

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

Tog'ayev Oybek Boboqulovichning
“5460100 – matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

**KETMA-KET YAQINLASHISH USULINING BA'ZI BIR
TATBIQLARI**

mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.n. M. Abulov

Qarshi - 2012

M u n d a r i j a.

Kirish.....	8
I bob. Ketma-ket yaqinlashish usulini integral va differensial tenglamalar yechishda tatbiqlari.....	8
1.1. Qisqartirib akslantirish prinsipi.....	10
1.2. Integral tenglamalar uchun ketma-ket yaqinlashish usuli.....	12
1.3. Gursa masalasi.....	18
II bob. Ketma-ket yaqinlashish usulini algebraik tenglama va tenglamalar sistemalarini yechishda tatbiqlari.....	24
2.1. Iterasiya usuli.....	24
2.2. Ikkita tenglamalar sistemasi uchun iterasiya usuli.....	36
2.3. Chiziqli tenglamalar sistemasi uchun iterasiya usuli.....	40
Xulosa.....	44
Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati.....	46

Bu murakkab dunyoning azaliy va abadiy muammolari, shu bilan birga, har bir davrning dolzarb masalalariga har tomonlama asosli ilmiy javoblar topilgan taqdirdagina ma`naviyat olami yangi ma`no-mazmun bilan boyib boradi. Boshqacha aytganda, har bir ilmiy yangilik, yaratilgan kashfiyot – bu yangi davr va dunyoqarashga turtki beradi, ma`naviyatning shakllanishiga o`ziga xos ta`sir o`tgazadi.

I. Karimov

Kirish

Bitiruv malakaviy ishning dolzarbligi: Ma'lumki, matematika fanida shunday usullar borki, bu usullar matematika fanining deyarli barcha bo'limlarida uchraydi. Bunday usullardan biri ketma-ket yaqinlashish usulidir. Bu usul barcha turdagi tenglamalarni yechishda qo'llaniladi. Tenglamalarni o'rganish asosan uchta masalani o'rganishga keladi; tenglama yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg'unligi masalalaridir. Tenglama yechimini mavjudligi o'rganishda eng ko'p qo'llaniladigan, qisqartirib akslantirish prinsipiga asoslangan ketma-ket yaqinlashish usulini integral, differensial va algebraik tenglama hamda tenglamalar sistemasini yechishda tatbiq qilish katta ahamiyatga ega. Matematika fanida deyarli barcha turdagi tenglamalarni yechishda berilgan tenglama yechimini mavjudligi masalasi muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli ham tenglama yechimini mavjudligini isbotlash usullarini bilish va uni tenglamalar yechishda qo'llay bilish fan nuqtai nazaridan juda muhim.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi: Ushbu bitiruv malakaviy ishda ketma-ket yaqinlashish usulini integral, differensial, algebraik tenglama va tenglamalar sistemalarini yechishda tatbiqlarini o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning vazifasi:

1. Ketma-ket yaqinlashish usuli orqali integral tenglamalarning yechimlarini mavjudligini o'rganish.
2. Ketma-ket yaqinlashish usuli orqali differensial tenglamalarning yechimlarini mavjudligini o'rganish.
3. Ketma-ket yaqinlashish usuli orqali algebraik tenglama va tenglamalar yechimlarini topishni o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va ilmiy ahamiyati: Bitiruv malakaviy ishi mavzusiga tegishli bo'lgan barcha muhim adabiyotlarni to'plash va ular asosida ketma-ket yaqinlashish usulini qo'llanishlarini o'rganib, u tatbiq etiladigan sohalarni va masalalarni yanada chuqurroq va kengroq o'rganishdan iborat. Natijada kelajakda yangi masalalarni yechishda tatbiq etish mumkin bo'ladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ish referatif xarakterga ega bo'lib, ikkita bob va 6 ta paragrafdan iborat.

Birinchi bob birinchi paragrafda qisqartirib akslantirish prinsipi va uni misollar yechishda qo'llanilishi keltirilgan. Ikkinchi paragrafda esa Fredgol'm va Volterraning integral tenglamalarini yechishda ketma-ket yaqinlashish usuli tatbiqi ko'rsatilgan. Uchinchi paragrafda ketma-ket yaqinlashish usulini differensial tenglama yechimini mavjudligini o'rganishga, ya'ni uni Gursa masalasini yechishga qo'llanilishi o'rganilgan.

Ikkinchi bob ketma-ket yaqinlashish usulini algebraik tenglama va tenglamalar sistemasini yechishda qo'llanilishini o'rganishga bag'ishlangan. Ushbu bob birinchi paragrafda algebraik tenglamani yechishni iterasiya usuli keltirilgan. Usulni yaqinlashishini zaruriy va etarli shartlari asoslab berilgan. Ikkinchi paragrafda esa berilgan ikkita tenglamalar sistemasi uchun iterasiya usuli keltirilib, iterasiya jarayonini yaqinlashish sharti hosil qilingan. Uchinchi paragrafda chiziqli tenglamalar sistemasini yechishni iterasiya usuli keltirilib, unga misol yechilgan.

I bob. Ketma-ket yaqinlashish usulini integral va differensiya tenglamalar yechishda tatbiqlari.

1.1 Qisqartirib akslantirish prinsipi

Akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi.

(X, ρ) metrik fazoda o'z-o'ziga aks ettiruvchi T akslantirish berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar X fazoda shunday a nuqta topilib, $T(a) = a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda a nuqta T akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

Misollar. 1. Sonlar o'qini o'ziga akslantiruvchi $T: x \rightarrow x^2$ akslantirishning qo'zg'almas nuqtalari $x = x^2$ tenglama yechimlaridan, ya'ni 0 va 1 dan iborat.

2. $\begin{cases} u = 2x + 3y - 2 \\ v = x + y + 1 \end{cases}$ formulalar tekislikni o'z-o'ziga akslantiradi. Bu akslantirishning

qo'zg'almas nuqtalari $\begin{cases} x = 2x + 3y - 2 \\ y = x + y + 1 \end{cases}$ sistemaning yechimidan, ya'ni $(-1, 1)$ nuqtadan iborat.

3. Agar $y(x)$ funksiya $[0, 1]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda $y^2(x) - y(x) - x^2$ funksiya ham $[0, 1]$ kesmada uzluksiz funksiya bo'ladi. Shuning uchun $T = y^2 - y - x^2$ formula bilan aniqlangan akslantirish $C[0, 1]$ fazoni o'z-o'ziga akslantiradi. Bu akslantirishning qo'zg'almas nuqtalari $y^2(x) - y(x) - x^2 = y(x)$ funksional tenglama yechimlaridan, ya'ni $y = 1 + \sqrt{1 + x^2}$ va $y = 1 - \sqrt{1 + x^2}$ funksiyalardan iborat bo'ladi.

Qisqartirib akslantirish.

(X, ρ) metrik fazoda o'z-o'ziga aks ettiruvchi T akslantirish berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar X fazodan olingan ixtiyoriy x va y nuqtalar uchun

$$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan α ($0 < \alpha < 1$) son mavjud bo'lsa, u holda T ni qisqartirib akslantirish deyiladi.

