МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Кафедра начертательной геометрии и инженерной графики

Курс лекций по предмету

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Составитель: асс. Ахмедбекова А.В.

Рецензенты: доц.каф. НГиКГ Абдурахимова Ф.А.
доц.каф. «Черчение и методика его преподавания» ТГПУ Адилов П.А.

Методика преподавания черчения

Обсуждена и утверждена научно-методическим советом ТИТЛП “___” __________2015 г. Протокол №______

Аннотация

Настоящий сборник лекций по начертательной геометрии отражает ту систему и методику преподавания, которая сложилась и преподается на протяжении ряда лет студентам технических ВУЗов.

Предпосылкой для данного сборника лекций служил конспект лекций, читаемый на кафедре и методическое пособие для студентов- заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений.

Применяемые обозначения соответствует обозначениям основных литератур предлагаемых студентам ВУЗов, где это особенно важно. Благодаря целесообразному выбору индексов, по обозначениям изображенных элементов можно судить о принадлежности их к соответствующей плоскости проекции. Это исключает путаницу и облегчает решение задач.

Содержание сборника лекций охватывает все вопросы для решения задач индивидуального задания, выполняемых студентами самостоятельно как домашнее задание, которое дается в приложении данного сборника лекций.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛИКА

1. $\mathbf{\Gamma, \Delta, \Sigma, \Pi, \Lambda, \Psi, \Phi, \Omega}$ – поверхности (плоскости)
2. $\mathbf{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3}$ – основные плоскости проекций
3. $\mathbf{\Pi_4, \Pi_5, \ldots}$. – дополнительные плоскости проекций
4. **a, b, c, …**- линии в пространстве
5. **A, B, C, …, 1, 2, 3, …** - точки в пространстве
6. $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ – углы
7. $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots}$ - проекции точек, линий, поверхностей на плоскости проекций
8. **(AB)** – прямая, проходящая через точки A и B
9. **[AB]** – отрезок прямой
10. **|AB|** - Расстояние между точками A и B
11. $||$ - параллельность
12. $\perp$ - перпендикулярность
13. $\|$ - непараллельность
14. $\perp$ - неперпендикулярность
15. $\overset{\bullet}{\cdots}$ - скрещивание
16. $=$ - равенство, результат
17. $\equiv$ - тождественность
18. $\in$ принадлежность
19. $\subset$ - включение
20. $\cap$ - пересечение
21. $\cong$ - конгруэнтность
22. $\rightarrow$ - преобразование, отображение
23. $\wedge$ - логическое «и»
24. $\vee$ - логическое «или»
25. $\Rightarrow$ - логическое следование
26. $\Leftrightarrow$ - эквивалентность

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия – это наука о методах построения изображений пространственных форм на плоскости.

Начертательная геометрия и ее методы находят применение в различных областях науки и техники: в машиностроении, архитектуре, строительстве, изобразительном искусстве.

Основным методом проецирования является ортогональное проецирование. Этот метод основан на проецировании пространственного объекта на две взаимно перпендикулярные плоскости лучами, перпендикулярными (ортогональными) к этим плоскостям.

В строительстве и машиностроении применяется также аксонометрическое проецирование. Изображения (чертежи), полученные с помощью такого проецирования, имеют высокую наглядность и простые построения.

При проектировании крупногабаритных инженерных сооружений (строительных площадок, каналов, плотин, откосов железных и автомобильных дорог, насыпей и выемок на кривых и прямых участках пути), при изыскании и трассировании дорог, для определения границ и объемов земляных работ при строительстве этих сооружений, то есть когда длина сооружения намного превышает высоту, применяют метод проекций с числовыми отметками.

В строительстве и архитектуре при изображении проектируемых промышленных и жилых зданий, городских площадей и улиц, железнодорожных вокзалов, интерьеров станций метрополитенов и пассажирских залов, мостов и путепроводов, различных дорог широко используются перспективные проекции.

Эти проекции дают возможность получить наглядные изображения инженерных сооружений, которые наиболее точно передают реальное зрительное восприятие человека.

В начертательной геометрии чертежи являются тем инструментом, с помощью которого осуществляется непосредственное изучение геометрических форм предмета и выполняется решение пространственных задач.

Поэтому к чертежам предъявляют следующие требования:

Чертеж должен быть наглядным, т.е. он должен вызывать пространственное представление об изображаемом предмете;

2) чертеж должен быть обратимым, т.е. он должен точно определять форму, размеры и положение изображаемого предмета;

3) чертеж должен быть простым для его графического выполнения;

4) изображение предмета должно быть удобным для чтения размеров.

Чертежи, выполненные методом проецирования, называются проекционными.

Начертательная геометрия возникла в глубокой древности. Потребность в изображениях пространственных форм на плоскости, развитие изобразительного искусства, техники предопределили появление начертательной геометрии.

Ученые всего мира внесли большой вклад в развитие методов построения изображений пространственных форм на плоскости. Это великий греческий геометр Эвклид (III в. до н.э.), римский архитектор Витрувий (I в. до н.э.).

Значительные труды по методам изображений были написаны в эпоху Возрождения итальянскими архитекторами: Леоном Батиста Альберти (1404 – 1472 гг.), Леонардо да Винчи (1455 – 1519 гг.), немецким живописцем и архитектором Альбрехтом Дюрером (1471 – 1528 гг.).

Математическую трактовку перспективы дал итальянский ученый ГвидоУбальди (1545 – 1607 гг.), а французский архитектор Жерар Дезарг (1593 – 1662 гг.) в своем труде заложил теоретический фундамент перспективы.

В России практические приемы построения графических изображений были известны еще в давние времена.

Рисунки домов, крепостей в различных древних летописях сохранили для нас достаточно совершенные для своего времени примеры изображений.

Работы таких великих русских мастеров, как иконописец Рублев, механик – самоучка И.П. Кулибин, зодчие Д.В. Ухтомский, В.И. Баженов, М.Ф. Казаков и многие другие, являются образцами правильных проекционных изображений.

Таким образом, методы построения графических изображений постоянно развивались в различных странах независимо друг от друга, но только французский инженер и ученый Гаспар Монж (1746 – 1818 гг.) смог сформулировать главные элементы теории построения графических изображений, используя прямоугольное проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости.

В 1798 году Гаспар Монж опубликовал свой главный научный труд «Начертательная геометрия».

В России курс начертательной геометрии впервые стал изучаться в 1810 году.

Первым русским профессором начертательной геометрии и крупным ученым в этой области стал Я.А. Севастьянов (1796 – 1849 гг.).

Значительный вклад в развитие начертательной геометрии внесли русские ученые: Н.И. Макаров, В.И. Курдюмов, Н.А. Рынин, А.И. Добряков, Н.Ф. Четверухин и многие другие.

Позднее продолжили свои исследования такие ученые, как В.О. Гордон, С.А. Фролов, А.В. Бубенников, Н.Н. Крылов и др.

ТЕМА 1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

1.1. Центральное проецирование

Пусть в пространстве задана плоскость $П_1$, которую будем называть плоскостью проекций.

Выберем какую – либо точку S, не лежащую на плоскости проекций. Эту точку будем называть центром проецирования.

Заданную точку A пространства будем проецировать на плоскость проекций $П_1$. Для этого через точку А из центра проекций S проведем прямую l. Эта прямая будет называться проецирующей прямой. Затем находим точку пересечения A1 проецирующей прямой SA с плоскостью проекций $П_1$. Точка A1 будет называться проекцией точки A (рис 1.1). Аналогично выполним построение проекции B_1 точки B.

Очевидно, что каждой точке пространства будет однозначно соответствовать своя собственная проекция. Однако на рис 1.2 мы видим, что проекцией точки A и точки C является точка пересечения их общей проецирующей прямой с плоскостью проекций.

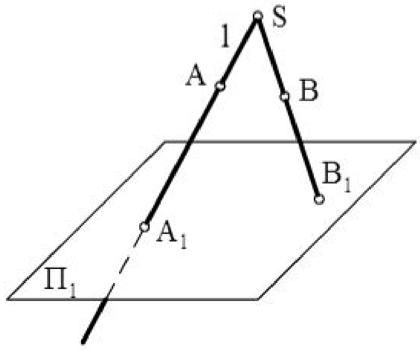


Рис. 1.1

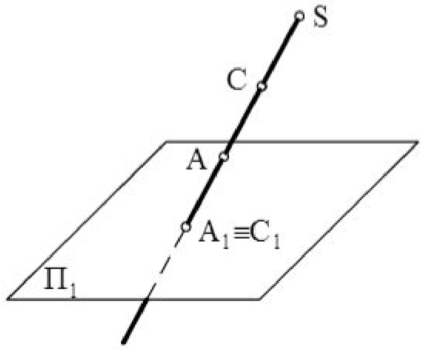


Рис. 1.2

Следовательно, такое изображение не является взаимно однозначным, и судить о положении точек A и C в пространстве по одной проекции нельзя, потому что одним из требований, предъявляемых к чертежам, является точное определение положения пространственного объекта по его изображению, по его проекциям.

1.2. Параллельное проецирование

Если центр проецирования S_∞ удален в бесконечность (рис. 1.3), то проецирующие лучи станут параллельны друг другу. Такое проецирование называется параллельным.

Проецирующие лучи, исходящие из бесконечного далека, могут быть наклонены под любым углом к плоскости проекций.

При заданном аппарате проецирования можно построить параллельную проекцию любой точки пространства. Для этого через заданную точку A проведем проецирующую прямую, параллельную направлению S, и найдем точку A_1 – точку пересечения этой прямой с плоскостью проекций $П_1$.

Через точку A параллельно заданному направлению в пространстве можно провести только одну прямую, следовательно, каждая точка пространства имеет одну и только одну параллельную проекцию.

Точки A и B принадлежат одному и тому же проецирующему лучу, параллельному направлению S (рис. 1.4). Поэтому проекции этих точек B1 и A1 совпадают. Отсюда следует, что по одной заданной проекции положение в пространстве точек В и А определить невозможно.

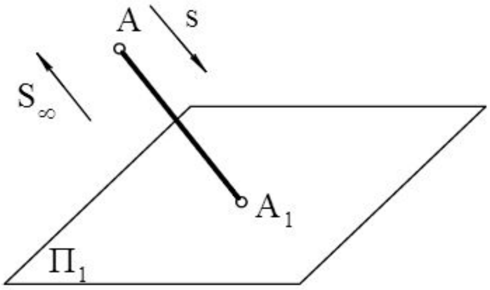


Рис. 1.3

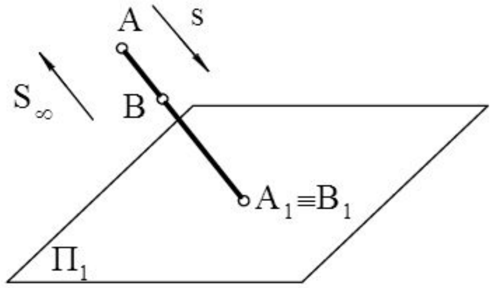


Рис. 1.4

1.3. Ортогональное (прямоугольное) проецирование

Ортогональное (прямоугольное) проецирование является частным случаем параллельного проецирования, при котором направление проецирования s выбирается перпендикулярным плоскости проекций $П_1$, т.е. $s \perp П_1$ (рис. 1.5).

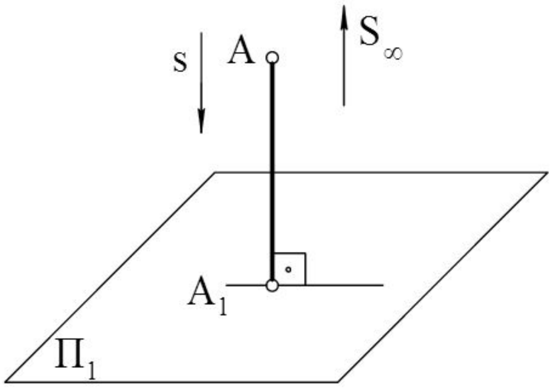


Рис. 1.5

Такое проецирование является наиболее простым и удобным из всех других существующих видов проецирования. Оно обеспечивает простоту определения проекций геометрических объектов, а также позволяет сохранить на проекциях их форму и размеры.

Прямоугольное проецирование имеет те же недостатки, что и центральное и параллельное проецирование: одна прямоугольная проекция не дает возможности определить положение геометрического объекта в пространстве.

Для того чтобы получить так называемый «обратимый чертеж», который позволит определить любые геометрические параметры объекта, надо иметь хотя бы две связанные между собой прямоугольные проекции.

1.4. Проекции точки

Проецирование будем вести на три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.6):

$П_1$ – горизонтальная плоскость проекций;

$П_2$ – фронтальная плоскость проекций;

$П_3$ – профильная плоскость проекций.

Линии пересечения этих плоскостей называют осями проекций (координатными):

ОХ – ось абсцисс;

ОУ – ось ординат;

OZ – ось аппликат и рассматривают как систему прямоугольных декартовых координат с центром О.

Положение точки в пространстве определяется тремя координатами: A (X, Y, Z).

Для получения прямоугольных проекций точки A необходимо из этой точки опустить перпендикуляры на плоскости проекций. Основания перпендикуляров и будут являться проекциями данной точки:

A_1 – горизонтальная проекция точки;

A_2 – фронтальная проекция точки;

A_3 – профильная проекция точки.

Для получения более удобного чертежа необходимо совместить плоскости проекций П1 и П3 вместе с изображением на них данной точки A с плоскостью проекций $П_2$ поворотом их вокруг осей OX и OZ в направлении, указанном стрелкой (рис. 1.6). Такой совмещенный чертеж называется эпюром (от франц. epurer – очищенный) (рис. 1.7).

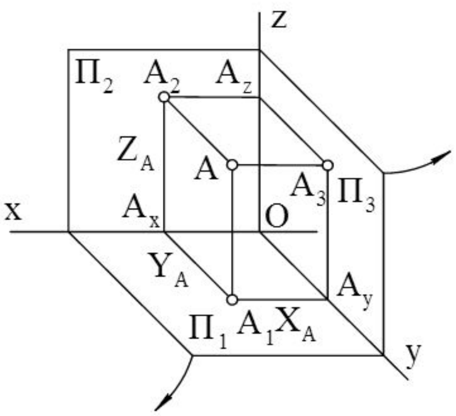


Рис. 1.6

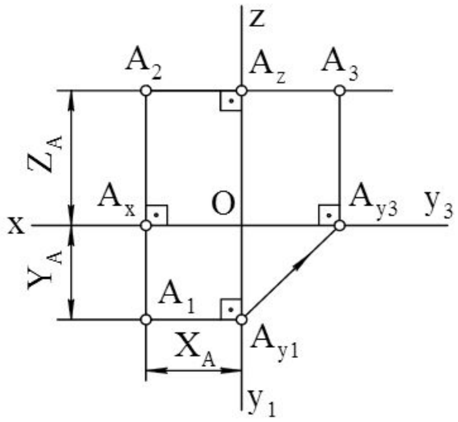


Рис. 1.7

Из чертежа видно, что горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре к оси OX, а фронтальная и профильная проекции – на одном перпендикуляре к оси OZ.

Прямая, которая соединяет на чертеже две проекции одной и той же точки, называется линией связи.

A_2A_1 – всегда перпендикулярна оси OX;

A_2A_3 – всегда перпендикулярна оси OZ.

Расстояния от заданной точки A до плоскостей проекций определяются ее координатами:

$|AA_3|$ – абсцисса точки A (X);

$|AA_2|$ – ордината точки A (Y);

$|AA_1|$ – аппликата точки A (Z).

Каждая проекция точки определяется двумя координатами: A_1 (X, У); A_2 (X, Z); A_3 (У, Z), а две любые проекции определяются тремя координатами, следовательно, для задания точки достаточно двух проекций.

Если все три координаты точки отличны от нуля, точка находится в пространстве (см. рис. 1.6 и рис. 1.7).

Если одна из координат равна нулю, точка находится в плоскости проекций, например, точка B лежит в плоскости $П_1$, поэтому координата Z = 0 (рис. 1.8).

Если точка лежит на оси, то нулю равны две ее координаты (точка C лежит на оси OZ, см. рис. 1.8). Координаты X и У равны 0.

Если все три координаты равны нулю, точка совпадает с началом координат.

По двум известным проекциям всегда можно построить третью (рис. 1.9).

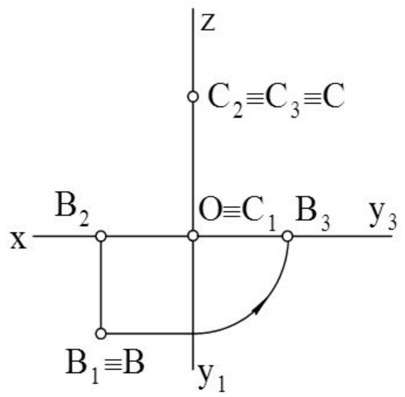


Рис. 1.8

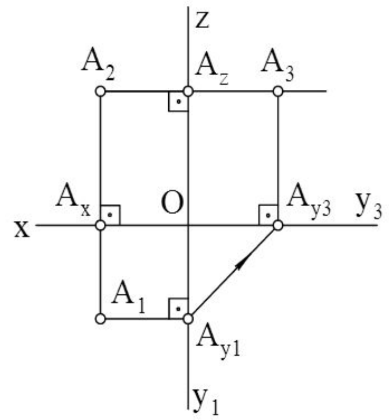


Рис. 1.9

Например, чтобы построить профильную проекцию A_3 точки А по данным горизонтальной A_1 и фронтальной A_2 проекциям, необходимо:

1) из точки А1 провести прямую, перпендикулярную ОУ, до пересечения с ней в точке A_{y1};

2) из точки A_{y1} провести прямую под углом 45° к оси проекций $ОУ_1$ до пересечения с осью $ОУ_3$;

3) из полученной точки A_{y3} восстановить перпендикуляр к оси $ОУ_3$;

4) из фронтальной проекции A_2 провести прямую, перпендикулярную оси OZ, и продолжить ее до пересечения с построенной ранее прямой из точки A_{y3}.

На пересечении этих прямых находится искомая проекция A_3 точки А.

Проекцию A_3 можно найти так, как показано на рис. 1.10, т.е. отложить от точки A_z отрезок, равный координате У.

На рис. 1.11 построена горизонтальная проекция A_1 точки А с помощью постоянной прямой чертежа, когда известны фронтальная и профильная проекции точки А.

Ее проводят под углом 45° к вертикальной или горизонтальной линии связи (см. рис. 1.10 и рис. 1.11).

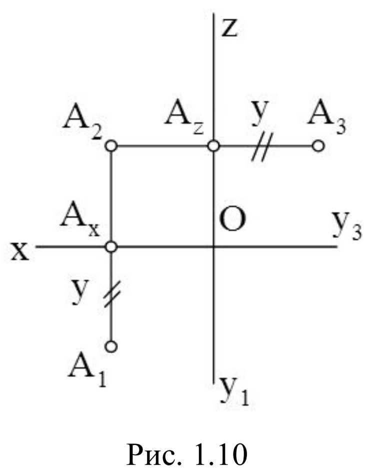


Рис. 1.10

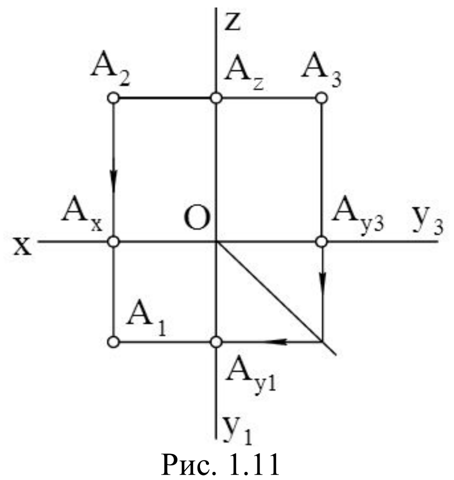


Рис. 1.11

Часто для решения задач бывает достаточно иметь на чертеже только две прямоугольные проекции предмета. В этом случае для получения чертежа берут две взаимно перпендикулярные плоскости проекций – горизонтальную П1 и фронтальную П2. Такой метод был изложен Г. Монжем, поэтому иногда называется методом Монжа.

Пересекаясь между собой, плоскости П1 и П2 делят пространство на четыре части, которые называются четвертями. Их нумеруют в порядке, указанном на рис. 1.12.

Ось проекций делит каждую из плоскостей проекций на две полуплоскости (полы): плоскость проекций П1 – на переднюю и заднюю полы, плоскость П2 – на верхнюю и нижнюю полы. Фронтальная проекция точки А, находящейся в первой четверти, окажется над осью ОХ, горизонтальная – под осью ОХ (рис. 1.13).

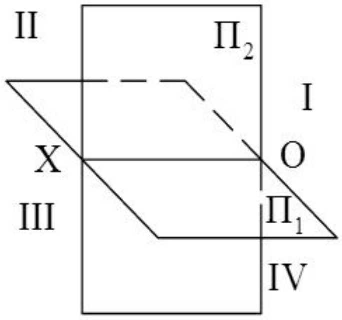


Рис. 1.12

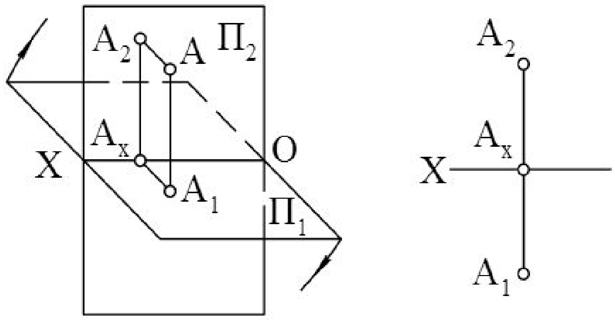


Рис. 1.13

При переходе от пространственного изображения к эпюру, т.е. при совмещении горизонтальной плоскости с фронтальной передняя пола плоскости П1 будет перемещаться на 90° вокруг оси ОХ вниз, а задняя пола – вверх. Поэтому фронтальная и горизонтальная проекции точки, находящейся во второй четверти, окажутся над осью ОХ (рис. 1.14).

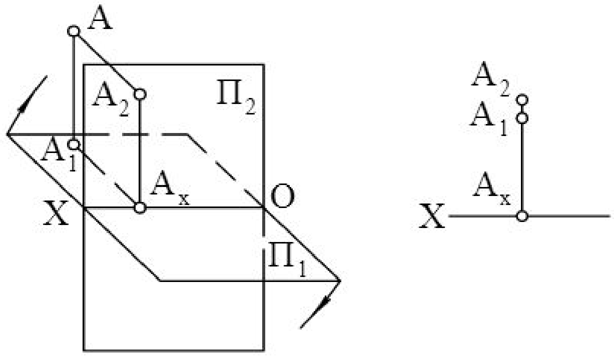


Рис 1.14

Фронтальная проекция точки, находящейся в третьей четверти, окажется под осью ОХ, а горизонтальная – над осью ОХ (рис. 1.15), фронтальная и горизонтальная проекции точки, находящейся в четвертой четверти, – под осью ОХ (рис. 1.16).

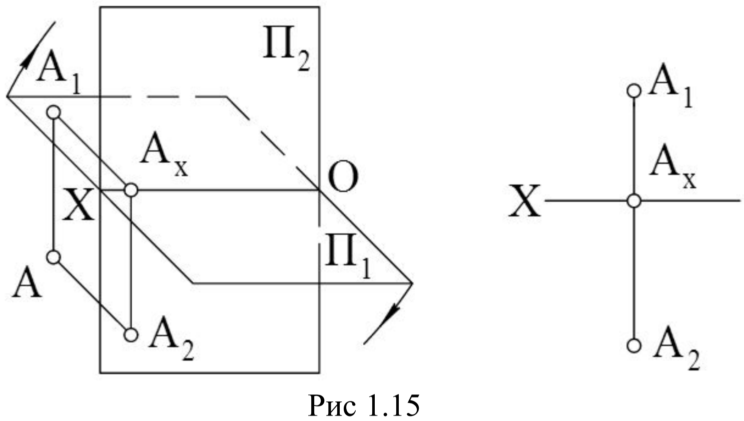


Рис 1.15

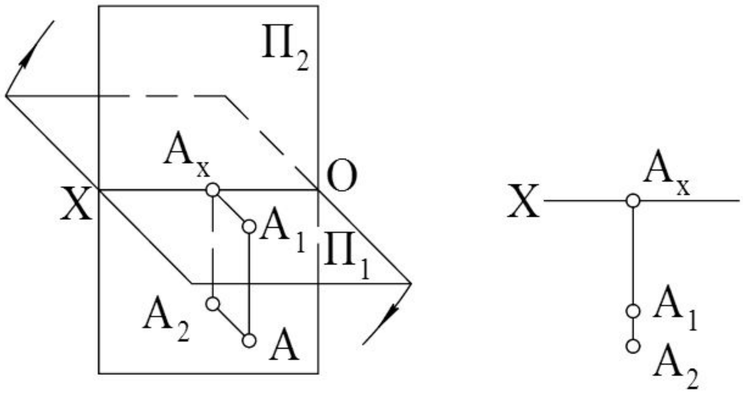


Рис. 1.16

Три плоскости проекций делят пространство на восемь октантов. Нумерация октантов дана на рис. 1.17.

Совмещая плоскости проекций так же, как было показано ранее, можно получить чертеж точки, расположенной в любом из восьми октантов (рис. 1.18).

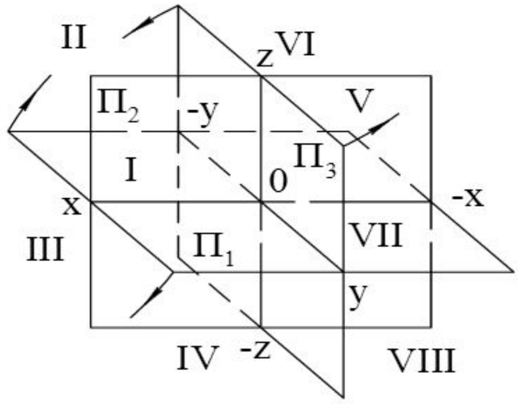


Рис. 1.17

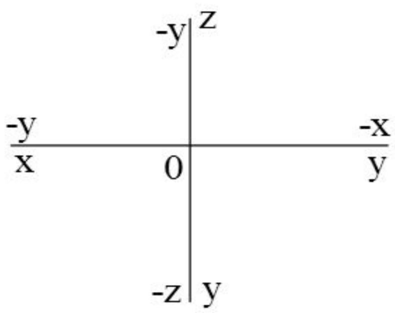


Рис. 1.18

Считают, что наблюдатель, рассматривающий предмет, находится в I-ом октанте.

Приняв для отсчета координат точки систему, показанную на рис. 1.17, составляют таблицу знаков координат во всех восьми октантах (табл.).

Окант		**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Знаки координат	**X**	+	+	+	+	-	-	-	-
	Y	+	-	-	+	+	-	-	+
	z	+	+	-	-	+	+	-	-

Любая точка пространства А, заданная координатами, будет обозначаться: А (Х, У, Z).

Пусть задана точка А (6, 4, 5). Эта запись означает, что положение точки А в пространстве определяется координатами: Х = 6, У = 4, Z = 5.

Построение изображения самой точки и ее проекций на пространственной модели осуществляют следующим образом: на осях координат от точки О откладывают отрезки, соответственно равные 6, 4, 5 единицам длины (рис. 1.19). На этих отрезках (OA_x, OA_y, OA_z), как на ребрах, строят параллелепипед. Вершина его, противоположная началу координат, определяет положение заданной точки А. Из рис. 1.19 видно, что для определения положения точки А достаточно построить только три ребра параллелепипеда, например, OA_x, A_xA_1 и A_1A.

Эпюр точки представлен на рис. 1.20.

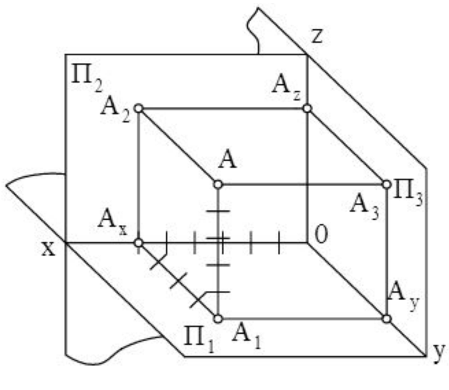


Рис. 1.19

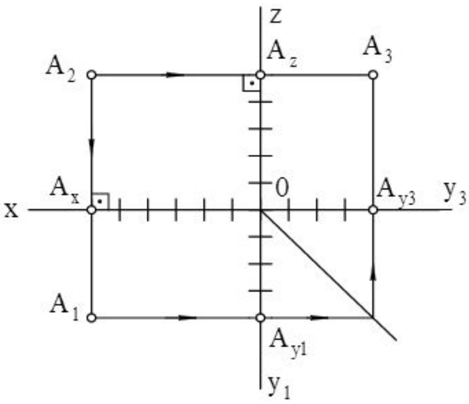


Рис. 1.20

На рис. 1.21 – 1.23 представлены наглядные изображения и эпюры точек, которые расположены во II, III, IV октантах.

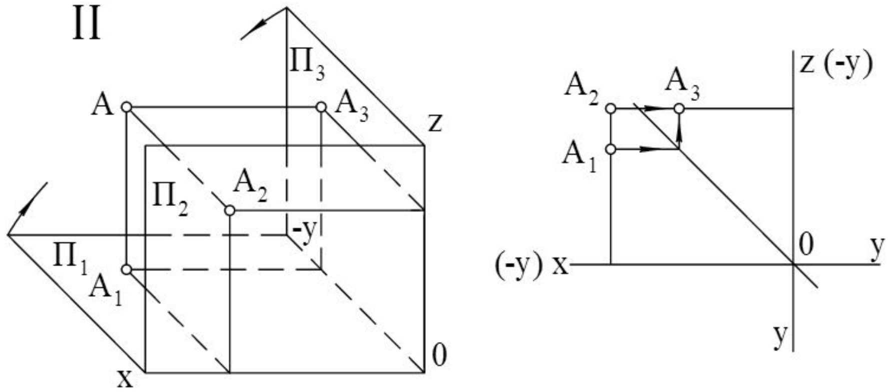


Рис. 1.21

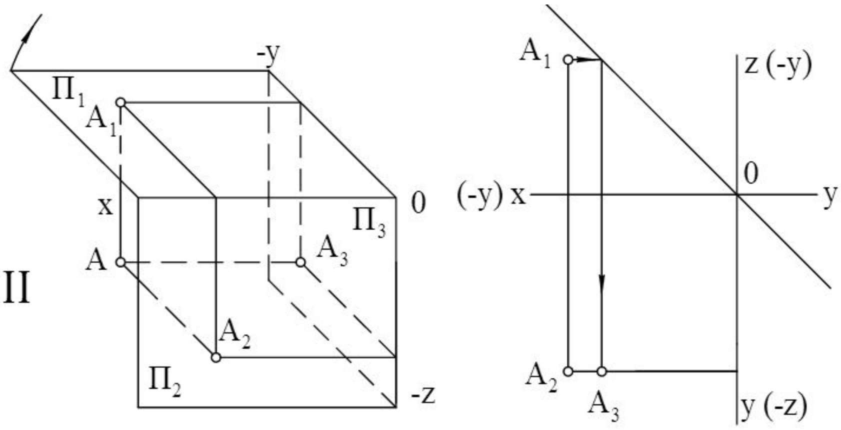


Рис. 1.22

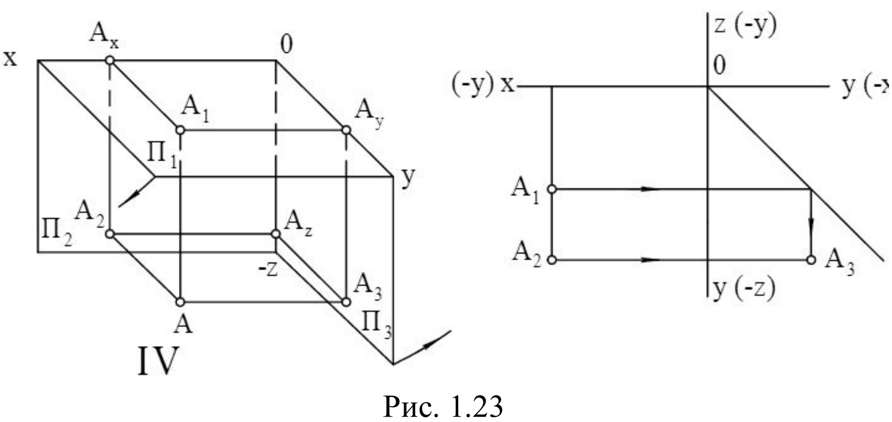


Рис. 1.23

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

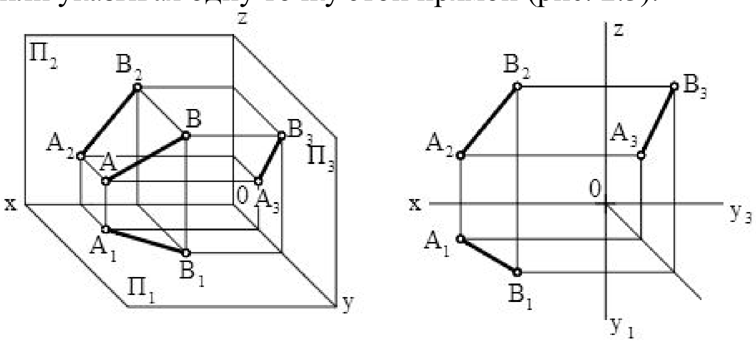
1. Что называется проекцией, проецированием и каковы основные виды проецирования?
2. В чем заключается метод центрального проецирования?
3. В чем заключается метод параллельного проецирования?
4. В чем заключается метод ортогонального проецирования?
5. В чем заключается метод построения комплексного чертежа точки?
6. Каковы законы построения третьей проекции точки по двум заданным ее проекциям?
7. Определяет ли одна проекция точки ее положение в пространстве?
8. В чем заключается метод Г. Монжа?

ТЕМА 2. ПРЯМАЯ

2.1. Задание прямой

Положение прямой линии в пространстве определяется двумя точками или точкой и направлением.

Поэтому на эпюре прямую можно задать проекциями ее отрезка (рис. 2.1), проекциями некоторой произвольной части прямой, не указывая концевых точек этой части (рис. 2.2), или указывая одну точку этой прямой (рис. 2.3).



а) б)

Рис. 2.1

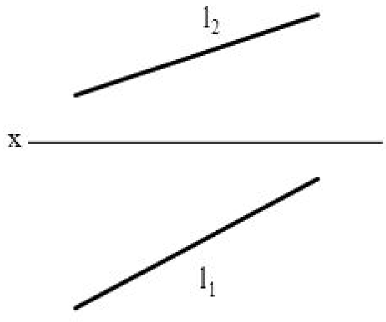


Рис. 2.2

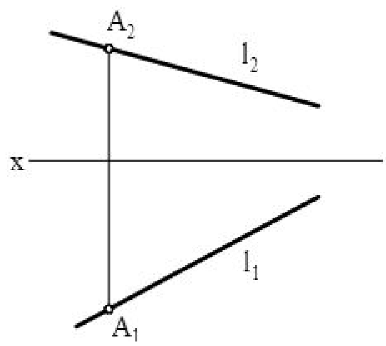


Рис. 2.3

2.2. Прямая общего положения

Прямая общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.

На эпюре проекции прямой общего положения составляют с осями проекций произвольные углы, поэтому величина каждой проекции меньше истинной величины самой прямой (см. рис. 2.1).

2.3. Прямые частного положения

Прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называют прямыми частного положения.

Прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций, а с двумя другими плоскостями образующая произвольные углы, называется прямой уровня. Различают три линии уровня:

1) прямую, параллельную горизонтальной плоскости проекций; называют горизонтальной или горизонталью h;

2) прямую, параллельную фронтальной плоскости проекций; называют фронтальной или фронталью f;

3) прямую, параллельную профильной плоскости проекций; называют профильной p.

Каждая линия уровня будет проецироваться в натуральную величину на ту плоскость проекций, которой она параллельна, углы наклона (α, β, γ), которые эта прямая образует с двумя другими плоскостями проекций, также будут проецироваться на эту плоскость без искажения (рис. 2.4 – 2.6).

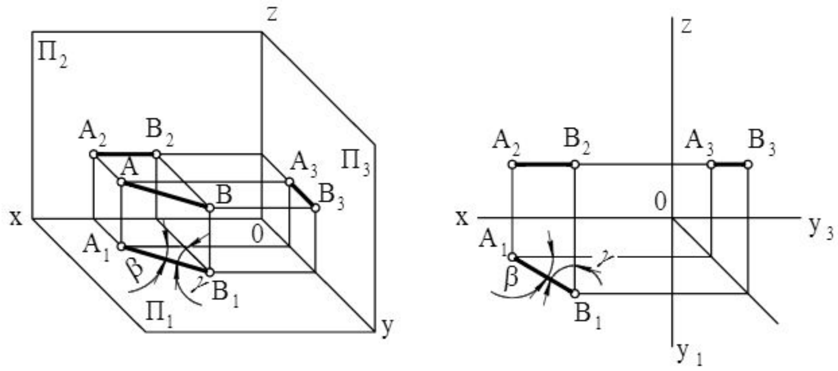


Рис. 2.4

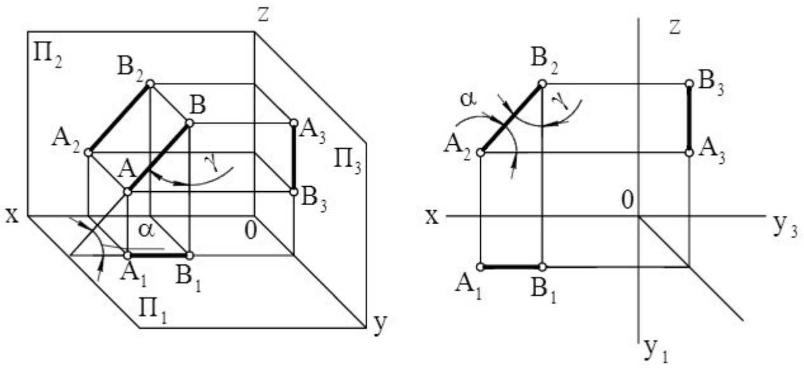


Рис. 2.5

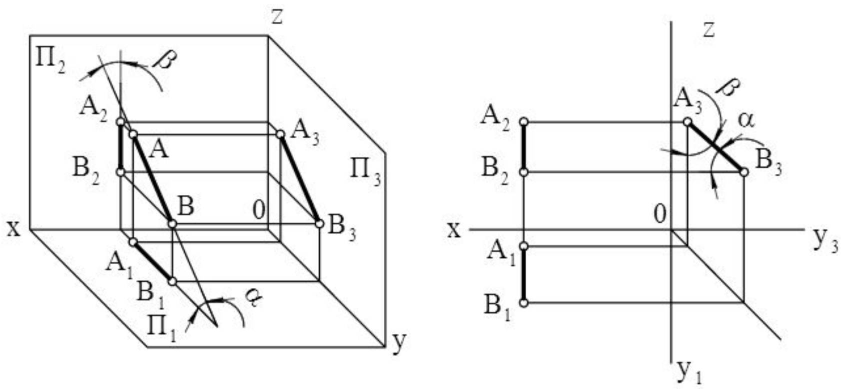


Рис. 2.6

На рис. 2.4 видно, что все точки горизонтальной прямой АВ удалены на одинаковые расстояния от плоскости $П_1$, поэтому фронтальная проекция любой горизонтали параллельна оси ОХ, а профильная проекция параллельна оси ОУ. Величины фронтальной и профильной проекций будут меньше натуральной величины самой прямой.

Эти отличительные особенности характерны и для фронтальной и профильной прямых.

Прямые уровня могут принадлежать плоскостям проекций. Такие прямые называют нулевой горизонталью и нулевой фронталью (рис. 2.7).

Прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, а двум другим параллельные, называются проецирующими:

1) горизонтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций (рис. 2.8);

2) фронтально-проецирующая – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций (рис. 2.9);

3) профильно-проецирующая – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций (рис. 2.10).

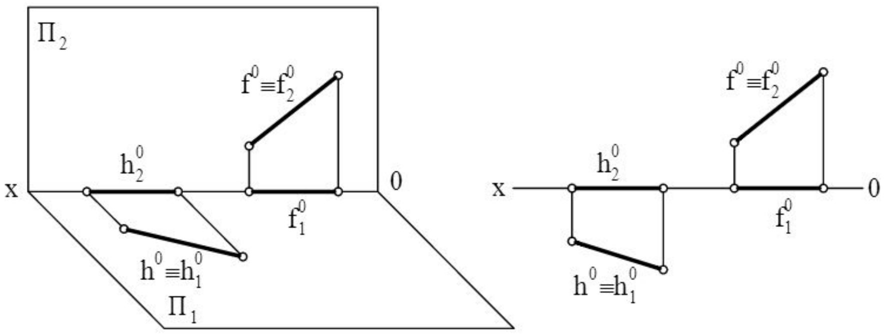


Рис. 2.7

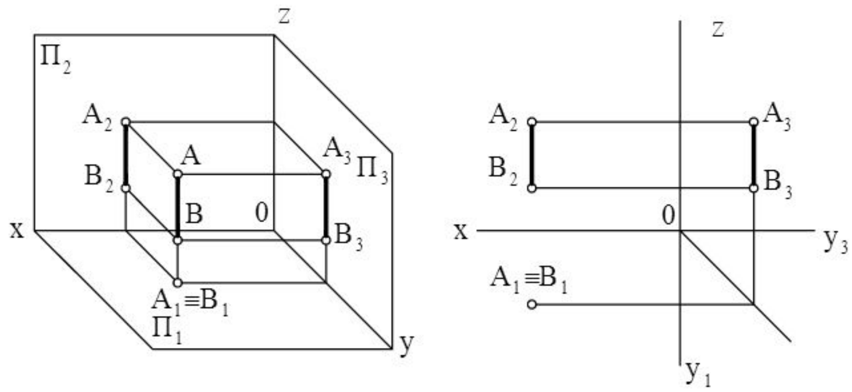


Рис. 2.8

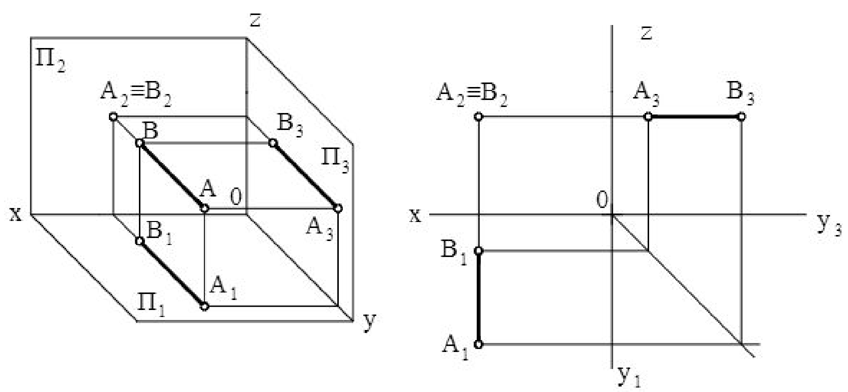


Рис. 2.9

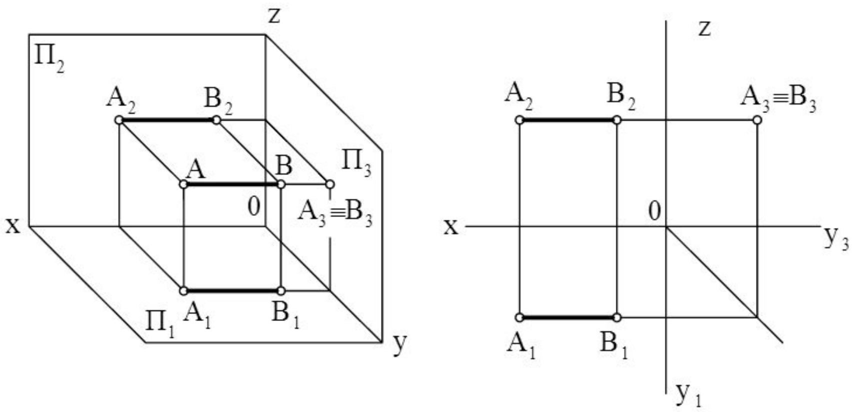


Рис. 2.10

На рис. 2.8 – 2.10 видно, что проекции прямых, перпендикулярных плоскостям проекций, на этих плоскостях представляют собой точки, а на тех плоскостях, которым прямые параллельны, проекции прямых будут перпендикулярны осям и равны по величине самим прямым.

