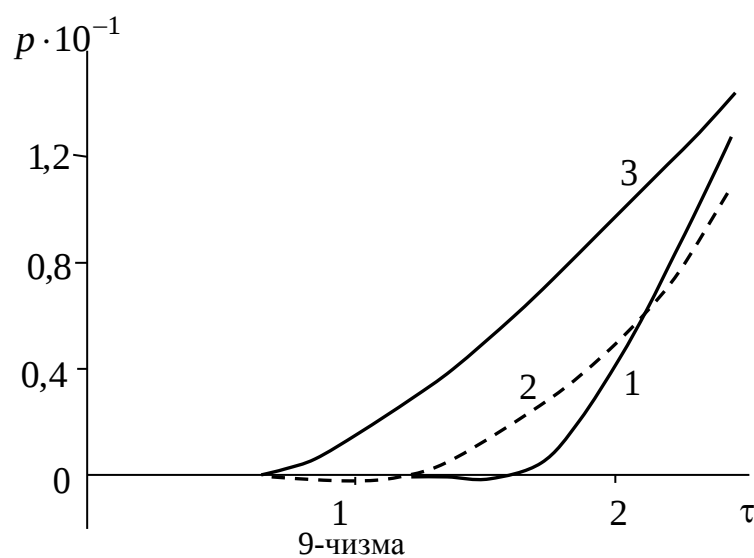
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 91.0, & \alpha_1 &= 0.601, & \alpha_2 &= 1.601, \\ \alpha_3 &= 2.6, & \alpha_4 &= 361.2, & \alpha_5 &= 361.5, \\ \alpha_6 &= 30.1, & \alpha_7 &= 0.301, \\ \beta_1 &= \beta_2 = 89.3495, & \gamma_2 &= 0.282. \end{aligned}$$

Ички қобикнинг ички сиртига текис тақсимланган нормал босим таъсир қилади:

$$p_1(\tau, \theta_1) = H(\tau), \quad q_1(\tau, \theta_1) = 0,$$

Бу ерда $H(\tau)$ - Хевисайднинг бирлик функцияси.

9 ва 10 чизмаларда икки қобик системаси учун ташқи қобикнинг $r_2 = 2$ сиртидаги куйидаги нуқта $\theta_2 = 0$ (1-эгри чизик), $\theta_2 = \pi/2$ (2-эгри чизик) и $\theta_2 = \pi$ (3 эгри чизик) ларда гидродинамик $p = p_{02}$ босим ва радиал w_{02} кўчиш компонентасининг вақтга боғлиқ ўзгариш графиклари тасвирланган.



10-чизма

ХУЛОСА

Диссертация ишини бажаришда олинган натижалар куйидагилардан иборат:

1. Диссертация ишининг асосий масаласи ҳисобланган идеал суюқликларнинг ўзаро эксцентрик юпқа сферик қобиклар билан чегараланган соҳасида Крихгоф-Ляв типигаги юпқа сферик қобикдан ностационар тўлқин тарқалиши ва ташқи С.П. Тимошенко гипотезаларига асосланиб чиқарилган сферик қобикдан тўлқин қайтиши жараёнига мос бошланғич-чегаравий масала тасвирланди.

2. Деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг сферик сиртлар билан чегараланган икки боғламли соҳаси учун бошланғич чегаравий масаланинг назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлган аналитик ечими олинди.

3. Келтирилган масала учун аналитик метод ишлаб чиқилган. Натижада масала Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида чизикли алгебраик тенгламаларнинг чексиз системасига келтирилди. Бу чексиз система ечими экспоненталар бўйича қаторлар кўринишида изланиб, рекуррент муносабатлар олинган. Бу рекуррент формулалар чексиз системани ечишда редукция методидан фойдаланмаслик ва қаторларининг коэффицентларни Лаплас интеграл алмаштиришларининг параметрининг рационал функциялари кўринишида аниқлаш имконини беради. Бу эса оригиналга ўтишни чегирмалар назарияси ёрдамида амалга ошириш имконин берди.

Ишлаб чиқилган аналитик метод асосида сонли натижалар учун алгоритм тузилди ва сонли экспериментлар ўтказилди. Бу натижалар графиклар кўринишида келтирилган.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Бабаев А.Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – Киев: Наук. думка, 1990. – 176 с.

2. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

3. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. – М.: ИЛ, 1949. Т.1. – 800 с.

4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидро-упругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

5. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 592 с.
6. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. – 264 с.
7. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Распространение волн от сферической полости в акустическом полупространстве // ПММ. - 1991. Т. 55. №1. –С. 172-174.
8. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Нестационарные колебания тонкостенной сферической оболочки в акустическом полупространстве// Труды 16 междунар. конф. по теор. Обол. и пластин. 21-23 сент. 1993, Т.1- Н. Новгород., 1993. С. 77-82.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физ.-матгиз, 1962. – 1108 с.
10. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Удар и погружение. – Л.: Судостроение, 1976. – 200 с.
11. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. – Л.: Судостроение, 1974. – 208 с.
12. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наукова думка, 1972. – 254 с.
13. Гузь А.И., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Гидроупругость систем оболочек. - Киев: Вища школа, 1984. – 208 с.
14. Гузь А.И., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек, т. 5. –Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наукова думка, 1983. – 400 с.
15. 54. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
16. Жабборов О., Салиев А., Шукуров О. Ўзаро эксцентрик жойлашган юпка сферик қобикларнинг ностационар тебраниши// “Математика ва уни ўқитишнинг долзарб муаммолари” Республика конференция материаллари, 18-19 апрель, Тошкент молия институти, 2012 й. 115-118 бетлар.
17. Жабборов О., Шукуров О. Эксцентрик юпка сферик қобикларнинг ностационар тебраниши масаласининг ечиш алгоритм// ҚаршиДУ Ахборотномаси, 2012 й., №2, (чоп этишга берилган).
18. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

19. Кочин Н.С., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2 ч. - М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 1. 583 с.; Ч. 2. 727 с.
20. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. - Киев: Наукова думка. 1979. – 184 с.
21. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1985. – 423 с.
22. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
23. Салиев А.А., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Распространение нестационарных волн от сферической полости в акустическом слое с жесткими стенками// Материалы международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики», 1 кн., 28-29 июн, СамГАСИ, 2007 г. С. 191-196.
24. Салиев А.А., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Нестационарные колебания акустического слоя со сферической полостью// Матер. XIV Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». Т.1.-М.: «ИД – МЕДПРАКТИКА-М», 2008. С. 178.
25. Салиев А.А., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Распастрание нестационарных волн от сферической полости в акустическом слое// Прикладная математика и механика РАН, Т.72, вып. 4, 2008 – С. 580-587.
26. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х т. – Изд. 4-ое, испр. и доп. – М.: Наука, 1984.
27. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами // Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
28. Шукуров О. Туташ мухитларда ностационар тўлкин жараёнлари. – Қарши: Насаф, 2011. – 128 б.