Misol. $X = [0; \frac{1}{3}]$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $T(x) = x^2$ bo'lsin. Agar x_1 va x_2 kesmaning ixtiyoriy nuqtalari bo'lsa, u holda

$$\rho(Tx_1, Tx_2) = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq \frac{2}{3} |x_1 - x_2| = \frac{2}{3} \rho(x_1, x_2)$$

bo'ladi. Demak, T akslantirish qisqartirib akslantirish ekan

1-teorema. Agar T qisqartirib akslantirish bo'lsa, u holda T uzluksiz bo'ladi.

Isboti. a nuqta X fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin va $\varepsilon > 0$ bo'lsin. U holda $\rho(x, a) < \varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar uchun (1) tengsizlikka ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\rho(Tx, Ta) \leq \alpha \rho(x, a) < \alpha \varepsilon < \varepsilon$$

Bu esa ixtiyoriy a nuqtada T akslantirishning uzluksiz ekanligini isbotlaydi. Teorema isbot bo'ldi.

Qisqartirib akslantirish prinsipi.

2-teorema. (X, ρ) to'la metric fazoda aniqlangan har qanday T qisqartirib akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqtaga ega, ya'ni $Tx = x$ tenglamaning yagona yechimi mavjud.

Isboti. a_0 nuqta X fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. T akslantirish X fazoni o'z-o'ziga akslantirgani uchun a_0 nuqtaning obrazi ham X fazoga tegishli bo'ladi. Bu nuqtani a_1 bilan

belgilaymiz, ya'ni $a_1=T(a_0)$. Endi a_1 nuqtaning obrazini topib, uni a_2 bilan belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib X fazoning elementlaridan tuzilgan quyidagi ketma-ketlikka ega bo'lamiz:

$$a_1=T(a_0), a_2=T(a_1)=T^2(a_0), \dots, a_{n+1}=T(a_n)=T^n(a_0), \dots \quad (2)$$

Bu ketma-ketlikning fundamental ekanligini ko'rsatamiz.

(1) va metrikaning uchburchak tengsizlikdan, ixtiyoriy n va m natural sonlar ($m>n$) uchun

$$\begin{aligned} \rho(a_n, a_m) &= \rho(T^n(a_0), T^m(a_0)) = \rho(T^n(a_0), T^n(a_{m-n})) \leq \alpha^n \cdot \rho(a_0, a_{m-n}) \leq \alpha^n \cdot (\rho(a_0, a_1) + \\ &\rho(a_1, a_2) + \dots + \rho(a_{m-n-1}, a_{m-n})) \leq \alpha^n \cdot (\rho(a_0, a_1) + \alpha \rho(a_0, a_1) + \dots + \alpha^{m-n-1} \rho(a_0, a_1)) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(a_0, a_1) \end{aligned}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Endi $\alpha < 1$ bo'lgani uchun, n etarlicha katta bo'lganda bu tengsizlikning o'ng tomonini istalgancha kichik qilish mumkin. demak, $\{a_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo'ladi. Bundan $\{a_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ va X fazoning

to'laligidan $a \in X$ kelib chiqadi. T uzluksiz akslantirish bo'lganligidan $T(a) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a. \text{ Demak, } a \text{ qo'zg'almas nuqta ekan.}$$

Endi qo'zg'almas nuqtaning yagona ekanligini isbotlaylik. Faraz qilaylik qo'zg'almas nuqta ikkita $T(a) = a$ va $T(b) = b$ bo'lsin. U holda $\rho(a, b) = \rho(T(a), T(b)) \leq \alpha \cdot \rho(a, b)$ bo'ladi. bundan $\rho(a, b) = 0$ va demak, $a = b$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

1.2. Integral tenglamalar uchun ketma-ket yaqinlashish usuli.

Fredgol'm ikkinchi tur integral tenglamasini parametr kichik bo'lganda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechish.

Mexanika, matematik fizika va texnikaning juda ko'p masalalari ushbu

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (1)$$

ko'rinishdagi integral tenglamalarni tekshirishga olib kelinadi, bu yerda $\varphi(x)$ - noma'lum funksiya, $K(x, y)$ va $f(x)$ funksiyalar mos ravishda $a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$ va $a \leq x \leq b$ (a, b - o'zgarmas sonlar) yopiq sohalarda berilgan uzluksiz haqiqiy funksiyalardir. $f(x)$ funksiya (1) integral tenglamaning ozod hadi, $K(x, y)$ uning yadrosi, sonli λ ko'paytma tenglamaning parametri deyiladi. (1) tenglama ikkinchi tur chiziqli integral

tenglama yoki bunday tenglamalarni birinchi bo`lib o`rgangan matematik nomi bilan Fredgol`m integral tenglamasi deyiladi.

Fredgol`m birinchi tur tenglamasi deb,

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2)$$

ko`rinishdagi integral tenglamaga aytiladi.

Agar (1) tenglamada $f(x) \equiv 0$ bo`lsa, ya`ni

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0 \quad (3)$$

(1) tenglamaga mos bo`lgan bir jinsli integral tenglama deyiladi.

Bir jinsli

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(y, x)\psi(y)dy = 0 \quad (4)$$

tenglama (3) bir jinsli tenglamaga qo`shma integral tenglama deyiladi.

Agar (1) tenglamada integtal chegarasidan bittasi masalan, yuqori chegara o`zgaruvchi bo`lsa, ya`ni tenglama

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), x > a \quad (5)$$

ko`rinishda bo`lsa, u Vol`teraning ikkinchi tur integral tenglamasi,

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (6)$$

tenglama esa Vol`teraning birinchi tur integral tenglamasi deyiladi.

Ushbu

$$\alpha(x)\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (7)$$

tenglama uchinchi tur integral tenglama deb ataladi.

Agar $a \leq x \leq b$ kesmada $\alpha(x) \equiv 0$ bo`lsa, (7) dan (2) tenglama,  $\alpha(x) \equiv 1$  bo`lsa, (1) tenglama kelib chiqadi. Lekin bu kesmaning ayrim nuqtalarida $\alpha(x)$ funksiya nolga teng bo`lib, qolgan nuqtalarida esa noldan farqli bo`lishi mumkin. Bu holda (7) tenglamani maxsus o`rganishga to`g`ri keladi. Ushbu bitiruv malaraviy ishda bunday tenglamalar o`rganilmaydi.

Amaliy masalalarda tez-tez shunday integral tenglamalarni yechishga tog`ri keladiki, bularda noma`lum funksiya ko`p argumentli bo`ladi.

E^n Evklid fazosidagi chegaralangan sohani D orqali, bu sohada tegishli nuqtalarni $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ orqali belgilaymiz. $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noma'lum $f(x)$ berilgan funksiya, λ – berilgan sonli parametr bo'lsin. Qisqalik uchun D soha bo'yicha integrallashni bitta integral bilan belgilaymiz. Bu holda Fredgol'mning ko'p o'lchovli ikkinchi tur integral tenglamasi

$$\varphi(x) - \lambda \int_D K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (8)$$

ko'rinishda yoziladi. (8) tenglamani o'rganishda (1) tenglamaga nisbatan katta qiyinchiliklar keltirib chiqarmaydi. Shu sababli, biz asosiy e'tiborimizni (1) tenglamani o'rganishga qaratamiz.

Oson ko'rish mumkinki, agar ikkinchi tur Fredgol'm integral tenglamasining umumiy yechimi $\Phi(x)$ mavjud bo'lsa, u

$$\Phi(x) = \varphi^0(x) + \varphi(x) \quad (9)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda $\varphi^0(x)$ (3) tenglamaning umumiy yechimi, $\varphi(x)$ esa (1) tenglamaning xususiy yechimidir.