2.4. Принадлежность точки прямой. Деление отрезка прямой линии в данном отношении

Если точка лежит на прямой, то ее проекции будут лежать на одноименных проекциях этой прямой.

На рис. 2.11 изображена прямая и три точки: A, B и C. Точка A принадлежит прямой l, т.к. $A_2 \in l_2$, $A_1 \in l_1$, точки C и B – не принадлежат, т.к. $C_1 \ni l_1$, $aB_2 \ni l_2$.

На рис. 2.12 показано построение точки C, принадлежащей профильной прямой AB, если известна фронтальная проекция точки C. Для построения неизвестной горизонтальной проекции используется профильная проекция A_3B_3 отрезка прямой AB.

Чтобы разделить отрезок прямой в данном отношении, достаточно разделить в этом отношении одну из проекции заданного отрезка, а потом с помощью линии связи перенести делящую точку на другие проекции отрезка.

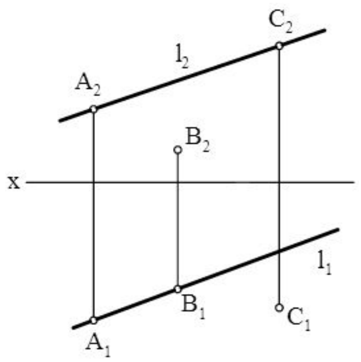


Рис. 2.11

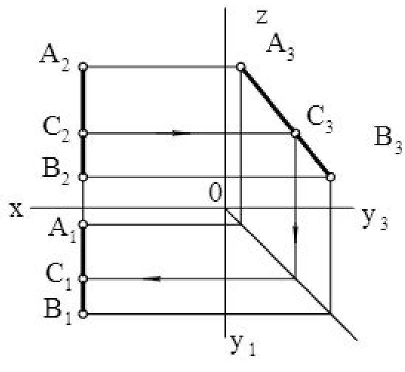


Рис. 2.12

На рис. 2.13 точка C делит отрезок AB в отношении 2:3. Для этого из точки A проведена вспомогательная прямая, на которой отложено 5 равных отрезков произвольной длины.

Если необходимо разделить отрезок профильной прямой AB точкой C, заданной фронтальной проекцией C_2, то выполняют следующие построения: из точки B_1 проводят произвольную вспомогательную прямую, откладывают на ней B11 = B2C2 и $1_2 = C_2A_2$. Соединяют точки 2 и A_1 и параллельно прямой 2 A_1 через точку 1 проводят прямую до пересечения с A_1B_1 в точке C_1. Это и будет недостающая проекция точки C (рис. 2.14).

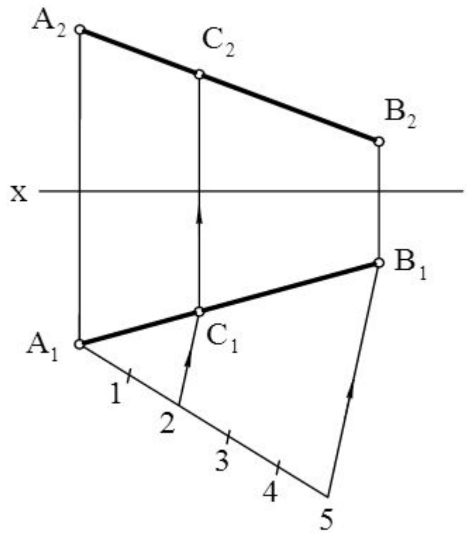


Рис. 2.13

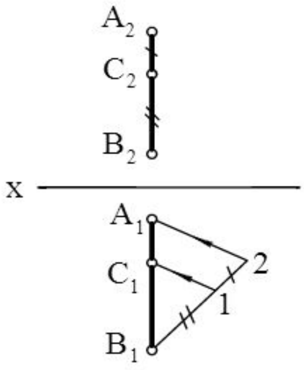


Рис. 2.14

2.5. Определение длины отрезка прямой общего положения и углов наклона прямой к плоскостям проекций

Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения необходимо построить на чертеже прямоугольный треугольник, одним катетом которого является проекция отрезка на какую-либо плоскость проекций, а величина другого катета равна разности расстояний концов отрезка от плоскости проекций, на которой взяли первый катет. Натуральная величина отрезка прямой будет равна гипотенузе этого треугольника. Угол между катетом-проекцией и гипотенузой равен углу наклона отрезка к этой плоскости проекций.

На рис. 2.15 показано проецирование отрезка AB на горизонтальную плоскость П1. Через точку A проведена прямая AB', параллельная горизонтальной проекции отрезка A_1B_1. В полученном прямоугольном треугольнике ABB' катет AB' равен проекции A_1B_1, а BB' равен разности расстояний концов отрезка от плоскости проекций П1 (ΔZ). Гипотенуза этого треугольника равна длине отрезка AB. Угол α в треугольнике ABB' является углом наклона отрезка прямой AB к плоскости Π_1.

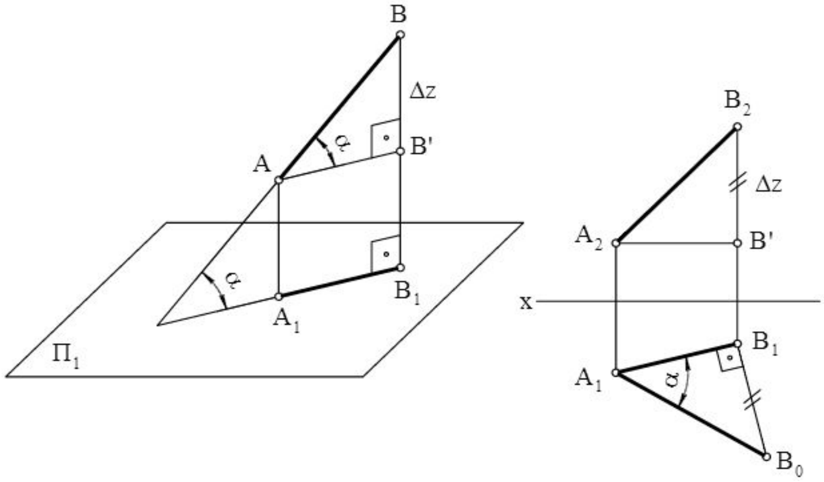


Рис. 2.15

Для определения угла наклона отрезка прямой AB на фронтальной плоскости проекций Π_2 строят прямоугольный треугольник аналогичным путем: через точку B проводят прямую BA', параллельную A_2B_2. Катет BA' = A_2B_2, а второй катет AA' равен Δy – разности расстояний точек A и B от плоскости Π_2 (рис. 2.16).

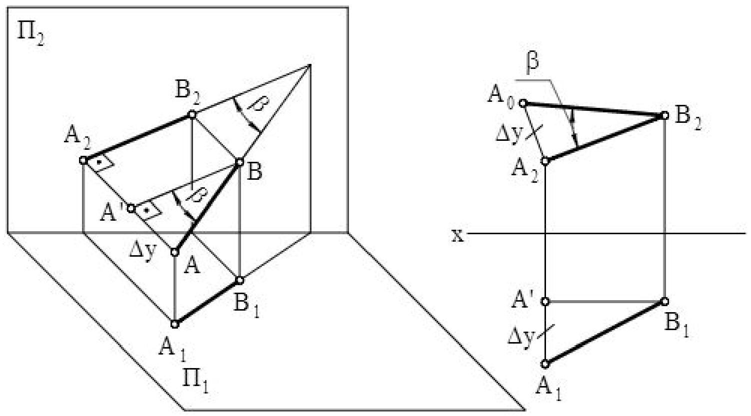


Рис. 2.16

Угол β в этом же треугольнике A' BA является углом наклона прямой AB к плоскости $П_2$.

2.6. Следы прямой линии

Прямая общего положения пересекает все плоскости проекций. Точки пересечения прямой линии с плоскостями проекций называют следами прямой. Точка M – горизонтальный след прямой, точка N – фронтальный. Горизонтальная проекция M_1 горизонтального следа прямой совпадает с самим следом – точкой M, а фронтальная проекция этого следа M_2 лежит на оси OX (рис. 2.17). Фронтальная проекция N_2 фронтального следа прямой совпадает с точкой N, а горизонтальная проекция N_1 лежит на оси OX.

Для построения горизонтального следа M прямой необходимо продолжить фронтальную проекцию прямой до пересечения с осью OX и в этой точке восстановить перпендикуляр до пересечения с горизонтальной проекцией прямой.

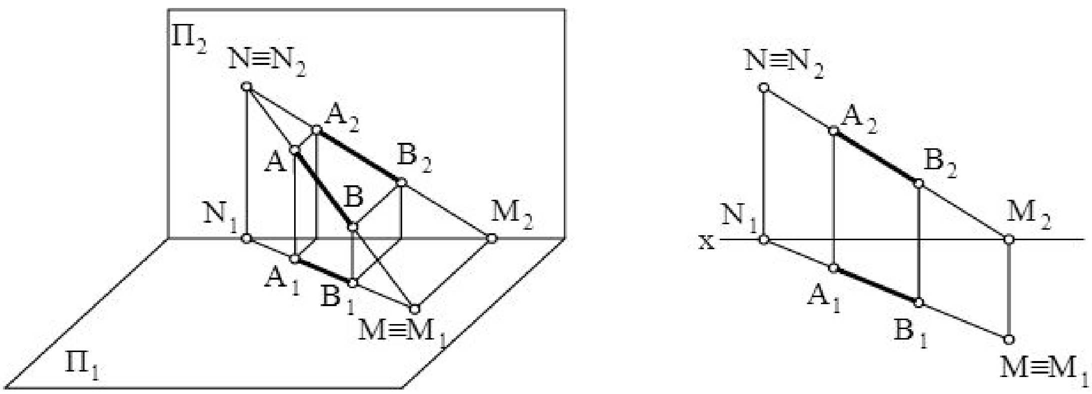


Рис. 2.17

Для построения фронтального следа прямой продолжаем горизонтальную проекцию прямой до пересечения с осью OX и восстанавливаем перпендикуляр к оси до пересечения с фронтальной проекцией прямой. С помощью этих правил на рис. 2.18 и рис. 2.19 построены следы прямых a и b.

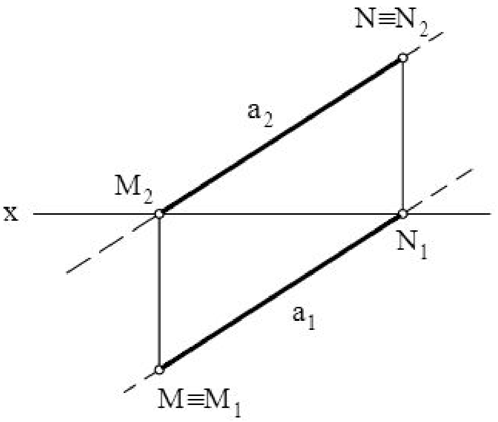


Рис. 2.18

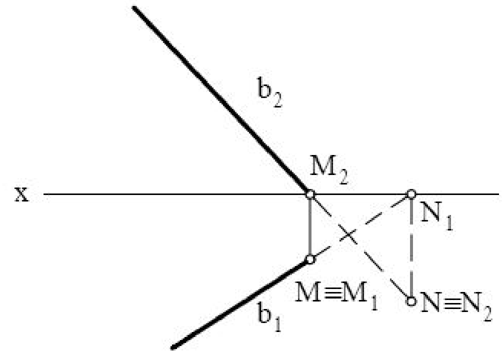


Рис. 2.19

Так как следы прямых – точки, в которых прямая переходит из одной четверти в другую, то они позволяют определить видимость этой прямой. Та часть прямой, которая расположена в пределах первого октанта, будет видимой. Проекции видимой части прямой изображаются сплошными линиями, а невидимой – штриховыми.

На рис. 2.20 показано построение следов прямой а в системе трех плоскостей проекций.

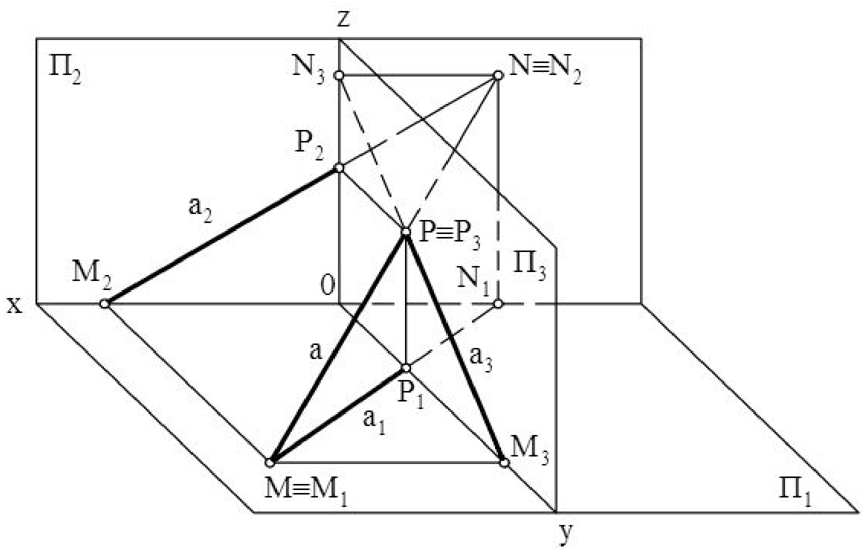


Рис. 2.20

Построение горизонтального и фронтального следов выполняют по правилам, указанным выше, профильный след Р находят как точку пересечения прямой а с профильной плоскостью проекций. Профильная проекция профильного следа прямой совпадает с самим следом, горизонтальная проекция этого следа P_1 лежит на оси ОУ; фронтальная проекция P_2 лежит на оси OZ. Чтобы построить профильный след прямой, продолжают фронтальную проекцию прямой а до пересечения с осью OZ. Отмечают точку P_2 и из этой точки проводят перпендикуляр к оси OZ до пересечения с профильной проекцией прямой. Эта точка и будет искомым следом Р, с которым совпадает P_3. Горизонтальная проекция P_1 определяется как пересечение горизонтальной проекции прямой с осью ОУ (рис. 2.21).

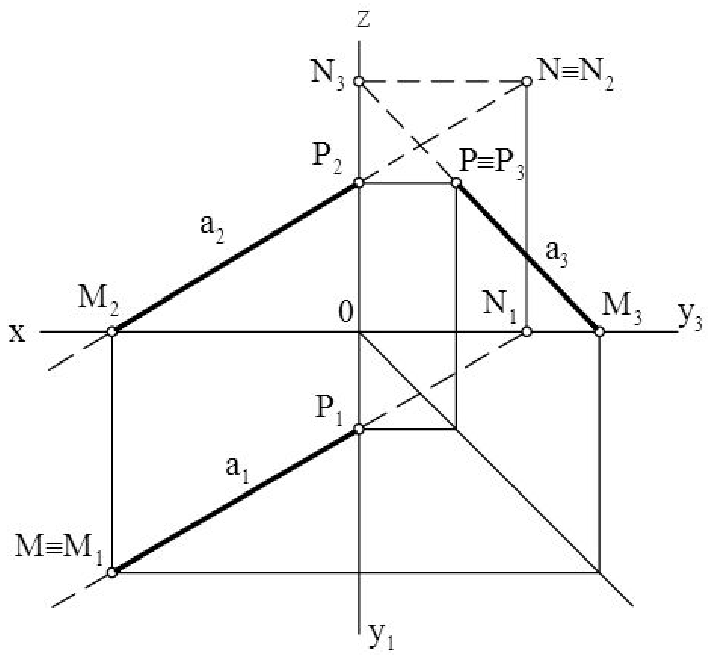


Рис. 2.21

2.7. Взаимное положение прямых

Прямые в пространстве могут занимать различное взаимное положение. Они могут быть параллельными, пересекающимися и скрещивающимися.

Если прямые в пространстве пересекаются, то на эпюре их одноименные проекции пересекаются, и точки пересечения проекций этих прямых лежат на одной линии связи (рис. 2.22).

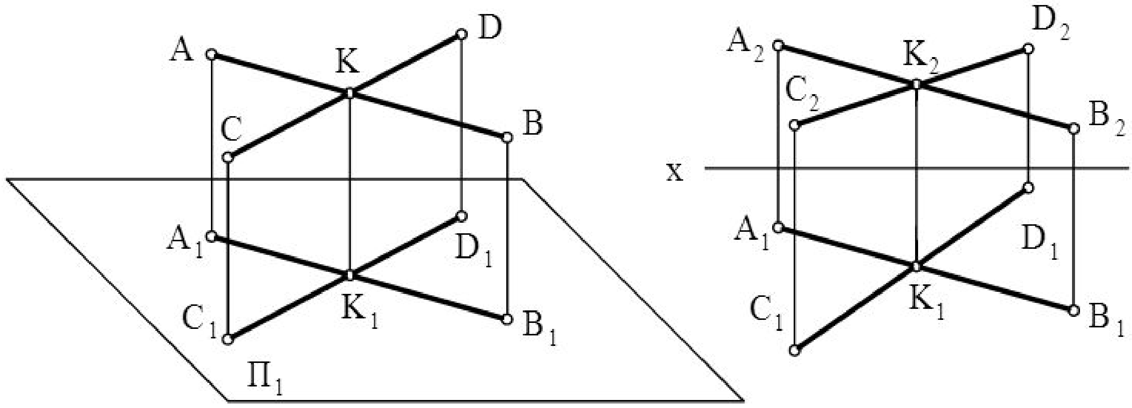


Рис. 2.22

Если прямые в пространстве параллельны, то на эпюре их одноименные проекции параллельны. На рис. 2.23 изображены прямые общего положения AB и CD, их горизонтальные и фронтальные проекции параллельны между собой. Можно утверждать, что и в пространстве эти прямые параллельны. Но для профильных прямых этого условия недостаточно. Для определения их взаимного положения необходимо построить профильные проекции прямых. На рис. 2.24 горизонтальные и фронтальные проекции прямых CD и EF параллельны, но эти прямые не параллельны, что следует из взаимного положения их профильных проекций.

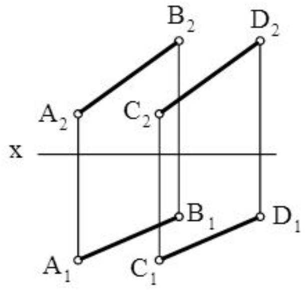


Рис. 2.23

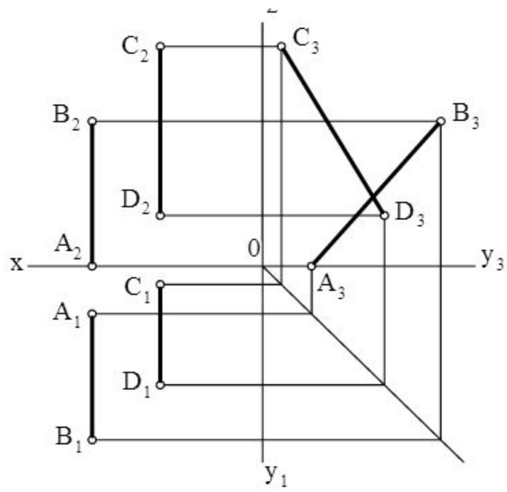


Рис. 2.24

Если прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны между собой, то такие прямые называются скрещивающимися. На эпюре точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи. Эти точки не являются общими для прямых (рис. 2.25). Точка пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых является на эпюре проекцией двух конкурирующих точек, принадлежащих заданным прямым.

Конкурирующие точки – это точки, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости проекций. На эпюре (см. рис. 2.25) горизонтальные проекции конкурирующих точек 1_1 и 2_1 совпадают, но точка 1 принадлежит прямой AB, а точка 2 – прямой CD.

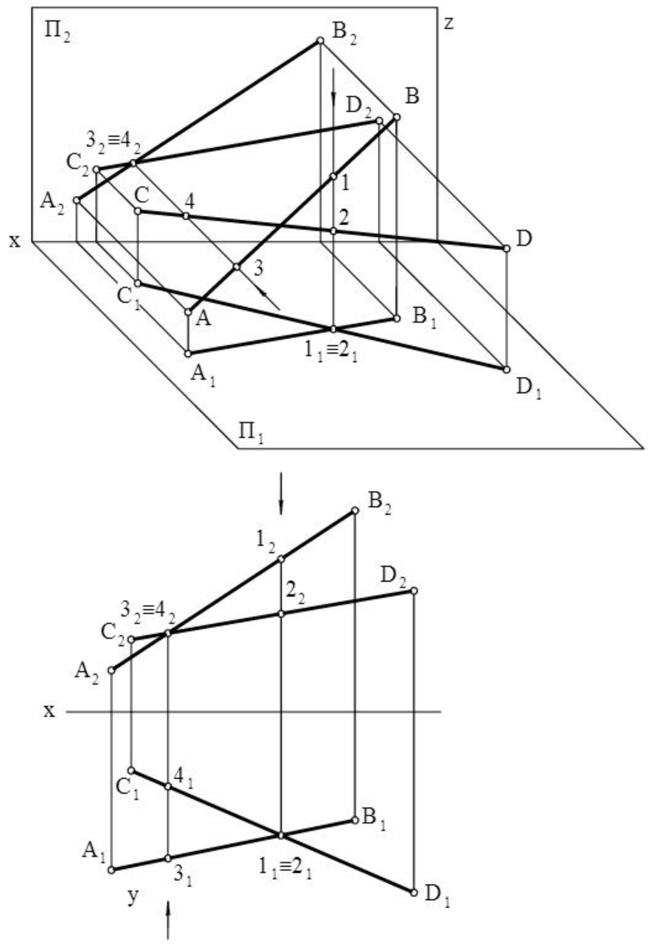


Рис. 2.25

Из чертежа видно, что расстояния от плоскости $П_1$ до точек 1 и 2 различны. Фронтальная проекция перпендикуляра, обозначенная стрелкой, позволяет определить, какая из точек расположена ниже. В данном примере точка 2, лежащая на прямой CD, расположена ниже, чем точка 1, лежащая на прямой AB. Следовательно, прямая CD проходит под прямой AB.

Точке пересечения фронтальных проекций соответствуют точки 3 и 4, расположенные на прямых AB и CD. Горизонтальная проекция перпендикуляра, отмеченная стрелкой, позволяет определить, какая из этих точек ближе к наблюдателю. Из чертежа видно, что точка 3 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 4. Поэтому прямая AB проходит перед CD.

2.8. Проекции плоских углов

Плоский угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину, если его стороны параллельны этой плоскости проекций.

Для того чтобы прямой угол проецировался на плоскость в натуральную величину, необходимо и достаточно, чтобы одна из его сторон была параллельна, а другая не перпендикулярна плоскости проекций. Изображенный на рис. 2.26 угол ABC – прямой, одна его сторона (AB) параллельна плоскости проекций П1, поэтому на эту плоскость он спроецировался в виде прямого угла, т.е. в натуральную величину.

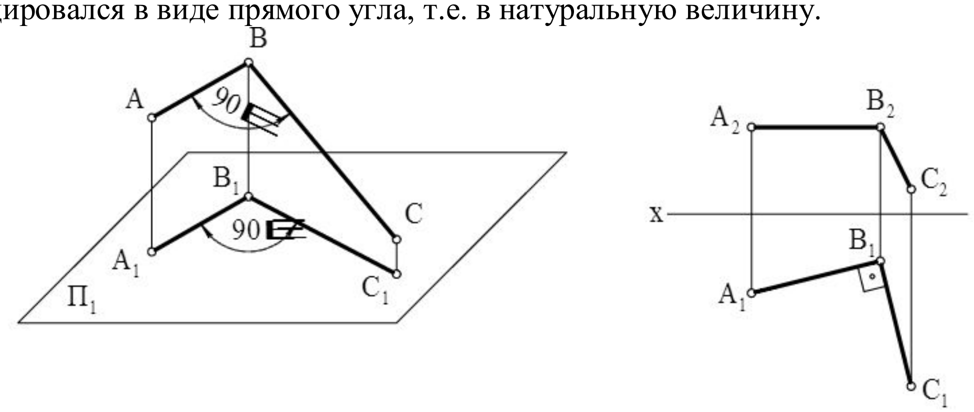


Рис. 2.26

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Как располагаются на комплексном чертеже проекции прямые общего положения?
2. Какое положение по отношению к плоскостям проекций может занимать прямая? Какие прямые частного положения Вы знаете?
3. Как определяется натуральная величина отрезка и углы его наклона к плоскостям проекций?
4. Что называется следом прямой?
5. Какое положение могут занимать прямые в пространстве?
6. Что на комплексном чертеже служит признаком пересечения прямых в пространстве?
7. В каком случае плоский угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину?

ТЕМА 3. ПЛОСКОСТЬ

3.1. Изображение плоскости на чертеже.
3.2. Прямая и точка в плоскости.
3.3. Главные линии плоскости.
3.4. Положение плоскости относительно плоскостей проекций.

3.1. Изображение плоскости на чертеже.

Что такое плоскость? Из геометрии известно, что плоскость представляет собой бесконечную поверхность, которая на всем своем протяжении имеет одинаковое направление. Примером получения плоскости в пространстве может служить параллельное перемещение одной прямой по второй неподвижной прямой. Простейшими плоскостями считаются плоские геометрические фигуры (треугольник, круг и т.п.).

Плоскость на чертеже может быть задана (рис. 3.1):

Рис. 3.1

- проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (см. рис. 3.1, а);
- проекциями отрезка прямой и точкой, не лежащей на прямой (см. рис. 3.1, б);
- проекциями двух пересекающихся отрезков прямых (см. рис. 3.1, в);
- проекциями двух отрезков параллельных прямых (см. рис. 3.1, г);
- проекциями плоской фигуры (треугольника) (см. рис. 3.1, д).

Соединяя проекции точек на первых четырех рисунках, можно перейти к изображению в виде треугольника или других плоских фигур.

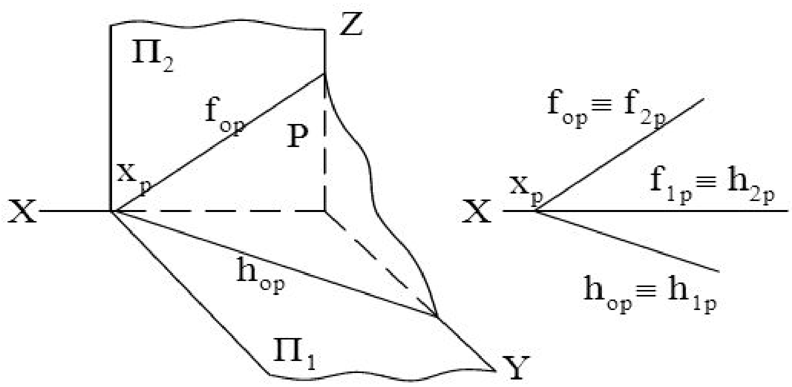
На рис. 3.1, е изображена в пространстве плоскость, заданная треугольником ABC. Эта же плоскость показана на чертеже (см. рис. 3.1, д) двумя ее проекциями.

Плоскость на чертеже также может быть задана следами плоскости. Следами плоскости называются линии пересечения плоскости с плоскостями проекций (рис. 3.2, а, б).

Плоскость P (см. рис. 3.2) образует с плоскостями проекций $П_2$ и $П_1$ трехгранный угол, вершина которого находится в пересечении следов. Две грани этого угла совпадают с плоскостями проекций и находятся между осью X и следами плоскости (h_{op} и f_{op}), а третий угол – между следами h_{op} и f_{op}, – всегда меньше суммы двух других углов. Это значит, что на чертеже угол, заключенный между следами h_{op} и f_{op} (см. рис. 3.2, б), всегда больше угла, заключенного между этими следами в пространстве (см. рис. 3.2, а).

На рис. 3.2, а показаны горизонтальный h_{op} и фронтальный f_{op} следы. Точка пересечения следов, расположенная на оси X, называется точкой схода следов (XP). Так как след плоскости является прямой, лежащей в плоскости проекций, то горизонтальная проекция фронтального следа f_{1p} будет находиться на оси X. Здесь же будет находиться и фронтальная проекция h_{2P} горизонтального следа плоскости P. Обычно эти проекции следов не используются при решении задач и поэтому их можно не изображать и не обозначать.

Целесообразно следы плоскости обозначить на чертежах по наименованию самих плоскостей проекций (Π_1, Π_2) или по обозначению их индексов, например, $P_{п1}$ и $P_{п2}$, или же P_1 и P_2 (рис. 3.3). Такое обозначение более удобно при решении задач. Следует иметь в виду, что со следами плоскости совпадают (сливаются) их проекции. Так, с горизонтальным следом плоскости Γ_1 совпадает горизонтальная проекция этого следа, а с фронтальным следом плоскости Γ_2 совпадает фронтальная проекция этого следа.



а) б)

Рис. 3.2

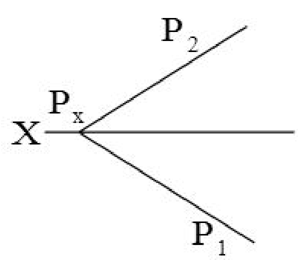


Рис. 3.3

Построение следов плоскости Г, заданной двумя пересекающимися прямыми $a \cap b$ ($a_1 \cap b_1$ и $a_2 \cap b_2$), показано на рис. 3.4. Чтобы построить фронтальный след плоскости Γ_2, необходимо найти фронтальные следы N и N' прямых a и b. Здесь же будут находиться и их фронтальные проекции N_2 и N_2'. Соединив данные следы прямой линией, получим фронтальный след плоскости Γ_2. Определив горизонтальные следы $M \equiv M_1$ и $M' \equiv M'_1$ прямых a и b и соединив их прямой линией, получим горизонтальный след плоскости Γ_1. Из рис. 3.4 видно, что для построения следа Γ_1 достаточно найти один след M прямой a и соединить эту точку с точкой схода следов Γ_x.

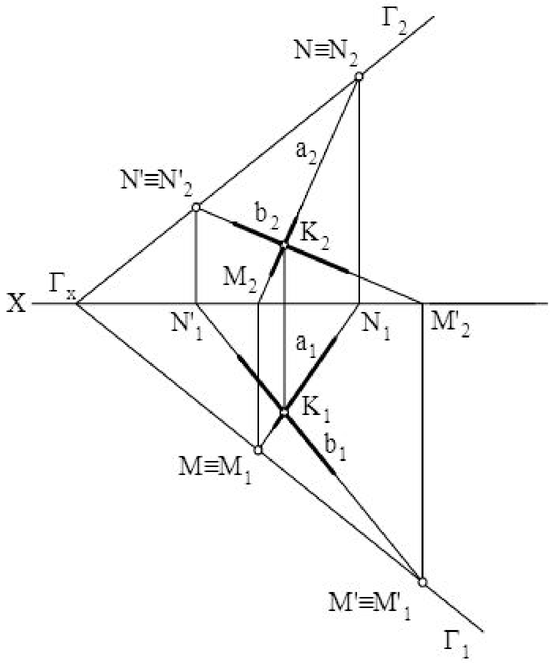


Рис. 3.4

3.2. Прямая и точка в плоскости

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, находящиеся в этой плоскости, или если она проходит через одну точку плоскости и параллельна прямой, принадлежащей данной плоскости (рис. 3.5).

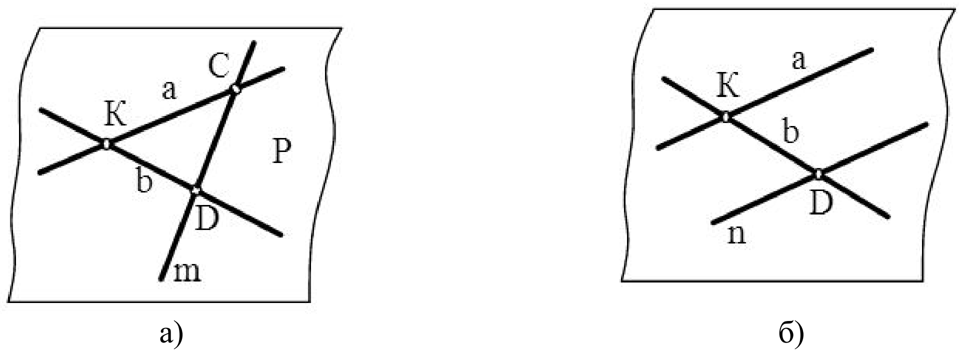


Рис. 3.5

На рис. 3.5, а плоскость P задана двумя пересекающимися прямыми a и b. Чтобы прямая принадлежала этой плоскости, необходимо на прямых a и b взять точки, например C и D, и через них провести прямую m. На рис. 3.5, б прямая n принадлежит плоскости, так как она проходит через точку D, принадлежащую плоскости $a \cap b$ и параллельна прямой a.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, находящейся в этой плоскости. На рис. 3.6 показано построение проекции точки D на чертеже, заданном треугольником ABC.

Для решения задачи проводим в плоскости, заданной треугольником ABC, прямую n (n_1 и n_2), проходящую через произвольно выбранные точки A и 1 ($A_1 1_1$ и $A_2 1_2$) и принадлежащую плоскости треугольника. На прямой n в произвольном месте берем точку D. Фронтальная проекция точки D_2 находится на фронтальной проекции прямой n_2, а горизонтальная проекция точки D_1 – на горизонтальной проекции прямой n_1. Точку D можно было взять и на любой из сторон треугольника ABC.

Чтобы построить проекции точки D, принадлежащей плоскости P, заданной следами (рис. 3.7), проводим в этой плоскости произвольно фронтальную и горизонтальную проекции прямой MN (M_1N_1 и M_2N_2), принадлежащей плоскости P, и на соответствующих проекциях прямой отмечаем проекции точек D_2 и D_1.

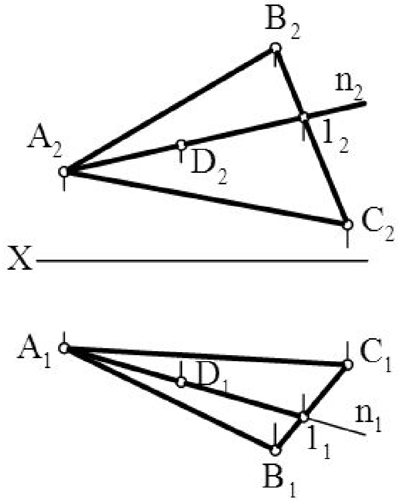


Рис. 3.6

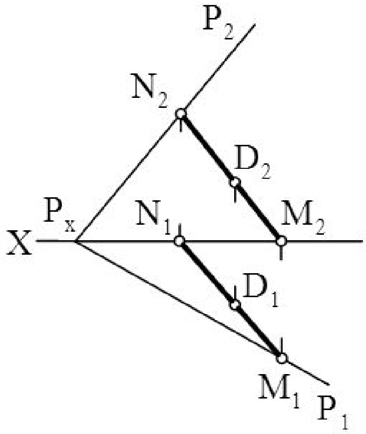


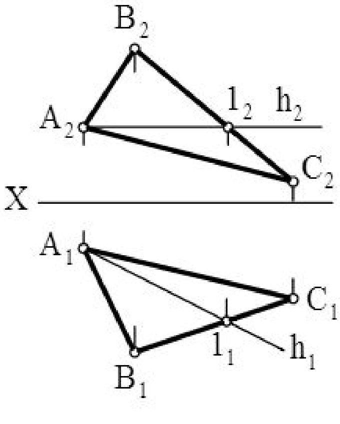
Рис. 3.7

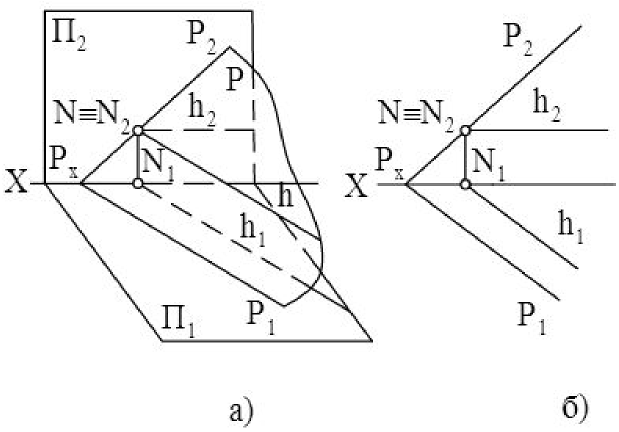
3.3. Главные линии плоскости

К главным линиям плоскости относятся горизонтали (h), фронтали (f), профильные прямые (p) и линии наибольшего наклона к плоскостям проекций.

Горизонталью h (h_1 и h_2) плоскости называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (рис. 3.8). Так как горизонталь плоскости параллельна горизонтальной плоскости проекций $П_1$, то фронтальная ее проекция будет параллельна оси X. Для построения проекций горизонтали проводим через точку A_2 прямую, параллельную оси X. Это будет фронтальная проекция горизонтали (h_2). Горизонтальную проекцию горизонтали (h_1) находим по линии связи.

На рис. 3.9. показано наглядное изображение плоскости P (P_1 и P_2) и горизонтали h с ее проекциями h_2 и h_1. При построении проекций горизонтали на чертеже плоскости, заданной следами P_1 и P_2 (рис. 3.9, а, б), проводим через произвольно выбранную точку N (проекция N_2) на следе P_2 прямую m параллельно оси X. Горизонтальная проекция горизонтали (h_1) пройдет через точку N_1 параллельно горизонтальному следу P_1.





а) б)

Рис. 3.8 Рис. 3.9

Фронталью плоскости f (f_1 и f_2) называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали на чертеже параллельна оси X, а фронтальную проекцию фронтали находим при помощи линии связи (рис. 3.10).

На рис. 3.11, а показано наглядное изображение плоскости Г ($Г_1$ и $Г_2$) и фронтали f с ее проекциями f_1 и f_2, а на рис. 3.11, б представлен чертеж плоскости, заданной следами, и горизонтальная и фронтальная проекции фронтали этой плоскости.

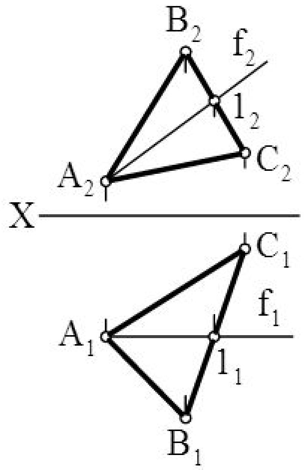


Рис. 3.10

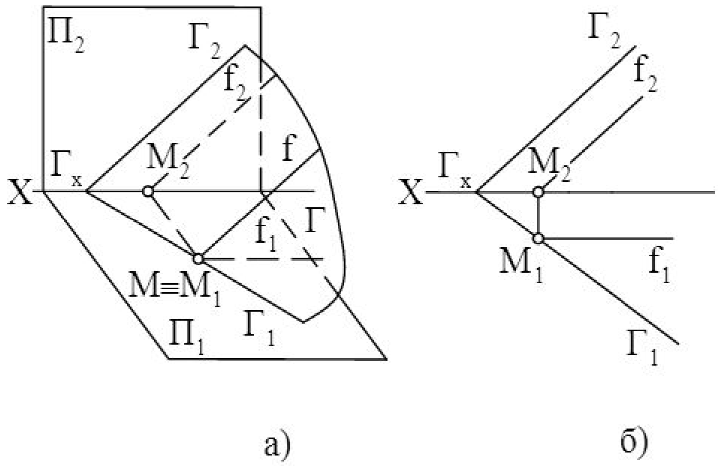


Рис. 3.11

Профильной прямой p (p_1, p_2, p_3) называется прямая линия, принадлежащая плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рис. 3.12).

В этом случае фронтальная и горизонтальная проекции профильной прямой p (E_1F_1 и E_2F_2) параллельны $П_3$, а профильная проекция E_3F_3 = EF, т.е. равняется натуральной величине отрезка EF.

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций (горизонтальной, фронтальной и профильной) называются прямые, принадлежащие этой плоскости и перпендикулярные фронталям, горизонталям, профильным прямым плоскости, или же соответствующим следам плоскости. Линию наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций чаще всего называют линией ската.

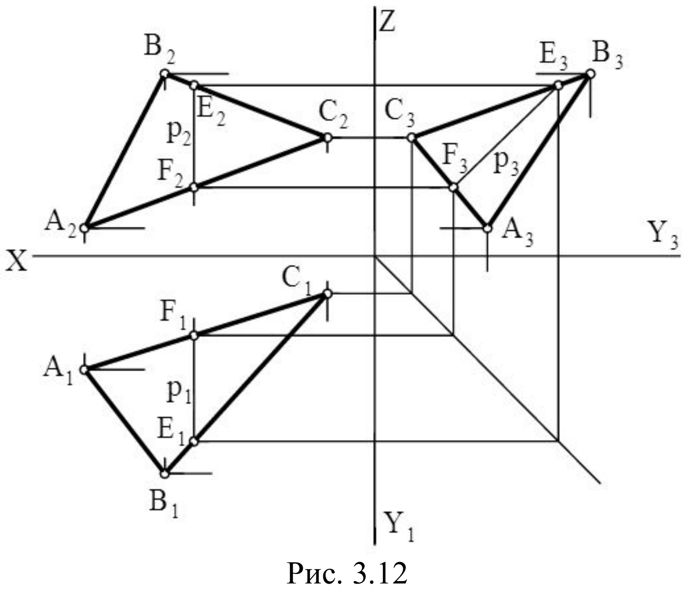


Рис. 3.12

Так, если в точку А плоскости Г (рис. 3.13, а) поместить шарик, то траектория его движения определится прямой линией АМ (A_1M_1, A_2M_2), т.е. линией ската, перпендикулярной к горизонтали h (h_1, h_2), а также к горизонтальному следу $Г_1$ плоскости Г.

Чтобы в плоскости Г ($Г_1$, $Г_2$) (рис. 3.13, б), заданной следами, провести линию ската, необходимо на этой плоскости взять произвольную точку А (A_1, A_2) и через ее горизонтальную проекцию A_1 провести линию перпендикулярно горизонтальному следу либо горизонтальной проекции горизонтали (h_1). Прямой угол между h_1 и M_1N_1' спроецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, так как одна из его сторон, а именно горизонталь, параллельна горизонтальной плоскости проекций, но h_1 параллельна $Г_1$, следовательно, угол между $Г_1$ и M_1N_1 тоже прямой.

Как видно из рис. 3. 13, а, линейный угол AM_1A_1, заключенный между линией ската AM_1 и ее горизонтальной проекцией M_1A_1, равняется двугранному углу, образованному плоскостями Г и $П_1$.

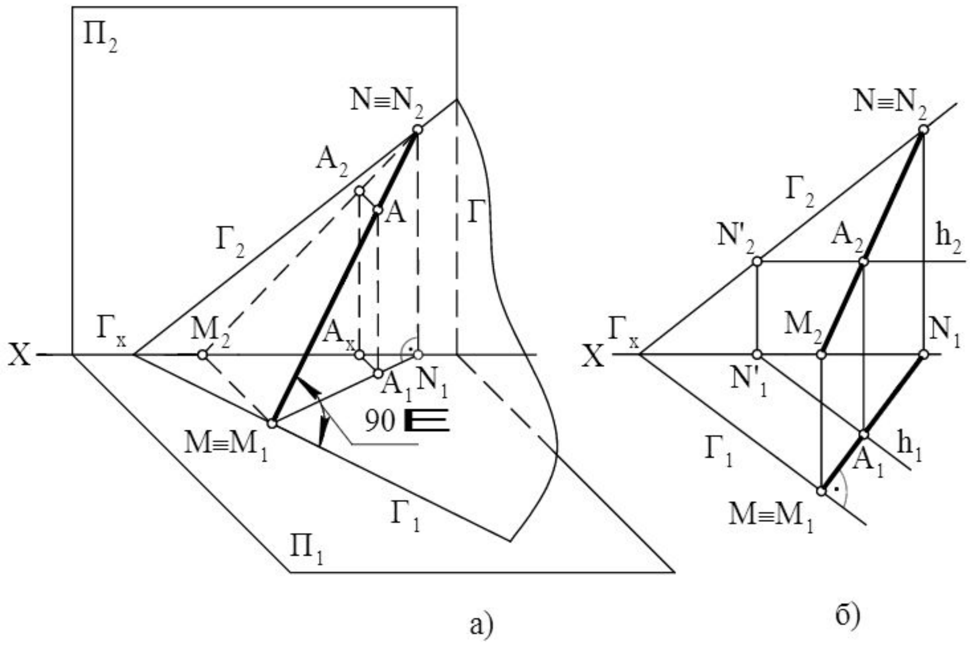


Рис. 3.13

Чтобы определить угол наклона плоскости, заданной треугольником АВС, к плоскости проекций $П_1$ (рис. 3.14), необходимо выполнить следующее: провести в плоскости треугольника АВС горизонталь h (h_1 и h_2), затем из точки B_1 провести горизонтальную проекцию линии ската (B_1K_1) перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали и по линии связи определить фронтальную проекцию линии ската (B_2K_2). Построив на горизонтальной проекции линии ската B_1K_1 прямоугольный треугольник $B_1K_1B_0$, одним катетом которого является горизонтальная проекция линии ската B_1K_1, а вторым – превышение (Δz) точки В (B_2) над точкой К (K_2) относительно горизонтальной плоскости проекций, получим угол α, заключенный между горизонтальной проекцией линии ската и ее натуральной величиной. Это и есть угол наклона треугольника АВС к плоскости проекций $П_1$.