Haqiqatan ham, agar $\Phi(x)$ va $\varphi(x)$ lar mos ravishda bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari bo'lsa, u holda ularning ayirmasi $\varphi^0(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$ (3) tenglamaning yechimidan iborat bo'ladi. Bundan darhol (9) tenglik kelib chiqadi.

Fredgol'm ikkinchi tur integral tenglamasini parametr kichik bo'lganda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechish.

(1) tenglamani o'rganaylik. $K(x, y)$ va $f(x)$ funksiyalar o'zlari aniqlangan sohada uzluksiz bo'lgani uchun

$$\int_a^b |K(x, y)| dy \leq M, a \leq x \leq b, \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = m, \quad (10)$$

bo'ladi.

Agar (1) tenglama λ parametrik

$$|\lambda| < \frac{1}{M} \quad (11)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda bu tenglamaning yagona $\varphi(x)$ yechimi mavjud bo'lib, uni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan topish mumkin.

Nolinchi yaqinlashish sifatida (1) tenglamaning ozod hadini qabul qilamiz

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

Birinchi yaqinlashishni

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

munosabat bilan aniqlaymiz. Bu jarayonni davom ettirib, n – yaqinlashishni

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy, n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

formula bilan aniqlaymiz.

Shunday qilib, (12) rekurrent munosabatni qanoatlantiruvchi

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (13)$$

funksiyalar ketma-ketligiga ega bo'lamiz.

Matematik analiz kursidan ma'lumki, (13) ketma-ketlikning yaqinlashishi

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] \quad (14)$$

qatorning yaqinlashishiga teng kuchlidir. (12) formulani

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) [\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y) + \varphi_{n-2}(y)] dy = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi_{n-2}(y) dy + \lambda \int_a^b K(x, y) [\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y)] dy = \\ &\varphi_{n-1}(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) [\varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-2}(y)] dy, n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(10) shartlarga asosan, (15) dan quyidagi tengsizliklar kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)| &\leq m, \\ |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &\leq m|\lambda|M, \\ |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &\leq m|\lambda|^2 M^2, \\ &\dots\dots\dots \\ |\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| &\leq m|\lambda|^n M^n. \end{aligned}$$

Shunday qilib, (14) qatorning har bir hadi musbat sonli

$$\sum_{n=0}^{\infty} m|\lambda|^n M^n \quad (16)$$

qatorning mos hadidan katta emas. (16) qator esa, (11) shartga asosan yaqinlashuvchi.

Demak, (14) qator, natijada uzluksiz funksiyalarning (13) ketma-ketligi uzluksiz funksiya

$\varphi(x)$ funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashadi. (12) tenglikda $n \rightarrow \infty$ limitga o'tib,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

tenglikni hosil qilamiz, bu esa $\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatadi.

Endi ushbu yechimni yagona yechim ekanligini, ya'ni $\varphi(x)$ dan boshqa yechimi yo'q ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun aksincha, ya'ni (1) tenglamaning $\varphi(x)$ dan boshqa yana bitta $\psi(x)$ yechimi ham bor bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda bu yechimlarning ayirmasi $\eta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ (3) bir jinsli tenglamaning yechimidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\eta(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \eta(y) dy$$

bo'ladi.

$$\eta_0 = \max_{a \leq x \leq b} |\eta(x)|$$

deb bilgilab olsak, oxirgi tenglikdan

$$\eta_0 \leq |\lambda| M \eta_0$$

Tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar $\eta_0 \neq 0$ bo'lsa, oxirgi tengsizlik (11) tengsizlikka qarama-qarshidir. Demak, $\eta_0 = 0$, bundan esa $\eta(x) = 0$, ya'ni

$\varphi(x) = \psi(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

Vol'terrani ikkinchi tur integral tenglamasi.

(5) tenglamani ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechamiz.

Oldingi mavzudagi mulohazalarni takrorlab,

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (17)$$

funksiyalar ketma-ketligini hosil qilamiz, bunda

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad \varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy, \dots,$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy, n = 2, 3, 4, \dots$$

Quyidagicha belgilash kiritaylik

$$m = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, N = \max_{a \leq x \leq b} |K(x, y)|$$

u holda

$$|\varphi_0(x)| \leq m,$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &= \left| \lambda \int_a^x K(x, y) \varphi_0(y) dy \right| \leq |\lambda| m N(x-a), \dots, \\
|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| &\leq m \frac{|\lambda| N^n (x-a)^n}{n!}, n=1, 2, 3, \dots
\end{aligned}
\tag{18}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Musbat hadli

$$m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n N^n (x-a)^n}{n!} = m e^{|\lambda| N(x-a)}$$

funksional qator λ parametrning ixtiyoriy chekli qiymatida tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun (18) tengsizliklarga asosan (17) funksiyalar ketma-ketligi absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti bo'lgan

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

funksiya (5) tenglamaning yechimidan iborat bo'ladi.

Endi (5) tenglama yechimining yagona ekanligini ko'rsataylik.

Faraz qilaylik, (5) tenglama ikkita $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ uzluksiz yechimlarga ega bo'lsin. Bularning ayirmasi $\omega(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ bir jinsli

$$\omega(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) \omega(y) dy \tag{19}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

$m^* = \max |\omega(x)|$ deb belgilab olsak, (19) tenglikdan darhol

$$|\omega(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x, y)| |\omega(y)| dy \leq |\lambda|^2 N^2 m^* \frac{(x-a)^2}{2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz Bu tengsizlikdan $n \rightarrow \infty$ da $\omega(x) = 0$ yoki $\varphi(x) = \psi(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, Vol'terraning ikkinchi tur (5) integral tenglamasi, uning yadrosi $K(x, y)$ va ozod hadi $f(x)$ uzluksiz funksiyalar bo'lganda λ parametrning har bir chekli qiymati uchun yagona yechimga ega bo'ladi.

Bundan esa, Vol'terraning ikkinchi tur integral tenglamasi har bir λ uchun ham yechimga ega bo'lavermaydigan Fredgol'mning integral tenglamasidan tubdan farq qilishi kelib chiqadi.

1.3. Gursa masalasi.

Boshlang'ich shartlar xarakteristikalarda berilgan quyidagi oddiy masalalarni qaraymiz

$$\left. \begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Qo'shimcha shartlar $x=0$ va $y=0$ xarakteristik to'g'ri chiziqlarda berilgan. Faraz qilaylik, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(y)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ qo'shmalik shartini bajarsin. (1) dagi tenglamani ketma-ket x va y bo'yicha integrallab

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y) d\xi, \\ u(x, y) &= u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \end{aligned}$$

yoki

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi \quad (2)$$

Shunday qilib, (1) dagi oddiy tenglamaning yechimi (2) analitik ko'rinishda ifodalanadi. (2) formuladan qo'yilgan masalaning yechimini mavjud va yagonaligi darhol kelib chiqadi.

Endi quyidagi chiziqli giperbolik tipdagi tenglamani yechimini o'rganaylik

$$u_{xy} = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u + f(x, y) \quad (3)$$

Bu tenglama uchun qo'shimcha shartlar $x=0$ va $y=0$ xarakteristik to'g'ri chiziqlarda berilgan bo'lsin:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned} \quad (3')$$

Bu yerda, $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(y)$ funksiyalar differensiallanuvchi va $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ qo'shmalik shartini bajarsin. $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ koeffisientlar x va y ning uzluksiz funksiyalari bo'lsin.