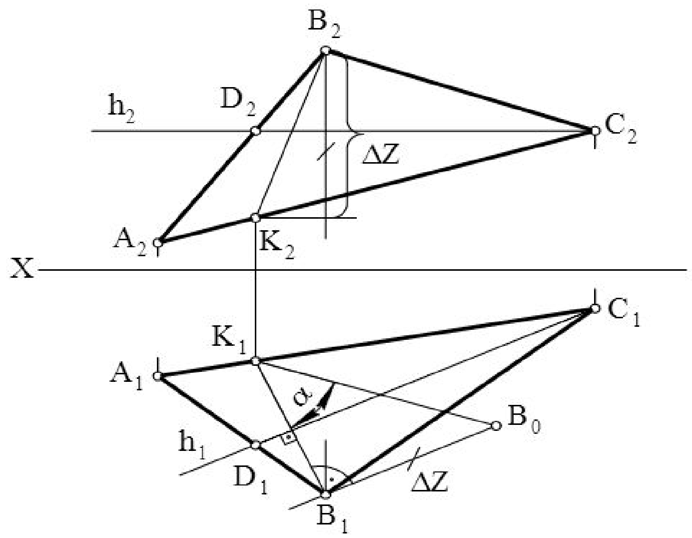


Рис. 3.14

Определение угла наклона плоскости к плоскостям проекций $П_2$ и $П_3$ производится аналогичным образом. Для этого необходимо провести фронталь в плоскости, а затем линию перпендикулярно к ней, или же профильную прямую и перпендикуляр к ней.

3.4. Положение плоскости относительно плоскостей проекций

Плоскость в пространстве может занимать относительно плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$ следующие положения: наклонно ко всем плоскостям проекций – плоскость общего положения (см. рис. 3.2, 3.3), перпендикулярно к одной из плоскостей проекций – проецирующая плоскость, перпендикулярно одновременно к двум плоскостям проекций, т.е. параллельно третьей плоскости проекций – плоскость уровня.

Проецирующие плоскости: горизонтально-проецирующая (перпендикулярна к $П_1$), фронтально-проецирующая (перпендикулярна к $П_2$), профильно-проецирующая (перпендикулярна к $П_3$).

В горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 3.15, а, б) фронтальный след $Г_2$ расположен перпендикулярно к плоскости проекций $П_1$ и к оси OX, а горизонтальный след может быть расположен под любым углом, кроме прямого. Горизонтальный след обладает собирательным свойством, т.е. любая точка, фигура, находящаяся в плоскости Г, всегда проецируется на горизонтальный след Г1, это относится и к точке А (см. рис. 3.15, а, б), принадлежащей плоскости Г.

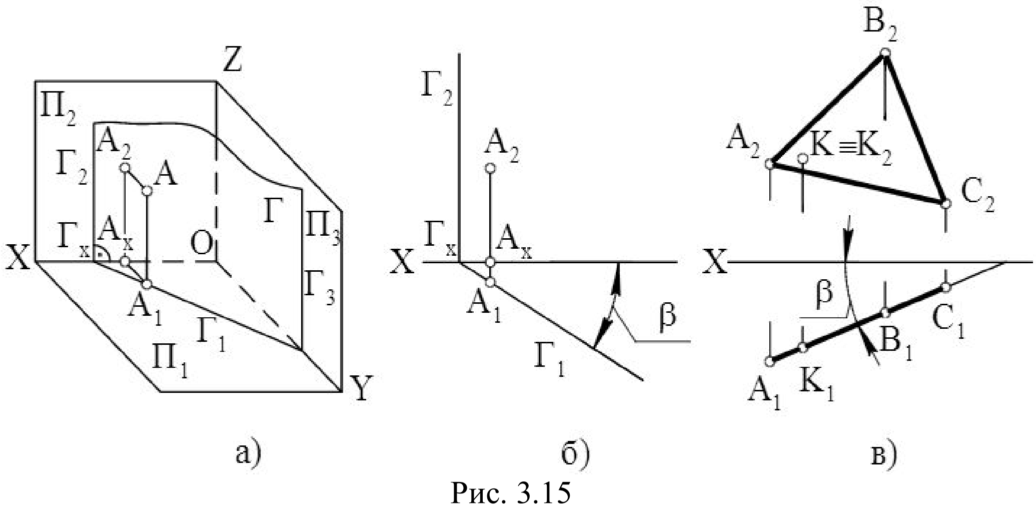


Рис. 3.15

На рис. 3.15, в изображен треугольник ABC, который занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций $П_1$. Точка К принадлежит данному треугольнику. Фронтальная ее проекция K_2 совпадает с К ($K_2 \equiv K$). Горизонтальная проекция K_1 проецируется на горизонтальную проекцию треугольника $A_1B_1C_1$. Угол β, заключенный между осью X и горизонтальным следом плоскости $Г_1$, а также между горизонтальной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ и осью X, есть угол наклона плоскостей Г и треугольника ABC к фронтальной плоскости проекций.

Фронтально-проецирующие плоскости P, изображенные наглядно следами P_2, P_1 и треугольником BCD ($B_1C_1D_1$ и $B_2C_2D_2$), показаны на рис. 3.16, а, б, в.

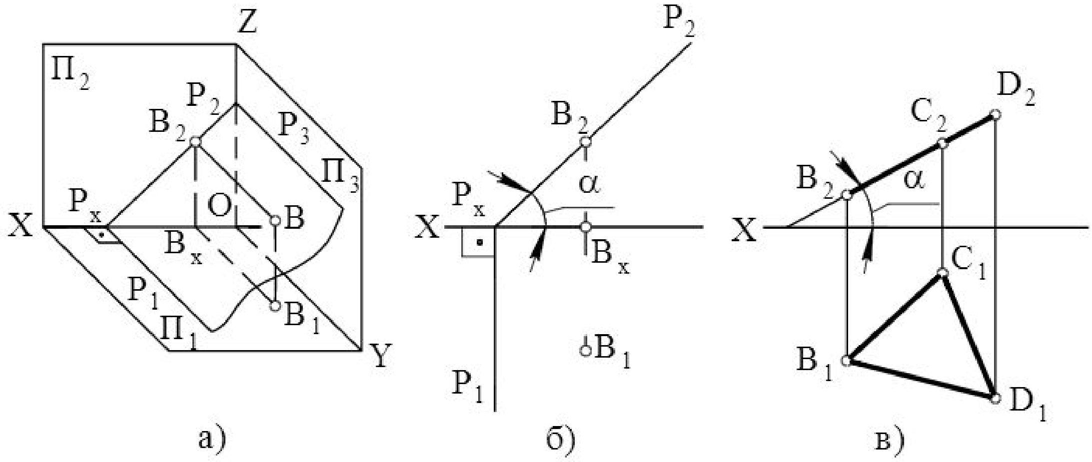


Рис. 3.16

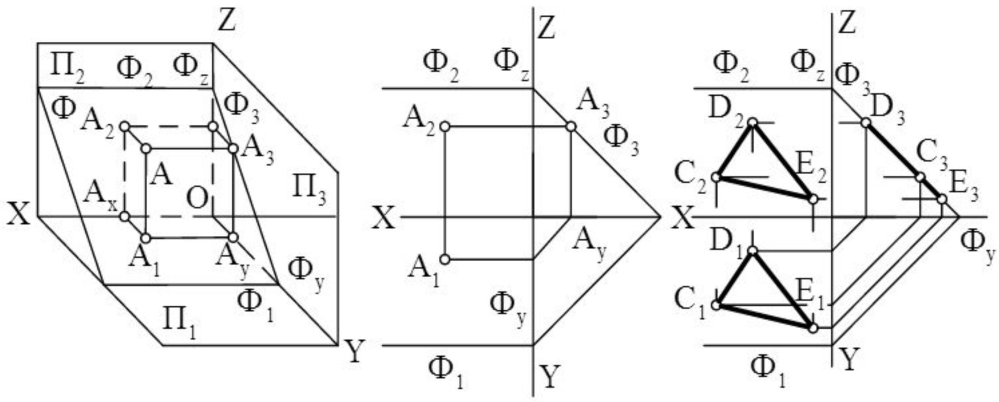
В данном случае (см. рис. 3.16, а и б) горизонтальный след P_1 расположен перпендикулярно $П_2$ и оси X. Точка B, находящаяся в плоскости P, спроецируется обязательно на фронтальный след P_2. Треугольник BCD (см. рис. 3.16, в) занимает проецирующее положение относительно плоскости проекций $П_2$, поэтому фронтальная его проекция изобразится в виде отрезка прямой $B_2C_2D_2$.

Угол α (см. рис. 3.16, б, в), заключенный между P_2 и осью X, а также между $B_2C_2D_2$ и осью X, есть угол наклона плоскостей P и BCD к плоскости проекций $П_1$.

Профильно-проецирующая плоскость показана на рис. 3.17. На рис. 3.17, а показано наглядное изображение профильно-проецирующей плоскости Ф, точка А, принадлежащая этой плоскости и ее проекции. Профильная проекция точки A_3 находится на профильном следе $Ф_3$. На рис. 3.17, б и рис. 3.17, в изображены профильно-проецирующие плоскости, заданные следами плоскости Ф ($Ф_1$, $Ф_2$, $Ф_3$) и треугольником CDE ($C_1D_1E_1$; $C_2D_2E_2$; $C_3D_3E_3$).

Профильно-проецирующая плоскость, проходящая через ось X, называется осевой, а если она делит двугранный угол между плоскостями проекций $П_1$ и $П_2$ пополам, то она еще называется биссекторной.

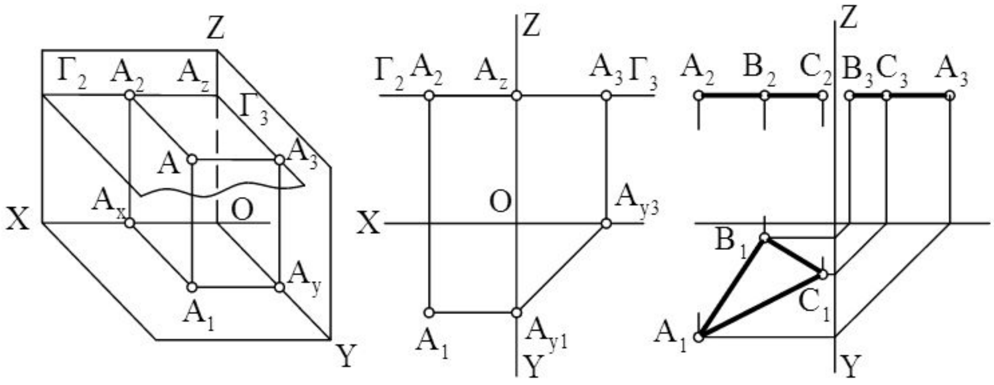
Плоскости уровня. К ним относятся горизонтальная плоскость – параллельная $П_1$, фронтальная – параллельная $П_2$ и профильная – параллельная $П_3$. Эти плоскости уровня перпендикулярны одновременно двум другим плоскостям проекций. Например, горизонтальная плоскость перпендикулярна одновременно фронтальной и профильной плоскостям проекций.



а) б) в)

Рис. 3.17

На рис. 3.18, а показано наглядное изображение горизонтальной плоскости Г (Г2, Г3) в системе плоскостей проекций П1, П2 и П3, а на рис. 3.18, б – чертеж данной плоскости, изображенный фронтальным и профильным следами (Г1 и Г3). Показано также, как точка А, находящаяся в плоскости Г, проецируется на плоскости проекций.



а) б) в)

Рис. 3.18

Горизонтальная плоскость, заданная треугольником АВС (см. рис. 3.18, в), изображена проекциями $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$. При этом фронтальная и профильная проекции изображаются отрезками прямых линий, а горизонтальная – треугольником, который равняется истинной величине треугольника АВС, т.к. он в пространстве занимает параллельное положение относительно плоскости проекций П1.

На рис. 3.19, а и б изображена фронтальная плоскость Ф, где показаны горизонтальный $Ф_1$ и профильный $Ф_3$ следы этой плоскости, а также проекции точки А, принадлежащей этой плоскости. В данном случае горизонтальная и профильная проекции точки А совпадают с соответствующими следами.

Проекции треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ также изображают фронтальную плоскость треугольника АВС. Горизонтальная проекция $A_1B_1C_1$ проходит параллельно оси Х, тогда фронтальная проекция $A_2B_2C_2$ проецируется в натуральную величину: $A_2B_2C_2$ = АВС.

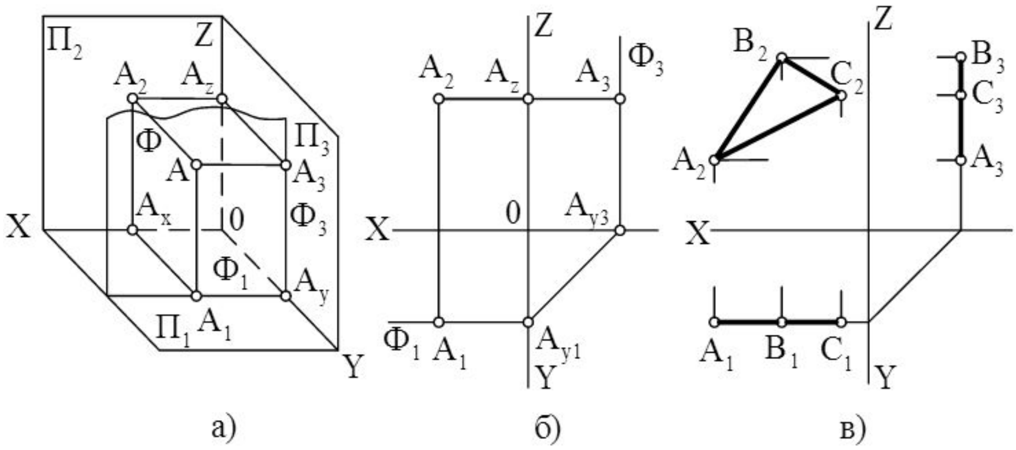


Рис. 3.19

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Какие способы задания плоскости на комплексном чертеже Вы знаете?
2. Как построить на комплексном чертеже точку, принадлежащую плоскости?
3. Какими способами может быть задана плоскость на чертеже?
4. Что такое след плоскости?
5. Назовите условие принадлежности прямой плоскости.
6. Какие вы знаете главные линии плоскости?
7. Какие положения может занимать плоскость относительно плоскостей проекций?
8. Как изображаются плоскости частного положения в системе плоскостей проекций?

ТЕМА 4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

4.1. Прямая линия, параллельная плоскости

Прямая линия относительно плоскости может занимать следующие положения: находиться в плоскости, быть параллельной плоскости и пересекаться с плоскостью.

Из геометрии известно, что прямая линия параллельна плоскости, если она параллельна любой прямой, находящейся в этой плоскости. Пусть требуется через точку D (D_1, D_2) провести прямую, параллельную плоскости, заданной треугольником ABC ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (рис. 4.1).

В треугольнике ABC проводим произвольно отрезок ВК (B_2K_2 и B_1K_1), а через точку D (D_1, D_2) проводим прямую m, параллельную данному отрезку, т.е. $m_2 \parallel K_2B_2$, а $m_1 \parallel K_1B_1$. Через данную точку D можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных плоскости треугольника ABC, в том числе и параллельных сторонам треугольника.

Если бы была поставлена задача провести через точку D прямую, параллельную треугольнику ABC и фронтальной плоскости проекций, то в данном случае можно провести только одну прямую, параллельную и треугольнику и Π_2. Для этого в треугольнике проводим фронталь f (f_1, f_2), а через точку D (D_1, D_2) – прямую n (n_1, n_2), параллельную фронтали ($n_1 \parallel f_1$, $n_2 \parallel f_2$), (рис. 4.2).

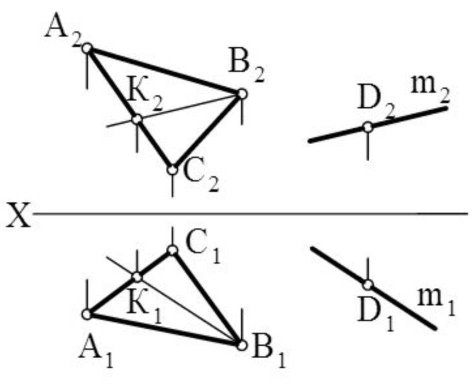


Рис. 4.1

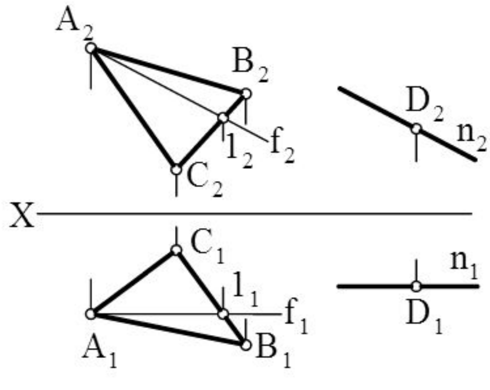


Рис. 4.2

В случае построения прямой, параллельной плоскости Р, заданной следами, необходимо в плоскости Р провести произвольно прямую или горизонталь (фронталь), а затем провести проекции прямой, проходящей через точку D (D2, D1), параллельные соответствующим проекциям прямых, взятых в плоскости Р (рис. 4.3).

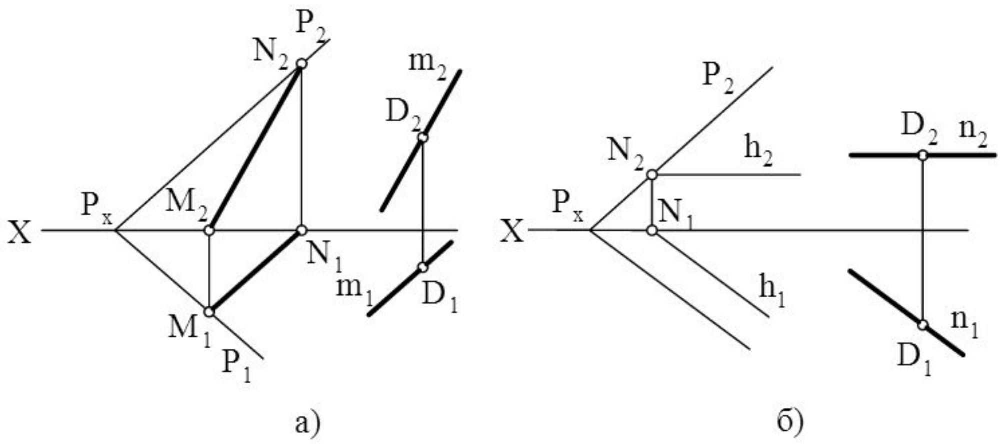


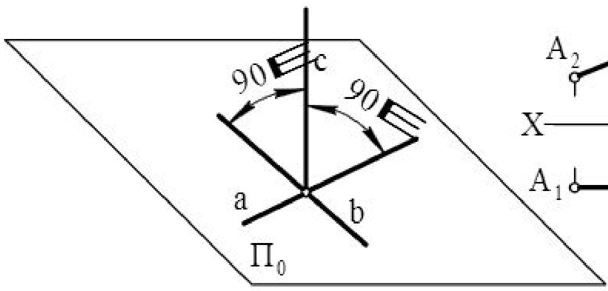
Рис. 4.3

На рис. 4.3, а в плоскости P проведен отрезок произвольной прямой MN (M_1N_1, M_2N_2), а через точку D – прямая m (m_1, m_2), одноименные проекции которой параллельны проекциям отрезков, взятых в плоскости, т.е. $m_1 \parallel M_1N_1$, $m_2 \parallel M_2N_2$.

На рис. 4.3, б в плоскости P проведена горизонталь h (h_1, h_2), а через D1 – прямая n_1, параллельная h_1, и через D_2 проведена прямая n_2, параллельная h_2.

4.2. Прямая линия, перпендикулярная плоскости

Прямая линия перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости (рис. 4.4). На комплексном чертеже легко построить проекции прямого угла между прямой общего положения и линией уровня (фронталью, горизонталью). На основании свойств прямого угла прямой угол проецируется в натуральную величину, например, на Π_2, если одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций, т.е. является фронталью. Чтобы прямой угол проецировался на Π_1 без искажения, необходимо, чтобы одна из его сторон была параллельна Π_1, т.е. была горизонталью. На рис. 4.5 показано, как проведен перпендикуляр из точки K к фронтали и горизонтали.



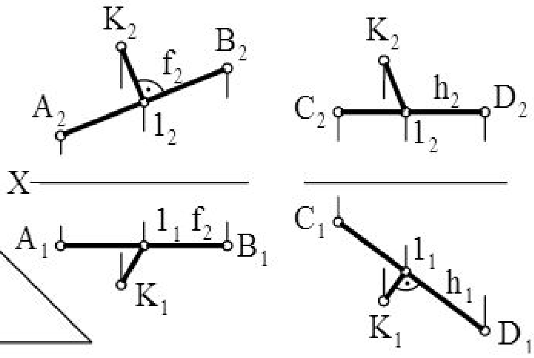


Рис. 4.4 Рис. 4.5

Если задать плоскость двумя пересекающимися прямыми (AB ∩ AD), одна из которых будет фронталью, а вторая – горизонталью и провести из точки A_2 перпендикуляр к A_2B_2, т.е. к фронтальной проекции фронтали, а из A_1 – перпендикуляр к A_1D_1, т.е. к горизонтальной проекции горизонтали, то этот отрезок будет перпендикулярен заданной плоскости (рис. 4.6).

Для того чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на чертеже ее горизонтальная проекция была перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция прямой – перпендикулярна фронтальной проекции фронтали.

В случае, если плоскость задана следами, то, учитывая, что горизонтальная проекция горизонтали (h_1) всегда параллельна горизонтальному следу $Г_1$, а фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу $Г_2$, то, чтобы из точки К ($К_1$, $К_2$) провести прямую перпендикулярно плоскости Г (рис. 4.7), необходимо ее горизонтальную проекцию провести перпендикулярно горизонтальному следу $Г_1$, а фронтальную проекцию – перпендикулярно фронтальному следу $Г_2$.

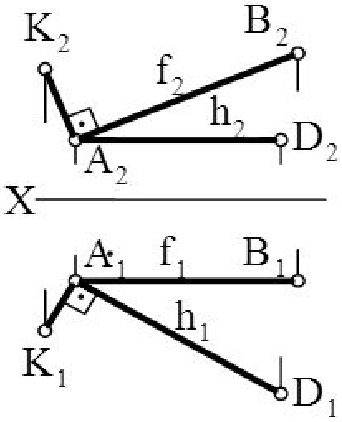


Рис. 4.6

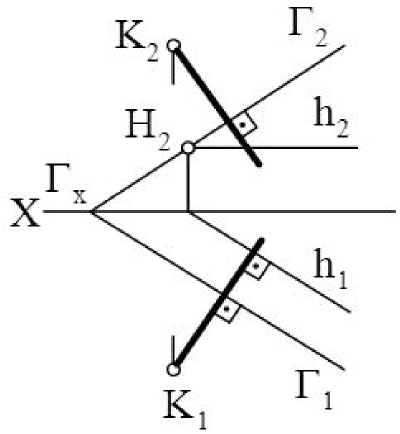
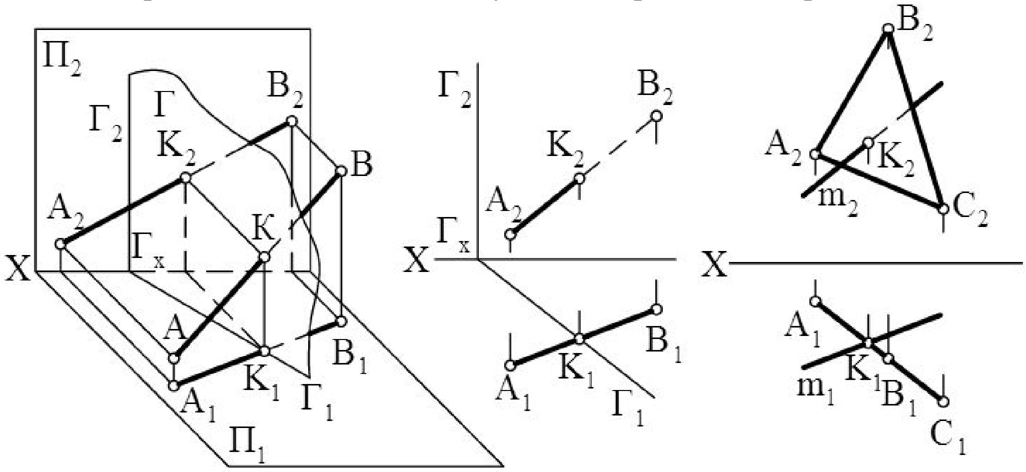


Рис. 4.7

4.3. Прямая линия, пересекающаяся с плоскостью частного положения

Точку пересечения (встречи) прямой линии с плоскостью частного положения определяют непосредственно из чертежа, без дополнительных построений, так как известно, что следы плоскостей частного положения обладают собирательным свойством, и любая точка, находящаяся в плоскости, обязательно проецируется на один из следов плоскости; вторая проекция точки находится по линии связи. Подробно это рассмотрим на примере пересечения отрезка АВ с горизонтально проецирующей плоскостью Г (рис. 4.8).

Отрезок АВ пересекается с плоскостью Г ($Г_1$, $Г_2$) в точке К, горизонтальная ее проекция $К_1$ находится на следе $Г_1$, как точка, принадлежащая этой плоскости. Фронтальная проекция $К_2$ определяется по линии связи (см. рис. 4.8, а и б). Часть отрезка КВ ($К_2В_2$) на фронтальной плоскости проекций, а именно, за точкой пересечения К, закрыта плоскостью, поэтому она изображается штриховой линией.



а) б) в)

Рис 4.8

На рис. 4.8, в приведен пример определения точки пересечения прямой m (m_1, m_2) с горизонтально-проецирующей плоскостью, заданной треугольником ABC ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$).

На рис. 4.9, а приведен пример нахождения точки пересечения прямой a с фронтально-проецирующей плоскостью Г. Фронтальная проекция K_2 находится на пересечении фронтальной проекции прямой a_2 с фронтальным следом $Г_2$. K_1 определена по линии связи. Определение проекций точек пересечения прямой b с горизонтальной плоскостью Ф ($Ф_2$) и прямой d с фронтальной плоскостью Λ ($Λ_1$) показано на рис. 4.9, б и 4.9, в.

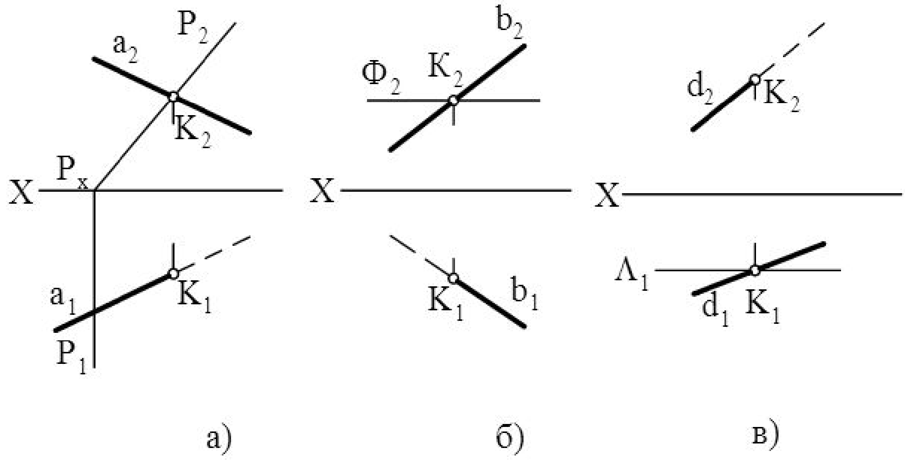


Рис. 4.9

4.4. Пересечение плоскости частного положения с плоскостью общего положения

Рассмотрим построение линии пересечения плоскости общего положения Г и проецирующей Р, заданных следами (рис. 4. 10).

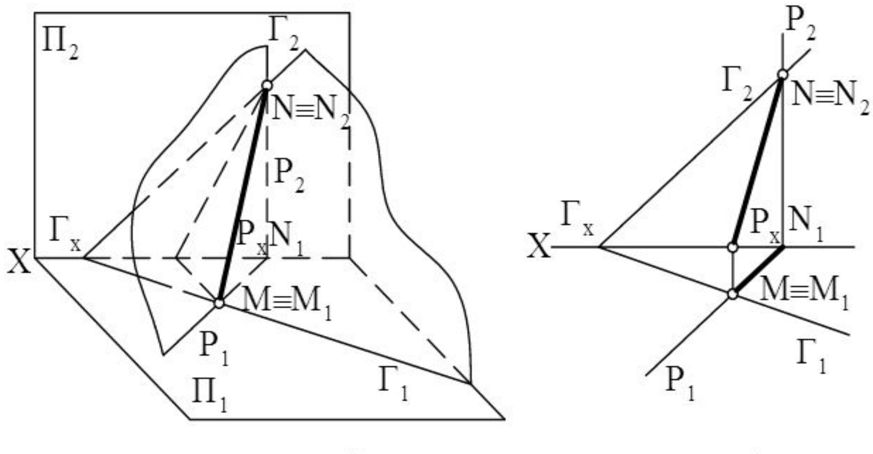
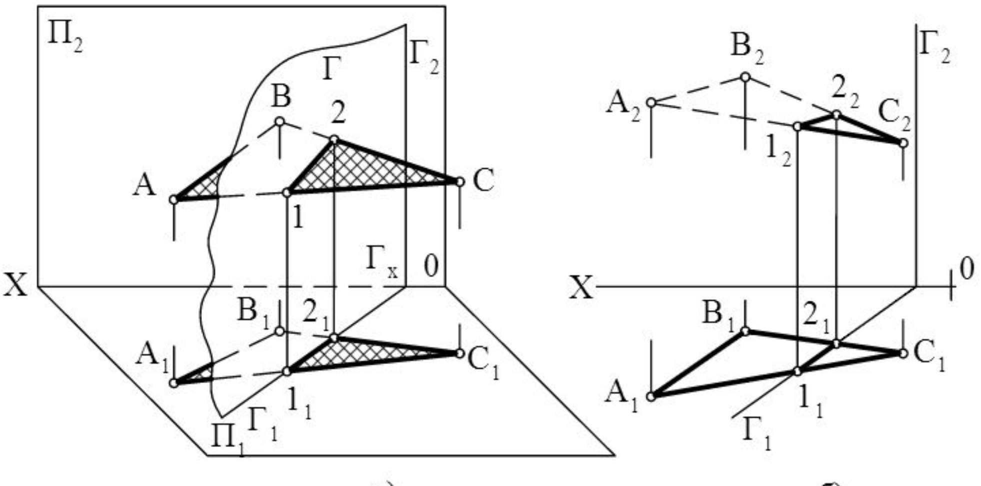


Рис. 4.10

Из наглядного изображения (рис. 4.10, а) видно, что на пересечении горизонтальных следов плоскостей Г и Р ($Г_1$ и P_1) находится горизонтальный след линии пересечения этих плоскостей М и его горизонтальная проекция М1. На пересечении фронтальных следов $Г_2$ и P_2 находится фронтальный след линии пересечения N и его проекция N_2. Соединив одноименные проекции точек М и N, получим фронтальную и горизонтальную проекции линии пересечения M_2N_2 и M_1N_1, причем последняя совпадает с горизонтальным следом плоскости P_1. Это же решение показано на чертеже (см. рис. 4.10, б).

Пример построения линии пересечения горизонтально-проецирующей плоскости Г, заданной следами, и плоскости общего положения, заданной треугольником, приведен на рис. 4.11.

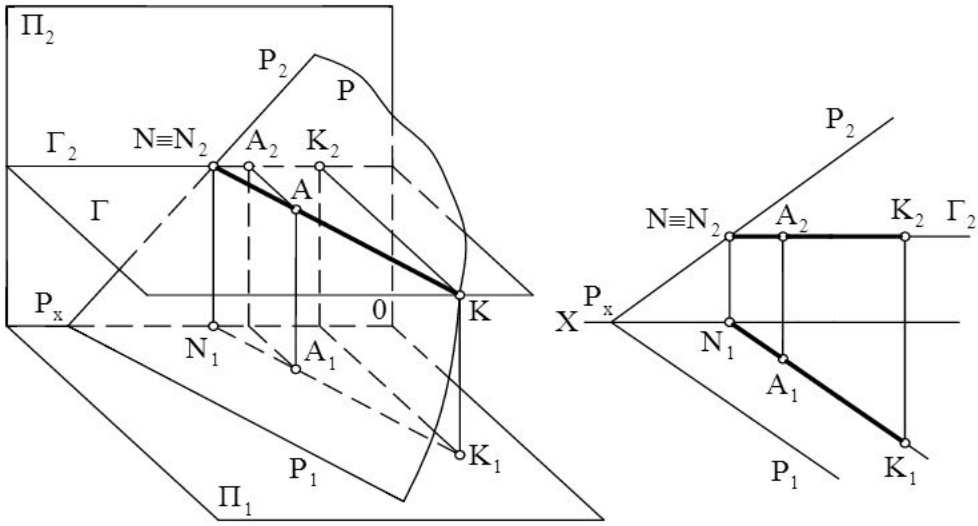


а) б)

Рис. 4.11

На рис. 4.11, а показано наглядное изображение двух плоскостей с линией пересечения 12, на рис. 4.11, б это показано на чертеже. Горизонтальная проекция линии пересечения 1121 в таких случаях находится всегда на горизонтальном следе.

Построение линии пересечения плоскости общего положения Р и плоскости уровня, в частности, горизонтальной плоскости Г, показано на рис. 4.12.



а) б)

Рис. 4.12

Так как плоскость Г ($Г_2$) и плоскость проекций $П_1$ параллельны между собой, а общей пересекающей их плоскостью является плоскость Р (P_1, P_2), то линия пересечения плоскостей Р и $П_1$ есть горизонтальный след P_1, а плоскостей Г и Р – отрезок прямой линии NK (см. рис. .12, а). Исходя из вышеизложенного, они должны быть параллельны между собой, т.к. две параллельные плоскости одновременно пересекаются третьей плоскостью Р. Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальным следом $Г_2$ плоскости Г и проходит параллельно оси X, горизонтальная проекция линии пересечения проходит параллельно горизонтальному следу P_1, к тому же отрезок NK является горизонталью. На рис. 4.12, б приведен чертеж пересечения плоскости общего положения Р (P_1, P_2) и горизонтальной плоскости Г ($Г_2$).

4.5. Проведение плоскостей частного положения через прямую линию

Для решения задач на определение точек пересечения прямой с различными плоскостями необходимо проводить дополнительные построения, такие, например, как проведение через прямую проецирующих плоскостей или плоскостей уровня. Через прямую общего положения можно провести любую проецирующую плоскость (рис. 4.13, 4.14), а через прямые, параллельные плоскостям проекций, можно провести как проецирующие плоскости, так и плоскости уровня (см. рис. 4.14).

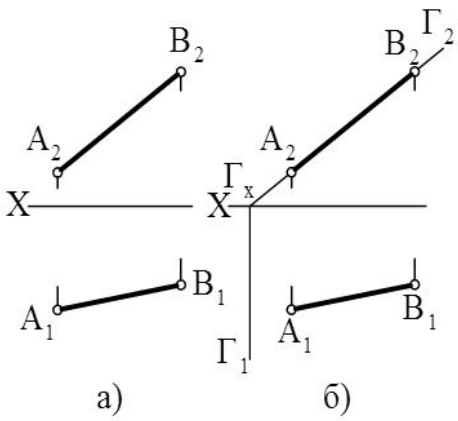


Рис. 4.13

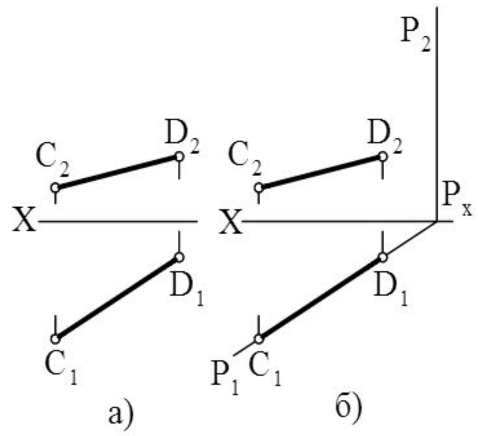


Рис. 4.14

На рис. 4.13, а изображен отрезок прямой AB общего положения, а на рис. 4.13, б через этот отрезок проведена фронтально-проецирующая плоскость Г ($Г_1$, $Г_2$). Через отрезок CD (см. рис. 4.14, а) проведена горизонтально-проецирующая плоскость P (P_1, P_2), что изображено на рис. 4.14, б.

Ниже показаны примеры проведения горизонтальной плоскости Ф (рис. 4.15) и фронтальной T (рис. 4.16) через соответствующие отрезки прямых EF (E_1F_1, E_2F_2) и KM (K_1M_1, K_2M_2).

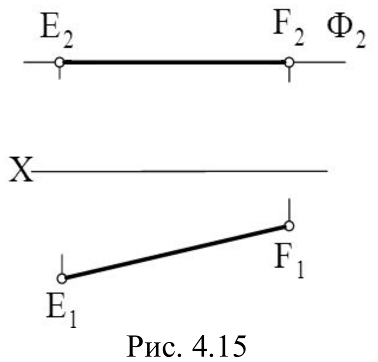


Рис. 4.15

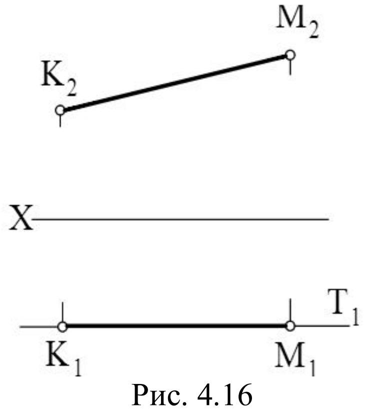


Рис. 4.16

4.6. Пересечение прямой с плоскостью общего положения

Рассмотрим порядок определения точки пересечения прямой m с плоскостью, заданной треугольником ABC (рис. 4.17) и следами Г ($Г_1$, $Г_2$) (рис. 4.18).

Чтобы определить точку пересечения прямой m с плоскостью, заданной треугольником ABC, необходимо выполнить следующее:

- провести через прямую m фронтально-проецирующую плоскость P (P_2);
- определить линию пересечения плоскости P и треугольника ABC 1_2 (1_22_2 и 1_12_1);
- определить точку пересечения прямой m (m_1, m_2) с треугольником ABC. Эта точка находится на линии пересечения плоскостей P и треугольника ABC – 1_2 (1_12_1 и 1_22_2). Сначала определяем горизонтальную проекцию K_1, а затем фронтальную K_2.

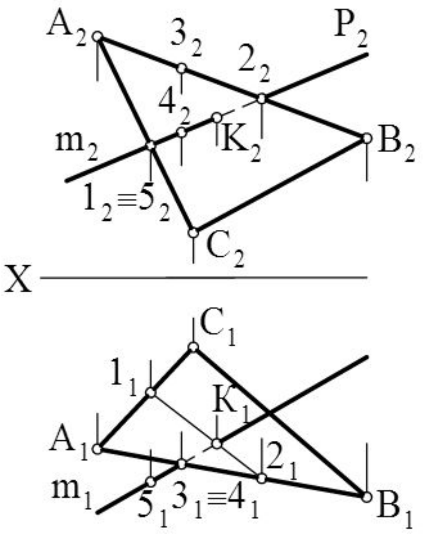


Рис. 4.17

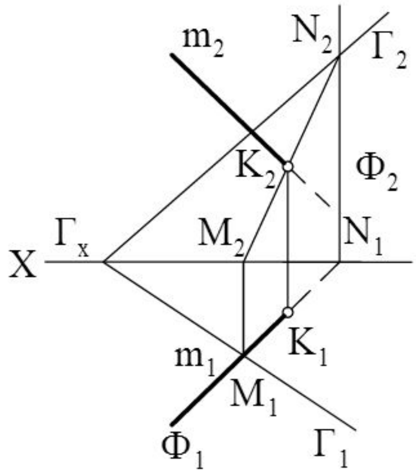


Рис. 4.18

В заключение необходимо определить видимые и невидимые части прямой m относительно плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$, считая, что треугольник ABC является непрозрачным. Для этого необходимо сравнить положение в пространстве двух конкурирующих точек, одна из которых принадлежит прямой m, а вторая – стороне треугольника ABC.

При определении видимости прямой m относительно горизонтальной плоскости проекций рассмотрим взаимное положение прямой m и стороны AB треугольника ABC. В точке пересечения их горизонтальных проекций m_1 и A_1B_1 совпадают две горизонтальные проекции 3_1 и 4_1 точек 3 и 4. Точка 3 (3_1, 3_2) принадлежит стороне AB (A_1B_1, A_2B_2) треугольника ABC, точка 4 (4_1, 4_2) принадлежит прямой m (m_1, m_2). По расположению фронтальных проекций 3_2 и 4_2 этих точек устанавливаем, что точка 3 (3_1, 3_2) находится выше точки 4 (4_1, 4_2) относительно горизонтальной плоскости проекций П1. Это значит, что участок прямой линии m от точки пересечения К ($К_1$, $К_2$) с треугольником ABC до точки 4 (4_1, 4_2) находится под треугольником. Следовательно, горизонтальная проекция отрезка $К_14_1$ будет невидимой и она изображена штриховой линией.

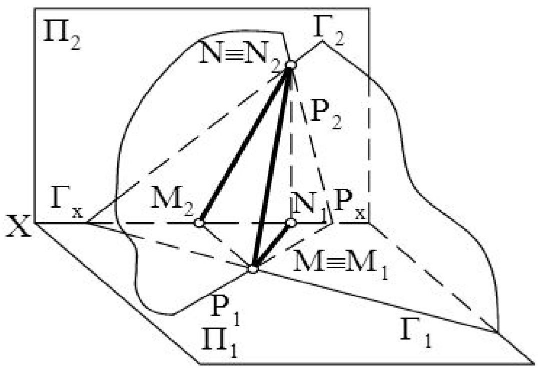
При определении видимости прямой m относительно фронтальной плоскости проекций рассмотрим взаимное положение прямой m и стороны AC треугольника ABC. В точке пересечения их фронтальных проекций m_2 и A_2 C_2 совпадают две фронтальные проекции 1_2 и 5_2 точек 1 и 5. Точка 1 (1_1, 1_2) принадлежит стороне AC (A_1C_1, A_2C_2), точка 5 (5_1, 5_2) принадлежит прямой m (m_1, m_2). По расположению горизонтальных проекций 1_1 и 5_1 этих точек замечаем, что точка 5 (5_1, 5_2) находится далее от плоскости проекции $П_2$ и ближе к нам, чем точка 1 (1_1, 1_2). Это значит, что прямая m до точки пересечения К ($К_1$, $К_2$) с треугольником ABC находится перед треугольником. Следовательно, фронтальная проекция m2 прямой m будет видимой до точки К ($К_1$, $К_2$), а фронтальная проекция отрезка $К_22_2$ будет невидимой и она изображена штриховой линией.