(3) formuladan $u(x, y)$ funksiya quyidagi integro-differensial tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta + \varphi_1(x) + \varphi_2(y) \\ &- \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4)$$

$$|z_0| < N, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial x} \right| < N, \quad \left| \frac{\partial z_0}{\partial y} \right| < N.$$

$z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}$ funksiyalar uchun mojarant baholashlarni olaylik. Ravshanki,

$$|z_1| < 3NMxy < 3NM \frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| < 3NMy < 3NM(x+y),$$

$$\left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| < 3NMx < 3NM(x+y).$$

Faraz qilaylik, quyidagi rekurent baholashlar o`rinli bo`lsin:

$$|z_n| < 3NM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < 3NM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < 3NM^n K^{n-1} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Bu yerda $K < 0$ –biror o`zgarmas son, uni qiymatini quyida aniqlashtiramiz. Bu baholashlardan va  $(n+1)$ –yaqinlashish formulasidan foydalanib hamda bir qator soddalashtirishlardan so`ng tengsizliklarni kuchaytirib quyidagi baholashlarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &< 3NM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} \left(\frac{x+y}{n+3} + 2 \right) < \\ &< 3NM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3N}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial x} \right| &< 3NM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3NM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3N}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial y} \right| &< 3NM^{n+1} K^{n-1} \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{x+y}{n+2} + 2 \right) < \\ &< 3NM^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3N}{K} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Bunda, $K = L + 2$.

Bu tengsizliklarning o'ng tomonlarida ko'paytuvchi aniqligida e^{2KLM} ning yoyilmasining hadlari turibdi. Bu tengsizliklar quyidagi funksiyalar ketma-ketligini tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \dots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Demak, ushbu funksiyalar ketma-ketligini quyidagicha belgilasak, u holda

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y), \\ v(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y), \\ w(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

tengliklarni hosil qilamiz. (5) va (6) formulalarda integral ostiga limitga o'tib quyidagilarni hosil qilamiz:

(5) va (6) formulalarda integral ostiga limitga o'tib quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)v + b(\xi, \eta)w + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)v + b(x, \eta)w + c(x, \eta)u] d\eta, \\ u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)v + b(\xi, y)w + c(\xi, y)u] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Bu yerdan

$$\begin{aligned} v &= u_x, \\ w &= u_y \end{aligned}$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan esa $u(x, y)$ quyidagi integro-differensial tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4)$$

Ushbu $u(x, y)$ funksiya (3) differensial tenglamani ham qanoatlantirishini (4) ni x va y bo'yicha differensiallab ko'rsatish mumkin. Bu funksiya ko'rish qiyin emaski qo'shimcha shartlarni ham qanoatlantiradi.

Endi (3)-(3') masalani yechimi yagona ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, masala ikkita $u_1(x, y)$ va $u_2(x, y)$ yechimlarga ega bo'lsin, u holda ularni ayirmasi

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

funksiya quyidagi bir jinsli integro-differensial tenglamani qanoatlantiradi:

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) d\xi d\eta.$$

Quyidagilarni absolyut qiymatlarini yuqori chegaralarini H_1 orqali belgilaylik, u holda barcha $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$ uchun

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

bo'ladi. $z_n(x, y)$ uchun olingan baholarni takrorlab, n ning ixtiyoriy qiymatlari uchun quyidagi tengsizlikka kelamiz

$$|U| < 3H_1 M^{n+2} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

Bundan

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{yoki} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$$

kelib chiqadi, bu esa xarakteristikalarda berilgan shartlarda masalaning yechimi yagona ekanligini isbotlaydi.

Agar a, b, c koefitsientlarning qiymatlari o'zgarmas bo'lsa, u holda (3) tenglama

$$u(x, y) = v e^{\lambda x + \mu y}$$

almashtirish yordamida quyidagi ko'rinishga keladi

$$v_{xy} + C_2 v = f \quad (8)$$

Agar $C_2 = 0$ bo'lsa, yechimi (2) formula bilan beriladigan (1) oddiy tenglamaga qo'yilgan masala hosil qilamiz.

II bob. Ketma-ket yaqinlashish usulini algebraik tenglama va tenglamalar sistemasini yechishda tatbiqlari.

2.1. Iterasiya usuli.

Tenglamalarni sonli yechishning eng ahamiyatli usullaridan biri bu iterasiya usulidir. Bu usul ko'p hollarda ketma-ket yaqinlashish usuli ham deb ataladi. Quyida bu usulni qaraymiz.

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda $f(x)$ – uzluksiz funksiya. Bu tenglamani haqiqiy ildizlarini topish talab etiladi. Bu tenglamani unga teng kuchli bo'lgan

$$x = \varphi(x) \quad (2)$$

tenglama bilan almashtiramiz. Birorta yo'l bilan bu tenglamani taqribiy x_0 ildizini tanlaymiz va uni (2) tenglamani o'ng tomoniga qo'yamiz. U holda

$$x_1 = \varphi(x_0) \quad (3)$$

sonni hosil qilamiz. So'ngra (3) ga x_0 o'rniga x_1 sonni qo'yib yangi

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

sonni hosil qilamiz. Bu jarayonni takrorlab, quyidagi sonli ketma-ketlikni hosil qilamiz:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Agar bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, yani

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda (4) tenglikka limitga o'tib, $\varphi(x)$ funksiyaning uzluksiz deb faraz qilib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1})$$

yoki

$$\xi = \varphi(\xi). \quad (5)$$

Shunday qilib, (2) tenglamani ildizi ξ qiymatini istalgan aniqlikda (4) formula orqali topish mumkin.

1-teorema. $\varphi(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va barcha $\varphi(x) \in [a, b]$ bo'lsin hamda agar shunday to'g'ri q kasr mavjud bo'lib, $a < x < b$ lar uchun

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (6)$$

bo'lsa, u holda

1) ixtiyoriy $x_0 \in [a, b]$ boshlang'ich qiymat uchun

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

iterasiya jarayoni yaqinlashadi;

$$2) \quad \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n)$$

limit qiymat

$$x = \varphi(x) \quad (8)$$

tenglamaning yagona ildizi bo'ladi.

Isboti. Ikkita

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad \text{va} \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

ketma-ket yaqinlashishlarni qaraymiz. Bu yerdan

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$$

tenglikni hosil qilamiz. Lagranj teoremasini qo'llab, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$x_{n+1} - x_n = (x_n - x_{n-1})\varphi'(\bar{x}_n).$$

Bu yerda $\bar{x}_n \in (x_n, x_{n-1})$. Demak, (6) shartga ko'ra

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q|x_n - x_{n-1}|.$$

Bu yerdan $n = 1, 2, 3, \dots$, deb ketma-ket qiymatlar berib quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq q|x_1 - x_0|; \\ |x_3 - x_2| &\leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0|; \\ &\dots\dots\dots \\ |x_{n+1} - x_n| &\leq q^n|x_1 - x_0|. \end{aligned} \quad (10)$$

Endi

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \dots, \quad (11)$$

qatorni qaraymiz. Ko'rish qiyin emaski, bu qatorni $(n+1)$ -xususiy yig'indisi x_n ga teng, ya'ni

$$x_n = S_{n+1}.$$

(10) tengsizlikka ko`ra (11) qatorning hadlari maxraji  $q < 1$  bo`lgan geometrik progressiyaning mos hadlaridan kichik, shu sababli (11) qator absolyut yaqinlashadi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

limit mavjud va $\xi \in [a, b]$

(7) tenglikka limitga o`tib, $\varphi(x)$ funksiyaning uzluksizligidan

$$\xi = \varphi(\xi) \quad (12)$$

tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, ξ (8) tenglamani ildizi. Bu $[a, b]$ oraliqda (8) tenglamani boshqa ildizi mavjud emas. Haqiqatan ham, agar

$$\bar{\xi} = \varphi(\bar{\xi}) \quad (13)$$

bo`lsa, u holda (12) va (13) tenglikdan

$$\bar{\xi} - \xi = \varphi(\bar{\xi}) - \varphi(\xi) \quad (14)$$

tenglikni hosil qilamiz, demak,

$$(\bar{\xi} - \xi)[1 - \varphi'(c)] = 0$$

bo`ladi, bu yerda  $c \in [\xi, \bar{\xi}]$ . (14) dagi kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng emas, u holda  $\xi = \bar{\xi}$ , ya`ni ξ – yagona ildiz.

(10) formuladan

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq q^{n+p-1}|x_1 - x_0| + \\ &+ q^{n+p-2}|x_1 - x_0| + \dots + q^n|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0|(1 + q + q^2 + \dots + q^{p-1}) \end{aligned}$$

tengsizliklar hosil qilamiz. Oxirgi qavs ichidagi geometrik progressiya hadlarini yig`ib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$|x_{n+p} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0| \frac{1 - q^p}{1 - q} < \frac{q^p}{1 - q} |x_1 - x_0|.$$

p ni cheksizlikka intiltirib va

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n+p} = \xi$$

ko`ra, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^p}{1 - q} |x_1 - x_0|. \quad (15)$$

Bu yerdan ko`rinadiki, agarda  $q$  qancha kichik bo`lsa, u holda iterasiya jarayonini yaqinlashishi shuncha tez bo`ladi.

Yaqinlashishni baholashda ko`p hollarda qulay bo`lgan boshqa bir formulani ko`rsatish mumkin.

$$f(x) = x - \varphi(x)$$

bo'lsin. Ravshanki, u holda

$$f'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q$$

Bu yerdan, $f(\xi) = 0$ ekanligini hisobga olib quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(\xi)| = |x_n - \xi| |f'(\bar{x}_n)| \geq (1 - q) |x_n - \xi|.$$

Bu yerda $\bar{x}_n \in [x_n, \xi]$, demak,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|x_n - \varphi(x_n)|}{1 - q}, \quad (16)$$

ya'ni

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - q} \quad (16')$$

(9) formuladan foydalansak, u holda

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \quad (16'')$$

tengsizlikni hosil qilamiz, xususan bu yerdan, agar $q \leq \frac{1}{2}$ bo'lsa, u holda

$$|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

bo'ladi, xususan bu holda $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ tengsizlikdan

$$|\xi - x_n| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi.

2-teorema. $\varphi(x)$ funksiya biror $[a, b]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va $[a, b]$ oraliqda

$$x = \varphi(x) \quad (17)$$

tenglama kichik $[\alpha, \beta]$ oraliqda ξ yechimga ega bo'lsa, bu yerda

$$\alpha = a + \frac{1}{3}(b - a) \text{ va } \beta = b - \frac{1}{3}(b - a) \text{ hamda agar}$$

a) $a < x < b$ da $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ bo'lsa;

b) boshlang'ich yaqinlashish $x_0 \in [\alpha, \beta]$ bo'lsa, u holda

1) barcha ketma-ket yaqinlashishlar (a, b) intervalda yotadi:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \in (a, b) \quad n = 1, 2, \dots,$$

2) ketma-ket yaqinlashishlar jarayoni yaqinlashuvchi, ya'ni (17) tenglamani $[a, b]$ oraliqda yagona ξ –ildizi mavjud:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

3) (15) baholash o`rinli.

Isboti. 1) $x_0 \in [\alpha, \beta]$ bo`lsin, u holda

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

tenglikni ma`nosi bor.

$$\xi = \varphi(\xi)$$

tenglikdan foydalanib, Lagranj teoremasiga ko`ra

$$|x_1 - \xi| = |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)| = |x_0 - \xi| |\varphi'(\bar{x}_0)| \leq q(\beta - \alpha) < \frac{b-a}{3}$$

tengsizligini hosil qilamiz, bu yerdan $x_1 \in (a, b)$ kelib chiqadi.

Umuman, agar $x_{n-1} \in (a, b)$ $n=1, 2, \dots$ va $|x_{n-1} - \xi| < \frac{b-a}{3}$ bo`lsa, u holda

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

va

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(\xi)| = |x_{n-1} - \xi| |\varphi'(\bar{x}_{n-1})| \leq q|x_{n-1} - \xi| < \frac{b-a}{3}$$

bo`ladi.

Demak, $x_n \in (a, b)$, bu yerda $n=1, 2, \dots$

2) va 3) tasdiqlarni o`rinli ekanligi 1- teorema isbotiga o`xshash isbotlanadi.

1-tasdiq. (17) tenglamani ξ yechimining biror (a, b) atrofida $\varphi'(x)$ o`zgarmas ishora saqlasin

va

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

tengsizlik bajarilsin. Agar $\varphi'(x)$ hosilani ishorasi musbat bo`lsa, u holda

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n=1, 2, \dots, \quad x_0 \in (a, b) \quad (18)$$

ketma-ketlik ξ ildizga monoton yaqinlashadi.

Agar $\varphi'(x)$ hosilani ishorasi manfiy bo`lsa, u holda (18) ketma-ketlik ξ atrofida tebranadi.

Isboti. 1) $0 \leq \varphi'(x) \leq q < 1$ va masalan,

$$x_0 < \xi$$

bo'lsin. U holda

$$x_1 - \xi = \varphi(x_0) - \varphi(\xi) = (x_0 - \xi)\varphi'(\xi_1) < 0,$$

bu yerda $\xi_1 \in (x_0, \xi)$ va

$$|x_1 - \xi| \leq q|x_0 - \xi| < |x_0 - \xi|.$$

Demak,

$$x_0 < x_1 < \xi.$$

Matematik induksiya metodini qo'llab, quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < \xi.$$

$x_0 > \xi$ bo'lgan holda ham shunga o'xshash natija olamiz:

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > \xi.$$

Shunday qilib, $\varphi'(x)$ hosilani ishorasi musbat bo'lsa, u holda bizni qiziqtirayotgan ξ ildizning (a, b) atrofidan x_0 boshlang'ich yaqinlashishni olish etarli. Qolgan barcha $x_n (n=1, 2, \dots)$

yaqinlashishlar o'z-o'zidan bu atrofda o'tadi va n nomerni o'sishi bilan monoton ravishda ξ ildizga yaqinlashadi.

2) $-1 < -q \leq \varphi'(x) \leq 0$ va masalan,

$$x_0 < \xi$$

hamda $x_1 = \varphi(x_0) \in (a, b)$ bo'lsin. U holda

$$x_1 - \xi = \varphi(x_0) - \varphi(\xi) = (x_0 - \xi)\varphi'(\xi_1) > 0,$$

ya'ni $x_1 > \xi$ va $|x_1 - \xi| < |x_0 - \xi|$.