При определении точки пересечения прямой m с плоскостью, заданной следами $Г_1$ и $Г_2$ (рис. 4.18), необходимо также прямую m заключить в горизонтально-проецирующую плоскость Ф ($Ф_1$ и $Ф_2$) и найти их линию пересечения MN (M_1N_1 и M_2N_2). Фронтальная проекция точки пересечения прямой $К_2$ будет находиться на фронтальной проекции линии пересечения M_2N_2, горизонтальная проекция $К_1$ находится при помощи линии связи.

4.7. Пересечение двух плоскостей общего положения

Линия пересечения двух плоскостей – это прямая, принадлежащая как одной, так и другой плоскости. Но положение любой прямой в пространстве определяется положением двух ее точек. Поэтому для построения линии пересечения двух плоскостей надо найти две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям.

Рассмотрим построение линии пересечения двух плоскостей Г и Р, заданных следами (рис. 4.19, а – наглядное изображение, см. рис. 4.19, б – чертеж).



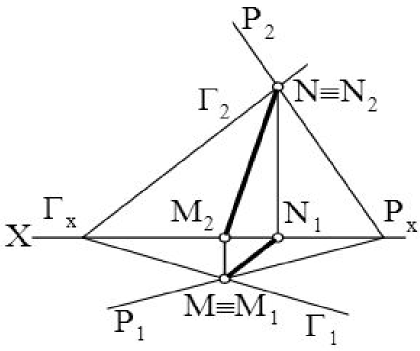


Рис. 4.19

На наглядном изображении (см. рис. 4.19, а) показана линия пересечения этих плоскостей – MN. Она проходит через точку N, в которой пересекаются фронтальные следы $Г_2$ и P_2, и точку M, в которой пересекаются горизонтальные следы $Г_1$ и P_1.

Точка N является фронтальным следом линии пересечения плоскостей, а точка M – горизонтальным следом линии пересечения. Одновременно в этих точках находятся и соответствующие проекции этих следов N_2 и M_1. Так как точка N_2 находится во фронтальной плоскости проекций, то горизонтальная проекция N_1 будет находиться на оси X. Аналогично и с точкой M (M_1 и M_2). Соединяя прямыми линиями одноименные проекции точек M_1 с N_1 и M_2 с N_2, получим проекции прямой MN – линии пересечения плоскостей Г и Р (см. рис. 4.19, б).

При построении линии пересечения двух плоскостей общего положения, заданных непрозрачными треугольниками ABC и DEF (рис. 4.20) воспользуемся способом построения точек пересечения прямой линии с плоскостью общего положения, т.е. в качестве прямых линий примем две стороны, DE и FE, треугольника DEF и определим точки пересечения их с плоскостью, заданной треугольником ABC.

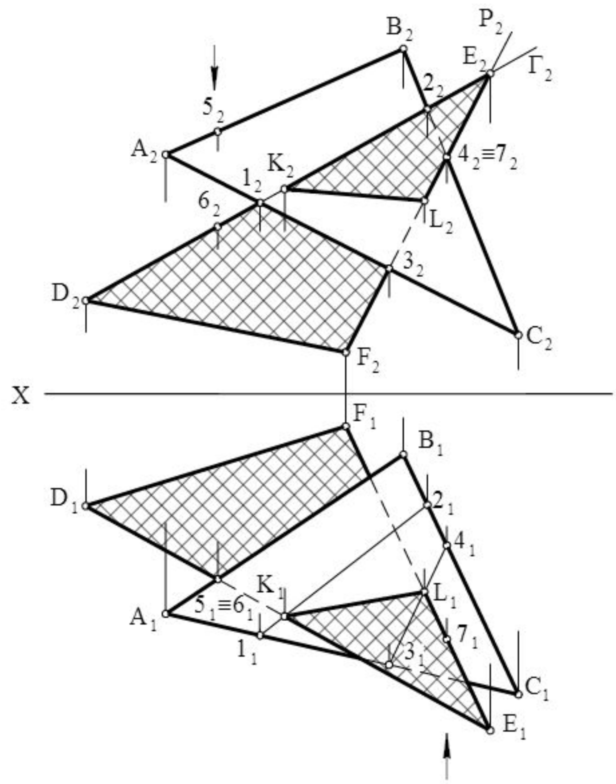


Рис. 4.20

Для нахождения точки пересечения стороны DE треугольника DEF с треугольником ABC проводим через DE фронтально-проецирующую плоскость Г (показан след $Г_2$). Эта плоскость пересекает треугольник ABC по линии 1_2 ($1_2 2_2$, $1_1 2_1$). На пересечении горизонтальной проекции стороны D_1E_1 и горизонтальной проекции линии пересечения $1_1 2_1$ находится горизонтальная проекция точки пересечения $К_1$ стороны DE с треугольником ABC. Фронтальная проекция $К_2$ этой точки определена при помощи линии связи.

Точка пересечения стороны EF (E_1F_1, E_2F_2) треугольника DEF с плоскостью, заданной треугольником ABC, определяется аналогичным образом. Для этого через EF проводим фронтально-проецирующую плоскость Р ($Р_2$).

Видимость участков треугольников определена таким же образом, как и в примере, приведенном на рис. 4.17.

Видимость треугольников относительно горизонтальной плоскости проекций $П_1$ определена при помощи конкурирующих точек 5 (5_1, 5_2) и 6 (6_1, 6_2), находящихся на сторонах AB (A_1B_1, A_2B_2) и DE (D_1E_1, D_2E_2) треугольников. Точка 5 (5_1, 5_2) принадлежит стороне AB (A_1B_1, A_2B_2) треугольника ABC, а точка 6 (6_1, 6_2) принадлежит стороне DE (D_1E_1, D_2E_2) треугольника DEF. Горизонтальные проекции этих точек совпадают ($5_1 \equiv 6_1$), т.к. находятся в точке пересечения горизонтальных проекций сторон A_1B_1 и D_1E_1. Фронтальная проекция 5_2, принадлежащая A_2B_2, находится выше фронтальной проекции 6_2, принадлежащей D_2E_2. Следовательно, горизонтальная проекция A_1B_1 будет видимой на $П_1$.

Относительно фронтальной плоскости проекций $П_2$ видимость определена при помощи конкурирующих точек 4 (4_1, 4_2) и 7 (7_1, 7_2). Так как на $П_1$ горизонтальная проекция 7_1 точки 7, принадлежащая стороне EF (E_1F_1, E_2F_2) расположена дальше от $П_2$, т.е. ближе к нам, чем горизонтальная проекция 4_1 точки 4, принадлежащей стороне BC (B_1C_1, B_2C_2), то видимой на $П_2$ будет фронтальная проекция E_2F_2 стороны EF на участке E_2L_2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Какое положение в пространстве может занимать прямая относительно плоскости?
2. По какому алгоритму строится точка пересечения прямой с плоскостью частного положения?
3. По какому алгоритму строится точка пересечения прямой с плоскостью общего положения?
4. Какое условие параллельности прямой и плоскости?
5. Какое условие перпендикулярности прямой и плоскости?
6. Как определяется видимость участков прямой при пересечении ее с плоскостью?
7. По какому алгоритму строится линия пересечения плоскостей общего положения?
8. Как определяется взаимная видимость пересекающихся плоскостей?

ТЕМА 5. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

5.1. Взаимно параллельные плоскости.
5.2. Взаимно перпендикулярные плоскости.
5.3. Взаимно перпендикулярные прямые.
5.4. Метрические задачи на определение расстояний.

5.1. Взаимно параллельные плоскости

Две плоскости в пространстве могут занимать два различных положения: они могут быть параллельны между собой или пересекаться.

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. Рассмотрим параллельность плоскостей на примере. Пусть требуется через точку К (K_1, K_2) построить плоскость $a \cap b$ ($a_1 \cap b_1$ и $a_2 \cap b_2$), параллельную плоскости, заданной треугольником DEF ($D_1E_1F_1$ и $D_2E_2F_2$) (рис. 5.1).

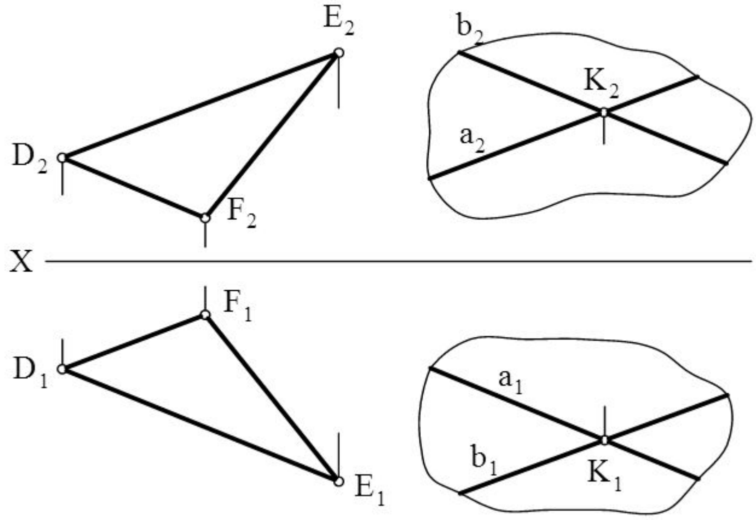
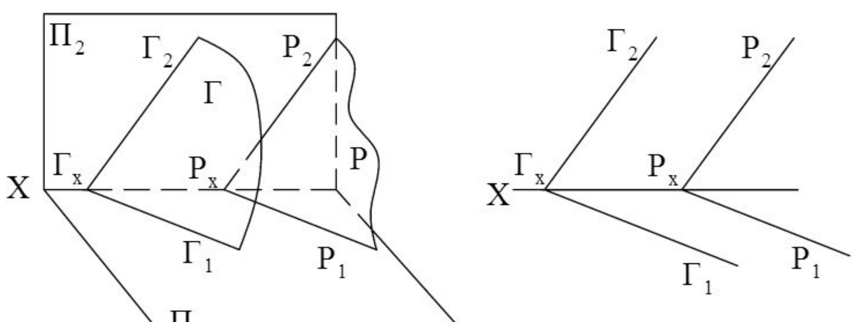


Рис. 5.1

Через точку К проводим прямые $a \parallel DE$ и $b \parallel DF$. Это значит, что горизонтальная проекция a_1 должна быть параллельна D_1E_1, а фронтальная проекция a_2 должна быть параллельна D_2E_2. Что же касается прямой b, то горизонтальная проекция $b_1 \parallel D_1F_1$, а $b_2 \parallel D_2F_2$. Построенная плоскость ($a \cap b$) параллельна плоскости DEF, так как пересекающиеся прямые a и b соответственно параллельны двум пересекающимся сторонам DE и DF треугольника DEF.

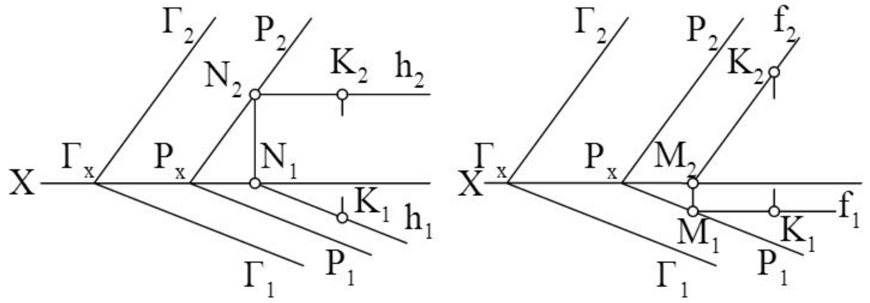
Если плоскости заданы следами, то признаком параллельности данных плоскостей является параллельность одноименных следов P_1 и Γ_1, P_2 и Γ_2 (рис. 5.2, а и б).



а) б)

Рис. 5.2

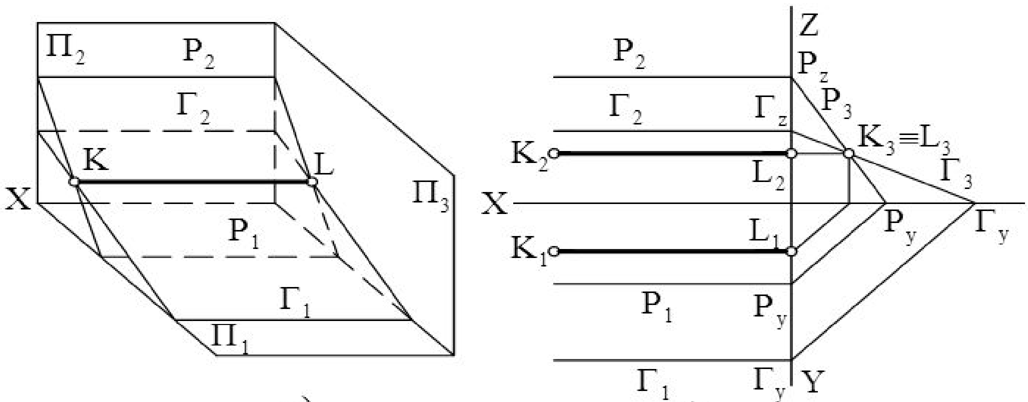
Рассмотрим пример построения параллельной плоскости, проходящей через заданную точку. Пусть требуется через точку К провести плоскость Р (P_1, P_2), заданную следами, параллельно плоскости Г ($Г_1$, $Г_2$), также заданной следами (рис. 5.3).



а) б)

Рис. 5.3

Для решения задачи через точку К проводим в первом случае горизонталь h (h_1, h_2) (см. рис. 5.3, а), т.е. h_1 проводим параллельно следу плоскости $Г_1$, а h_2 – параллельно оси X и находим фронтальный след этой горизонтали N (N_1 и N_2). Через N_2 проводим фронтальный след плоскости P_2 параллельно $Г_2$, а через точку схода следов $Г_x$ проводим $Г_1$ параллельно P_1. Во втором случае (см. рис. 5.3, б), чтобы построить плоскость Р, параллельную плоскости Г, применена фронталь f (f_1, f_2). Ход решения виден из чертежа. Это относится ко всем видам плоскостей, за исключением профильно-проецирующих плоскостей. Чтобы определить, параллельны ли такие плоскости при параллельности одноименных следов, например, горизонтальных и фронтальных (рис. 5.4, а, б), необходимо построить профильные следы данных плоскостей. Если они параллельны, то и плоскости параллельны, а если пересекаются, то и плоскости пересекаются (см. рис. 5.4). В данном случае профильные проекции следов пересекаются: $P_3 \cap Г_3$, следовательно, плоскости также пересекаются. Проекциями линии пересечения KL служат отрезки K_1L_1, K_2L_2 и $K_3 \equiv L_3$.



а) б)

Рис. 5.6

Следует отметить, что плоскости также пересекаются, если хотя бы одна пара одноименных следов пересекается. На рис. 5.5, а показаны две горизонтально-проецирующие плоскости, Т (T_1 и T_2) и Ф ($Ф_1$ и $Ф_2$), у которых фронтальные следы $Ф_2$ и T_2 параллельны, а горизонтальные пересекаются. Такие плоскости пересекаются по линии АВ. На рис. 5.5, б показана фронтальная проекция линии пересечения A_2B_2. Горизонтальная проекция этой линии проецируется в точку $A_1 \equiv B_1$, т.к. расположена перпендикулярно к плоскости проекций $П_1$.

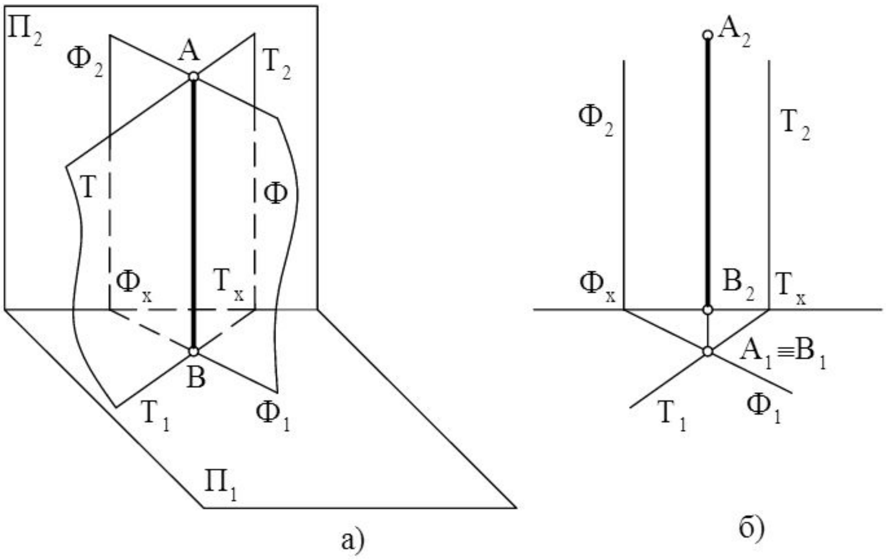


Рис. 5.5

5.2. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны:

- если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости (рис. 5.6);
- если одна из плоскостей проходит перпендикулярно прямой, расположенной в другой плоскости (рис. 5.7).

Иными словами, две плоскости взаимно перпендикулярны, если имеется возможность провести прямую, принадлежащую одной плоскости и одновременно перпендикулярную к другой плоскости.

В первом случае (см. рис. 5.6) плоскость Р перпендикулярна плоскости Г, так как проходит через отрезок АМ, перпендикулярный плоскости Г. На рис. 5.7 плоскость Р перпендикулярна плоскости Г, так как проходит перпендикулярно отрезку АВ, принадлежащему плоскости Г.

Рассмотрим построение взаимно перпендикулярных плоскостей на чертеже. Пусть требуется провести плоскость через отрезок прямой DE (D_1E_1, D_2E_2), перпендикулярную плоскости, заданной треугольником АВС ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$). Задача будет решена, если из точки D отрезка DE провести прямую перпендикулярно к треугольнику АВС (рис. 5.8). Для этого в треугольнике АВС проводим фронталь и горизонталь. Затем из точки D1 проводим перпендикуляр D_1K_1 к h_1 (горизонтальная проекция горизонтали), а из точки D_2 – перпендикуляр D_2K_2 к f_2 (фронтальная проекция фронтали). Таким образом, плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми (KD ∩ DE), перпендикулярна треугольнику АВС, т.к. проходит через перпендикуляр к нему DK.

Рассмотрим второй случай. Пусть требуется из точки D провести плоскость перпендикулярно к стороне АС треугольника АВС (рис. 5.9).

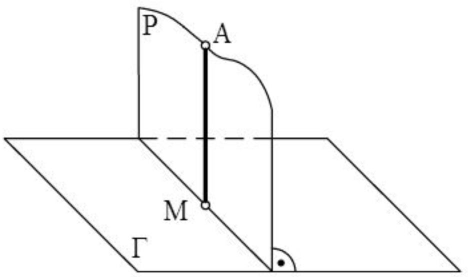


Рис. 5.6

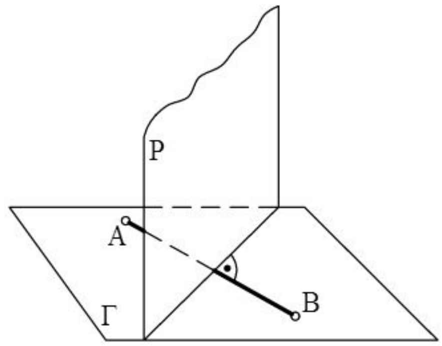


Рис. 5.7

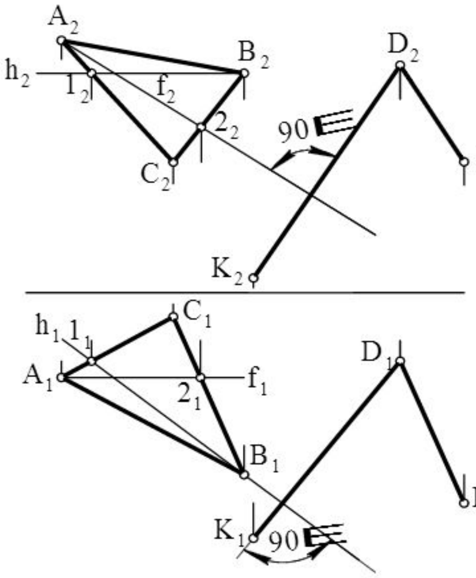


Рис. 5.8

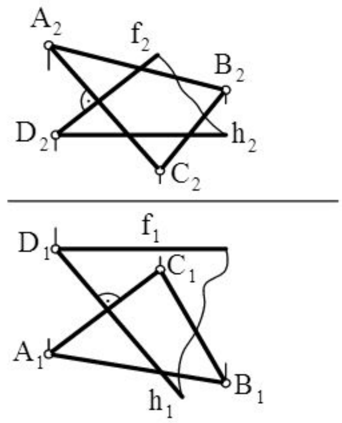


Рис. 5.9

Иными словами, чтобы сторона АС была перпендикулярна новой плоскости, проходящей через точку D, A_1C_1 должна быть перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали (h_1), а A_2C_2 – перпендикулярна фронтальной проекции фронтали f_2 новой плоскости ($h \cap f$). Поэтому из точки D1 проводим h_1 перпендикулярно A_1C_1 (h_2 пройдет параллельно оси X), а из точки D_2 проводим перпендикуляр к f_2 (f_1 пройдет параллельно оси X). Данные плоскости взаимно перпендикулярны, т.к. плоскость ($f \cap h$) проходит перпендикулярно стороне АС треугольника АВС.

На приведенных примерах (рис. 5.10 и рис. 5.11) изображены взаимно перпендикулярные плоскости, которые заданы треугольником АВС и следами плоскости.

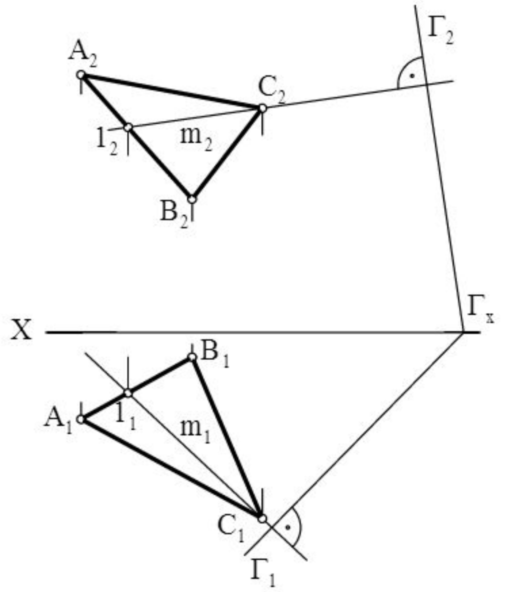


Рис. 5.10

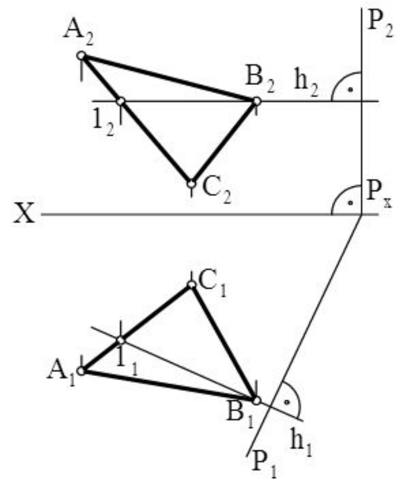


Рис. 5.11

Плоскость Г перпендикулярна плоскости треугольника АВС (см. рис. 5.10). Она проходит перпендикулярно прямой m ($Г_1 \perp m_1$ и $Г_2 \perp m_2$), лежащей в плоскости треугольника АВС.

Плоскость Р также перпендикулярна плоскости треугольника АВС (см. рис. 5.11), так как она перпендикулярна горизонтали h (h_1, h_2), т.е. $P_1 \perp h_1$, а $P_2 \perp h_2$. Одновременно она еще перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, т.е. является горизонтально-проецирующей плоскостью.

Следует также отметить, что перпендикулярность горизонтальных следов плоскости общего положения Р и горизонтально-проецирующей Г(рис. 5.12) соответствует взаимной перпендикулярности этих плоскостей.

Это легко доказать, если попытаться провести прямую, принадлежащую плоскости Р, перпендикулярно плоскости Г. Такой прямой является горизонталь, которая проведена через точку N (N_1, N_2), взятую на следе плоскости P_2 ($h_1 \perp P_1$ и $h_2 \perp P_2$).

Перпендикулярность фронтальных следов плоскости общего положения и фронтально проецирующей также дает основание утверждать о перпендикулярности этих плоскостей. Доказательство аналогичное.

Однако если одноименные следы двух плоскостей общего положения перпендикулярны между собой, то такие плоскости не перпендикулярны (рис. 5.13), т.к. здесь не соблюдается условие перпендикулярности плоскостей. Невозможно провести прямую, принадлежащую одной плоскости, например, Т, и перпендикулярно ко второй плоскости Ф. Если взять в плоскости Т горизонтальную проекцию прямой и провести ее перпендикулярно горизонтальному следу $Ф_1$, то это будет горизонтальная проекция горизонтали, а фронтальная проекция горизонтали должна быть проведена параллельно оси X, т.е. не перпендикулярно $Ф_2$.

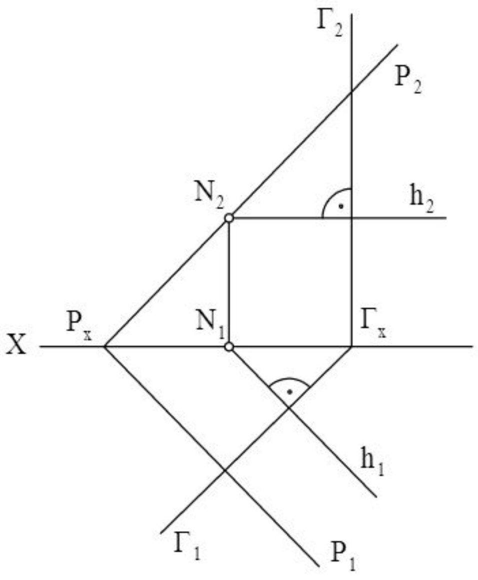


Рис. 5.12

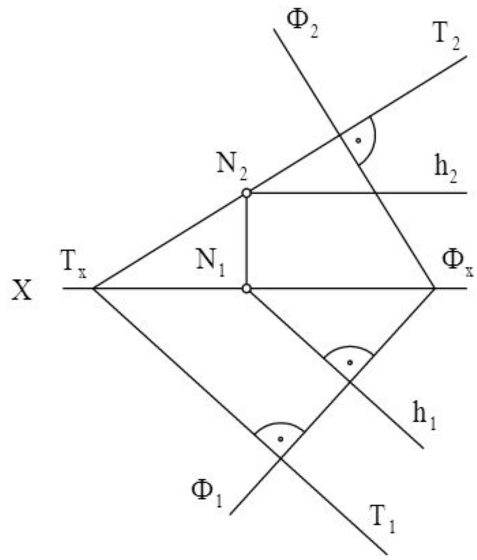


Рис. 5.13

5.3. Взаимно перпендикулярные прямые

Как известно (см. раздел 4.2), легко построить прямой угол между прямой общего положения и прямой уровня (фронталью, горизонталью).

Чтобы построить две взаимно перпендикулярные прямые общего положения, необходимо предварительно выполнить дополнительные построения, т.к. прямой угол между такими прямыми проецируется на плоскости проекций с искажением.

Пусть требуется из точки A (рис. 5.14) провести перпендикуляр к прямой общего положения b (b_1, b_2). Для решения задачи необходимо выполнить следующее:

- из точки A провести плоскость, заданную $f \cap h$ перпендикулярно прямой b;
- определить точку пересечения K прямой b с плоскостью ($f \cap h$).

Для этого нужно заключить прямую b в проецирующую плоскость, например, горизонтально-проецирующую плоскость Г (след $Г_1$), и найти линию их пересечения (1_2). На этой линии находится точка K (K_1, K_2) пересечения прямой b с плоскостью ($f \cap h$). Соединив точки A и K, получим искомый отрезок AK (A_1K_1, A_2K_2), перпендикулярный прямой b, так как он находится в плоскости, перпендикулярной прямой b.

На рис. 5.15 приведено решение задачи на проведение через точку A (A_1, A_2) прямой линии, перпендикулярной прямой общего положения b (b_1, b_2). Здесь в качестве плоскости, перпендикулярной прямой b, проведена плоскость Г, заданная следами $Г_1$ и $Г_2$. Для ее построения применена фронталь f (f_1, f_2), проведенная через точку A и перпендикулярно прямой b ($f_2 \perp b_2$). Определив горизонтальный след фронтали M'_1, проводим через него горизонтальный след плоскости $Г_1$ перпендикулярно b_1. Фронтальный след $Г_2$ проводим перпендикулярно b_2. Определив линию пересечения MN (M_1N_1, M_2N_2) двух плоскостей Г и P, находим точку K пересечения прямой b с плоскостью Г. Отрезок AK (A_1K_1, A_2K_2) является перпендикуляром к прямой b.

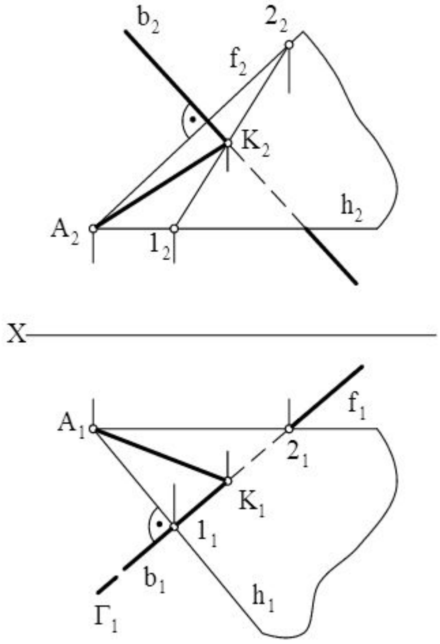


Рис. 5.14

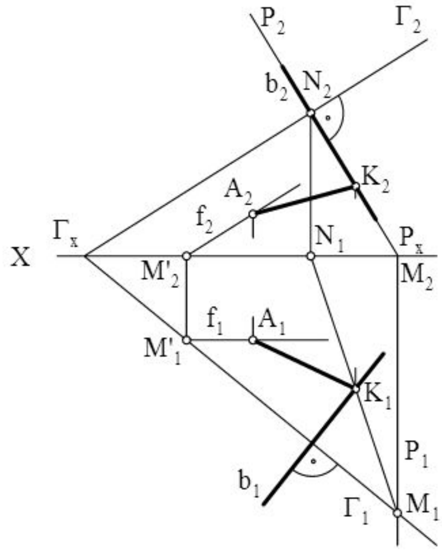


Рис. 5.15

5.4. Метрические задачи на определение расстояний

Рассмотрим решение задач на определение расстояний от точки до плоскости и до прямой линии общего положения. Пусть требуется определить расстояние от точки A до плоскости Г, расположенной перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций (рис. 5.16).

Из точки A проводим перпендикуляр к плоскости Г. Горизонтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна горизонтальному следу $Г_1$, а фронтальная проекция перпендикуляра будет перпендикулярна фронтальному следу $Г_2$. Расстояние от точки A до плоскости Г определится проекциями A_1B_1 и A_2B_2. Сначала определим точку B_1, которая находится на пересечении перпендикуляра и горизонтального следа $Г_1$. Фронтальная проекция точки B_2 находится по линии связи.

При определении расстояния от точки A до плоскости общего положения Г, заданной следами (рис. 5.17), необходимо:

- через точку A провести прямую перпендикулярно плоскости Г;
- провести через перпендикуляр горизонтально-проецирующую плоскость P (P_1, P_2);

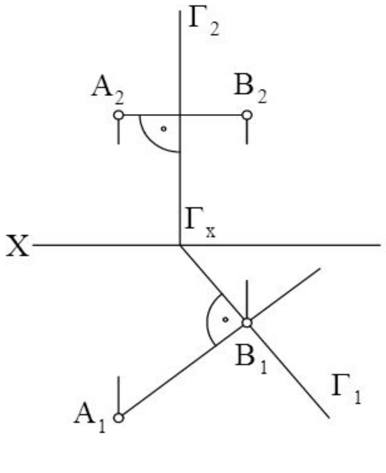


Рис. 5.16

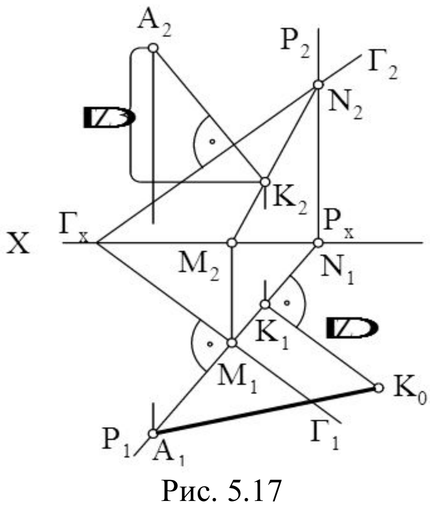


Рис. 5.17

- найти линию пересечения MN (M_1N_1, M_2N_2) плоскостей Г и Р;

- определить точку пересечения К (K_1, K_2) перпендикуляра с плоскостью Г. Она находится на линии пересечения плоскостей MN. Проекции отрезка АК (A_1K_1, A_2K_2) являются соответственно горизонтальной и фронтальной проекциями расстояния от точки А до плоскости Р;

- определить истинную величину перпендикуляра, например, при помощи прямоугольного треугольника.

Отрезок A_1K_0 есть расстояние от точки К до плоскости Г.

На рис. 5.18 показано определение расстояния от точки С до плоскости, заданной параллельными прямыми ($a \parallel b$).

Чтобы провести из точки С (С1, С2) перпендикуляр к плоскости ($a \parallel b$), необходимо в первую очередь в плоскости провести фронталь f (f_1, f_2) и горизонталь h (h_1, h_2). Фронтальная проекция перпендикуляра проведена из точки C_2 перпендикулярно f_2, а горизонтальная – из точки C_1 перпендикулярно h_1. Точка пересечения К (K_1, K_2) перпендикуляра с плоскостью ($a \parallel b$) найдена при помощи фронтально-проецирующей плоскости Г (фронтальный след $Г_2$). Истинная величина расстояния K_2C_0 определена путем построения прямоугольного треугольника $C_2K_2C_0$.

При определении расстояния от точки А до прямой общего положения b (см. раздел 5.3, рис. 5.14) из точки А проведена плоскость ($f \cap h$), перпендикулярная прямой b. Затем найдена точка пересечения К (K_1, K_2) прямой b с заданной плоскостью. Соединив точки А и К, получим проекцию расстояния от точки А до прямой b (A_1K_1 и A_2K_2). Для определения истинной величины расстояния от точки А до прямой b необходимо построить на одной из проекций, A_1K_1 или A_2K_2, прямоугольный треугольник.

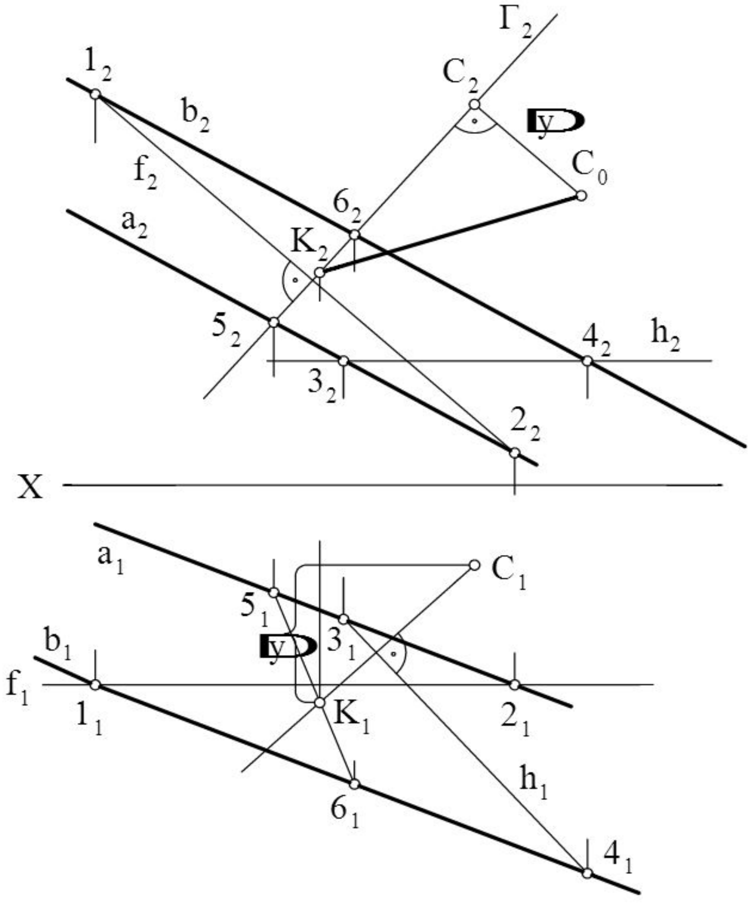


Рис 5.18

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Какое положение в пространстве могу занимать две плоскости?
2. Какое условие параллельности двух плоскостей?
3. Какое условие перпендикулярности двух плоскостей?
4. Какие способы задания плоскостей вы знаете?
5. По какому алгоритму определяется расстояние от точки до плоскости заданной следами?
6. По какому алгоритму определяется расстояние от точки до плоскости заданной взаимно параллельными прямыми?

ТЕМА 6. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

6.1. Метод замены плоскостей проекций.
6.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций.

6.1. Метод замены плоскостей проекций

При решении задач на определение истинной величины отрезка прямой линии, плоской фигуры или наклона их к плоскостям проекций, а также на определение расстояний между точкой и прямой или плоской фигурой было замечено, что если эти прямые или плоские фигуры «удобно» расположены относительно плоскостей проекций, т.е. занимают частное положение, то задачи имеют простые решения. Сравним решение двух задач. Пусть требуется определить истинную величину отрезков AB и CD (рис. 6.1). В первом случае отрезок AB занимает общее положение (см. рис. 6.1, а), во втором отрезок CD занимает частное положение (см. рис. 6.1, б).

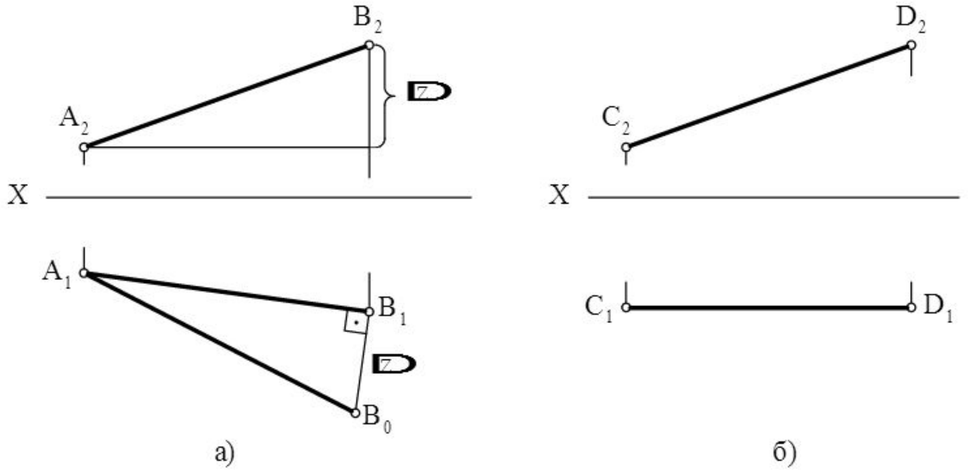


Рис. 6.1

Истинная величина отрезка AB (A_1B_0) определена при помощи прямоугольного треугольника. Что же касается отрезка CD, то истинная величина его равняется C_2D_2, т.к. отрезок расположен параллельно плоскости проекций $П_2$, т.е. решение задачи вытекает из самого чертежа.

Если заданные геометрические элементы расположены наклонно ко всем плоскостям проекций, то, применяя метод замены плоскостей проекций, т.е. дополняя основную систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ одной или несколькими новыми плоскостями проекций, переходим к такому положению, когда геометрические элементы в новой системе плоскостей проекций, например, $П_1/П_4$, занимают частное положение.

Метод замены плоскостей проекций заключается в том, что одна из основных плоскостей проекций, $П_1$ или $П_2$, заменяется новой плоскостью проекций $П_4$, перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций. Например, если заменяется плоскость проекций $П_2$, то новая плоскость проекций $П_4$ должна быть расположена перпендикулярно $П_1$ и параллельно, например, проецируемому отрезку. При данном методе положение в пространстве отрезков прямых или плоских фигур не изменяется.

Рассмотрим построение проекции точки А в новой системе плоскостей проекций $П_1/П_4$. Для этого основную систему плоскостей проекций $П_1/П_2$, дополняем новой плоскостью проекций $П_4$, расположенной перпендикулярно $П_1$ в произвольном месте (рис. 6.2, а). Линия пересечения этих плоскостей образует новую ось проекций X_{14}.

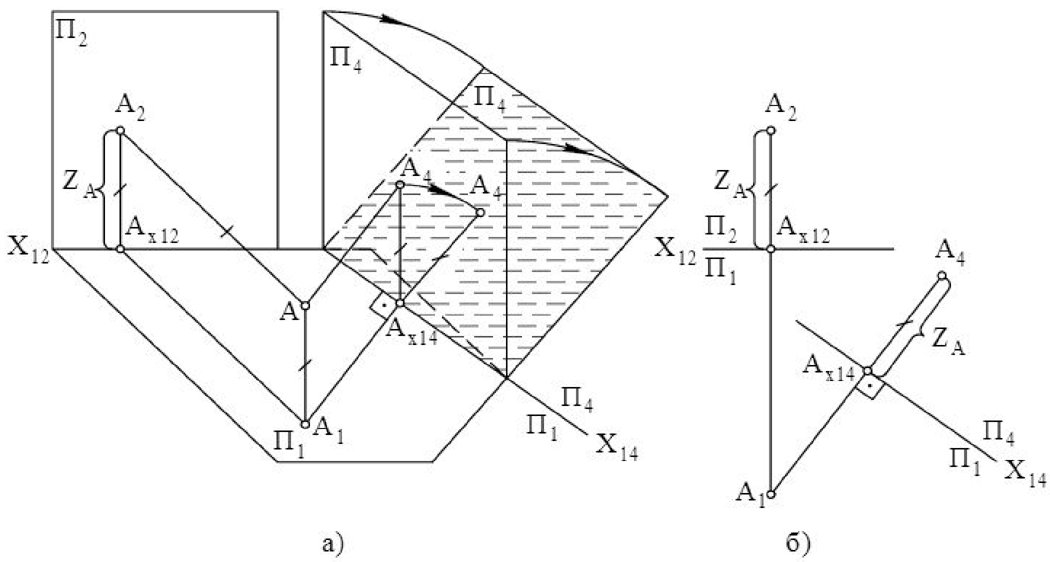


Рис. 6.2

Положение точки A4 в новой системе плоскостей проекций П1/П4 определяем так же, как и в системе $П_1/П_2$, т.е. из точки A проводим перпендикуляр до пересечения с плоскостью проекций $П_4$. Затем плоскость $П_4$ совмещаем с плоскостью проекций $П_1$, как совмещали плоскость проекций $П_1$ с $П_2$ при нахождении проекций точек, расположенных в первой четверти.

Проекции A_1 и A_4 точки будут лежать на одном перпендикуляре к оси X_{14}. Чтобы построить чертеж точки A_4 в новой системе плоскостей проекций (см. рис. 6.2, б), проводим из точки A_1 перпендикуляр к новой оси проекций, а затем на продолжении этого перпендикуляра от оси X_{14} откладываем расстояние, равное A_2A_{x12}, взятое с фронтальной плоскости проекций $П_2$.

При необходимости замены плоскости проекций $П_1$ новую плоскость проекций $П_4$ располагаем перпендикулярно $П_2$. Остальное решение аналогично предыдущему.

Определим натуральную величину отрезка AB и угол наклона его к горизонтальной плоскости проекций методом замены плоскостей проекций (рис. 6.3).

Учитывая, что одновременно нужно определить величину отрезка AB и угол наклона его к $П_1$, необходимо, чтобы новая дополнительная плоскость проекций $П_4$ была расположена параллельно отрезку AB и перпендикулярно плоскости проекций П1. Таким образом, на горизонтальной плоскости проекций $П_1$ проводим новую ось проекций X_{14} параллельно A_1B_1 на произвольном расстоянии от A_1B_1. Отрезок AB спроецируется на новую плоскость проекций П4 в натуральную величину. Построение проекции A_4B_4 показано на чертеже. Из точек A_1 и B_1 проведены перпендикуляры к оси проекции X_{14} и от этой оси на продолжении перпендикуляров отложены величины расстояний, взятые с фронтальной плоскости проекций (показано засечками).

Угол α, заключенный между найденной проекцией A_4B_4 и осью проекций X_{14}, равняется углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Для того чтобы определить угол наклона отрезка AB к фронтальной плоскости проекций, необходимо новую плоскость проекций расположить параллельно отрезку и перпендикулярно фронтальной плоскости проекций, т.е. новая ось на эпюре должна пройти параллелью A_2B_2. Дальнейшее решение аналогично предыдущему.

На рис. 6.4 приведен пример преобразования отрезка CD в проецирующее положение в новой системе плоскостей проекций $П_2/П_4$. Так как отрезок CD занимает частное положение, т.е. расположен параллельно плоскости проекций $П_2$, то при расположении дополнительной плоскости проекций $П_4$ (ось X_{24}) перпендикулярно плоскости проекций $П_2$ и отрезку CD последний спроецируется в точку, т.е. C_4 совпадет с D_4 ($C_4 \equiv D_4$). Это видно из чертежа, т.к. горизонтальные проекции точек C_1 и D_1 отстоят на одинаковом расстоянии от оси X.

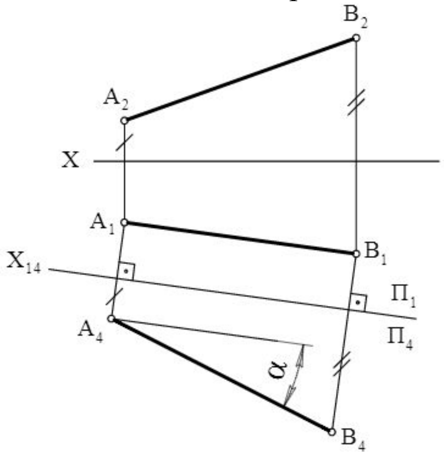


Рис. 6.3

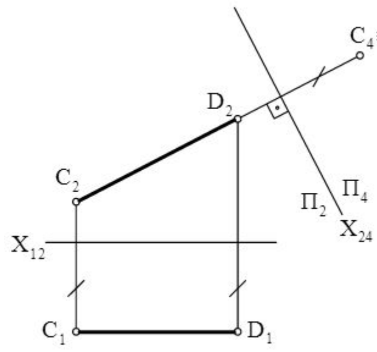


Рис. 6.4

Чтобы преобразовать плоскость общего положения Ф, заданную следами (рис. 6.5), в проецирующее положение, необходимо дополнительную плоскость $П_4$ расположить перпендикулярно данной плоскости и перпендикулярно одной из плоскостей проекций $П_1$ или $П_2$. Для сравнения на рис. 6.6 показаны горизонтально-проецирующая плоскость (см. рис. 6.6, а) и фронтально-проецирующая P (см. рис. 6.6, б), у которых один из следов перпендикулярен оси X, а это значит, что он перпендикулярен и одной из плоскостей проекций.

Для решения задачи необходимо плоскость $П_4$ расположить перпендикулярно горизонтальному следу $Ф_1$, который является линией пересечения плоскости Ф и плоскости проекций $П_1$. Это значит, что ось X_{14} должна быть проведена перпендикулярно следу $Ф_1$. Следовательно, плоскость $П_4$ одновременно займет положение, перпендикулярное $П_1$, что является необходимым условием при замене плоскостей проекций. Чтобы построить след $Ф_4$ в новой системе плоскостей проекций $П_1/П_4$, возьмем на следе $Ф_2$ фронтальную проекцию точки 1_2 и найдем точку 1_4, принадлежащую фронтальному следу в новой системе плоскостей проекций. Проведя прямую линию через точку 1_4 и точку пересечения следа $Ф_1$ с осью проекций X_{14}, получим фронтальный след $Ф_4$ в новой системе плоскостей проекций. Плоскость же, заданная следами $Ф_1$ и $Ф_4$, является фронтально-проецирующей в новой системе плоскостей проекций.

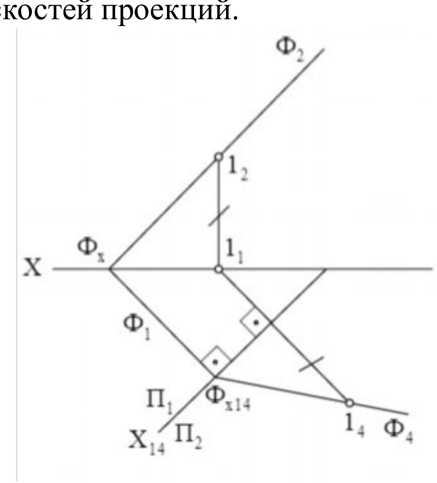


Рис. 6.5

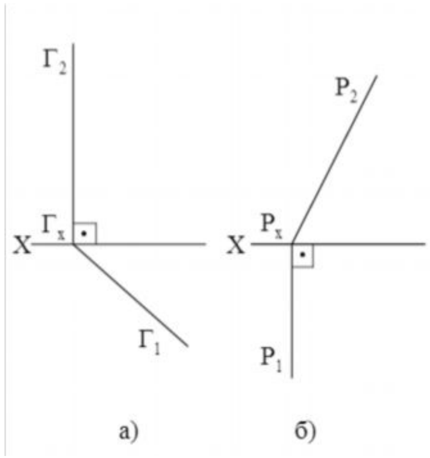


Рис. 6.6

Задача решается аналогично при замене горизонтальной плоскости проекций.

Рассмотрим задачу, для решения которой замена одной плоскости проекций дополнительной плоскостью проекций является недостаточной. Пусть требуется преобразовать систему плоскостей проекций так, чтобы отрезок АВ, занимающий в основной системе плоскостей проекций $П_1/П_2$ общее положение, в новой системе был бы перпендикулярен одной из плоскостей проекций, т.е. спроецировался бы в точку.

Новую плоскость проекций выбрать так, чтобы она была перпендикулярна отрезку АВ и одной из плоскостей проекций, невозможно, т.к. отрезок занимает общее положение. Поэтому необходимо вначале применить промежуточную плоскость проекций $П_4$, которую нужно расположить параллельно отрезку АВ и перпендикулярно $П_1$ (рис. 6.7).

Для этого проводим новую ось проекций параллельно отрезку АВ, т.е. $X_{14} \parallel A_1B_1$, и строим новую фронтальную проекцию отрезка A_4B_4. Вторую дополнительную плоскость проекций $П_5$ в системе $П_4/П_5$ располагаем перпендикулярно промежуточной плоскости проекций $П_4$ и отрезку АВ, т.е. ось проекций X_{45} проводим перпендикулярно проекции отрезка A_4B_4. Точки A_5 и B_5 совпадают, т.к. отрезок A_1B_1 расположен на одинаковом расстоянии от оси X_{14}.

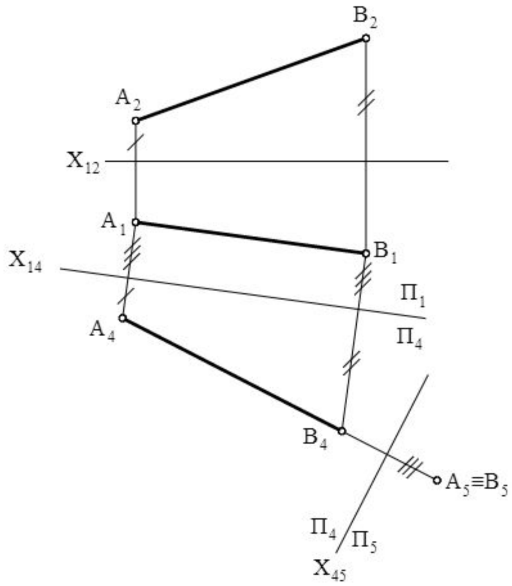


Рис. 6.7

На рис. 6.8 приведен пример определения истинной величины треугольника АВС путем применения двух дополнительных плоскостей проекций.

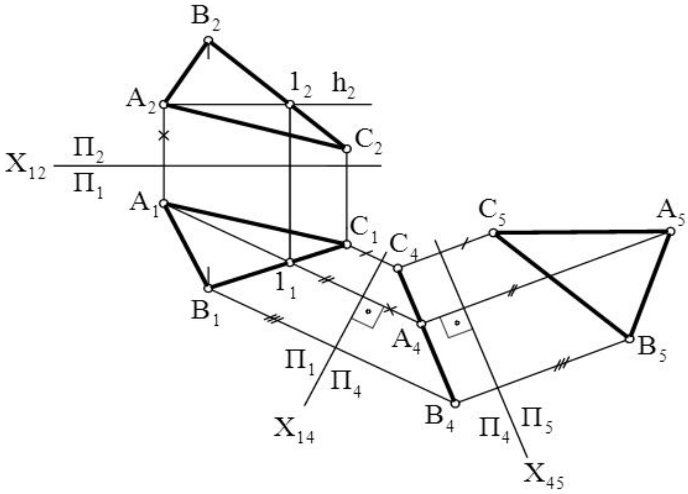


Рис 6.8

Заменяем систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ новой системой плоскостей проекций $П_1/П_4$, располагая плоскость проекций $П_4$ перпендикулярно треугольнику ABC и плоскости проекций $П_1$. Это значит, что новая ось проекций должна быть расположена перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали h1. Плоскость треугольника в данном случае спроецируется на $П_4$ в прямую линию ($C_4A_4B_4$).

Чтобы получить истинную величину треугольника ABC, нужно плоскость $П_5$ расположить параллельно плоскости треугольника ABC и перпендикулярно П4. Это значит, что ось проекций X_{45} должна быть расположена параллельно проекции треугольника $C_4A_4B_4$. Полученная проекция $A_5B_5C_5$ соответствует истинной величине треугольника ABC.

6.2. Метод вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций

Сущность метода вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, состоит в том, что, сохраняя основную систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ неизменной, проецируемым отрезкам прямых, плоским фигурам придаем путем вращения вокруг некоторой оси частное положение по отношению к плоскостям проекций. В том случае, если отрезок прямой повернуть до положения, параллельного плоскости проекций, то на эту плоскость проекций он спроецируется в натуральную величину.

В качестве осей вращения применяют прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, располагающиеся вне этих плоскостей или принадлежащие им (рис. 6.9).

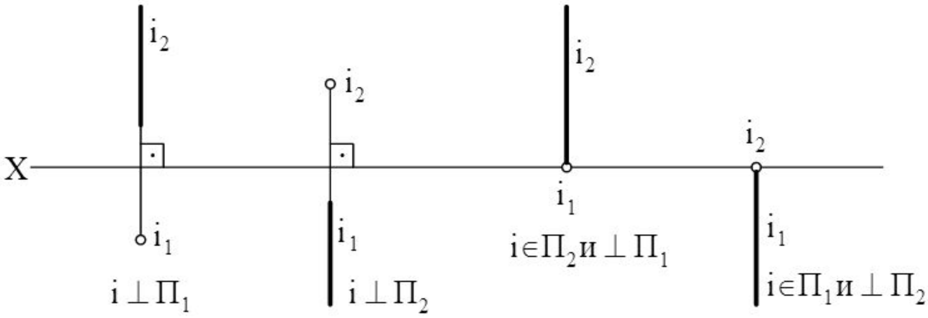


Рис 6.9

Рассмотрим пример на вращение точки А вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций. Пусть требуется точку А повернуть на некоторый угол φ, вращая по ходу часовой стрелки (рис. 6.10).

Ось вращения i проецируется на горизонтальную плоскость проекций П1 точкой (i_1), а на $П_2$ – прямой линией (i_2), перпендикулярной оси X. При вращении точки А вокруг оси i она будет перемещаться в плоскости Г по окружности с радиусом ОА и центром вращения О. Плоскость Г, построенная дополнительно, располагается перпендикулярно оси i и называется плоскостью перемещения точки. Следовательно, горизонтальная проекция радиуса вращения O_1A_1 равняется истинной величине радиуса вращения ОА, т.к. плоскости Г и $П_1$ параллельны между собой. При вращении точки А по ходу часовой стрелки на угол φ она переместится в плоскости Г по дуге окружности радиуса ОА в точку А'. Горизонтальная

Проекция точки А также будет перемещаться по окружности радиуса O_1A_1 = ОА и займет положение A'_1. Фронтальная проекция A_2 будет перемещаться по прямой, параллельной оси X (след $Г_2$), и займет положение A'_2.

На рис. 6.11,а показан пример вращения точки А на угол φ вокруг оси i, перпендикулярной $П_1$, а на рис. 6.11,б – вращение точки В вокруг оси i, перпендикулярной $П_2$.

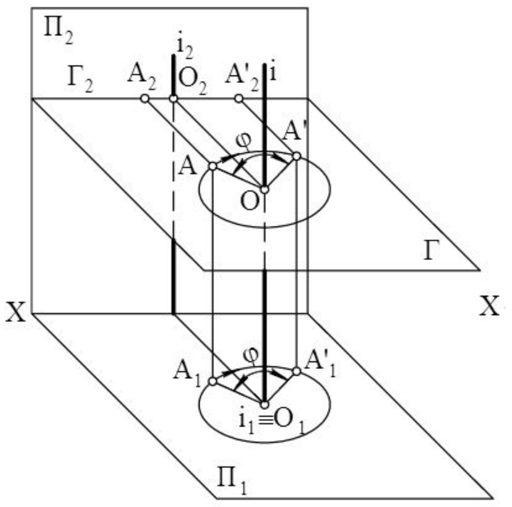


Рис. 6.10

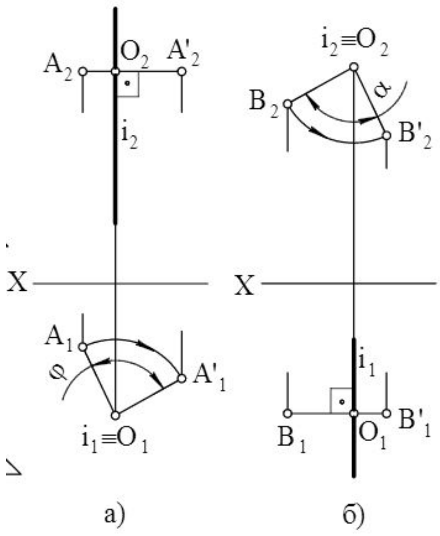


Рис. 6.11

В первом случае горизонтальная проекция A_1 точки A перемещается по дуге радиусом O_1A_1 до положения A'_1, а фронтальная A_2 – по прямой линии, параллельной оси X (A'_2). Во втором случае, наоборот, фронтальная проекция точки (точка B_2) перемещается по дуге радиусом O_2B_2 до положения B'_2, а горизонтальная – по прямой, параллельной оси X до B'_1.

Рассмотрим примеры определения истинных величин геометрических образов методом вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций.

Пусть требуется определить истинную величину отрезка AB (рис. 6.12).

Целесообразно ось вращения проводить через одну из точек, принадлежащих отрезку, тогда получается более простое решение. В данной задаче ось i проходит через точку B перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций, следовательно, горизонтальная ее проекция совпадает с B_1 ($i_1 \equiv B_1$). Перемещая горизонтальную проекцию точки A_1 по дуге радиусом $R=A_1B_1$ с центром вращения в точке $B_1 \equiv i_1$, располагаем ее на таком расстоянии от оси X, на котором расположена точка B1 , т.е. горизонтальная проекция отрезка A_1B_1 займет положение, параллельное оси X ($B_1A'_1$), поэтому фронтальная проекция $B_2A'_2$ будет равняться истинной величине отрезка AB. Как видно из чертежа, фронтальная проекция A_2 точки A перемещается параллельно оси X до пересечения с линией связи, проходящей от точки A'_1.

Определение истинной величины отрезка CD вращением вокруг оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций, показано на рис. 6.13, где $C'_1D'_1$ является истинной величиной отрезка CD.

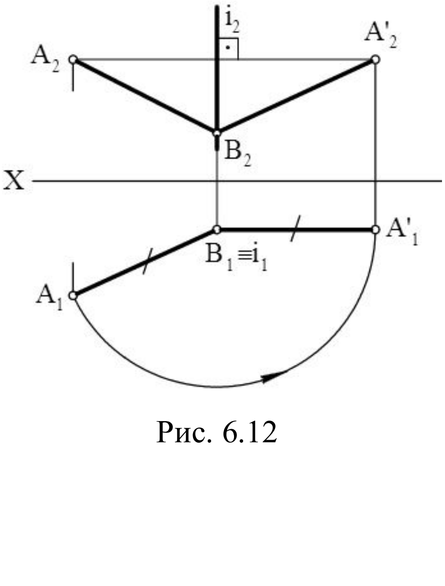


Рис. 6.12

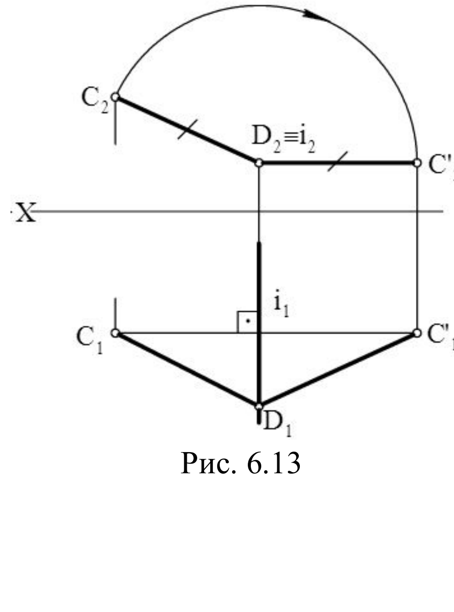


Рис. 6.13

Как видно из рис. 6.14 и рис. 6.15, при вращении отрезка прямой вокруг оси, перпендикулярной $П_1$ или $П_2$, ее проекция на эту плоскость проекций остается неизменной. Учитывая это положение, предоставляется возможность решать аналогичные задачи без применения осей вращения, так называемым плоскопараллельным перемещением, при котором все точки прямой, фигуры перемещаются в плоскостях, параллельных между собой.

На рис. 6.14 определена истинная величина отрезка AB плоскопараллельным перемещением. Мысленно вращаем этот отрезок вокруг мнимой оси, перпендикулярной $П_1$, до положения, параллельного $П_2$, и располагаем горизонтальную проекцию A_1B_1 в произвольном месте параллельно оси X, получаем отрезок $A'_1B'_1$. Фронтальные проекции точек A и B в данном случае перемещаются параллельно оси X.

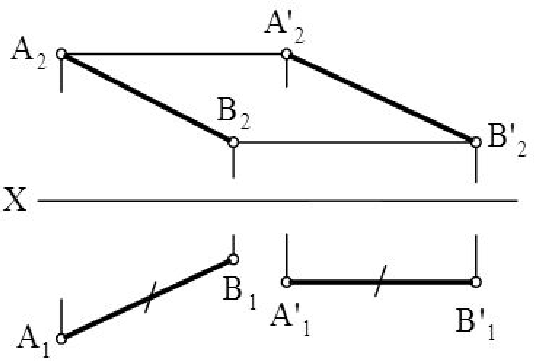


Рис. 6.14

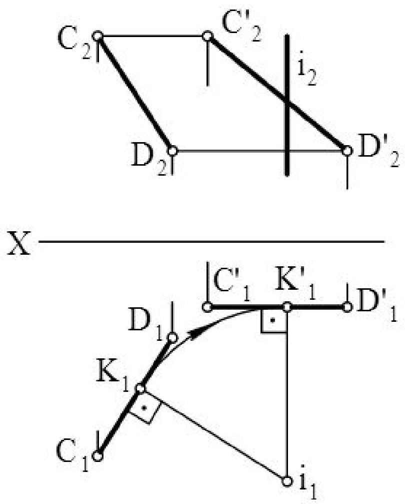


Рис. 6.15

На рис. 6.15 дан пример нахождения истинной величины отрезка CD, когда ось вращения i проходит перпендикулярно плоскости проекций $П_1$, но не через отрезок CD. Из точки i_1 опускаем перпендикуляр i_1K_1 к горизонтальной проекции отрезка C_1D_1 и вращаем этот перпендикуляр с проекцией отрезка C_1D_1 до положения, пока i_1K_1 не расположится перпендикулярно оси X, тогда отрезок $C'_1D'_1$ займет положение, параллельное оси X, т.е. спроецируется на $П_2$ в истинную величину $C'_2D'_2$.

При решении отдельных задач для достижения поставленной цели недостаточно применения одной оси вращения, тогда применяется несколько осей вращения. Так, при определении истинной величины треугольника ABC (рис. 6.16), занимающего общее положение относительно плоскостей проекций, необходимо его вначале повернуть до проецирующего положения, а затем – до плоскости уровня.

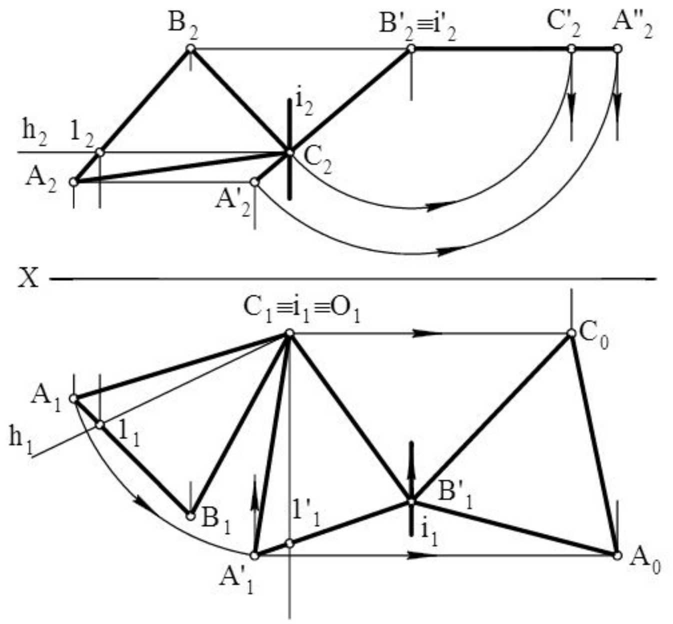


Рис. 6.16

Ось вращения i проводим перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций, а в треугольнике ABC проводим горизонталь h. Вращаем эту горизонталь до проецирующего положения относительно плоскости проекций $П_2$. Горизонталь спроецируется в точку, а весь треугольник – в отрезок $A'_2C_2B'_2$.

Вторую ось вращения i' (i'_1, i'_2), проходящую через точку B (B'_1, B'_2), располагаем перпендикулярно плоскости проекций $П_2$ и вращаем треугольник ABC ($A'_2C_2B'_2$) до положения, параллельного плоскости проекций П1 ($B'_2C'_2A''_2 \parallel X$). В этом случае горизонтальная проекция $A_0B'_1C_0$ треугольника спроецируется в натуральную величину, т.е. $A_0B'_1C_0 = ABC$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Какие методы преобразования комплексного чертежа Вы знаете?
2. В чем сущность метода замены плоскостей проекций?
3. В чем сущность метода вращения вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций?
4. Зачем осуществляют преобразование комплексного чертежа?
5. Чем отличаются методы преобразования комплексного чертежа?
6. Как преобразовать прямую общего положения в проецирующую?
7. Сколько раз необходимо произвести замену плоскостей проекций для преобразования плоскости общего положения в плоскость частного положения?
8. Запишите алгоритм способа замены плоскостей проекций?

ТЕМА 7. МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

7.1. Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций.
7.2. Вращение вокруг следа плоскости.
7.3. Решение метрических задач методами преобразования чертежа.

7.1. Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций

При определении формы и размеров плоских фигур применение метода вращения вокруг оси, расположенной параллельно одной из плоскостей проекций (горизонтали, фронтали), значительно упрощает решение задач по сравнению с другими методами.

Пусть требуется точку А повернуть вокруг некоторой оси h (рис. 7.1), расположенной параллельно плоскости проекций $П_1$, до положения, пока она не окажется на одном уровне с осью h относительно $П_1$, т.е. пока их расстояния до плоскости проекций $П_1$ не окажутся одинаковыми.

При вращении точки А вокруг оси h она будет перемещаться по окружности в плоскости Р, где О – центр вращения (точка пересечения оси с плоскостью Р), ОА – радиус вращения. Плоскость Р перпендикулярна оси вращения h, следовательно, она перпендикулярна и горизонтальной проекции h_1 оси вращения h, т.е. плоскость Р является горизонтально-проецирующей. Поэтому горизонтальная проекция точки А при вращении также будет перемещаться по горизонтальному следу P_1 плоскости Р. Чтобы была выполнена поставленная задача, необходимо вращать радиус ОА до тех пор, пока он не займет положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (ОА'). В этом случае точка А окажется на одинаковом уровне с осью h относительно плоскости проекций $П_1$. Тогда горизонтальная проекция радиуса вращения $O_1A'_1$ будет соответствовать натуральной величине радиуса вращения ОА ($O_1A'_1$=OA).

При определении нового положения точки А на чертеже (рис. 7.2) необходимо выполнить следующее: выбрать положение оси вращения h (h_1 и h_2), затем из горизонтальной проекции точки A_1 провести перпендикуляр к горизонтальной проекции оси вращения h_1, далее определить центр вращения О (O_1, O_2) и радиус вращения ОА (O_1A_1; O_2A_2). В заключение необходимо определить натуральную величину радиуса вращения O_1A_0 и отложить его величину от h_1 на продолжении перпендикуляра O_1A_1, т.е. на горизонтальной проекции траектории перемещения точки А. Получим горизонтальную проекцию A'_1 точки А, которая расположена на одном уровне с горизонталью, поэтому фронтальная проекция A'_2 будет проецироваться на h_2.

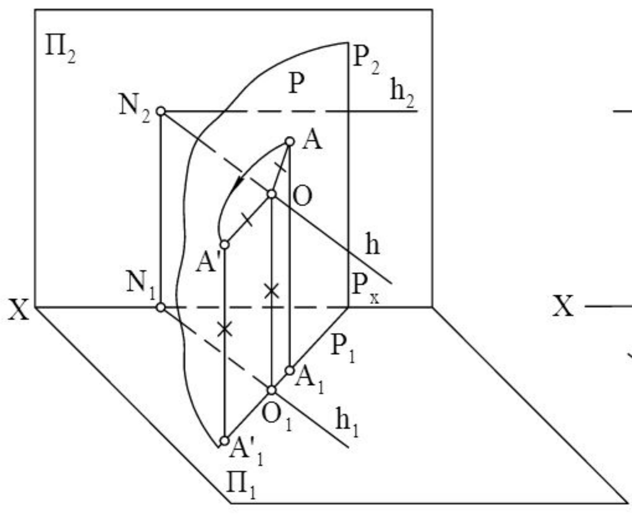


Рис. 7.1

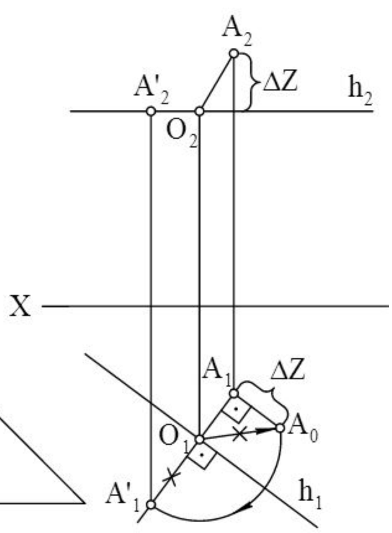


Рис. 7.2

Рассмотрим пример построения натуральной величины треугольника ABC вращением вокруг горизонтали (рис. 7.3).

Сторона треугольника AC расположена параллельно горизонтальной плоскости проекций, поэтому проводим через нее горизонталь h (h_1, h_2), которая и будет являться осью вращения. Так как точки A и C треугольника находятся на оси вращения, то при вращении они своего положения не меняют. Точка B будет перемещаться в плоскости, перпендикулярной горизонтали, поэтому из горизонтальной проекции точки B1 проводим прямую, перпендикулярную h_1. На пересечении этой прямой с h_1 находится горизонтальная проекция центра вращения O_1 точки O. Фронтальная проекция O_2 определена по линии связи и расположена она на h_2. Радиусом вращения является отрезок OB (O_1B_1 и O_2B_2). Определив натуральную величину радиуса вращения O_1B_0, откладываем его на продолжении отрезка B_1O_1, т.е. на горизонтальной проекции траектории перемещения точки B; получим точку B'_1. В таком положении радиус вращения OB будет расположен параллельно $П_1$, поэтому $O_1B'_1$ будет равняться OB. Соединив точку B'_1 с точками A_1 и C_1, получим горизонтальную проекцию треугольника A_1 B'_1C_1, которая соответствует натуральной величине треугольника ABC, т.к. он в данном случае оказался параллельным $П_1$. Фронтальная проекция треугольника проецируется на фронтальную проекцию горизонтали h_2 ($A_2B'_2C_2$).

При необходимости поворота плоской фигуры параллельно фронтальной плоскости проекций нужно в качестве оси вращения выбрать фронталь, остальные построения аналогичны тем, что и при вращении вокруг горизонтали.

На рис. 7.4 показан поворот отрезка прямой AB вокруг горизонтали h, пересекающей данный отрезок в точке K. Точки A и B при вращении перемещаются в горизонтально – проецирующих плоскостях Г и P (следы $Г_1$ и P_1), поэтому из горизонтальных проекций точек A_1 и B_1 проводим прямые, перпендикулярные горизонтальной проекции горизонтали. На пересечении этих прямых с h_1 получим горизонтальные проекции O_1 и O'_1 центров вращения. Проекциями радиусов вращения являются отрезки O_1A_1 и O'_1B_1.

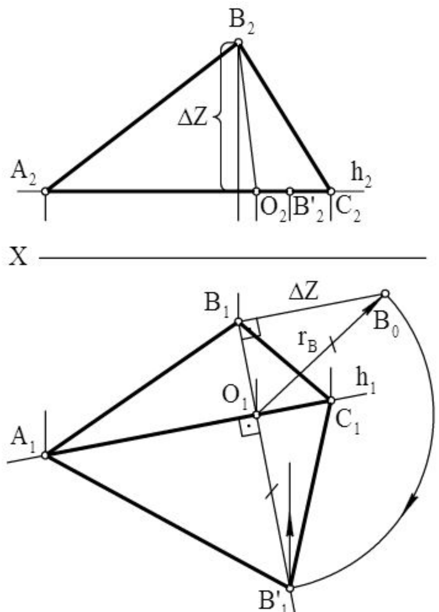


Рис. 7.3

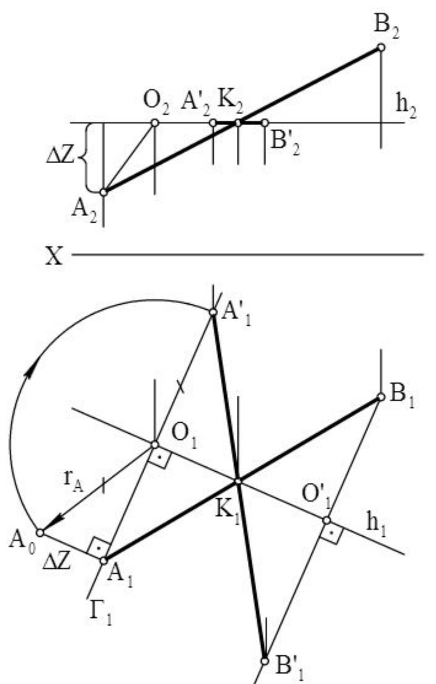


Рис. 7.4

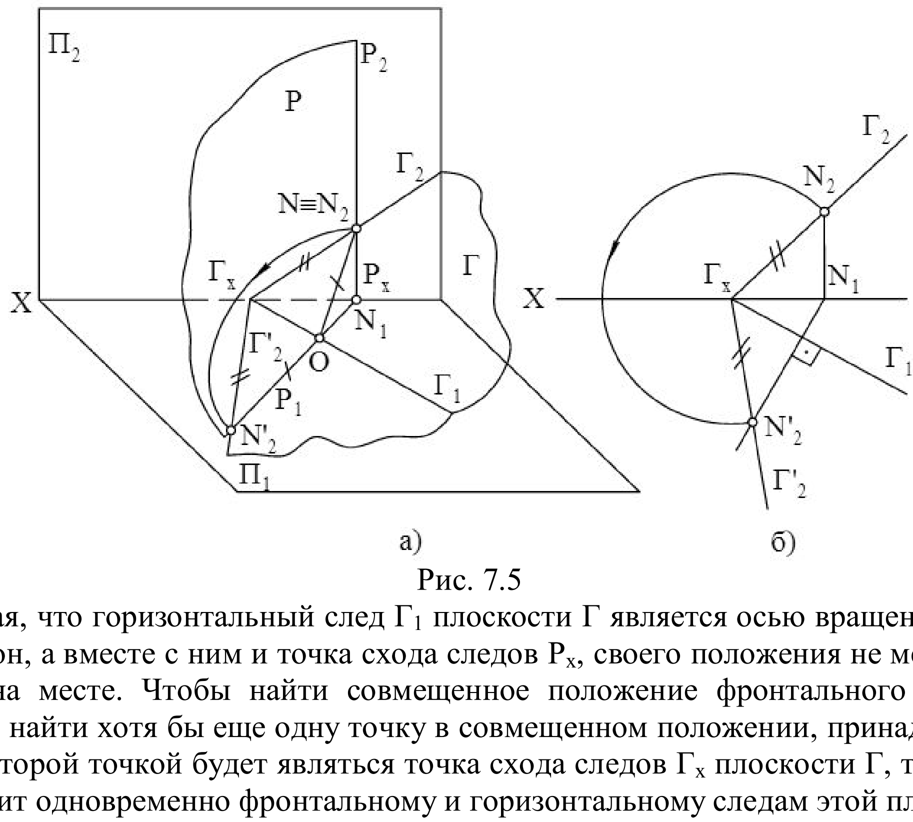
Так как точка К расположена на пересечении отрезка АВ и горизонтали h, то при вращении отрезка она остается на месте. Достаточно определить натуральную величину одного радиуса вращения O_1A_0 и отложить его величину на следе $Г_1$ от O_1. Получим точку A'_1, которую соединяем прямой с проекцией точки К (K_1), и продолжаем ее до пересечения со следом P_1, проходящим перпендикулярно от точки B_1 к h_1.

Полученная проекция отрезка $A'_1B'_1$ является натуральной величиной отрезка АВ. Фронтальная его проекция (A'_2B_2) спроецируется на фронтальную проекцию горизонтали h_2.

7.2. Вращение вокруг следа плоскости

Вращение плоскости вокруг следа этой плоскости находит применение в тех случаях, когда необходимо, например, определить истинную величину отрезка прямой, плоской фигуры и др., расположенных в данной плоскости. Чтобы добиться этой цели, необходимо плоскость вращать вокруг ее следа до совмещения с одной из плоскостей проекций, $П_1$ или $П_2$. Этот способ еще называется способом совмещения, так как здесь плоскость пространства совмещается (накладывается) с какой – либо плоскостью проекций.

Пусть требуется плоскость Г совместить с плоскостью проекций $П_1$, вращая ее вокруг горизонтального следа $Г_1$ (рис. 7.5, а).



а) б)

Рис. 7.5

Учитывая, что горизонтальный след $Г_1$ плоскости Г является осью вращения, то при вращении он, а вместе с ним и точка схода следов P_x, своего положения не меняют, т.е. остаются на месте. Чтобы найти совмещенное положение фронтального следа $Г_2$, достаточно найти хотя бы еще одну точку в совмещенном положении, принадлежащую следу $Г_2$. Второй точкой будет являться точка схода следов $Г_x$ плоскости Г, так как она принадлежит одновременно фронтальному и горизонтальному следам этой плоскости.

Для решения задачи возьмем на фронтальном следе $Г_2$ в произвольном месте точку N (N_2). При вращении она будет перемещаться по окружности в плоскости Р, перпендикулярной горизонтальному следу $Г_1$ плоскости Г, т.е. оси вращения. Центром вращения является точка О, а радиусом вращения – ON (ON_2). Проведя дугу радиусом ON до пересечения с P_1, получим точку N (N'_2) в совмещенном положении. Соединив точку N'_2 с точкой схода следов $Г_x$ прямой линией, получим совмещенное положение фронтального следа $Г'_2$, а, следовательно, и всей плоскости Г с плоскостью проекций

П1. Следует отметить, что при вращении плоскости Г вокруг горизонтального следа отрезок $Г_xN$ не изменяет своей величины, поэтому совмещенное положение точки N с плоскостью П1 можно найти, если из точки схода следов $Г_x$ сделать засечку радиусом $Г_xN$ на следе P_1 (траектория перемещения точки N).

Такое решение приведено на рис. 7.5, б, где из точки схода следов $Г_x$ проведена дуга радиусом $Г_xN_2$ до пересечения с прямой, перпендикулярной $Г_1$, проходящей от точки N_1.

На рис. 7.6 приведено решение задачи на совмещение плоскости Г и точки А, принадлежащей этой плоскости, с плоскостью проекций $П_2$.

Первоначально проводим в плоскости Г через точку А фронталь f (f_1, f_2). Затем находим совмещенное положение плоскости Г с плоскостью $П_2$ и совмещенное положение фронтали f_1, на которой отмечаем совмещенную точку А'1.

Построение истинной величины треугольника АВС, расположенного в плоскости общего положения Р, приведено на рис. 7.7. В данном случае плоскость Р с находящимся в ней треугольником АВС совмещена с горизонтальной плоскостью проекций $П_1$. Для этого применены горизонтали, проходящие через вершины треугольника. При их совмещении с горизонтальной плоскостью проекций они пройдут параллельно горизонтальному следу P_1. Точки же А, В и С треугольника АВС будут перемещаться перпендикулярно горизонтальному следу Р. На пересечении этих линий с горизонталями и будут находиться вершины совмещенного треугольника $A_0B_0C_0$, который равняется истинной величине треугольника АВС.

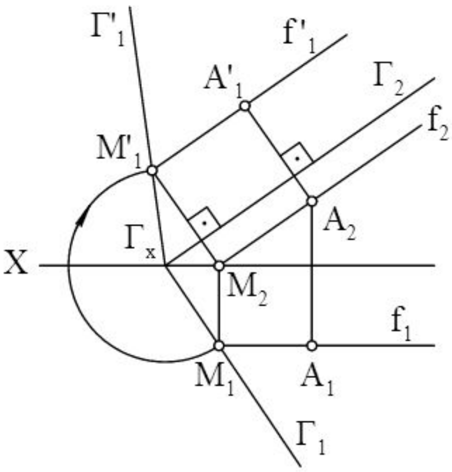


Рис. 7.6

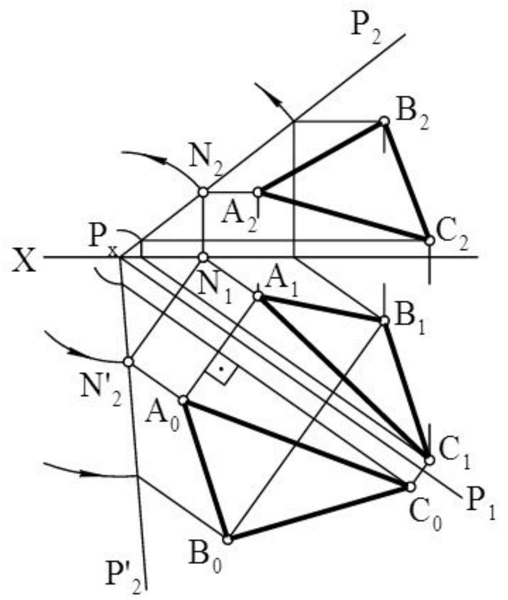


Рис. 7.7

В том случае, если имеется совмещенное положение плоскости Г (Г'2) с плоскостью проекций $П_1$ и совмещенное положение отрезка АВ (A_0B_0) (рис. 7.8, а), а необходимо построить (восстановить) фронтальный след плоскости $Г_2$ и проекции отрезка АВ, т.е. выполнить действие, обратное совмещению, необходимо первоначально определить положение недостающего следа плоскости в системе плоскостей проекций $П_1/П_2$, затем найти проекции отрезка.

Чтобы определить положение следа $Г_2$ на его совмещенном положении $Г'_2$, в произвольном месте возьмем точку N'_2 и найдем ее фронтальную проекцию N_2 (рис. 7.8, б). Для чего из точки N'_2 проводим перпендикуляр к горизонтальному следу $Г_1$ до пересечения с осью Х (N_1). Из точки N_1 восстанавливаем перпендикуляр к оси Х до пересечения с дугой радиуса $Г'xN'_2$, получим точку N_2. Через точку схода следов Гх и

N_2 проводим фронтальный след плоскости $Г_2$. Затем через точку A_0 проводим совмещенную горизонталь и на ее проекции наносим проекции A_1 и A_2 точки А.

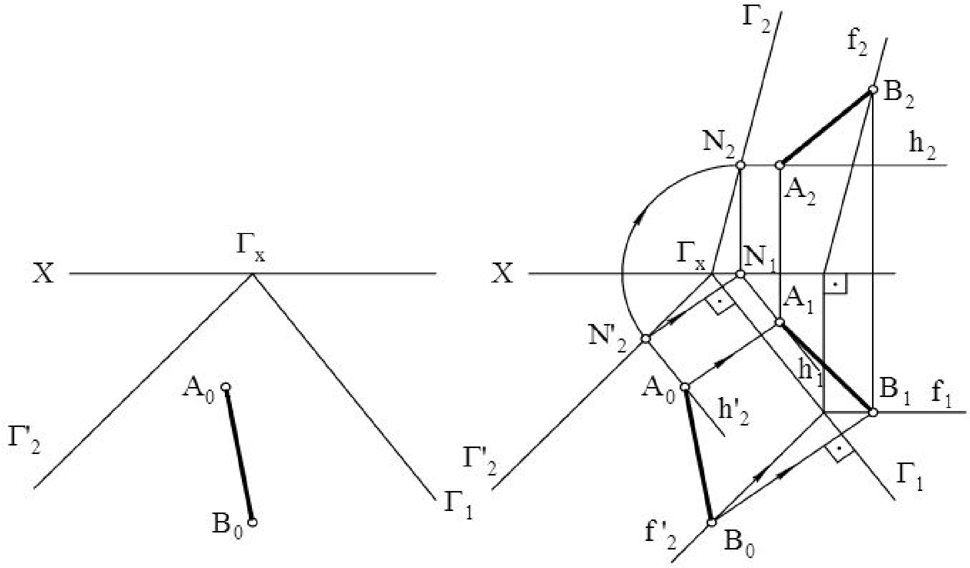


Рис. 7.8

Для определения проекций точки В воспользуемся фронталью f (f_1, f_2). В совмещенном положении проводим ее через точку B_0 параллельно совмещенному фронтальному следу $Г'_2$. Затем находим проекции фронтали f_1 и f_2, как указано на чертеже, и по линиям связи определяем проекции B_1 и B_2 точки В. Соединив A_1 с A_2 и B_1 с B_2, получим необходимые проекции отрезка АВ.

7.3. Решение метрических задач методом преобразования чертежа

1. Определить расстояние между двумя параллельными отрезками прямых АВ и CD методом замены плоскостей проекций (рис. 7.9).

Для решения данной задачи необходимо выполнить двойную замену плоскостей проекций. При первой замене новую плоскость проекций (ось X_{14}) располагаем параллельно данным отрезкам и перпендикулярно плоскости проекций П1. В новой системе плоскостей проекций П1/П4 отрезки прямых преобразуются в отрезки уровня и на П4 проецируются в натуральную величину. Вторую плоскость проекций располагаем перпендикулярно одновременно П4 и отрезкам АВ и CD, которые проецируются на нее в точки C5≡D5 и A5≡B5. A5≡C5 и B5≡D5 будет искомым расстоянием между данными отрезками прямых линий.