Bunday fikrlashlarni $x_1, x_2, x_3, \dots$, yaqinlashishlar uchun takrorlab quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$x_0 < x_2 < x_4 < \dots < \xi < \dots < x_5 < x_3 < x_1,$$

ya'ni ketma-ket yaqinlashishlarni ξ ildizdan biri kichik, ikkinchisi esa katta bo'lib yaqinlasha boradi.

Shunday qilib, $\varphi'(x)$ hosilani ishorasi manfiy bo'lsa, u holda x_1 va x_2 yaqinlashishlar ξ ildizning (a, b) atrofida o'tadi, qolgan barcha $x_n (n=2, 3, \dots)$ yaqinlashishlar ham shu

atrofda yotadi hamda $\{x_n\}$ ketma-ketlik ξ ildiz atrofida "tebranadi".

Ko'rish qiyin emaski,

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

ya'ni bu holda x_n yaqinlashishni ishorasi ξ aniq ildiz ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

Misol.

$$x - \sin x = 0,25$$

tenglamaning haqiqiy ildizlarini verguldan so'ng uch xona aniqligida toping.

Yechish. Berilgan tenglamani

$$x = \sin x + 0,25$$

ko'rinishda yozib olamiz. Gragik yordamida berilgan tenglamaning bitta ξ ildizi $[1,1; 1,3]$

oraliqda o'tganini ko'ramiz, $x_0 = 1,2$ deb olamiz. 2- teoremadagi belgilashlardan foydalanamiz:

$$\alpha = 1,1 \text{ va } \beta = 1,3.$$

Bu yerdan

$$a = \alpha - (\beta - \alpha) = 0,9 \approx \text{arc}52^\circ$$

va

$$b = \beta + (\beta - \alpha) = 1,5 \approx \text{arc}86^\circ.$$

Shunday qilib,

$$\varphi(x) = \sin x + 0,25$$

va

$$\varphi'(x) = \cos x,$$

u holda barcha $0,9 < x < 1,5$ x lar uchun

$$|\varphi'(x)| \leq \cos 52^\circ \approx 0,62 = q.$$

Agar $x_0 \in [1,1; 1,3]$ ni tanlab olsak, u holda 2-teorema shartlari to'la bajariladi va demak,

$$x_n = \sin x_{n-1} + 0,15 \quad n=1, 2, \dots$$

ketma-ketlik hadlari 1) $(0,9; 1,5]$ oraliqda yotadi va 2) $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow \xi$ bo'ladi.

$x_0 = 1,2$ deb olamiz va masala shartiga ko'ra absolyut xatolikni

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

deb olamiz. $x_n (n=1, 2, \dots)$ ketma-ket yaqinlashishni shunday topamizki, ularni ikkita

qo'shni x_n va x_{n-1} yaqinlashishlari qiyidagi aniqlikda ustma-ust tushguncha topamiz,

$$\frac{1-q}{q} \varepsilon = 0,51 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \approx 0,0025.$$

$$x_1 = \sin 1,2 + 0,25 = 0,932 + 0,25 = 1,182;$$

$$x_2 = \sin 1,182 + 0,25 = 0,925 + 0,25 = 1,175;$$

$$x_3 = \sin 1,175 + 0,25 = 0,923 + 0,25 = 1,173;$$

$$x_4 = \sin 1,173 + 0,25 = 0,922 + 0,25 = 1,172;$$

$$x_5 = \sin 1,172 + 0,25 = 0,922 + 0,25 = 1,172$$

yaqinlashishlarni hosil qilamiz. To`rtinchi va beshinchi yaqinlashishlar to`rt xona aniqligida ushma-ust tushadi. Shu sababli

$$|x_5 - \xi| \leq \frac{0,62 \cdot 0,001}{1 - 0,62} = 0,0016.$$

Shunday qilib, x_5 taqribiy ildizni absoyut xatolik limiti chegaralanish xatoligini qo`shganda

$$E = 0,0016 + 0,002 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

dan oshmaydi, u holda

$$\xi = 1,17 \pm 0,005$$

deb olish mumkin.

Ma`lumki,

$$f(x) = 0 \tag{18}$$

tenglamani quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$x = \varphi(x). \tag{18'}$$

Bu yerda $\varphi(x)$ ni har xil usullar bilan tanlash mumkin. Bir tanlangan usulda (18`) tenglamani  $\xi$  ildizi atrofida  $|\varphi'(x)|$  kichik bo`ladi, boshqasida esa katta bo`ladi. Iterasiya usulida (18`) ifodada

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \tag{19}$$

shartni qanoatlantiradigan qilib olish maqsadga muvofiq, q qancha kichik bo`lsa, umuman aytganda taqribiy ketma-ketlik shuncha  $\xi$  ildizga tez yaqinlashadi. Quyida (18) tenglamani (19) shart bajariladigan qilib, (18`) ga olib kelish usulini ko`rsatamiz. $\xi \in [a, b]$ oraliqda yotgan (18) tenglamani ildizi va $a \leq x \leq b$ da

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1 \tag{20}$$

bo'lsin. Xususan, m_1 sifatida $f'(x)$ ni $[a, b]$ oraliqdagi eng kichik qiymatini (agar u musbat bo'lsa) olish, M_1 sifatida esa $f'(x)$ ni $[a, b]$ oraliqdagi eng katta qiymatini olish mumkin. (18) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0)$$

tenglama bilan almashtiramiz. $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ deb olish mumkin. λ parametrni shunday tanlaymizki ξ ildizni $[a, b]$ atrofida quyidagi shart bajarilsin:

$$0 \leq \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1. \quad (21)$$

(20) ga ko'ra yuqoridagi tengsizlikdan

$$0 \leq 1 - \lambda M_1 \leq 1 - \lambda m_1 \leq q$$

ni hosil qilamiz. Demak, λ va q ni quyidagicha tanlash mumkin:

$$\lambda = \frac{1}{M_1}$$

va

$$q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1.$$

Shunday qilib, (21) tengsizlik bajariladi.

2-misol.

$$x^3 + x = 1000 \quad (22)$$

tenglamani eng katta musbat ξ ildizini 10^{-4} aniqlikda toping.

Yechish. Qo'pol o'rniga qo'yish orqali ildizni taqribiy qiymatini $x_0 = 10$ deb olamiz, ravshanki $\xi < x_0$.

(22) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = 1000 - x^3, \quad (22')$$

yoki

$$x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad (22'')$$

yoki

$$x = \sqrt[3]{1000 - x}, \quad (22''')$$

va hokazo. Keltirilgan ifodalardan eng qulayi (22''') ifoda. Shunday qilib, asosiy oraliq sifatida (9,10) ni va

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$$

deb olamiz. U holda

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}.$$

Bu yerdan

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q.$$

x_n taqribiy quymatlar ketma-ketligini quyidagi formula bo'yicha hisoblaymiz:

$$y_n = 1000 - x_n;$$

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{y_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Topilgan qiymatlar quyidagi jadvalga keltirilgan:

n	x_n	y_n
0	10	990
1	9,96655	990,03345
2	9,96666	990,03334
3	9,96667	

Shunday qilib, $1 - q \approx 1$, u holda 10^{-4} aniqlikda $\xi = 9,9667$ deb olish mumkin.