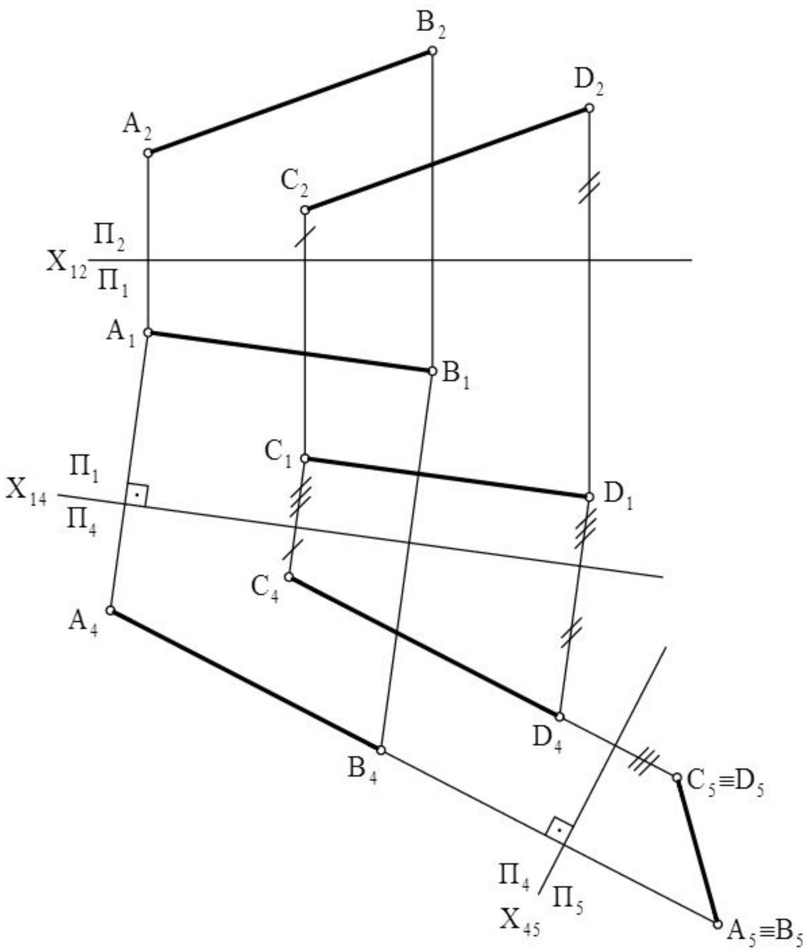


Рис. 7.9

2. Определить расстояние от точки A до прямой CD методом плоскопараллельного перемещения (рис. 7.10).

Объединив точку A в одну плоскость с отрезком CD (на рис. не показано), располагаем эту систему плоскопараллельным перемещением, как вращением вокруг оси, перпендикулярной $П_1$, так, чтобы отрезок занял положение, параллельное плоскости проекций П2, при этом не изменяя величину отрезка и взаимного положения точки A и отрезка CD. Фронтальную проекцию C_2D_2 и A_2 получим при помощи линий связи и линий перемещения, которые проходят параллельно оси X.

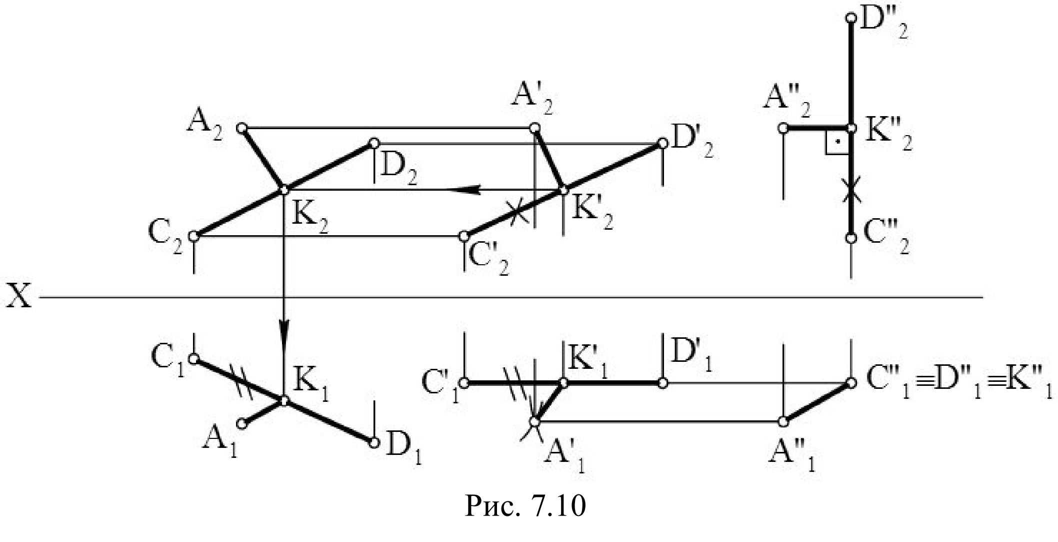


Рис. 7.10

Второе вращение (плоскопараллельное перемещение) выполняем параллельно $П_2$ и отрезок CD располагаем параллельно $П_2$ и перпендикулярно $П_1$.

В данном случае отрезок CD спроецируется в точку $C''_1 \equiv D''_1$, а точка А – в точку A''_1. Расстояние между проекциями A''_1 и K''_1 и есть расстояние от точки А до отрезка CD. Фронтальная проекция точки K''_2 определена при помощи прямой, проходящей от A''_2 параллельно оси X. Так как $A''_1K''_1$ является истинным расстоянием от точки А до отрезка CD, то фронтальная проекция $A''_2K''_2$ должна быть параллельна оси X. На рис. 7.10 также показаны все проекции расстояния АК.

3. Определить угол наклона прямой b (b_1,b_2) к плоскости общего положения Г, заданной следами ($Г_1$, $Г_2$) (рис. 7.11).

С целью упрощения решения задачи при определении угла наклона прямой b (b_1, b_2) к плоскости Г воспользуемся методом определения дополнительного угла между этой прямой и перпендикуляром, проведенным из произвольной точки А, расположенной на прямой b, к плоскости $П_0$ (рис. 7.12). Как видно из рис. 7.12, угол φ_2 можно определить из прямоугольного треугольника AA_0K_0. Он равняется: $\varphi_2 = 90° - \varphi_1$, где φ_1 – дополнительный угол между прямой b и перпендикуляром c, проведенным к плоскости $П_0$.

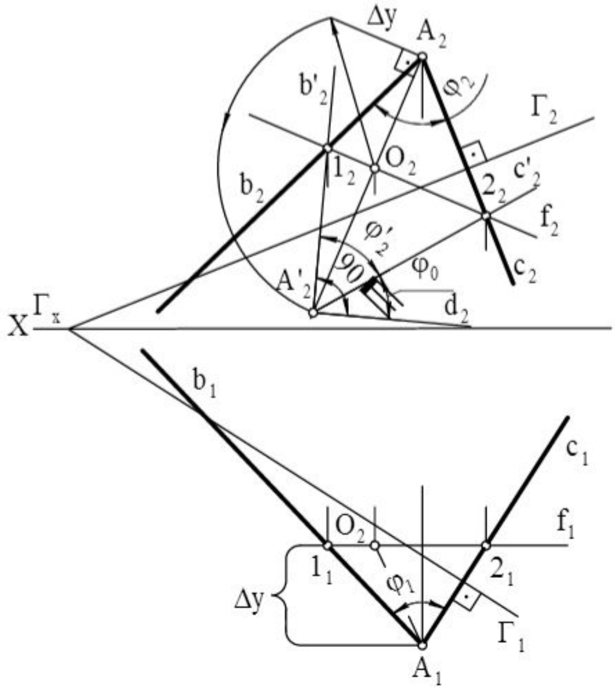


Рис. 7.11

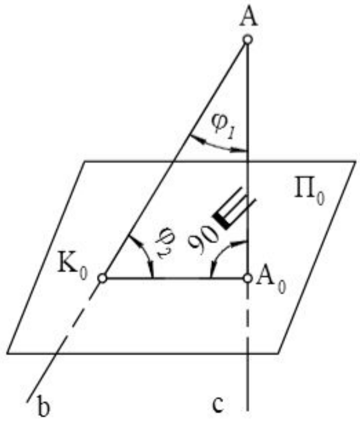


Рис. 7.12

Для определения угла наклона прямой b к плоскости Г (см. рис. 7.11) проводим из точки А (A_1, A_2) перпендикуляр к плоскости $Г_2$, т.е. $c_1 \perp Г_1$ и $c_2 \perp Г_2$; получаем проекции угла, который дополняет до 90° искомый угол между прямой b и плоскостью Г.

Проведя фронталь f (f_1, f_2) в произвольном месте, но так, чтобы она пересекала прямые b и c и вращая дополнительный угол φ (φ_1, φ_2) при вершине А до положения, параллельного плоскости проекций $П_2$, определим его истинную величину $1_2A'_22_2$. Затем, дополняя его до 90°, получим угол φ_0, который равняется $\varphi_0 = 90° - \varphi'_2$. Этот дополнительный угол и есть угол наклона прямой b к плоскости Г.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. В чем сущность метода вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций?
2. В чем сущность метода вращения вокруг следа плоскости?
3. В чем сущность метода плоско-параллельного перемещения?
4. Чем отличаются методы преобразования комплексного чертежа?
5. Запишите алгоритм метода плоско-параллельного перемещения?

ТЕМА 8. МНОГОГРАННИКИ

8.1. Способы задания многогранников и построение их проекций.
8.2. Пересечение плоскости и прямой с многогранниками.
8.3. Взаимное пересечение многогранников.

8.1. Способы задания многогранников и построение их проекций

Одним из видов пространственных форм являются многогранники. Многогранником называется совокупность таких плоских многоугольников, у которых каждая сторона одного является одновременно стороной другого. Вершины и стороны многоугольников являются вершинами и ребрами многогранников, а сами многоугольники – гранями. Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т.е. такие, которые расположены по одну сторону плоскости любой из его граней.

Наибольший практический интерес представляют призмы и пирамиды. Призмой называется многогранник, две грани которого представляют собой равные многоугольники с взаимно параллельными сторонами – основаниями. Ребра, не принадлежащие основаниям и параллельные между собой, называют боковыми ребрами. Пирамидой называется многогранник, одна грань которого – многоугольник со сколь угодно большим числом сторон (не менее трех), а остальные грани являются треугольниками с общей вершиной.

Форма и положение многогранника в пространстве могут быть определены заданием его ребер, основанием и вершиной, если это пирамида, основанием и высотой, если это призма.

Выбирая положение пирамиды или призмы для их изображения, целесообразно располагать их основания параллельно плоскости проекций. Примеры приведены на рис. 8.1, 8.2, 8.3. Здесь в системе плоскостей проекций $П_1$, $П_2$ изображены трехгранная пирамида, прямая и наклонная призмы.

Как видно, пирамида задается на эпюре проекциями ее основания и вершины, а призма – проекциями основания и ребер.

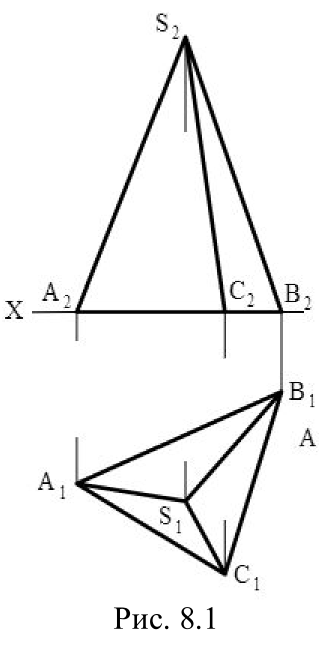


Рис. 8.1

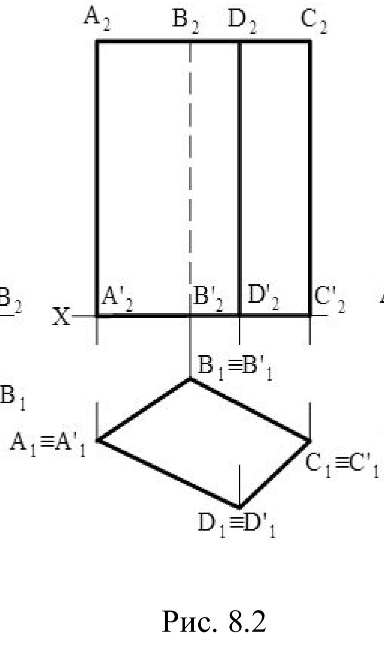


Рис. 8.2

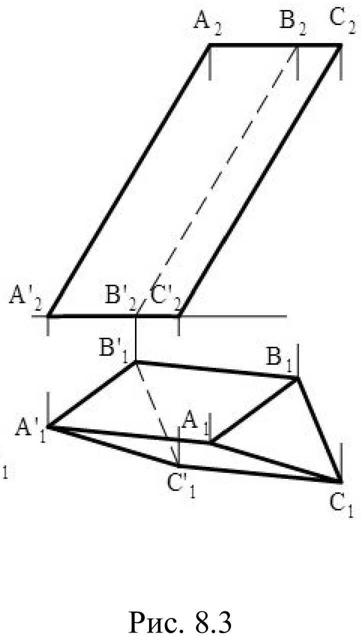


Рис. 8.3

8.2. Пересечение плоскости и прямой с многогранниками

При пересечении многогранника плоскостью в общем случае получается плоский многоугольник ABCD (рис. 8.4). Этот многоугольник можно построить или по точкам пересечения с плоскостью ребер многогранника, или по линиям пересечения граней многогранника с плоскостью. Следовательно, задача сводится к определению точек пересечения прямой с плоскостью или к определению линий пересечения плоскостей. Первый способ на практике применяется чаще второго.

Плоскую фигуру, полученную от пересечения многогранника плоскостью, называют сечением.

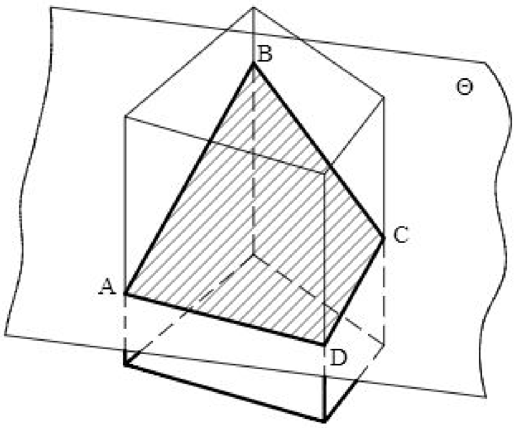


Рис. 8.4

Рассмотрим несколько примеров.

На рис. 8.5 построены проекции фигуры сечения наклонной трехгранной призмы фронтально проецирующей плоскостью Ф ($Ф_2$).

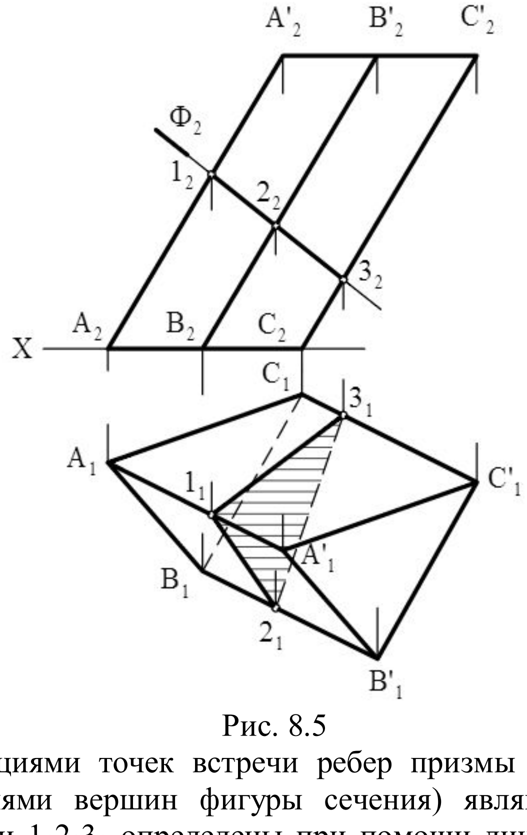


Рис. 8.5

Фронтальными проекциями точек встречи ребер призмы с секущей плоскостью (фронтальными проекциями вершин фигуры сечения) являются точки $1_2 2_2 3_2$. Их горизонтальные проекции $1_1 2_1 3_1$ определены при помощи линий связи. Фронтальной проекцией фигуры сечения в данном примере является отрезок $1_2 2_2 3_2$, совпадающий с фронтальным следом плоскости Ф, а горизонтальной – треугольник $1_1 2_1 3_1$.

На рис. 8.6 построены проекции фигуры сечения четырехгранной пирамиды фронтально проецирующей плоскостью. Здесь, как и в предыдущем примере, фронтальная проекция сечения $1_2 2_2 3_2 4_2$ изображается отрезком прямой, совпадающим с фронтальным следом плоскости Г. Горизонтальная проекция сечения $1_1 2_1 3_1 4_1$ находится по линиям связи.

Если многогранник пересекает плоскость общего положения, то для определения линии пересечения необходимо воспользоваться некоторыми дополнительными вспомогательными построениями. Эти построения можно выполнять двумя способами:

а) метод ребер – нахождение точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, т.е. нахождение вершин многогранника, получающегося в сечении;

б) метод граней – нахождение линий пересечения граней многогранника с секущей плоскостью, т.е. нахождение сторон сечения.

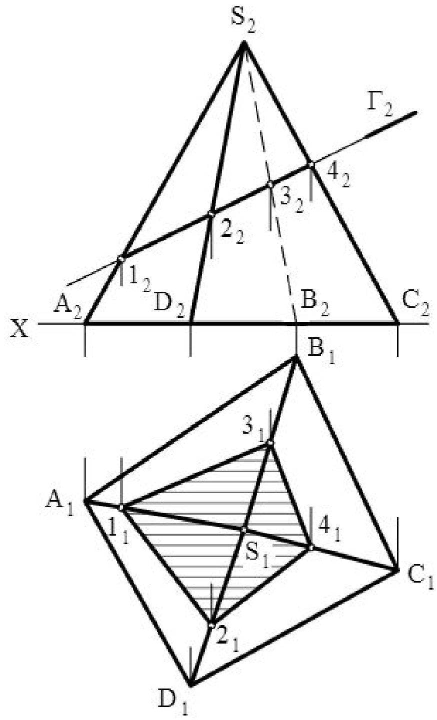


Рис. 8.6

Так, на рис. 8.7. линия пересечения призмы АВС с плоскостью общего положения Ф построена с использованием метода ребер.

Горизонтальный след $Ф_1$ проходит по нижнему основанию, следовательно, он пересекает нижнее основание по прямой $1_1 2_1$.

Ребро А находится перед плоскостью и не пересекается с ней. Через ребра призмы В и С проводим фронтальные плоскости Г и Θ и строим линии пересечения вспомогательных плоскостей с плоскостью Ф. Фронтальные проекции ребер будут пересекаться с проекциями линий пересечения плоскостей в точках встречи их с плоскостью Ф.

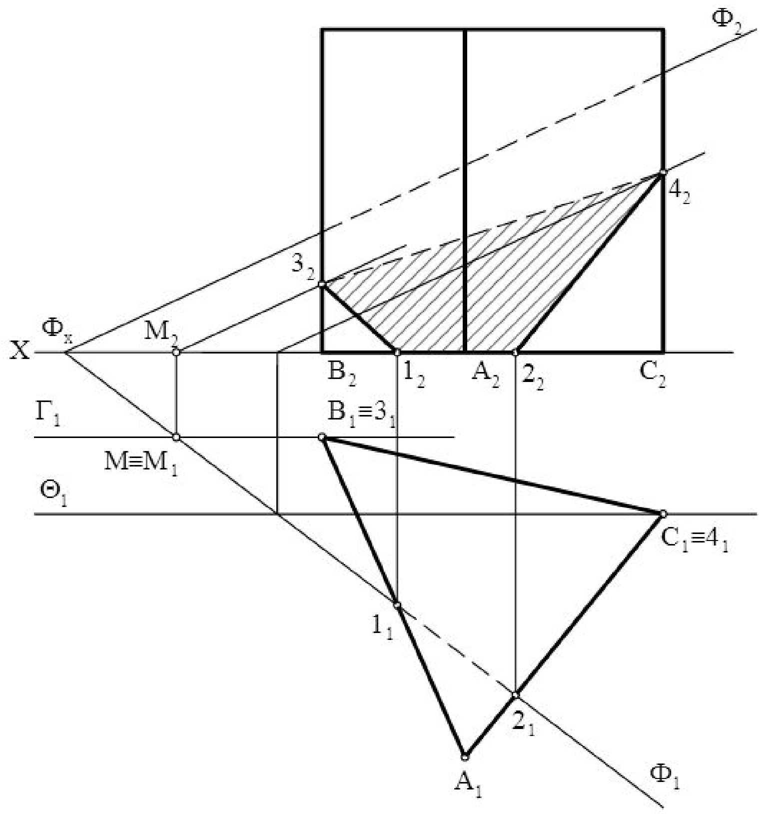


Рис. 8.7

Использование метода граней показано на рис. 8.8, когда необходимо построить сечение призмы АВС плоскостью общего положения Ф (a∩b). Заключаем грани АВ и ВС в горизонтально-проецирующие плоскости Г, Θ и строим линии пересечения данных плоскостей с плоскостью Ф. В пределах граней АВ и ВС эти линии являются сторонами многоугольника, получаемыми при пересечении плоскостью Ф призмы АВС.

На рис. 8.9. построены проекции сечений плоскостью Ф наклонной призмы. Для нахождения проекций сечения заключаем поочередно ребра призмы во фронтально-проецирующие плоскости Г, Θ, Σ и находим точки встречи ребер с плоскостью Ф. Полученные точки 1, 2, 3 соединяем ломаной линией и определяем видимость.

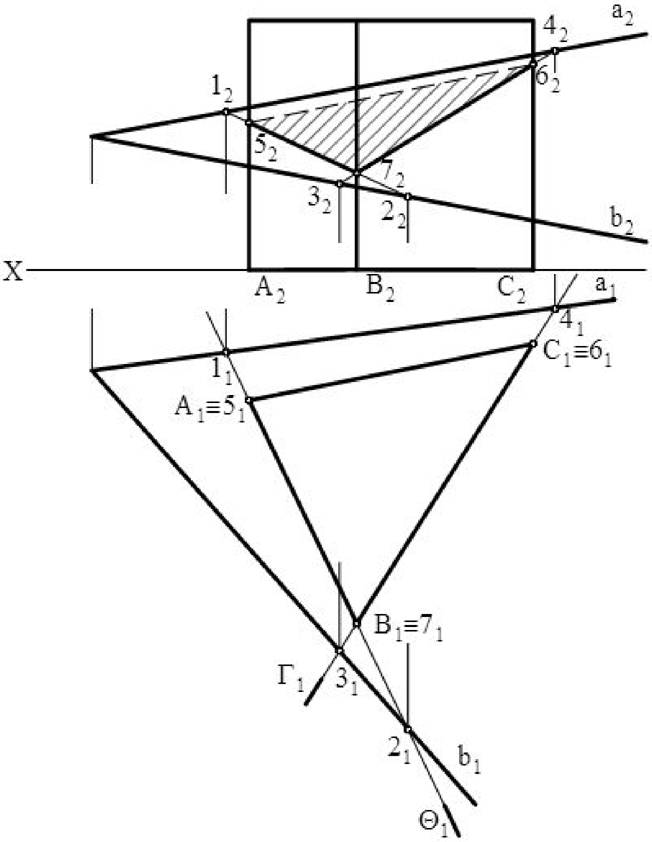

a2
4 2
1 2
6 2
5 2
7 2
3 2
2 2
b2
X
A 2
B 2
C 2
a1
4 1
1 1
C 1≡6 1
A 1≡5 1
B 1≡7 1
Γ1
3 1
2 1
b1
Θ1

Рис. 8.8

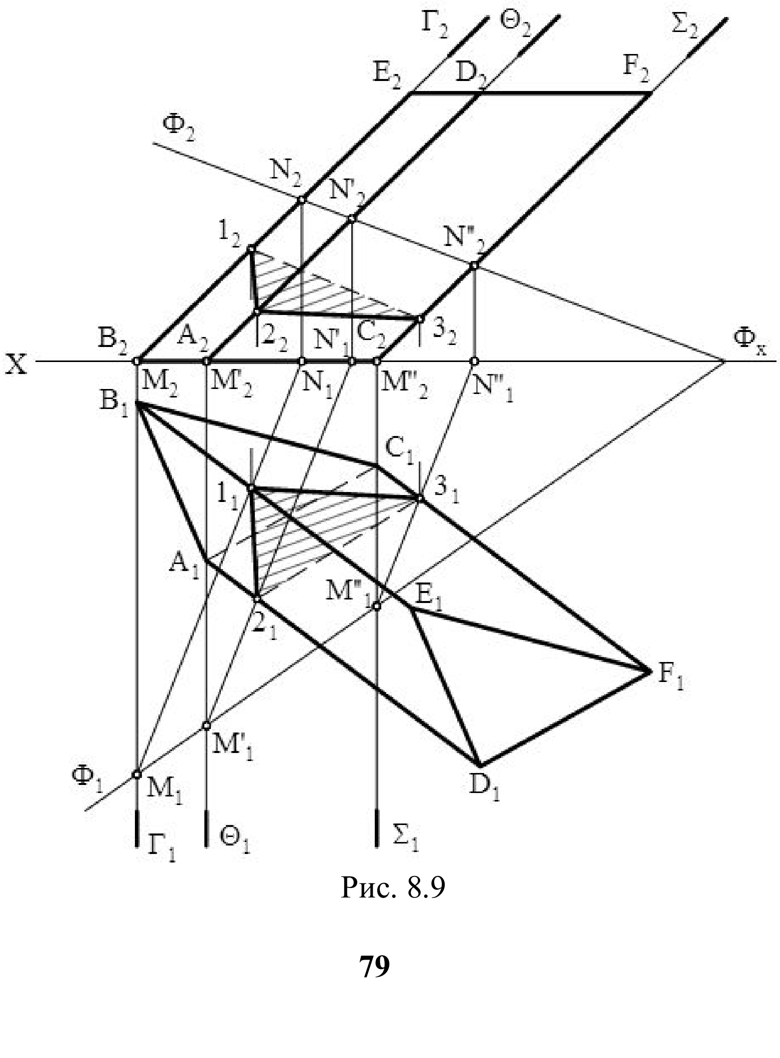

Γ2
Θ2
Σ2
E2
D2
F2
Φ2
N2
N'2
1 2
N"2
B2
A2
2 2
N'1
C2
3 2
Φx
X
M2
M'2
N1
M"2
N"1
B1
C1
1 1
3 1
A1
M"1
E1
2 1
F1
M'1
Φ1
M1
D1
Γ1
Θ1
Σ1

Рис. 8.9

На рис. 8.10 построены проекции сечения плоскостью Ф (ΔABC) пирамиды.

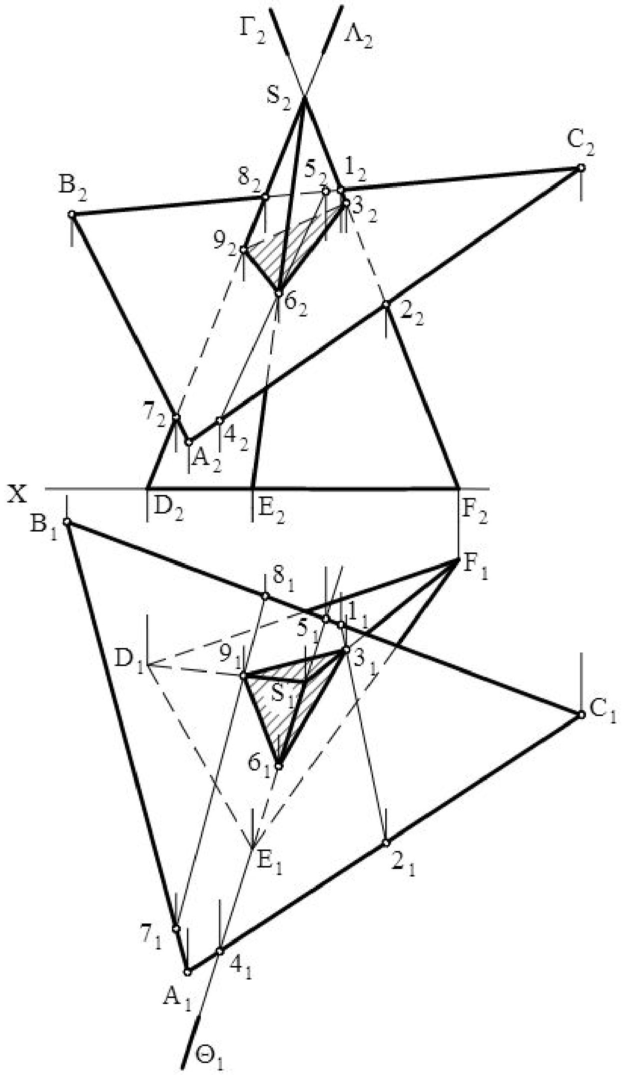


Рис. 8.10

Задача решена нахождением точек встречи (точек 3, 6, 9) каждого ребра пирамиды с секущей плоскостью. Чтобы найти точку (3) встречи ребра FS с секущей плоскостью (ΔABC), через ребро необходимо провести вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Г, построить линию пересечения 1, 2 с секущей плоскостью Ф (ΔABC) и в пересечении горизонтальной проекции линии пересечения с горизонтальной проекцией ребра FS отметить горизонтальную проекцию искомой точки 3. Фронтальная проекция точки 3 построена при помощи линии связи. Точка 9 построена аналогично. Для нахождения точки встречи ребра ES с плоскостью Ф (ΔABC) ребро заключаем во вспомогательную горизонтально –проецирующую плоскость Θ. Соединив точки 3, 6, 9, находим искомое сечение.

Прямая линия может пересекать поверхность многогранника в двух точках при условии, что многогранник выпуклый. Решение этой задачи основано на схеме определения точки пересечения прямой с плоскостью и распадается на три этапа:

1) через заданную прямую проводится вспомогательная плоскость;

2) строится проекция фигуры сечения многогранника;

3) определяются точки пересечения прямой с контуром сечения.

На рис. 8.11 построены точки M (M_1, M_2) и N (N_1, N_2) пересечения прямой 1 с поверхностью пирамиды SABC.

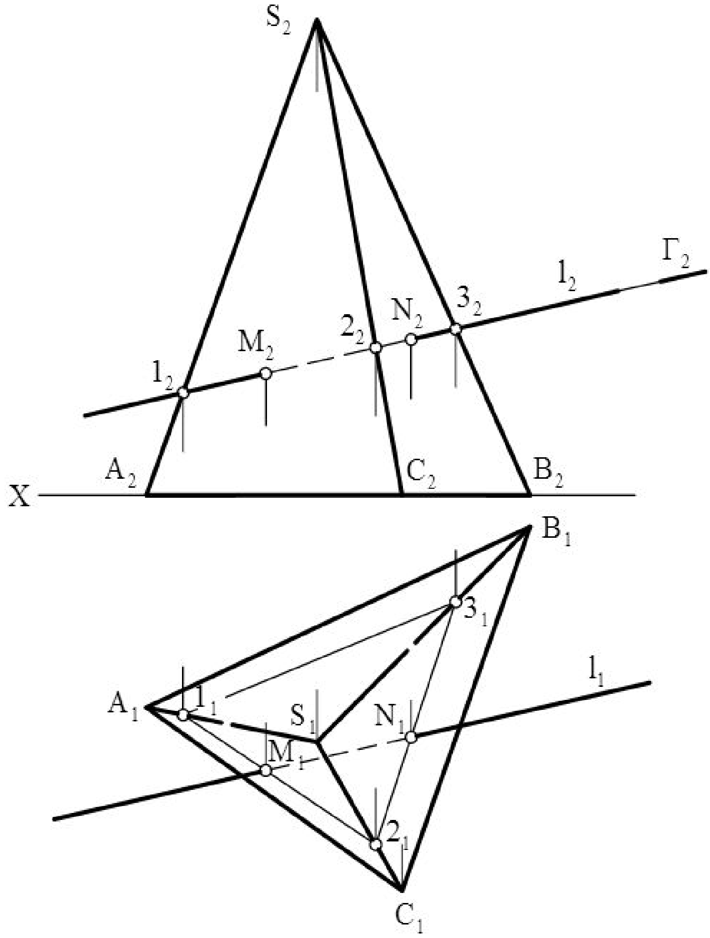


Рис 8.11

На рис. 8.12 построены точки R (R_1, R_2) и S (S_1, S_2) пересечения прямой k с поверхностью наклонной призмы.

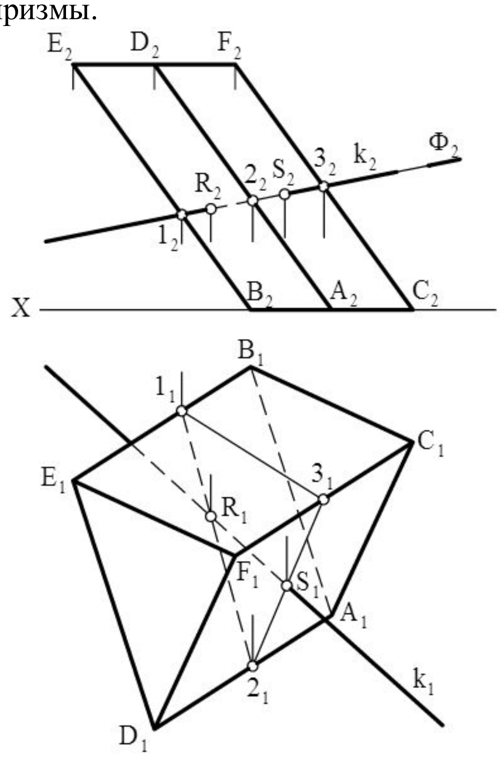


Рис 8.12

8.3. Взаимное пересечение многогранников

Многогранные поверхности пересекаются друг с другом по замкнутым ломаным линиям, для построения которых сначала находим точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого, а затем – ребер второго с гранями первого. Соединяя в определенной последовательности полученные точки, строим искомую ломаную, каждое звено которой представляет собой прямую пересечения двух граней – грани первого многогранника с гранью второго. Итак, построение линии пересечения двух многогранников сводится к решению задачи на пересечение прямой линии с многогранником (или на взаимное пересечение двух плоскостей – граней многогранников).

На рис. 8.13 приведен пример построения линии взаимного пересечения прямой четырехугольной призмы с пирамидой SABC.

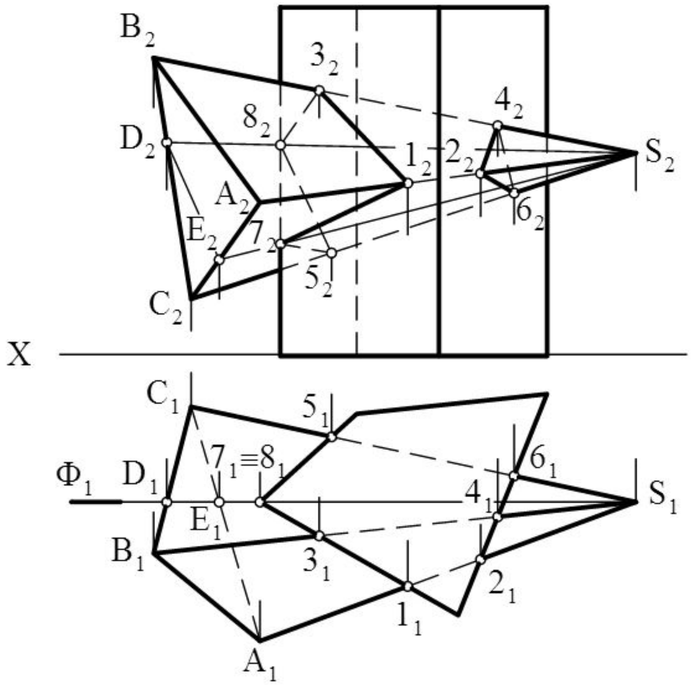


Рис. 8.13

Основание призмы совмещено с плоскостью Π_1. Горизонтальные проекции вертикальных ребер преобразуются в точки. Грани боковой поверхности призмы представляют собой отсеки горизонтально-проецирующих плоскостей. Линия пересечения многогранников определяется по точкам пересечения ребер каждого из них с гранями другого многогранника. Так, ребро SA (S_1A_1, S_2A_2) пирамиды пересекает две вертикальные грани призмы: одну в точке 1 (1_11_2), вторую – в точке 2 (2_12_2). Ребро SB (S_1B_1, S_2B_2) пирамиды пересекает две вертикальные грани призмы в точках 3 (3_13_2) и 4 (4_14_2); ребро SC (S_1C_1, S_2C_2) – в точках 5 (5_15_2) и 6 (6_16_2).

Из четырех вертикальных ребер призмы только одно пересекает пирамиду. Находим точки его пересечения с гранями пирамиды. Через это ребро и вершину S (S_1, S_2) пирамиды проводим вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость Ф. Она пересекает пирамиду по прямым DS (D_1S_1, D_2S_2) и ES (E_1S_1, E_2S_2). Эти прямые пересекают ребро призмы в точках 7 (7_17_2) и 8 (8_18_2) – в точках пересечения ребра призмы с гранями пирамиды.

Соединяя каждые пары таких точек одних и тех же граней отрезками прямых, получаем две линии пересечения многогранников. Одна из них представляет собой пространственный многоугольник 138571 ($1_13_18_15_17_11_1$, $1_23_28_25_27_21_2$), другая – треугольник 246 ($2_14_16_1$, $2_24_26_2$).

Видимыми являются только те из отрезков многоугольников пересечения, которые принадлежат видимым граням многогранников; невидимые отрезки обозначаем на эпюре штриховыми линиями.

Отрезки 24 ($2_1 4_1$, $2_2 4_2$) и 26 ($2_1 6_1$, $2_2 6_2$) линии пересечения 246 ($2_1 4_1 6_1$, $2_2 4_2 6_2$) видимы на фронтальной проекции. Они принадлежат видимым граням призмы и пирамиды. Отрезок 46 ($4_1 6_1$, $4_2 6_2$) является невидимым на фронтальной проекции. Этот отрезок принадлежит видимой на этой проекции грани призмы и невидимой грани пирамиды. На фронтальной проекции видимы отрезки 13 ($1_1 3_1$, $1_2 3_2$) и 17 ($1_1 7_1$, $1_2 7_2$) второй линии пересечения, а отрезки 38 ($3_1 8_1$, $3_2 8_2$), 85 ($8_1 5_1$, $8_2 5_2$) и 75 ($7_1 5_1$, $7_2 5_2$) этой линии невидимы.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Что называется многогранником?
2. Условие принадлежности точки многограннику?
3. Из каких элементов состоит гранная поверхность?
4. Какие вы знаете способы задания многогранников?
5. Назовите способы построения проекций многогранников.
6. Запишите алгоритм построения линии пересечения плоскости с многогранником.
7. Назовите алгоритм построения точек входа и выхода прямой с многогранником.
8. В чем сущность алгоритма построения линии пересечения двух многогранников?

ТЕМА 9. ПОВЕРХНОСТИ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ И ЛИНИЕЙ

9.1. Поверхности. Способ образования.
9.2. Поверхности вращения.
9.3. Точки и прямые линии, принадлежащие поверхности.
9.4. Пересечение плоскости и линии с поверхностью.
9.5. Плоскости, касательные к поверхности.

9.1. Поверхности. Способ образования

Поверхности, к которым нельзя применить математические закономерности, обычно задают достаточно плотной сетью линий, принадлежащих этим поверхностям. Совокупность таких линий называют дискретной (состоящих из отдельных элементов) сетью, или дискретным каркасом поверхности.

При кинематическом способе задания поверхность рассматривается как совокупность всех положений движущейся линии. Линию, производящую поверхность, в каждом ее положении называют образующей. Образующая линия может быть прямой или кривой. Кинематическая поверхность представляет собой геометрическое место линий, движущихся в пространстве по некоторому закону. Следовательно, для задания поверхности могут быть использованы три основных способа: аналитический, каркасный и кинематический.

Поверхность, которая может быть образована прямой линией, называется линейчатой поверхностью. Линейчатая поверхность представляет собой геометрическое место прямых линий. Поверхность, для которой только кривая линия может быть образующей, называется нелинейчатой поверхностью.

Пример линейчатой поверхности дан на рис. 9.1. Поверхность образована прямой линией A_1A_2, которая, оставаясь постоянно параллельной прямой S_1S_2, скользит по некоторой неподвижной линии $B_1B_2B_3$, называемой направляющей.

Примером нелинейчатой поверхности может быть сфера (шаровая поверхность).

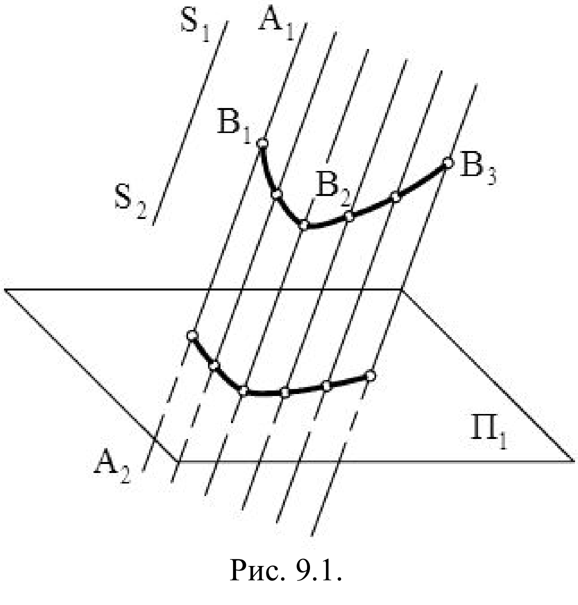


Рис. 9.1.

9.2. Поверхности вращения

В числе кривых поверхностей – линейчатых и нелинейчатых – имеются широко распространенные в практике поверхности вращения. Поверхностью вращения называют поверхность, полученную от вращения какой-либо образующей линии l вокруг неподвижной прямой i – оси поверхности (рис. 9.2).

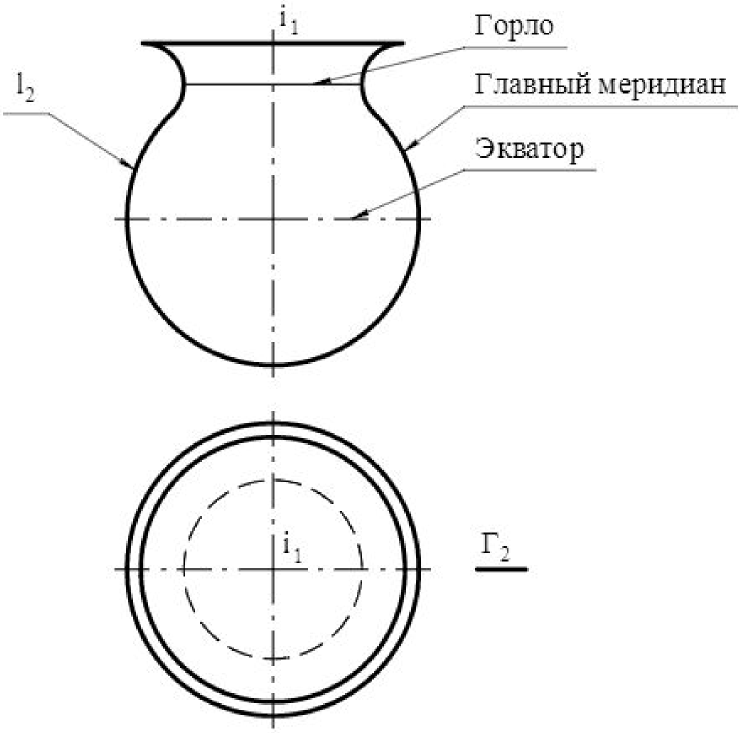


Рис. 9.2

При вращении вокруг оси каждая точка образующей l описывает окружность, которую называют параллелью поверхности вращения. Плоскости параллелей перпендикулярны оси поверхности. Наибольшую из параллелей поверхности вращения называют экватором поверхности, а наименьшую – горлом (шейкой).

Линии, получаемые при пересечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось, называют меридианами поверхности. Меридиан, расположенный во фронтальной плоскости Г, называется главным меридианом.

Различают поверхности вращения с прямолинейной и криволинейной образующей. К поверхностям вращения с прямолинейной образующей относятся цилиндрическая и коническая поверхности вращения.

Наиболее распространенными поверхностями вращения с криволинейной образующей являются поверхности вращения второго порядка, т.е. получаемые при вращении алгебраических кривых, описываемых уравнениями второй степени, вокруг их осей. Это сфера, эллипсоид, параболоид и гиперболоид вращения.

Цилиндрической поверхностью вращения называется поверхность, образованная прямой линией (образующей), которая перемещается, оставаясь параллельной оси вращения. Боковая поверхность прямого кругового цилиндра (рис. 9.3) образована движением отрезка АВ вокруг вертикальной оси i.

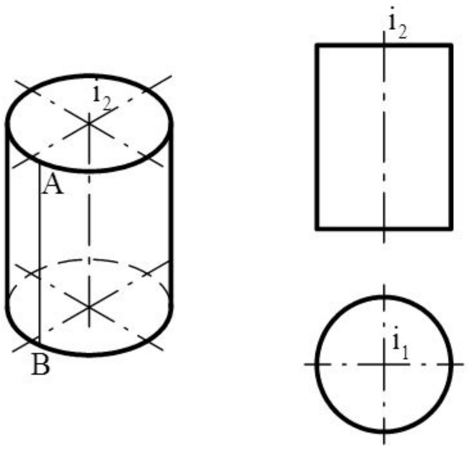


Рис. 9.3

Коническая поверхность вращения представляет собой поверхность, образующая прямая которой пересекает ось вращения в точке, называемой вершиной конуса. Боковая поверхность прямого кругового конуса (рис. 9.4) образована вращением образующей SC вокруг оси конуса по направляющей – окружности.

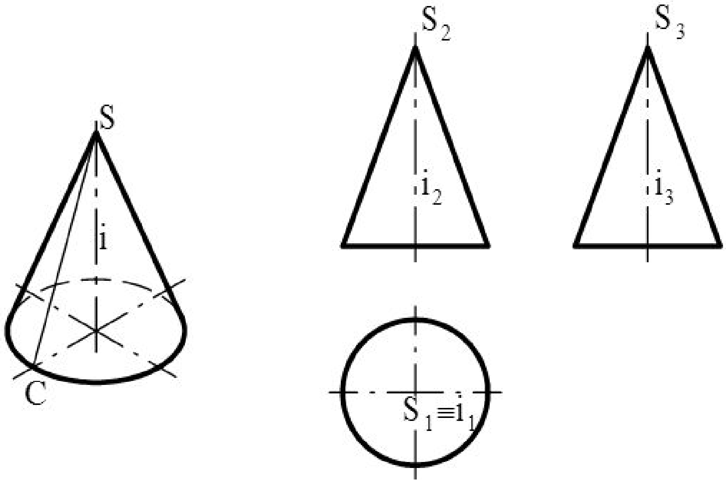


Рис 9.4

Сферой называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг одного из ее диаметров. На все плоскости проекций сфера проецируется в круг с радиусом, равным радиусу сферы (рис. 9.5).

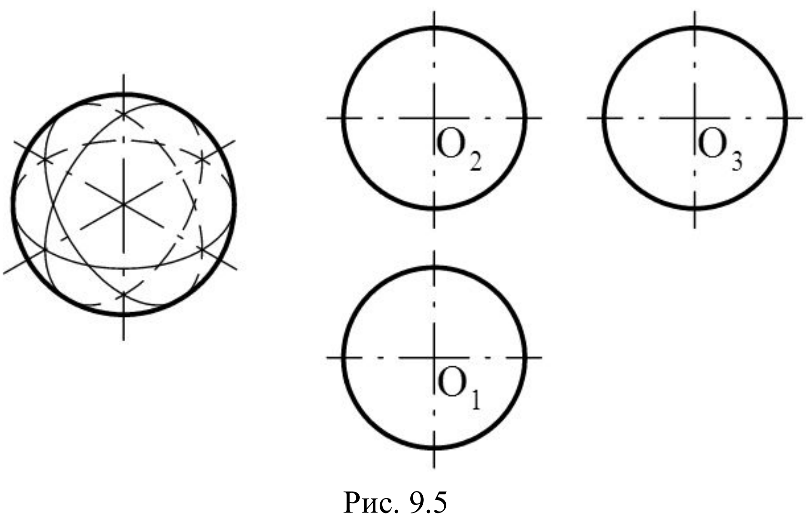


Рис. 9.5

Эллипсоидом вращения называется поверхность, образованная вращением эллипса вокруг одной из его осей.

Параболоид вращения образуется вращением параболы вокруг ее оси.

Однополостной гиперболоид вращения образуется при вращении гиперболы вокруг ее мнимой оси, а двухполостной – при вращении вокруг действительной оси.

Тором называется поверхность, образованная вращением вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности и не проходящей через ее центр. Тор относится к поверхностям вращения четвертого порядка.

9.3. Точки и прямые линии, принадлежащие поверхности

Положение точки на поверхности вращения определяется при помощи окружности, проходящей через эту точку на поверхности вращения.

Это не исключает возможности применения прямолинейных образующих в случае линейчатых поверхностей вращения.

Если на одной из проекций поверхность проецируется в линию, построение проекций точек, принадлежащих этой поверхности, производится с помощью линий связи.

Примеры построения проекций точек, принадлежащих поверхностям прямого кругового цилиндра, конуса и сферы показаны на рис. 9.6, 9.7, 9.8.

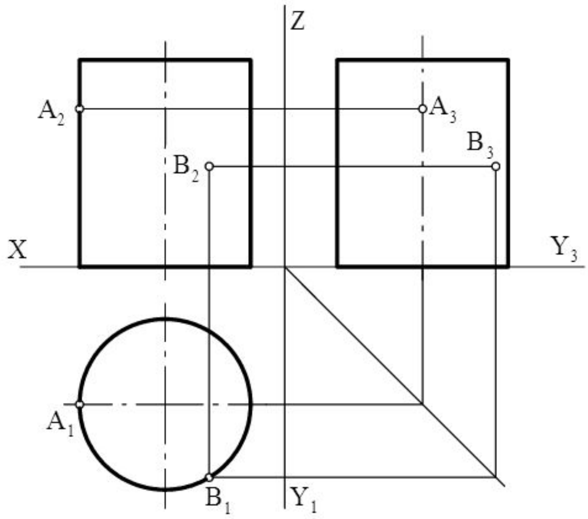


Рис 9.6

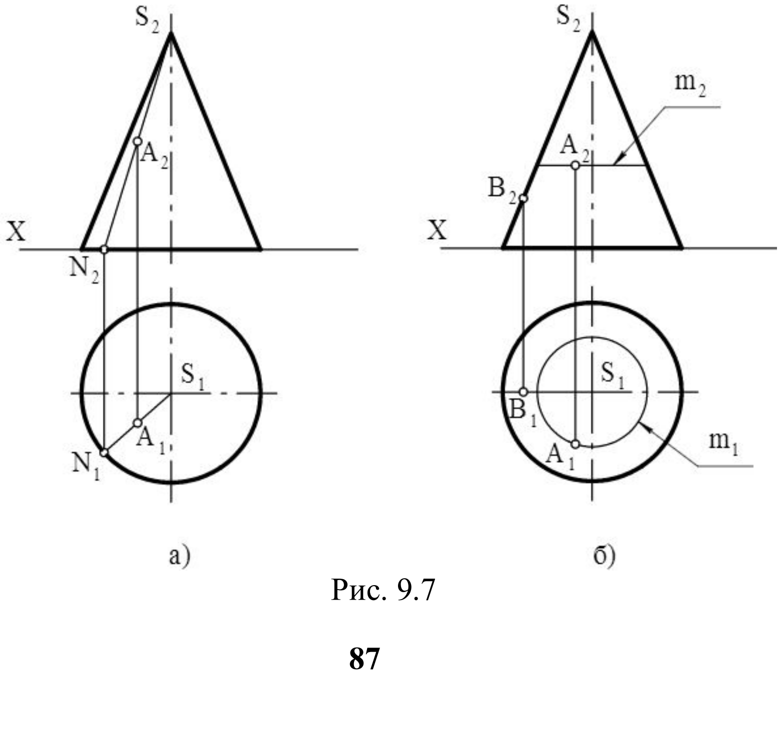


Рис. 9.7

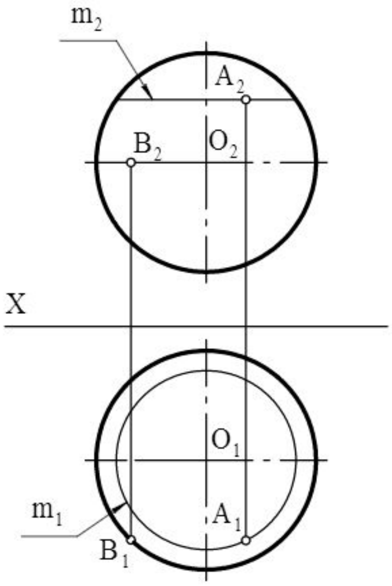


Рис. 9.8

Определение недостающих проекций точек А и В, расположенных на поверхности цилиндра, по одной заданной, например, фронтальной, производится в следующей последовательности. Учитывая, что горизонтальная проекция цилиндра является линией, горизонтальные проекции точек А и В можно найти, проведя из заданных точек A_2 и B_2 линии связи до их пересечения с окружностью в искомых точках A_1 и B1. Профильные проекции точек А и В строят также с помощью линий связи.

Если на поверхности конуса задана одна проекция точки А (например, фронтальная проекция на рис. 9.7, а), то горизонтальную проекцию этой точки определяют с помощью вспомогательных линий, расположенных на поверхности конуса и проведенных через точку А, – образующей или окружности, лежащей в плоскости, параллельной основанию конуса.

В первом случае (рис. 9.7, а) проводят фронтальную проекцию S_2N_2 вспомогательной образующей. Пользуясь вертикальной линией связи, проведенной из точки N_2, расположенной на фронтальной проекции окружности основания, находят горизонтальную проекцию S_1N_1 этой образующей, на которой с помощью линии связи, проходящей через точку A_2, находят искомую точку A_1. Во втором случае (рис. 9.7, б) вспомогательной линией, проходящей через точку А, будет окружность (m_2), расположенная на конической поверхности и параллельная плоскости П1. Фронтальная проекция этой окружности изображается в виде отрезка горизонтальной прямой. Искомая горизонтальная проекция A_1 точки А находится на пересечении линии связи, проведенной из точки A_2, с горизонтальной проекцией вспомогательной окружности (m_1).

Если заданная фронтальная проекция B_2 точки В расположена на контурной (очерковой) образующей, то горизонтальную проекцию точки находят без вспомогательных построений при помощи линии связи.

Если точка А, принадлежащая сферической поверхности, задана ее фронтальной проекцией A_2 (рис. 9.8), то вспомогательная линия m, проведенная через эту точку для построения горизонтальной проекции A_1 точки А, должна быть окружностью, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проекций $П_1$. На горизонтальной проекции m_1 вспомогательной окружности, которая соответствует натуральной величине этой окружности, с помощью линии связи находят искомую горизонтальную проекцию A_1 точки А. Точка В (B_2) находится на экваторе сферы, поэтому ее вторую проекцию (B_1) можно пределить по линии связи.

Линию на поверхности можно рассматривать как множество точек. Поэтому построение проекций линии, принадлежащей поверхности, сводится к построению проекций ряда точек, принадлежащих этой линии.

9.4. Пересечение плоскости и линии с поверхностью

В пересечении поверхностей вращения плоскостью получаются различные плоские кривые линии, проекции которых строятся по проекциям ряда точек, определяемых соответствующими способами. При этом следует стремиться определить, прежде всего, так называемые характерные (опорные) точки фигуры сечения – верхние и нижние, т.е. точки, наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций, и левые и правые, т.е. точки, лежащие на крайних образующих поверхностей. После этого определяется ряд промежуточных точек, которые затем соединяются с характерными плавной кривой линией.

В пересечении кругового цилиндра плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получаться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения цилиндра (рис. 9.9); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси цилиндра под углом, отличным от прямого (рис. 9.10); прямоугольник, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (рис. 9.11).

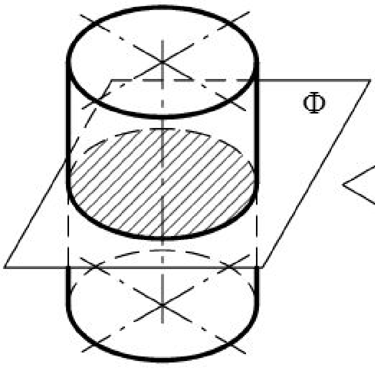


Рис. 9.9

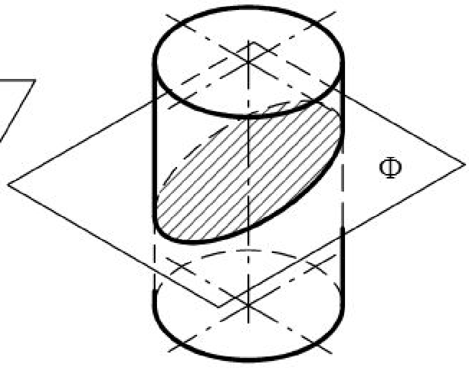


Рис. 9.10

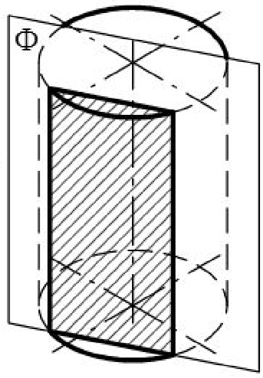


Рис 9.11

Проекции фигуры сечения цилиндра плоскостью могут быть построены аналогично проекциям фигуры сечения призмы плоскостью. Для этого в цилиндр вписывается многогранная призма, находятся точки встречи ребер этой призмы с секущей плоскостью, которые соединяются плавной кривой линией. В случае, когда цилиндр прямой, построение проекций фигуры сечения может быть выполнено по-другому.

На рис. 9.12 показано построение проекций фигуры сечения прямого кругового цилиндра плоскостью общего положения Ф, заданной треугольником АВС.

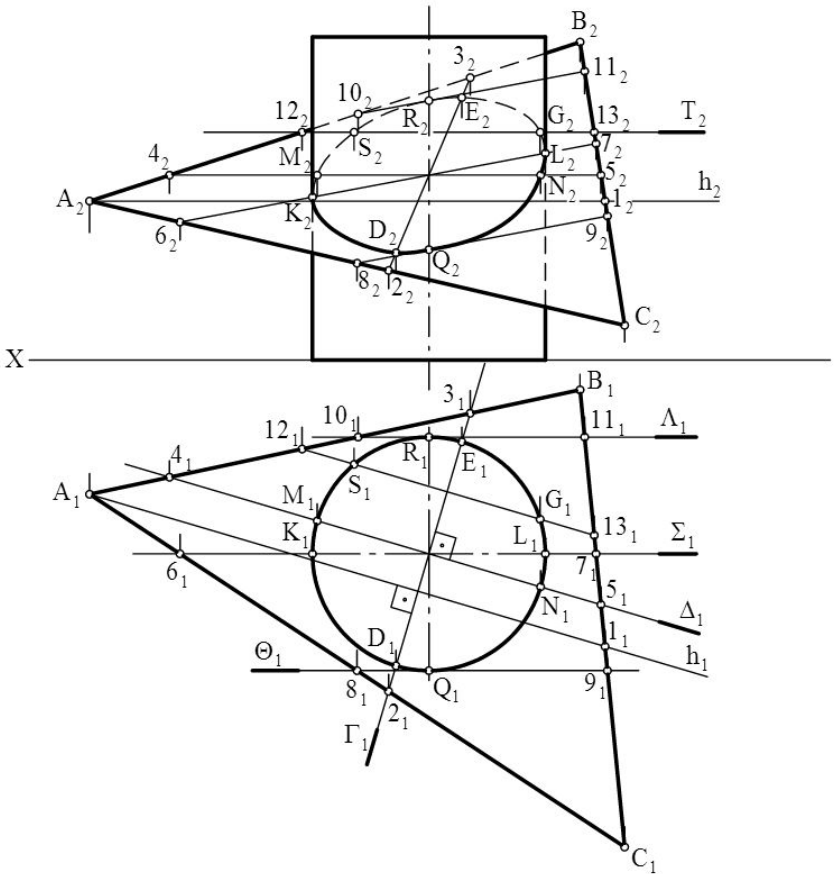


Рис. 9.12

Так как цилиндр прямой, горизонтальные проекции фигуры сечения и самого цилиндра будут совпадать. Как отмечалось выше, в сечении будет получаться эллипс. Для нахождения точек, ограничивающих большую ось эллипса (низшей и высшей), необходимо в плоскости треугольника ABC построить горизонталь h (h_1, h_2), т.к. большая ось совпадает с линией ската плоскости. Затем через ось цилиндра перпендикулярно h_1 проводим линию ската плоскости и заключаем ее в горизонтально-проецирующую плоскость Г ($Г_1$). Плоскость Г пересечет плоскость треугольника ABC по линии 23 ($2_1 3_1$, $2_2 3_2$), а цилиндр – по прямоугольнику. Точки, общие для линии пересечения плоскостей и сечения цилиндра плоскостью Г – D и E (D_1D_2, E_1E_2) – и будут искомыми. Точки, ограничивающие малую ось эллипса – M и N – определим, проведя через ось цилиндра линию перпендикулярно горизонтальной проекции большой оси – $4_1 5_1$ – и заключая ее в плоскость Δ. Дальнейшие построения аналогичны приведенным выше. Точки, лежащие на крайних образующих и определяющие границы видимости – K и L (K_1L_1, K_2L_2) – определим при помощи фронтальной плоскости уровня Σ (Σ1), а ближнюю и дальнюю точки линии сечения Q и R (Q_1R_1, Q_2R_2) – с помощью плоскостей Θ и λ, проведя их касательно к цилиндру через ближнюю и дальнюю образующие. Промежуточные точки, принадлежащие линии пересечения R и G (R_1G_1, R_2G_2), определены с помощью горизонтальной плоскости уровня T (T_2).

В пересечении кругового конуса плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости могут получиться: окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения конуса (рис. 9.13); эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса под углом, отличным от прямого и пересекает все образующие конуса (рис. 9.14); гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса (рис. 9.15); парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей конуса (рис. 9.16); треугольник, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 9.17).

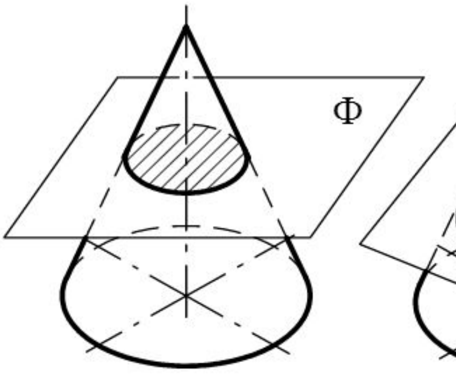


Рис. 9.13

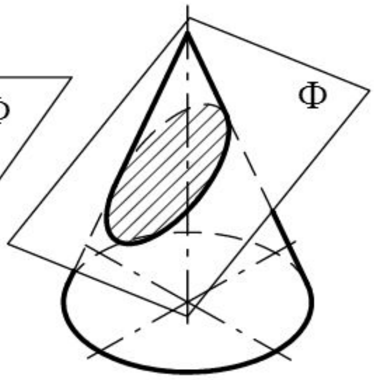


Рис. 9.14

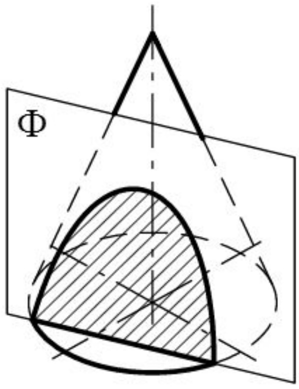


Рис 9.15

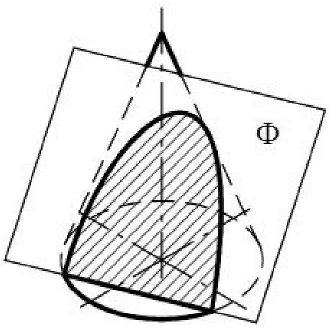


Рис. 9.16

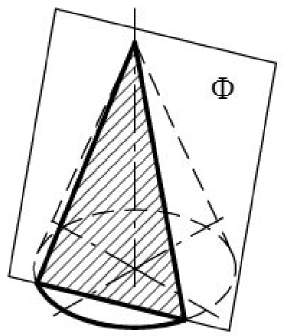


Рис. 9.17

Проекции фигуры сечения конуса плоскостью можно построить аналогично проекциям фигуры сечения пирамиды плоскостью (в конус вписывается многогранная пирамида, рис. 9.18).

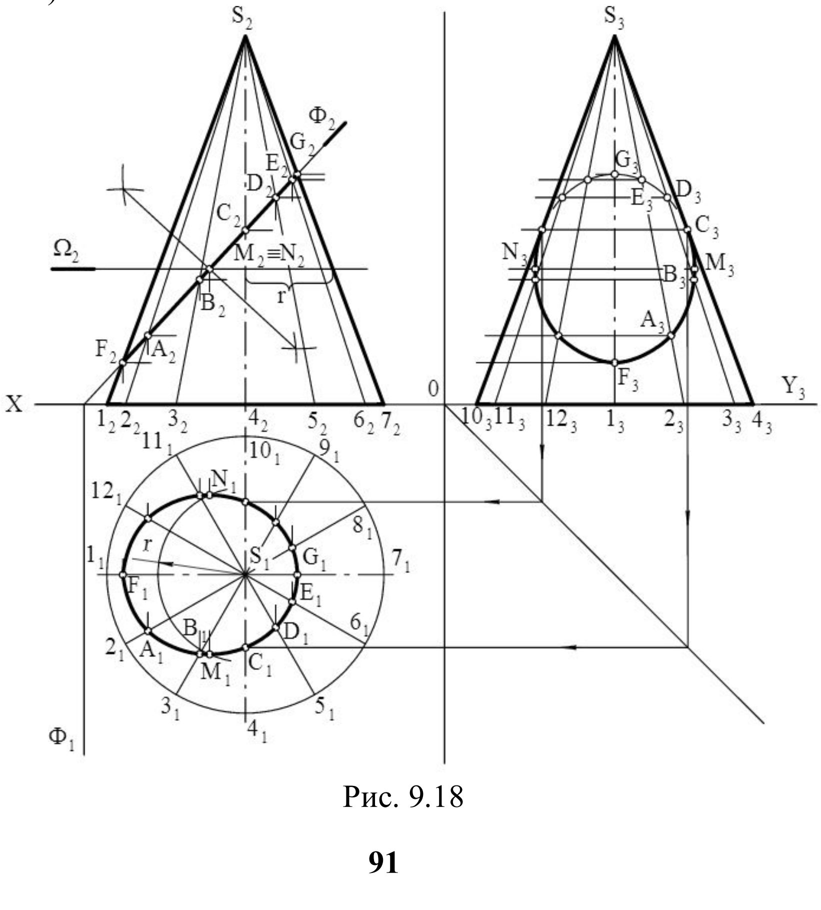


Рис. 9.18

Построение линии пересечения плоскости с конической поверхностью выполняется в следующем порядке. Основание конуса делится на равномерное число частей, в нашем примере 12, проводятся горизонтальные проекции $S_1 1_1$, $S_1 2_1$..., $S_1 12_1$образующих и строятся их фронтальные и профильные проекции. На фронтальной проекции отмечаются фронтальные проекции точек пересечения построенных образующих на видимой поверхности конуса с секущей плоскостью Ф: A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, а также крайних точек F_2 и G_2. Горизонтальные проекции строятся в проекционной связи на соответствующих проекциях образующих. На профильную проекцию точки переносятся также по линиям связи. Горизонтальная проекция точки C_1 строится после того, как она построена на профильной проекции.

На фронтальной проекции большая ось эллипса F_2G_2 – линии пересечения фронтально-проецирующей плоскости с конусом – проецируется в натуральную величину. Малая ось MN эллипса перпендикулярна большой и проецируется в точку $M_2 = N_2$ в середине фронтальной проекции F_2G_2 большой оси.

Построение горизонтальной проекции малой оси эллипса выполнено с помощью горизонтальной плоскости уровня Ω (Ω_2), проведенной через малую ось эллипса. Плоскость Ω пересекла конус по окружности радиуса r, точки M_2 и N_2 по линиям связи перенесены на горизонтальную проекцию окружности.

На рис. 9.19 показано построение сечения конуса плоскостью общего положения, заданной следами.

Построение проекций сечения начато с нахождения точек, ограничивающих большую ось эллипса (высшая и низшая точки сечения). Для этого проведена вспомогательная секущая плоскость Г, горизонтально-проецирующая, перпендикулярная следу Φ_1 и проходящая через ось конуса. Плоскость Г пересекает конус по образующим S1 ($S_1 1_1$, $S_2 1_2$) и S2 ($S_1 2_1$, $S_2 2_2$), а плоскость Ф – по линии MN (M_1N_1, M_2N_2). Точки A и B, получающиеся в пересечении образующих S1 и S2 с прямой MN, будут искомыми точками. Отрезок AB является большой осью эллипса, получающегося при пересечении данного конуса плоскостью Ф. Проекция A_1B_1 является большой осью эллипса – горизонтальной проекции фигуры сечения. Разделив AB пополам, получим положение малой оси эллипса – точку O (O_1, O_2). Точки C и D (C_1D_1, C_2D_2), ограничивающие малую ось эллипса, определим, воспользовавшись горизонтальной плоскостью уровня Θ, проведенной через точку O. Она пересекает поверхность конуса по окружности, а плоскость Ф – по горизонтали. Точки на пересечении этих линий и будут искомыми.

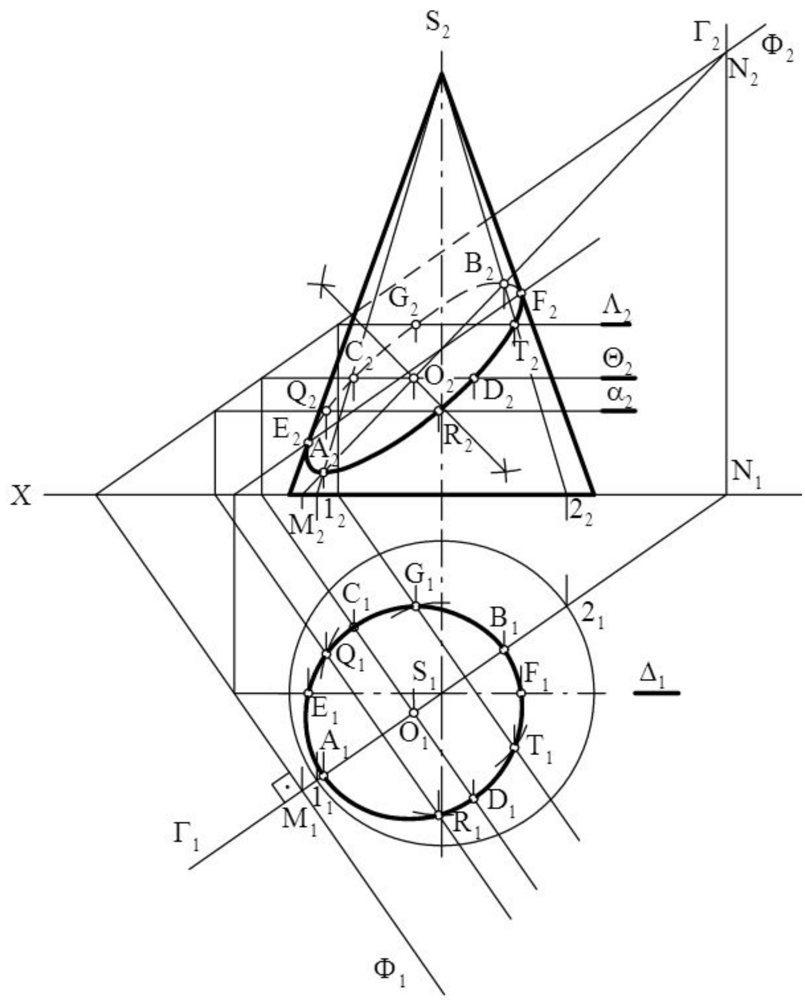


Рис. 9.19

Точки, лежащие на очерке фронтальной проекции конуса и определяющие границы видимости линии пересечения, получены при помощи вспомогательной секущей плоскости Δ, проведенной через ось конуса параллельно $П_2$. Плоскость Δ пересекает плоскость Ф по фронтали, а конус – по двум образующим. Точки E и F, получающиеся при пересечении фронтали с образующими, принадлежат искомой линии пересечения конуса с плоскостью Ф.

Промежуточные точки линии пересечения удобно построить, использовав горизонтальные секущие плоскости, аналогично построению точек, ограничивающих малую ось эллипса.

Задачу можно решить, использовав метод замены плоскостей проекций, с помощью которого можно привести условие к виду, приведенному на рис. 9.18.

Для построения точек пересечения прямой с какой-либо поверхностью необходимо провести через данную прямую вспомогательную секущую плоскость; затем найти линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью и, наконец, определить точки пересечения линии с данной прямой. Эти точки и будут искомыми точками пересечения прямой с поверхностью.

Вспомогательную плоскость, проводимую через прямую при пересечении ею какой-либо поверхности, следует выбирать так, чтобы получались простейшие сечения.

В некоторых случаях показ вспомогательной плоскости излишен. Например, точки встречи прямой l с поверхностью прямого кругового цилиндра, имеющего вертикальную ось (рис. 9.20), определяют следующим образом.

Горизонтальная проекция цилиндрической поверхности представляет собой окружность, поэтому горизонтальные проекции всех точек, расположенных на цилиндрической поверхности, в том числе и двух искомых точек встречи, будут расположены на этой же окружности.

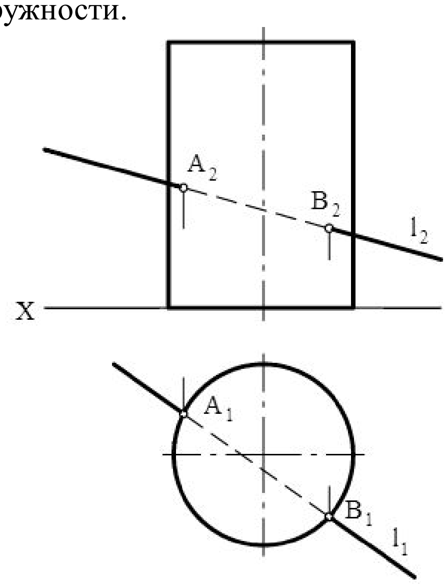


Рис. 9.20

Фронтальные проекции A_2 и B_2 искомых точек встречи определяют проведением через точки A_1 и B_1 вертикальных линий связи до пересечения с фронтальной проекцией l_2 прямой l.

На рис. 9.21 построена точка пересечения горизонтально-проецирующей прямой с поверхностью кругового конуса. В этом случае также нет необходимости применять вспомогательную плоскость. Горизонтальная проекция A_1 искомой точки совпадает с горизонтальной проекцией l_1 данной прямой. Фронтальная проекция точки A (A_2) определяется с помощью образующей S_1 конуса.

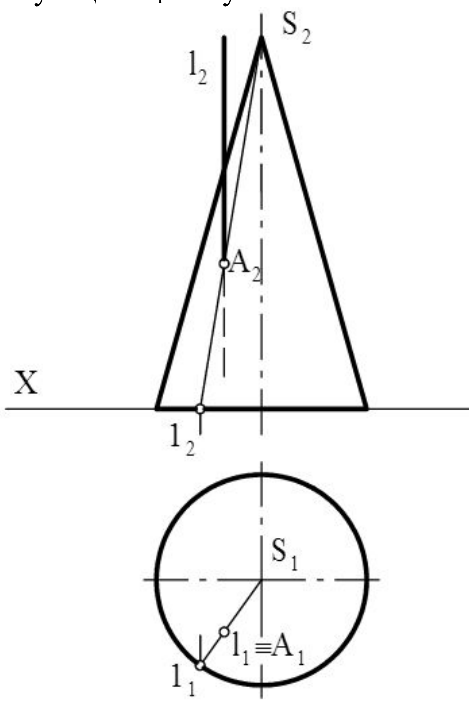


Рис. 9.21

На рис. 9.22 показано построение точек встречи прямой общего положения 1 с конической поверхностью.

В данном случае целесообразно через прямую l провести вспомогательную плоскость общего положения, проходящую через вершину конуса, которая пересечет поверхность по образующим. Такую плоскость зададим следующим образом. Через произвольно взятую на прямой l точку A и вершину конуса S проведем прямую k. Две пересекающиеся прямые l и k определяют плоскость Ф. Находим горизонтальные следы M_1 и M'_1 прямых l и k, через которые пройдет горизонтальный след вспомогательной секущей плоскости Ф. Отметим точки 1_1 и 2_2 в которых след $Ф_1$ пересекает основание конуса, построим их фронтальные проекции и при их помощи найдем две образующие, по которым коническая поверхность пересекается вспомогательной плоскостью Ф – S_1 и S_2 (S_21_2, S_22_2). На пересечении этих образующих с фронтальной проекцией l_2 прямой l отметим фронтальные проекции точек пересечения B_2 и C_2. Горизонтальные проекции точек B_1 и C_1 построим при помощи линий связи.

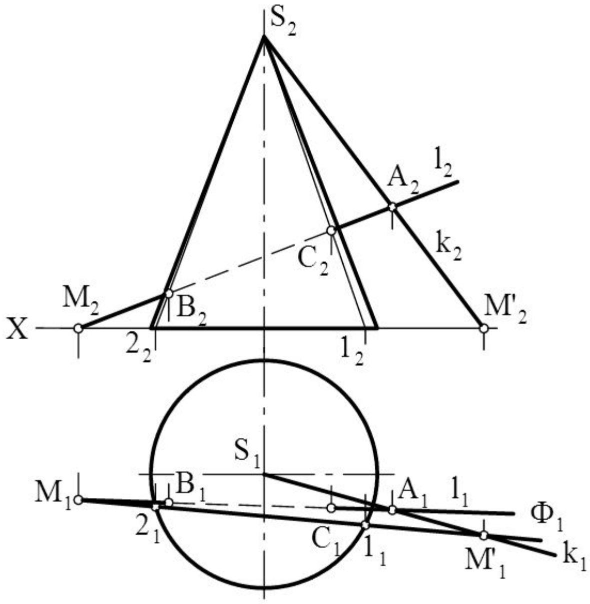


Рис. 9.22

На рис. 9.23 показано построение точек пересечения поверхности наклонного цилиндра с круговым основанием с прямой линией l. Для этого через прямую l проведем вспомогательную плоскость Ф параллельно образующим цилиндра. Такая плоскость может быть задана двумя пересекающимися прямыми l и k, проведенными через точку A (прямую k проводим параллельно образующим цилиндра).

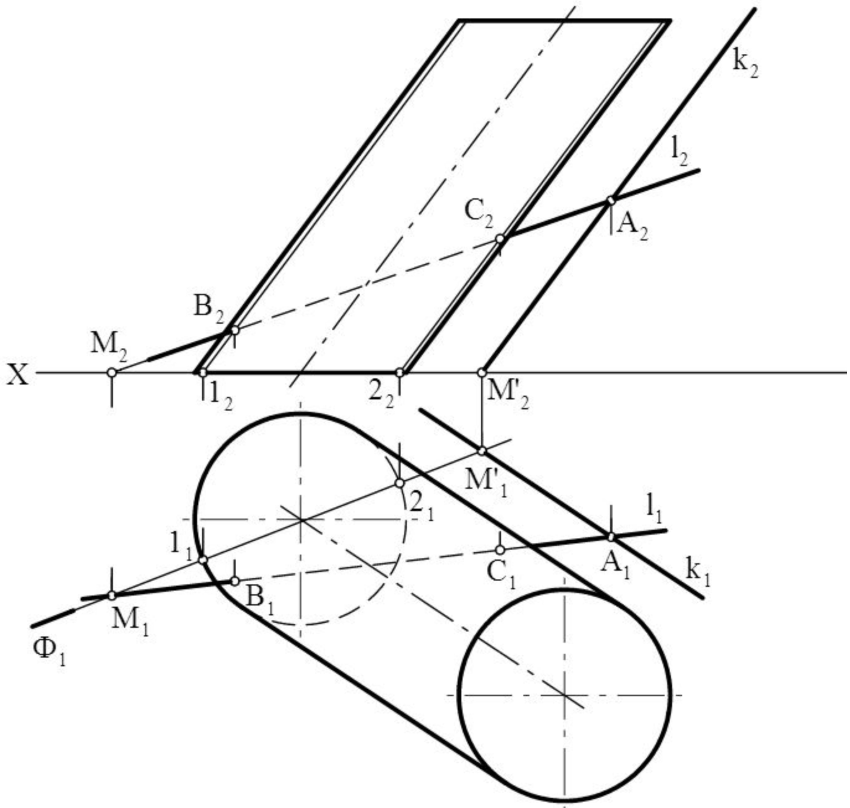


Рис. 9.23

Плоскость Ф пересекает цилиндр по его образующим. Если построить горизонтальные следы прямых, определяющих плоскость, то получим горизонтальный след Ф1 плоскости. Отметим точки 1_1 и 2_2 в пересечении следа $Ф_1$ с основанием цилиндра, построим их на фронтальной проекции – 1_2 и 2_2 – и проведем через эти точки прямые, параллельные образующим цилиндра. Точки B_2 и C_2 – фронтальные проекции точек пересечения прямой l с поверхностью цилиндра.

9.5. Плоскости, касательные к поверхности

При изображении кривых поверхностей и при выполнении связанных с ними построений может оказаться необходимым проведение плоскости, касательной к поверхности.

Возьмем небольшую часть поверхности и точку на ней. Если через эту точку на поверхности проведем кривые и касательные к ним прямые, то последние оказываются в одной плоскости. Эту плоскость называют касательной к плоскости в данной ее точке.

Рассмотрим несколько примеров построения касательной плоскости к поверхностям.

На рис. 9.24 показано построение плоскости, касательной к сфере в точке А.

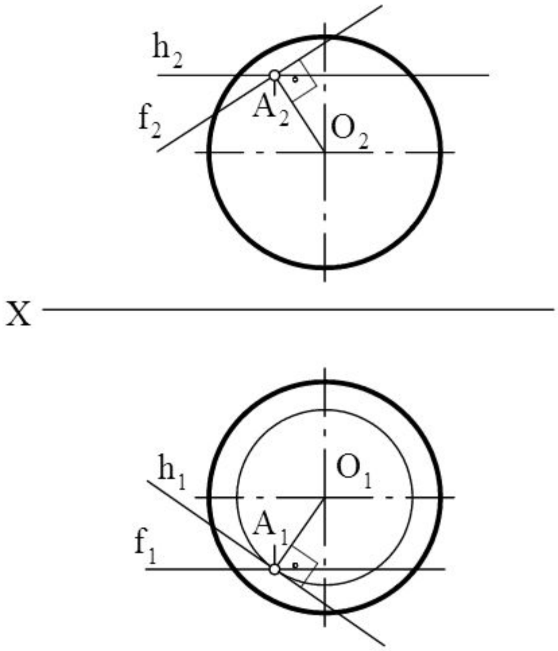


Рис. 9.24

Плоскость, касательная к сфере, перпендикулярна радиусу, проведенному в точке касания. Поэтому, проведя радиус OA, строим плоскость, задавая ее горизонталью h и фронталью f. Эти прямые определяют плоскость, касательную к сфере в ее точке А.

В рассмотренном примере касательная плоскость имеет с поверхностью одну общую точку.

На рис. 9.25 показано построение плоскости, касательной к цилиндру в точке С. Здесь плоскость касается поверхности не в одной точке, а во всех точках на образующей.

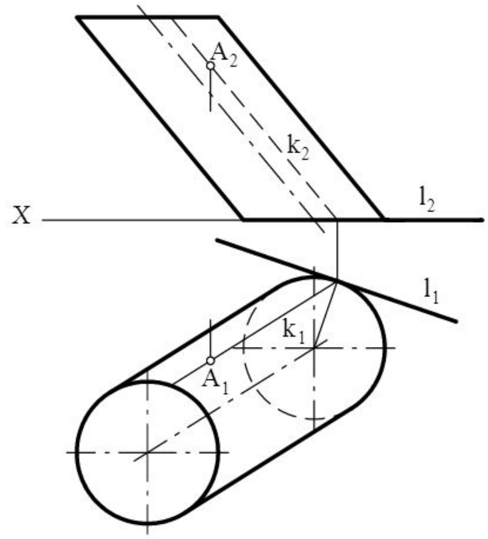


Рис. 9.25

Данная поверхность линейчатая. Поэтому через точку А можно провести образующую k, которая является одной из двух пересекающихся, определяющих касательную плоскость. В качестве второй прямой можно взять касательную l к окружности – горизонтальному следу цилиндрической поверхности. Прямые l и k определяют искомую касательную плоскость. Прямая l является горизонтальным следом этой плоскости.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Приведите примеры кривых поверхностей.
2. Как образуется цилиндрическая поверхность?
3. Как образуется коническая поверхность?
4. Как образуется сферическая поверхность?
5. Что такое поверхность вращения?
6. Назовите цилиндрические сечения.
7. Назовите конические сечения.
8. В чем заключается способ нахождения точек пересечения многогранной поверхности с прямой линией?
9. В чем заключается способ нахождения точек пересечения кривой поверхности с прямой линией?
10. В чем заключается общий прием построения точек пересечения прямой с поверхностью?
11. В каком случае при решении задач на построение точек пересечения прямой с поверхностью не используются проецирующие плоскости?
12. Как определить видимость проекций прямой?

ТЕМА 10. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Способ вспомогательных секущих плоскостей

Линия пересечения двух поверхностей есть линия, принадлежащая обеим поверхностям. Следовательно, для построения линии пересечения поверхностей необходимо найти общие точки для данных поверхностей.

Линию пересечения поверхностей можно построить, применяя вспомогательные секущие плоскости (посредники), пересекающие данные поверхности по каким-либо линиям. Взяв достаточное количество вспомогательных поверхностей, можно найти достаточное количество точек искомой линии.

Сформулируем общее правило построения линии пересечения поверхностей:

- выбираем вид вспомогательных поверхностей;
- строим линии пересечения вспомогательных поверхностей с заданными поверхностями;
- находим точки пересечения построенных линий и соединяем их между собой.

В качестве вспомогательных поверхностей выбирают такие линии пересечения которых с заданными поверхностями проецируются в графически простые линии – прямые, окружности, т.к. при этих условиях задача решается проще и точнее. В качестве вспомогательных поверхностей можно использовать плоскости или сферы.

Рассмотрим применение вспомогательных секущих плоскостей на примере построения линии пересечения сферы с конусом вращения (рис. 10.1). При построении точек линии пересечения поверхности вначале находят те точки, которые называют характерными или опорными. Основания заданных поверхностей, представленных окружностями, принадлежат горизонтальной плоскости проекций Π_1. В пересечении окружностей основания получаем опорные точки 1_1 и $1'_1$. По линии связи переносим эти точки на фронтальную проекцию.

Проведенная фронтальная плоскость уровня Δ (Δ_1), проходящая через ось конической поверхности и центр сферы, пересекает коническую поверхность по контурным образующим SA и SB, а сферу – по окружности, совпадающей с проекцией главного меридиана. В пересечении контурной образующей SB и главного меридиана получим опорную точку 2 (2_1, 2_2) – наивысшую точку линии пересечения.