3-misol. Ushbu

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!(2n-1)} + \dots = 0,4431135$$

tenglamani haqiqiy ildizini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani $x = \varphi(x)$ ko'rinishda olamiz, bu yerda

$$\varphi(x) = 0,4431135 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} - \frac{x^9}{216} + \frac{x^{11}}{1320} - \dots$$

x ning uchinchi darajadan yuqori barcha darajalarini tashlab yuborib, $x_0 = 0,44$ deb olib quyidagi yaqinlashishlarni hosil qilamiz:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(0,44) \approx 0,47; \\
x_2 &= \varphi(0,47) \approx 0,476; \\
x_3 &= \varphi(0,476) \approx 0,4767; \\
x_4 &= \varphi(0,4767) \approx 0,47689; \\
x_5 &= \varphi(0,47689) \approx 0,476927; \\
x_6 &= \varphi(0,476927) \approx 0,476934; \\
x_7 &= \varphi(0,476934) \approx 0,476936.
\end{aligned}$$

Demak, $\xi = 0,47693$.

Endi iterasiya jarayonini yaqinlashishini tezlashtiradigan bitta usulni qaraymiz.

$$x = \varphi(x)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Ushbu tenglamani qidirilayotgan ξ ildizi atrofida

$$|\varphi'(x)| \geq k > 1$$

tengsizlik bajarilsin. U holda bu tenglama uchun iterasiya jarayoni uzoqlashadi. Agar berilgan tenglamani unga ekvivalent bo'lgan

$$x = \psi(x)$$

tenglama bilan almashtirsak, bu yerda $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ teskari funksiya, u holda shunday tenglama hosil bo'ladiki, uning uchun iterasiya jarayoni yaqinlashadi. Shunday qilib,

$$|\psi'(x)| = \left| \frac{1}{\varphi'(\psi(x))} \right| \leq \frac{1}{k} = q < 1.$$

4-misol. Ushbu

$$f(x) \equiv x^3 - x - 1 = 0 \quad (23)$$

tenglama $\xi \in (1,2)$ ildizga ega, chunki $f(1) = -1 < 0$ va $f(2) = 5 > 0$.

(23) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = x^3 - 1. \quad (24)$$

Bu yerda $\varphi(x) = x^3 - 1$ va $\varphi'(x) = 3x^2$;

shu sababli

$$1 \leq x \leq 2 \text{ da } \varphi'(x) \geq 3$$

va demak, iterasiya jarayonini yaqinlashish sharti bajarilmaydi. Agar (23) tenglamani

$$x = \sqrt[3]{x+1} \quad (25)$$

ko'rinishda yozsak, u holda

$$\psi(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad \text{va} \quad \psi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

Bu yerdan, agar $1 \leq x \leq 2$ bo'lsa, u holda

$$0 < \psi'(x) < \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < \frac{1}{4}$$

Demak, (25) tenglama uchun iteratsiya jarayoni tez yaqinlashadi.

2.2. Ikkita tenglamalar sistemasi uchun iteratsiya usuli.

Ikkita nomlumli ikkita tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemani haqiqiy ildizini berilgan aniqlikda topaylik. (1) sistemani ajratilgan ildizlarigina bo'lsin. Bu ildizlar soni va taqribiy yaqinlashishini

$$F_1(x, y) = 0; \quad F_2(x, y) = 0$$

chiziqlarni chizib kesishish nuqtalarini koordinatalarini aniqlash orqali bilish mumkin.

Faraz qilaylik $x = x_0; \quad y = y_0$ lar (1) sistemaning qandaydir yo'llar bilan aniqlangan taqribiy ildizi bo'lsin. (1) ni quyidagi ko'rinishda ifodalab olaylik:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y), \\ y = \varphi_2(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

Taqribiy ketma-ketlikni quyidagi formula orqali quramiz.

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_0, y_0); \quad y_1 = \varphi_2(x_0, y_0); \\ x_2 &= \varphi_1(x_1, y_1); \quad y_2 = \varphi_2(x_1, y_1); \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= \varphi_1(x_n, y_n); \quad y_{n+1} = \varphi_2(x_n, y_n); \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (3)$$

Agar (3) iteratsiya jarayoni yaqinlashsa, u holda

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{va} \quad \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

limitlar mavjud bo`ladi.  $\varphi_1(x, y)$  va  $\varphi_2(x, y)$  funksiyalarni uzluksiz deb olsak va (3) tenglikda limitga o`tsak, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_1(x_n, y_n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_2(x_n, y_n)$$

ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$\xi = \varphi_1(\xi, \eta); \quad \eta = \varphi_2(\xi, \eta),$$

ya`ni  $\xi$  va  $\eta$  (2) sistemani yechimi bo`ladi va demak (1) sistemaning ham yechimi bo`ladi. Shu sababli etarli katta sondagi (3) iterasiya qilib, biz aniq ildiz  $x = \xi$  va  $y = \eta$  lardan etarlicha kam farq qiladigan  $x_n$  va  $y_n$  sonlarni hosil qilamiz. Shunday qilib, oldimizga qo`yilgan masala yechildi, ammo agar (3) iterasiya uzoqlashuvchi bo`lsa undan foydalanish mumkin emas.

Teorema. (2) sistemaning biror yopiq $R\{a \leq x \leq A; b \leq y \leq B\}$ sohada faqat bir juft $x = \xi$

va $y = \eta$ ildizlarga ega bo`lsin. Agar

- 1) $\varphi_1(x, y)$ va $\varphi_2(x, y)$ funksiyalar R da aniqlangan va uzluksiz differensiallanuvchi;
- 2) x_0, y_0 boshlang`ich yaqinlashish va barcha keyingi  $x_n, y_n (n=1, 2, \dots)$  yaqinlashishlar  $R$  o`tadi;
- 3) R da quyidagi tengsizliklar bajarilsin:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \leq q_1 < 1,$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \leq q_1 < 1.$$

U holda (3) ketma-ket yaqinlashish jarayoni (2) sistemaning $x = \xi$ va $y = \eta$ ildiziga yaqinlashadi, ya`ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \text{ va } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Misol. Ushbu

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &\equiv 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ f_2(x, y) &\equiv x + 3 \lg x - y^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

sistemani musbat ildizini to`rtta raqam aniqligida toping.

Yechish. $f_1(x, y) = 0$ va $f_2(x, y) = 0$ funksiyalarni grafigini chizib bizni qiziqtirayotgan ildizlarni taqribiy qiymatlarini topamiz:

$$x_0 = 3,5; \quad y_0 = 2,2.$$

Iterasiya usulini kqo'llash uchun berilgan sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$x = \sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}} \equiv \varphi_1(x, y);$$

$$y = \sqrt{x + 3 \lg x} \equiv \varphi_2(x, y).$$

Xususiylar hosilalarni topamiz

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{y+5}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3M}{x}}{2\sqrt{x + 3 \lg x}},$$

bu yerda $M = 0,43429$,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{x}{4\sqrt{\frac{x(y+5)-1}{2}}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0.$$

$R\{|x - 3,5| \leq 0,1; |y - 2,2| \leq 0,1\}$ soha bilan chigaranamiz, u holda

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| \leq \frac{2,3+5}{4\sqrt{\frac{3,4(2,1+5)-1}{2}}} < 0,54; \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \leq \frac{3,6}{4\sqrt{\frac{3,4(2,1+5)-1}{2}}} < 0,27;$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \leq \frac{1 + \frac{3 \cdot 0,43}{3,4}}{2\sqrt{3,4 + 2 \lg 3,4}} < 0,42; \quad \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = 0.$$

Bu yerdan

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \leq 0,54 + 0,42 < 1, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \leq 0,27 + 0 < 1. \quad (5)$$

Ravshanki, agar (x_n, y_n) taqribiy ketma-ketlik R sohadan chizib ketsa, u holda iterasion jarayon uzoqlashuvchi bo'ladi. (4) yig'indining birga yaqinligi iterasiya jarayonini sekin yaqinlashishini bildiradi. Ketma-ket yaqinlashishlarni quyidagi formulalar orqali hisoblaymiz:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n(y_n+5)-1}{2}};$$

$$y_{n+1} = \sqrt{x_n + 3 \lg x_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(2)

Endi quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

$$x = \beta + \alpha x. \quad (2')$$

So`ngra ketma-ket matritsa- ustunlarni quyidagicha quramiz:

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$$

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$$

Umuman, $(k + 1)$ – yaqinlashish quyidagi formula bo`yicha hisoblanadi:

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Agar $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ taqribiy ketma-ketlik

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$$
$$x = \beta + \alpha x,$$

ya'ni x vektor (2') sistemani yechimi bo'ladi, va demak, unga ekvivalent bo'lgan (1) sistemani ham yechimi bo'ladi. Yuqoridagi taqribiy hisoblash formulalarini yoyib yozamiz:

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(0)} &= \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

(3) yoki (3') formula bilan aniqlangan ketma-ket yaqinlashish usuli iteratsiya usuli deyiladi. (3) iteratsiya jarayoni yaxshi yaqinlashadi, ya'ni (1) sistemani yechimini berilgan aniqlikda topish uchun zarur bo'lgan yaqinlashishlar soni katta bo'lmaydi, agarda α matritsaning elementlari absolyut qiymati jihatidan kichik bo'lsa. Boshqacha aytadigan bo'lsak, iteratsiya jarayoni tez yaqinlashishi uchun (1) sistemaning diagonal koefitsientlari moduli boshqa koefitsientlarining modullaridan etarli katta bo'lishi lozim (ozod hadlar hech qanday rol o'ynamaydi).

Misol. Ushbu sistemani iteratsiya usuli bilan yeching

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 &= 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 &= 9, \\ 0,04x_1 + 0,08x_2 + 4x_3 &= 20. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Yechish. Bu sistemani diagonal koefitsientlari 4; 3; 4 lar boshqa koefitsientlaridan etarli katta. Bu sistemani normal ko'rinishga olib kelimiz:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 &= 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 &= 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(5) sistemani matritsa ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(4) sistemani yechimini nolinch qiyinlashishi sifatida

$$x_1^{(0)} = 2; \quad x_2^{(0)} = 3; \quad x_3^{(0)} = 5$$

larni olamiz. Bu qiymatlarni (5) tenglamani o'ng tomoniga qo'yib, birinchi yaqinlashishni topamiz:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92;$$

$$x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19;$$

$$x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04.$$

Bu topilgan qiymatlarni (5) formulaga qo'yib yechimga ikkinchi yaqinlashishni topamiz:

$$x_1^{(2)} = 1,9094; \quad x_2^{(2)} = 3,1944; \quad x_3^{(2)} = 5,0446.$$

Bu yangi topilganlarni qo'yib yechimga uchinchi yaqinlashishni topamiz:

$$x_1^{(3)} = 1,90923; \quad x_2^{(3)} = 3,19495; \quad x_3^{(3)} = 5,04485$$

va hakoza. Bular uchun quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	2	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

X u l o s a.

Tabiatda, fan va texnikada uchraydigan ko'pgina masalalar tenglamalar va tenglamalar sistemalarining yechimini mavjudligi va yagonaligi masalalarini o'rganishga keladi. Shu sababli ham tenglamalar va tenglamalar sistemalarini yechishda ko'p qollaniladigan ketma-ket yaqinlashish usuli o'rganish katta ahamiyat kasb etadi. Matematika fanida deyarli barcha turdagi tenglamalarni yechishda berilgan tenglama yechimini mavjudligi masalasi asosiy masalalardan biridir. Shu sababli ham tenglama yechimini mavjudligini isbotlash usullarini bilish va uni tenglamalar yechishda qo'llay bilish fan nuqtai nazaridan juda muhim.

Birinchi bob birinchi paragrafda qisqartirib akslantirish prinsipi va uni misollar yechishda qo'llanilishi keltirilgan. Ikkinchi paragrafda esa Fredgol'm va Volterraning integral tenglamalarini yechishda ketma-ket yaqinlashish usuli tatbiqi ko'rsatilgan. Uchinchi paragrafda ketma-ket yaqinlashish usulini differensial tenglama yechimini mavjudligini o'rganishga, ya'ni uni Gursa masalasini yechishga qo'llanilishi o'rganilgan.

Ikkinchi bob ketma-ket yaqinlashish usulini algebraik tenglama va tenglamalar sistemasini yechishda qo'llanilishini o'rganishga bag'ishlangan. Ushbu bob birinchi paragrafda algebraik tenglamani yechishni iterasiya usuli keltirilgan. Usulni yaqinlashishini zaruriy va etarli shartlari asoslab berilgan. Ikkinchi paragrafda esa berilgan ikkita tenglamalar sistemasi uchun iterasiya usuli keltirilib, iterasiya jarayonini yaqinlashish sharti hosil qilingan. Uchinchi paragrafda chiziqli tenglamalar sistemasini yechishni iterasiya usuli keltirilib, unga misol yechilgan.

Shunday qilib, ushbu bitiruv malakaviy ishni tayorlash davomida quyidagi muhim xulosalarga kelindi.

1. Tenglamalar matematika fanining turli bo'limlarida uchraydi, shu sababli ularni yechishni bilish fanining muhim masalalaridan birini tashkil etadi.
2. Fredgol'm va Volterraning integral tenglamalarini ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechish mumkin.
3. Gursa masalasi ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida o'rganish mumkin.
5. Ketma-ket yaqinlashish usulini algebraik tenglamalarni sonli yechishda ham qo'llash mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar roʻyxati.

1. А.И.Каримов.Юксак маънавият – енгилмас куч. Тошкент.Маънавият.2008 й. 174 б.
 2. Т.Ж. Жўраев, С. Абдуназаров. Математик физика тенгламалари.Т. ЎзМУ. 2003 й. 332б.
 3. М.Салоҳиддинов.Матиматик физика тенгламалари .Т.Ўзбекистон.2002 й. 446б.
 4. А.В.Бицадзе.Уравнения математической физики. М.Наука .1982 г. 312с.
 5. С.Л. Соболев. Уравнения математической физики.М.Наука. 1966г. 386с.
 6. А.Н.Тихонов,А.А.Самарский.Уравнения математической физики. М.Наука.1977г. 726с.
 7. В.П.Михайлов.Дифференциальные уравнения в частных прозводных. М.Наука.1983г.392с.
 8. И.Г.Петровский.Лекции об уравнениях с частными производными. М.Наука. 1973г.412с.
 9. В.С.Владимиров.Уравнения математической физики. М.Наука. 1976г. 512с.
 10. С.К.Годунов.Уравнения математической физики.М.Наука.1978г.416с.
 11. В.С.Владимиров и др. Сборник задач по уравнениям математической физики.М.Наука.1982г.376с.
 12. Б.П. Демидович и И.А. Марон. Основы вычислительной математики. М. Наука.1970г. 664с.
- http://ziyonet.uz, <http://www.mcmee.ru>, <http://lib.mexmat.ru>.