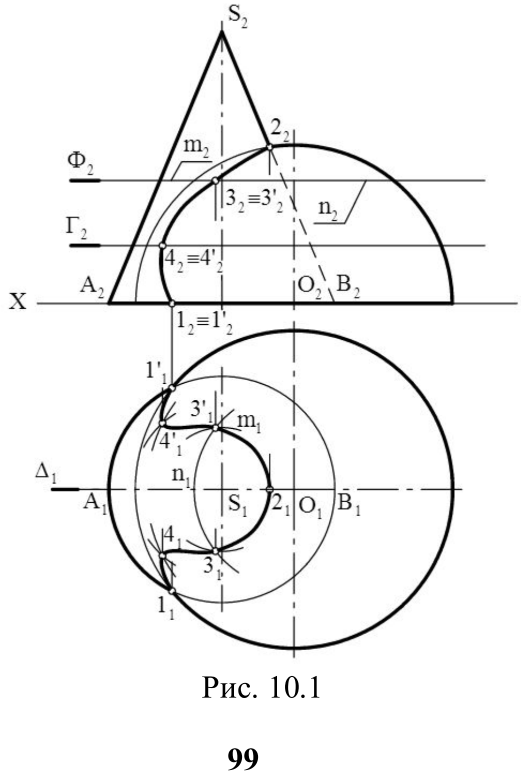


Рис. 10.1

Промежуточные точки найдем при помощи горизонтальных плоскостей уровня Ф и Г, которые пересекают заданные поверхности по окружностям. При взаимном пересечении этих окружностей получают промежуточные точки искомой линии. Вначале находим горизонтальные проекции 3_1 и $3'_1$ точек 3 и 3' на пересечении окружностей m_1 и n_1, получающихся от пересечения плоскостью Ф конуса и сферы. Затем, используя линии связи и принадлежность этих точек плоскости Ф, находим их фронтальные проекции 3_2 и $3'_2$.

Число вспомогательных секущих плоскостей, а, следовательно, и промежуточных точек линии пересечения зависит от требуемой точности решения.

Относительно горизонтальной плоскости проекций видимой является заданная половинка сферы и коническая боковая поверхность.

Следовательно, видима и вся горизонтальная проекция линии пересечения этих поверхностей.

Относительно фронтальной плоскости проекций видимой является часть 1, 4, 3, 2, фронтальная проекция линии пересечения, расположенная на видимых (передних) участках заданных поверхностей, а часть 1', 4', 3', 2' невидима.

Заданные поверхности симметричны относительно фронтальной плоскости уровня Δ, проходящей через оси их вращения, следовательно, симметрична и линия их пересечения относительно этой же плоскости. Значит, на фронтальной плоскости проекций Π_2 проекции видимой и невидимой частей линии пересечения совпадут и будут кривой второго порядка.

На чертеже одноименные проекции точек 1_1, 4_1, 3_1, 2_1, $3'_1$, $4'_1$, $1'_1$ и $1_2 1'_2$, $4_2 4'_2$, $3_2 3'_2$ и 2_2 соединяем плавной сплошной основной линией и получаем искомые проекции линии пересечения.

Как отмечалось выше, для нахождения промежуточных точек, принадлежащих линии пересечения, были использованы горизонтальные плоскости уровня.

Фронтальные плоскости уровня, кроме проходящей через ось конической поверхности плоскости Δ (Δ_1), пересекают эту плоскость по сложным кривым (гиперболам). Значит, их не следует применять в качестве вспомогательных секущих поверхностей.

Проецирующие плоскости будут давать в пересечении сложные для построения на чертеже линии, поэтому их также нецелесообразно применять в качестве вспомогательных секущих плоскостей. Например, горизонтально-проецирующие плоскости, проходящие через ось заданной конической поверхности, будут пересекать ее по образующим, а сферу – по окружностям. Но эти окружности будут проецироваться на плоскость Π_2 в эллипсы.

После сравнения всех возможных вариантов в качестве вспомогательных секущих плоскостей были выбраны горизонтальные плоскости уровня, т.к. их применение дает наиболее простые графические построения на чертеже.

На рис. 10.2 приведено построение линии пересечения кругового конуса с вертикальной осью с фронтально-проецирующим цилиндром.

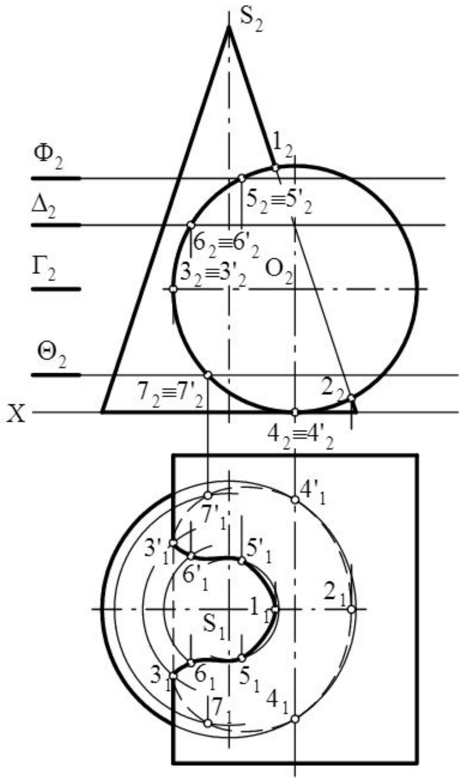


Рис. 10.2

Характерные точки 1, 2, 4, 4' (1_2, 2_2, 4_2, $4_2'$) определены непосредственно на эпюре. Характерные точки 3, 3', находящиеся на контурной образующей цилиндра и определяющие границу видимости линии пересечения, а также точки 5, 5', 6, 6', 7, 7' определены с помощью вспомогательных секущих горизонтальных плоскостей уровня Г, Ф, Δ, Θ, которые пересекают конус вращения по окружности, а цилиндр – по прямолинейным образующим. На пересечении горизонтальных проекций полученных окружностей и образующих получают общие точки, принадлежащие искомой линии пересечения. На плоскость проекций $П_2$ линия пересечения проецируется на основание цилиндра.

На рис. 10.3 приведено построение линии пересечения кругового цилиндра с вертикальной осью и сферы.

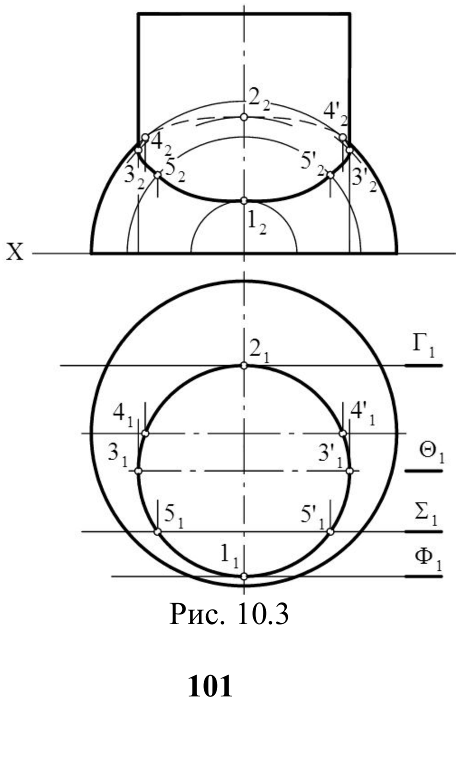


Рис. 10.3

Ход решения задачи аналогичен описанному выше. В качестве вспомогательных секущих плоскостей использованы фронтальные плоскости уровня, которые пересекают сферу по окружностям, а цилиндр – по прямолинейным образующим. Опорные точки $4_4'$ ($4_1 4'_1$, $4_2 4'_2$), лежащие на главном меридиане сферы, на фронтальной проекции построены при помощи линий связи.

Способом вспомогательных секущих плоскостей можно воспользоваться для построения линии взаимного пересечения многогранной поверхности с поверхностью вращения.

На рис. 10.4 приведено построение линии пересечения трехгранной призмы и конуса.

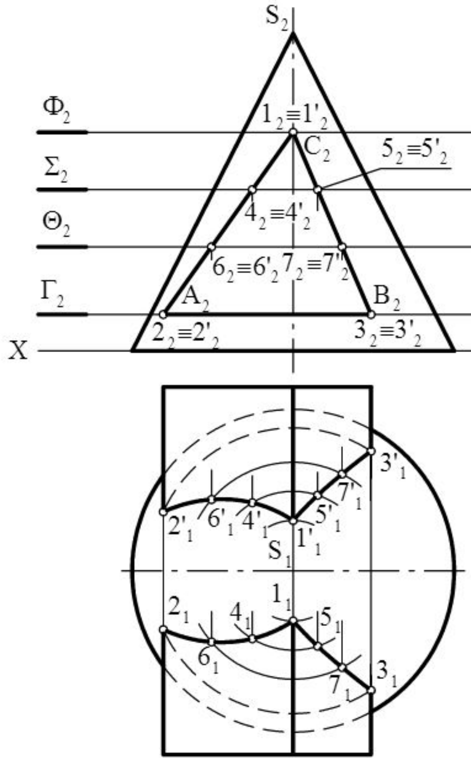


Рис. 10.4

В качестве вспомогательных секущих плоскостей приняты горизонтальные плоскости уровня. Каждая секущая плоскость пересекает конус по окружности, радиус которой равен расстоянию от оси до образующей. Строим горизонтальные проекции окружностей и на их пересечении с проекциями ребер призмы находим проекции 1111', 212'1, 313'1 и 121'2, 222'2, 323'2 опорных точек. Промежуточные точки находим с помощью плоскостей Σ и Θ. Плоскости Σ и Θ пересекают грани призмы по прямым линиям. Их горизонтальные проекции при пересечении с соответствующей окружностью (проекцией линии пересечения плоскостей Σ и Θ с конусом) дают проекции промежуточных точек 414'1, 515'1, 616'1, 711'1 и 424'2, 525'2, 626'2, 127'2. Как видим на рис. 10.4, фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией основания призмы.

Линией пересечения грани АВ призмы с поверхностью конуса являются ветви окружности, т.к. эта грань параллельна основанию конуса.

На рис. 10.5 приведено построение линии пересечения конуса и трехгранной призмы, грани которой являются горизонтально-проецирующими плоскостями.

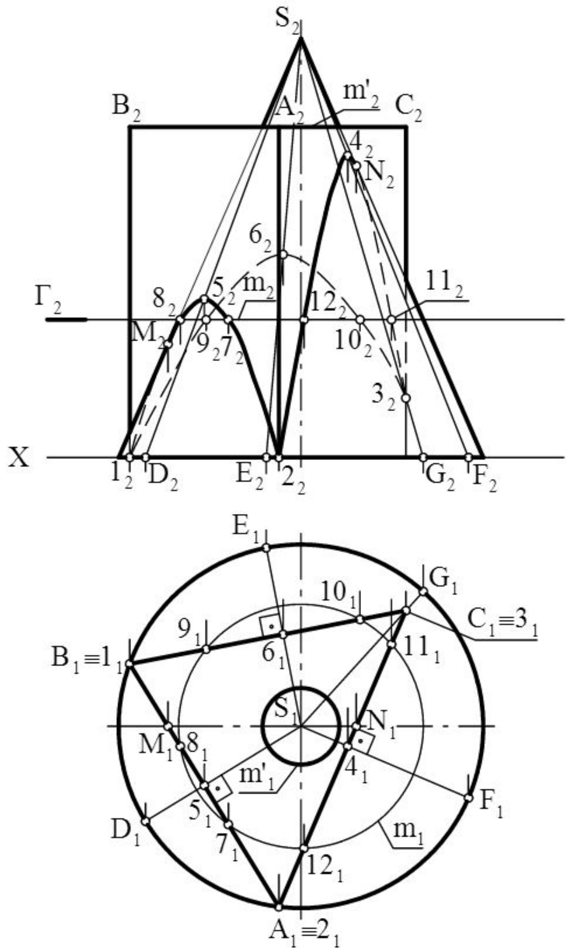


Рис. 10.5

Боковые грани призмы пересекаются с поверхностью конуса по гиперболам. Построим точки, принадлежащие линиям пересечения, на каждой грани. Ребра А и В проецируются на окружность – проекцию основания конуса. Отметим точки 1 и 2 ($1_1 2_1$, $1_2 2_2$) – эти точки будут принадлежать линии пересечения. Чтобы определить точку пересечения ребра С, которое пересекает боковую поверхность конуса, проведем через ребро С образующую SG (S_1G_1, S_2G_2). Точка пересечения фронтальной проекции S_2G_2 с ребром C_2 дает искомую точку 3_2 пересечения ребра С с поверхностью конуса. Чтобы определить высшие точки линии пересечения, построим на боковой поверхности конуса образующие SD (S_1D_1, S_2D_2), SE (S_1E_1, S_2E_2) и SF (S_1F_1, S_2F_2) перпендикулярно граням призмы. Горизонтальные проекции точек пересечения образующих с гранями – 4_1, 5_1, 6_1 – будут искомыми. По линиям связи находим их фронтальные проекции – 4_2, 5_2 , 6_2. Отметим точки M_1 и N_1 – точки, лежащие на крайних образующих конуса. Фронтальные проекции этих точек M_2 и N_2 будут определять границы видимости линий пересечения в гранях АВ и АС. Промежуточные точки определим при помощи вспомогательной секущей плоскости Г – горизонтальной плоскости уровня. Плоскость Г пересекает конус по окружности m (m_1, m_2), а призму – по треугольнику, совпадающему с горизонтальной проекцией призмы. Горизонтальные проекции точки, общие для линий пересечения $7_1 8_1$, $9_1 10_1$, 11_1, 12_1, будут искомыми. Фронтальные проекции этих точек по линиям связи переносим на след секущей плоскости – $7_2 8_2$, $9_2 10_2$, $11_2 12_2$. Соединяем лавной кривой точки, лежащие на одной грани, имея в виду, что точки M_2 и N_2 определяют границы видимости линий пересечения в гранях АВ и АС. Фронтальная проекция линии пересечения на грани ВС будет невидимой, т.к. находится на невидимой грани.

При помощи плоскости Ф находим линию пересечения конуса и верхнего основания призмы – окружности m' (m'_1, m'_2).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

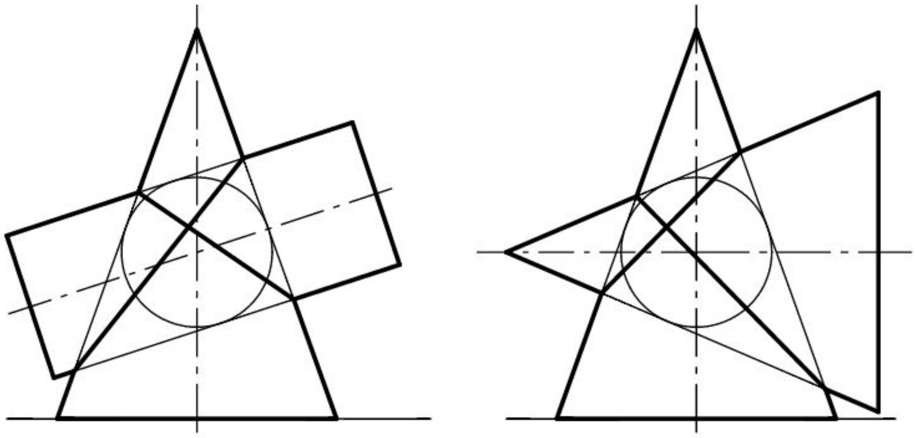
1. Что представляет собой линия пересечения двух поверхностей?
2. Какой способ используется в качестве основного при построении линии пересечения двух поверхностей?
3. Сформулируйте общее правило построения линии пересечения поверхностей.
4. Какие должны проводиться вспомогательные секущие поверхности на комплексном чертеже при построении линии пересечения двух кривых поверхностей?
5. Как должны проводиться вспомогательные секущие плоскости на комплексном чертеже при построении линии пересечения двух кривых поверхностей?

ТЕМА 11. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ (продолжение)

11.1. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка.
11.2. Способ сфер.

11. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

При взаимном пересечении поверхностей второго порядка получается в некоторых случаях распадение линии пересечения на две плоские кривые второго порядка. Это бывает в тех случаях, когда обе пересекающиеся поверхности вращения (цилиндр и конус, два конуса и т.п.) описаны вокруг общей для них сферы. В примерах, приведенных на рис. 11.1, а и 11.1, б, пересечение происходит по эллипсам.



а) б)

Рис. 11.1

На рис. 11.2 показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися осями. Из точки пересечения осей может быть проведена сфера, вписанная в оба цилиндра. Обе поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов.

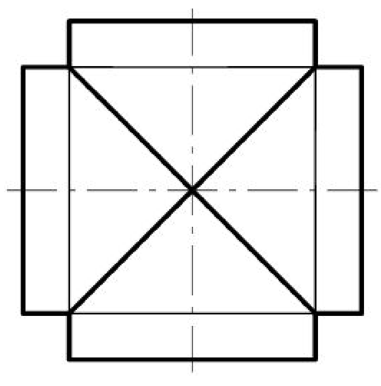


Рис. 11.2

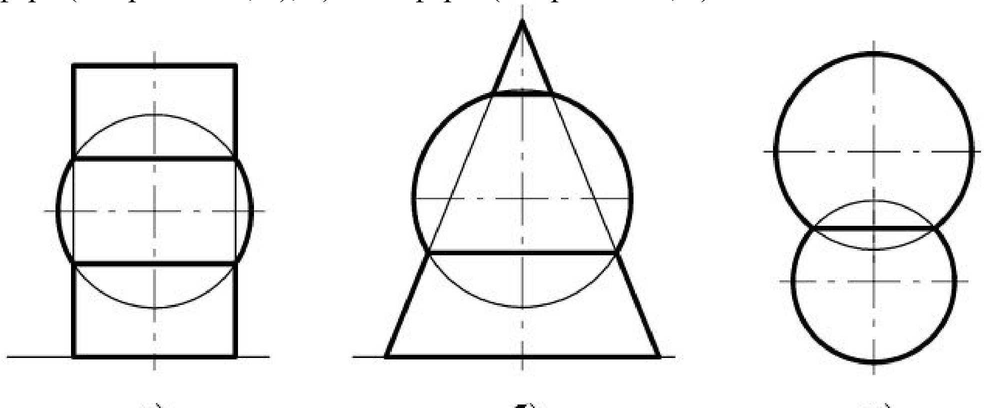
Изображенные на рис. 11.1 и 11.2 кривые пересечения поверхностей проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямолинейных отрезков, т.к. общая плоскость симметрии для каждой пары рассмотренных поверхностей расположена параллельно плоскости Π_2.

Указанные выше построения основаны на следующих положениях:

1) поверхности второго порядка, имеющие двойное соприкосновение, пересекаются между собой по двум кривым второго порядка, причем плоскости этих кривых проходят через прямую, определяемую точками прикосновения;

2) две поверхности второго порядка, описанные около третьей поверхности второго порядка (или в нее вписанные), пересекаются между собой по двум кривым второго порядка. Это положение известно под названием теоремы Монжа.

Соосные поверхности вращения (т.е. поверхности с общей осью) пересекаются по окружностям. На рис. 11.3 даны три примера: а) цилиндр и сфера (см. рис. 11.3, а); б) конус и сфера (см. рис. 11.3, б); в) две сферы (см. рис. 11.3, в).



а) б) в)

Рис. 11.3

11.2. Способ сфер

С помощью вспомогательных сферических поверхностей удобно строить линии пересечения двух поверхностей вращения с общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций.

При этом возможны два случая:

1) если оси поверхностей вращения пересекаются, то для построения линии пересечения этих поверхностей применяют семейство концентричных сфер;

2) если оси поверхностей вращения не пересекаются, то используют эксцентрические сферы.

План решения задачи способом концентрических сфер следующий:

1) принимая точку пересечения осей заданных поверхностей за центр, строим вспомогательные сферы – посредники;

2) определяем окружности, по которым пересекаются сферы-посредники с каждой из заданных поверхностей;

3) находим общие точки пересечения полученных окружностей.

Эти точки и принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

На рис. 11.4 построена линия пересечения двух конусов вращения, оси которых пересекаются, образуя общую фронтальную плоскость симметрии.

В данном случае применены вспомогательные сферы, проведенные из одного и того же центра – точки O (O_2) пересечения осей конусов. Диапазон радиусов сфер определяется минимальным и максимальным радиусами. Минимальный радиус секущей сферы назначается из условия касания сферы одной и пересечения другой пересекающейся поверхности. Максимальным радиусом является отрезок прямой от центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерков пересекающихся поверхностей. Окружности, по которым сферы пересекают одновременно две поверхности, проецируются на фронтальную плоскость проекций в виде прямолинейных отрезков.

Точки пересечения фронтальных проекций очерковых образующих $1_2 2_2 3_2 4_2$ являются высшими и низшими точками линии пересечения. Точки 5262 на фронтальной проекции, наиболее близко расположенные к оси вертикального конуса, определены с помощью сферы радиуса Rmin, вписанной в этот конус. Промежуточные точки $7_28_29_2$ получены при помощи сферы радиуса R, очерк которой на фронтальной проекции изобразится в виде окружности этого же радиуса. Сфера радиуса R пересечет горизонтальный конус по окружности диаметра AB и CD, а вертикально расположенный конус – по окружности EF и MN. В пересечении полученных проекций окружностей – отрезков A_2B_2 и C_2D_2 с E_2F_2 и M_2N_2 – получаем искомые точки $7_28_29_2$ линии пересечения.

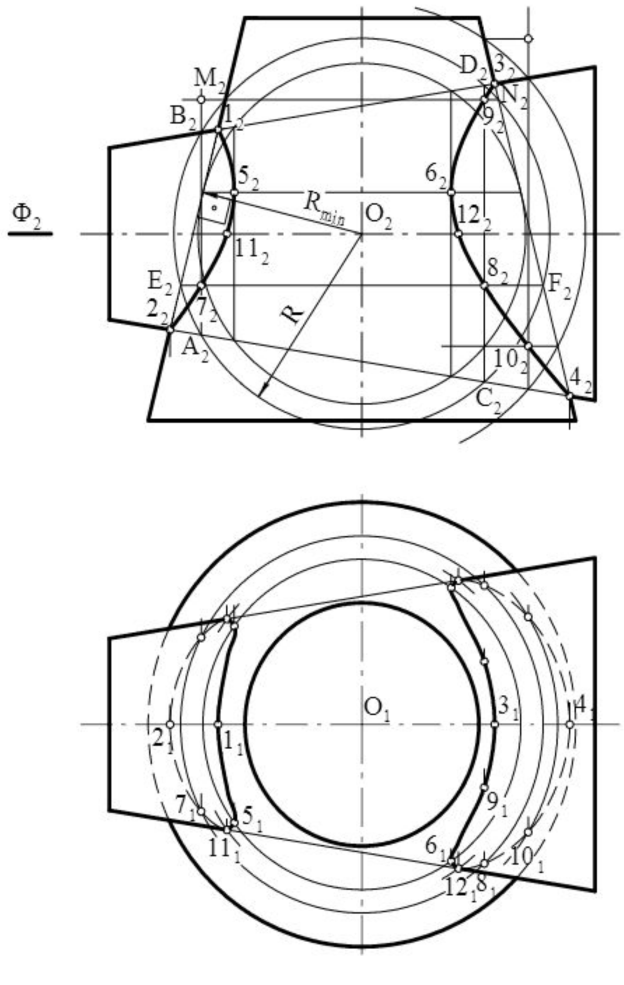


Рис. 11.4

Изменяя радиус R вспомогательной секущей сферы, можно получить последовательный ряд точек линии пересечения. Недостающие горизонтальные проекции точек линии пересечения определяют на соответствующих параллелях вертикального конуса. Точки 11_1 и 12_1, в которых происходит разделение горизонтальной проекции линии пересечения на видимую и невидимую ветви, определены с помощью горизонтальной плоскости Ф, проходящей через ось горизонтального конуса. Пример построения линии пересечения двух поверхностей вращения способом эксцентрических сфер приведен на рис. 11.5 (открытый тор пересекается с конусом вращения).

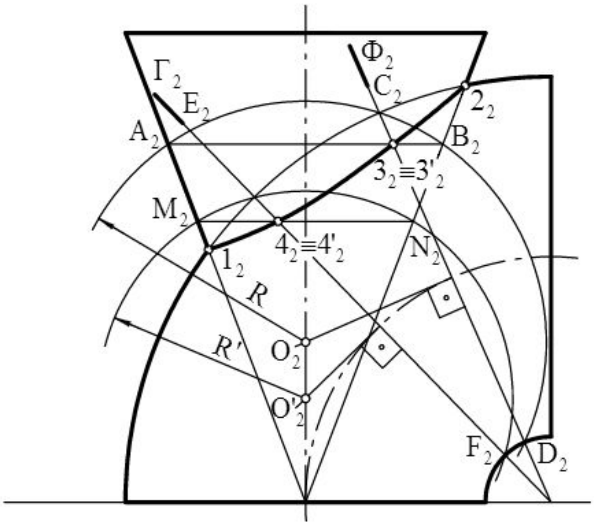


Рис. 11.5

Поверхности имеют одну общую плоскость симметрии. Оси пересекающихся поверхностей вращения между собой не пересекаются. Поверхности заданы фронтальными отрезками.

При построении линии пересечения поверхностей прежде всего определяем точки 1 и 2 пересечения очерковых образующих поверхностей. Затем через ось вращения тора проводим фронтально-проецирующую плоскость Ф. Она пересекает тор по окружности. Центры сфер, пересекающих тор по окружности, находятся на перпендикуляре, восстановленном в центре окружности к плоскости Ф. Пересечение этого перпендикуляра с осью конуса вращения даст центр O (O_2) вспомогательной секущей сферы с радиусом R. Такая сфера пересекает как тор, так и конус вращения по окружностям, фронтальные проекции которых отрезки A_2B_2 и C_2D_2 прямых. Точки 3_2 и $3'_2$ пересечения окружностей принадлежат фронтальной проекции линии пересечения поверхностей.

Аналогично определяют другие промежуточные точки линии пересечения поверхностей. Вспомогательные сферы имеют различные центры, находящиеся на оси конуса вращения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Какие поверхности называются соосными?
2. Что представляет собой линия пересечения двух соосных поверхностей вращения?
3. В каких случаях при решении задач на построение линии пересечения поверхностей можно применять вспомогательные сферы?
4. Что является теоретическим обоснованием способа вспомогательных концентрических сфер?
5. Как определить на комплексном чертеже центр вспомогательных концентрических сфер?
6. Как определить на комплексном чертеже вспомогательные концентрические сферы минимального и максимального радиуса?

ТЕМА 12. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ

12.1. Построение развертки поверхности простейших геометрических тел.
12.2. Построение развертки наклонных призматических, цилиндрических и конических поверхностей.
12.3. Построение развертки поверхности сферы.

12.1. Построение развертки поверхности простейших геометрических тел

Построение разверток имеет большое практическое значение, так как позволяет изготавливать разнообразные изделия из листового материала путем изгибания.

Разверткой поверхности называется фигура, полученная совмещением поверхности без складок и разрывов с плоскостью чертежа.

Не все поверхности можно совместить с плоскостью чертежа, поэтому те поверхности, которые можно совместить без разрывов и складок с плоскостью, называются развертывающимися, а поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью, называются неразвертывающимися.

К развертывающимся поверхностям относятся все многогранники, конические и цилиндрические поверхности.

Построение развертки поверхностей прямых призмы, цилиндра, конуса выполняется просто, без применения каких-либо специальных приемов. Для построения их разверток надо знать натуральную величину ребер, образующих и оснований.

На рис. 12.1 – 12.4 показано построение разверток поверхностей простейших геометрических тел.

Развертка поверхности прямой трехгранной призмы (см. рис. 12.1) состоит из трех прямоугольников, которые являются боковыми гранями, и двух треугольников – оснований призмы.

Развертка поверхности прямого кругового цилиндра (см. рис. 12.2) состоит из прямоугольника, высота которого равна высоте цилиндра, а ширина – длине окружности, равной окружности оснований цилиндра.

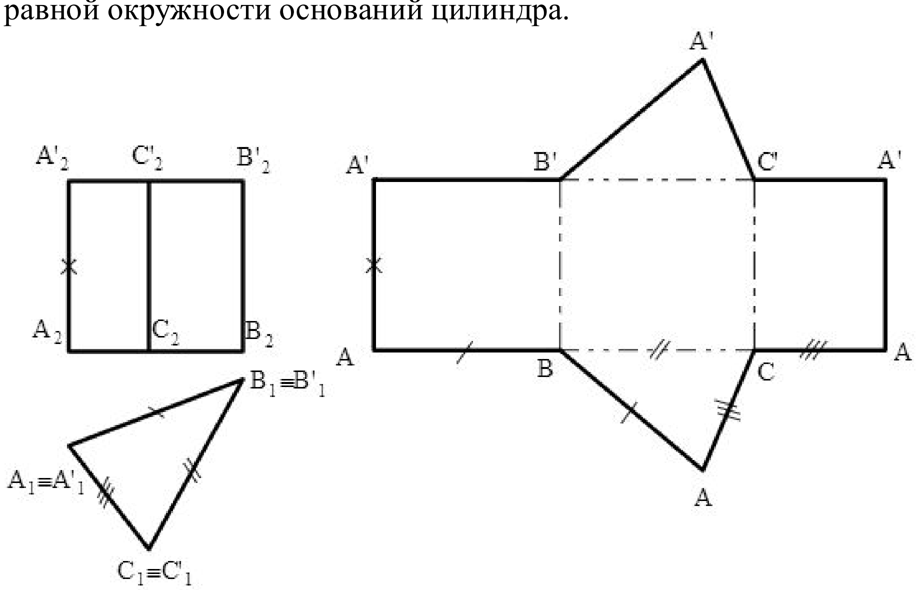


Рис 12.1

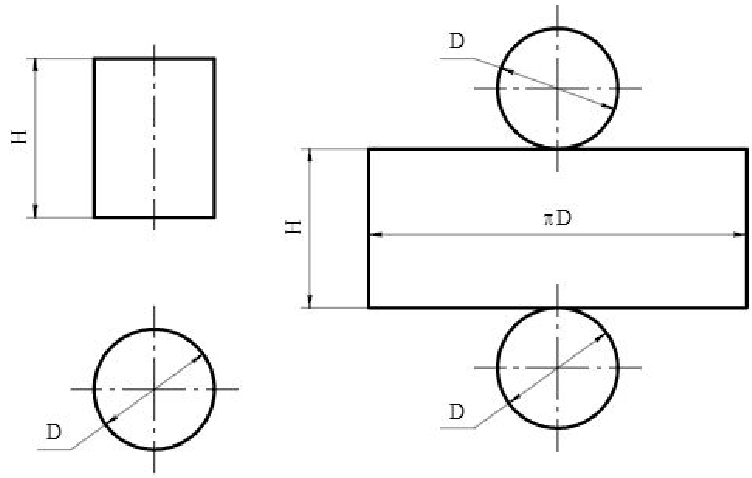


Рис. 12.2

Развертка поверхности трехгранной пирамиды (см. рис. 2.3) представляет собой три треугольника – боковые грани – и еще один треугольник – основание пирамиды.

Натуральную величину ребер находят одним из методов преобразования. В данном случае применяется способ вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций $П_1$ и проходящей через вершину пирамиды – точку S.

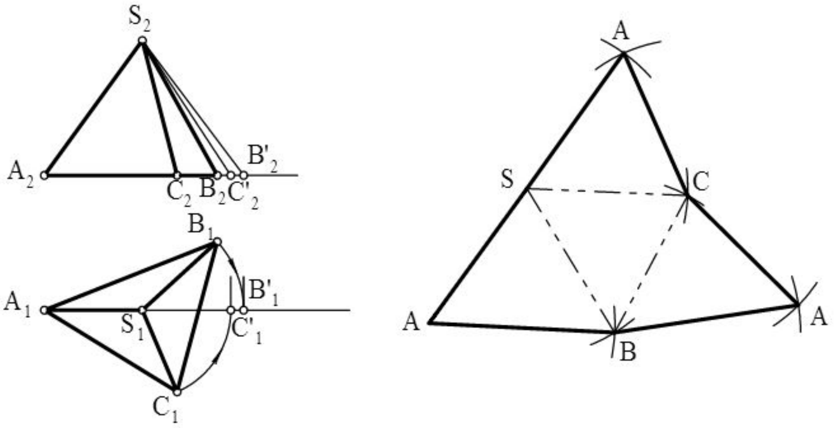


Рис. 12.3

Развертка поверхности прямого кругового конуса (см. рис. 2.4) представляет собой сектор, радиус которого равен длине образующей конуса.

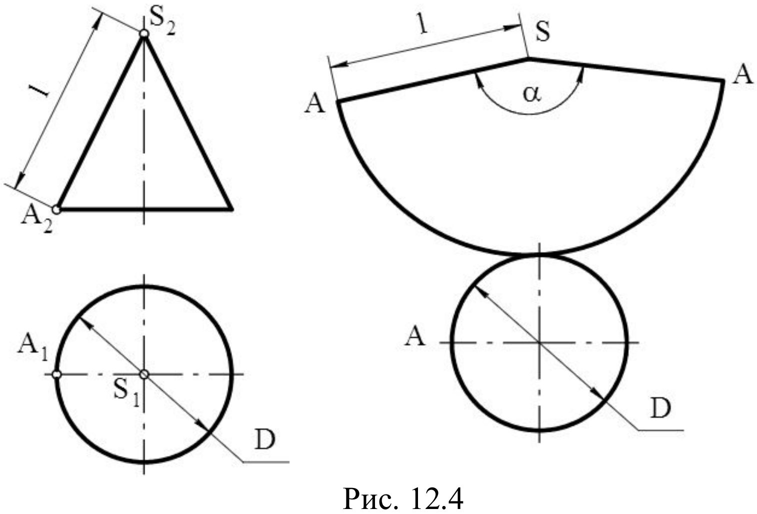


Рис. 12.4

Угол $\alpha = 180^{\circ}D/l$,

где D – диаметр окружности основания, l – длина образующей конуса).

12.2. Построение развертки наклонных призматических, цилиндрических и конических поверхностей

Для построения развертки наклонных поверхностей применяют различные способы:

а) способ раскатки;

б) способ нормального сечения;

в) способ триангуляции (треугольников).

Способ раскатки используют в том случае, когда основание призмы или цилиндра на одной из плоскостей проекций изображается в натуральную величину, а ребра или образующие поверхностей параллельны другой плоскости проекций, т.е. также имеют натуральную величину.

Способ раскатки основан на последовательном совмещении всех граней призмы с плоскостью проекций. Для определения натуральной величины граней используется вращение грани вокруг одной из ее сторон как линии уровня.

На рис. 12.5 дано построение развертки поверхности наклонной трехгранной призмы способом раскатки.

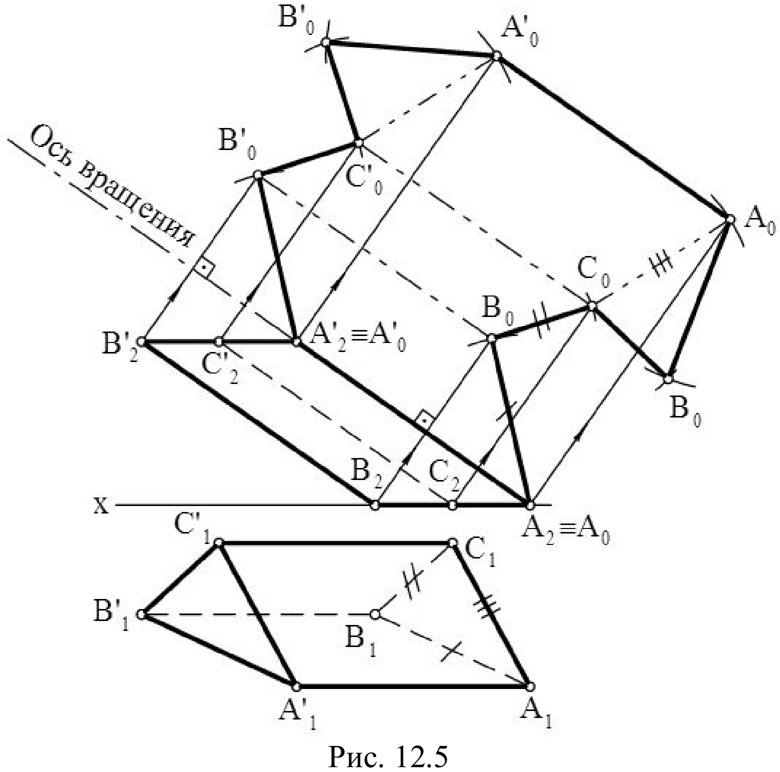


Рис. 12.5

Ребра призмы параллельны плоскости проекций $П_2$, поэтому на эту плоскость они проецируются в натуральную величину. Основание призмы принадлежит горизонтальной плоскости проекций и на нее проецируется в натуральную величину.

Для построения развертки необходимо повернуть каждую грань призмы вокруг бокового ребра до положения, при котором она станет параллельной фронтальной плоскости проекций.

Раскатка боковой поверхности призмы начата с грани ABB'A'. Чтобы повернуть ее вокруг ребра AA', как оси вращения, до положения, параллельного плоскости проекций $П_2$, из точек B_2 и B_2' проводят перпендикуляры и на них из точек A_2 и A_2' делают засечки раствором циркуля, равным натуральной величине стороны AB основания призмы, т.е. ее горизонтальной проекции A_1B_1. Параллелограмм $A_0B_0B_0'A_0'$ является натуральной величиной грани ABB'A'.

Далее вращают следующую грань BCC'B' призмы. За новую ось вращения принимают ребро BB'. Для этого из точек C_2 и C_2' проводят перпендикуляры и на них из точек B_2 и B_2' делают засечки раствором циркуля, равным $BC = B_1C_1$.

Параллелограмм B0C0C0'B0' – натуральная величина грани BCC'B'. Натуральная величина грани CAA'C' построена аналогично. Соединив точки $A_0B_0C_0A_0$ и $A_0'B_0'C_0'A_0'$ прямыми, получают развертку боковой поверхности и к ней пристраивают основания. Их строят как треугольники, по трем сторонам.

На рис. 12.6 дано построение развертки наклонного цилиндра способом раскатки.

Так как образующие цилиндра занимают общее положение и поэтому не имеют натуральную величину, то необходимо выполнить следующие построения:

1) сначала заменяют фронтальную плоскость проекций $П_2$ на новую $П_4$, выбирая ее так, чтобы образующие цилиндра на новую плоскость проекций проецировались в натуральную величину. Для этого новую ось проекций проводят параллельно образующим цилиндра;

2) делят окружность основания цилиндра на n равных частей (см. рис. 12.6);

3) заменяют цилиндрическую поверхность призматической, т.е. вписывают в цилиндр восьмигранную призму. Для этого через точки деления окружности основания проводят прямолинейные образующие цилиндра – ребра призмы;

4) за плоскость развертки принимают фронтальную плоскость, проходящую через ребро 11' призмы, которое будет являться осью вращения граней призмы. Дальнейшие построения аналогичны выполненным на рис. 12.5.

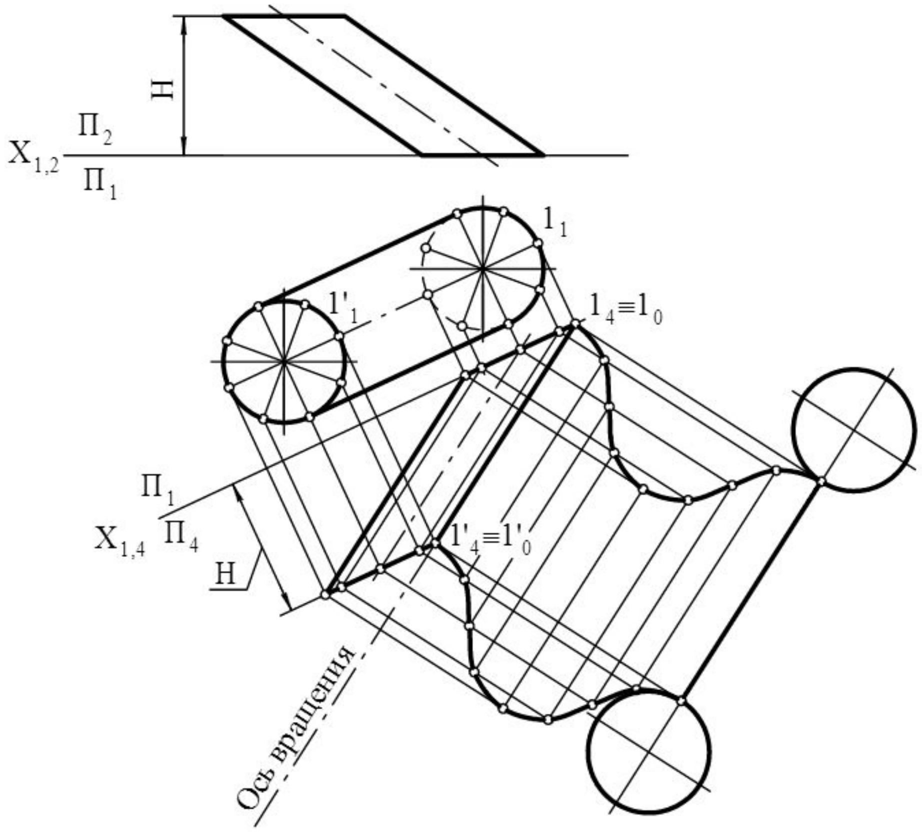


Рис. 12.6

Способ нормального сечения применим в том случае, когда ребра призмы или образующие цилиндра параллельны одной из плоскостей проекций, т.е. проецируются на нее в натуральную величину.

На рис. 12.7 дано построение развертки поверхности трехгранной наклонной призмы способом нормального сечения.

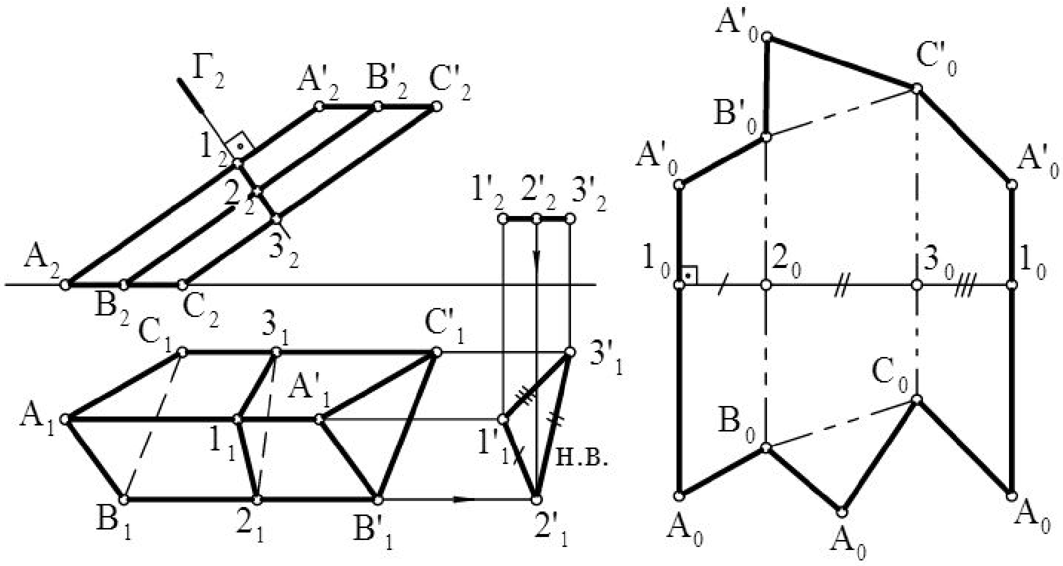


Рис. 12.7

Построения выполняют в следующем порядке:

1) призму пересекают нормальной (перпендикулярной к ее ребрам) плоскостью Г. Так как ребра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций и на нее проецируются в натуральную величину, то нормальная плоскость будет являться фронтально-проецирующей плоскостью;

2) строят проекции и определяют натуральную величину нормального сечения. На рис. 12.7 фронтальная проекция фигуры нормального сечения $1_2 2_2 3_2$ совпадает со следом плоскости Г. Натуральную величину фигуры сечения $1_1' 2_1' 3_1'$ строят способом плоскопараллельного перемещения. Для этого плоскость Г располагают параллельно горизонтальной плоскости проекций, чтобы фигура сечения проецировалась на плоскость проекций $П_1$ в натуральную величину;

3) натуральную величину фигуры нормального сечения на свободном поле чертежа разворачивают в прямую линию $1_0 1_0$ и через вершины сечения перпендикулярно линии $1_0 1_0$ проводят прямые;

4) на перпендикулярах по обе стороны откладывают длины соответствующих отрезков ребер призмы. Их величины измеряют от линии сечения до оснований в обе стороны и откладывают на перпендикулярах. Полученные точки $A_0 B_0 C_0 A_0$ и $A_0' B_0' C_0' A_0'$ соединяют отрезками прямых;

5) пристраивают к полученной фигуре основания. Их строят по трем сторонам.

На рис. 12.8 построена развертка поверхности наклонного цилиндра с круговым основанием.

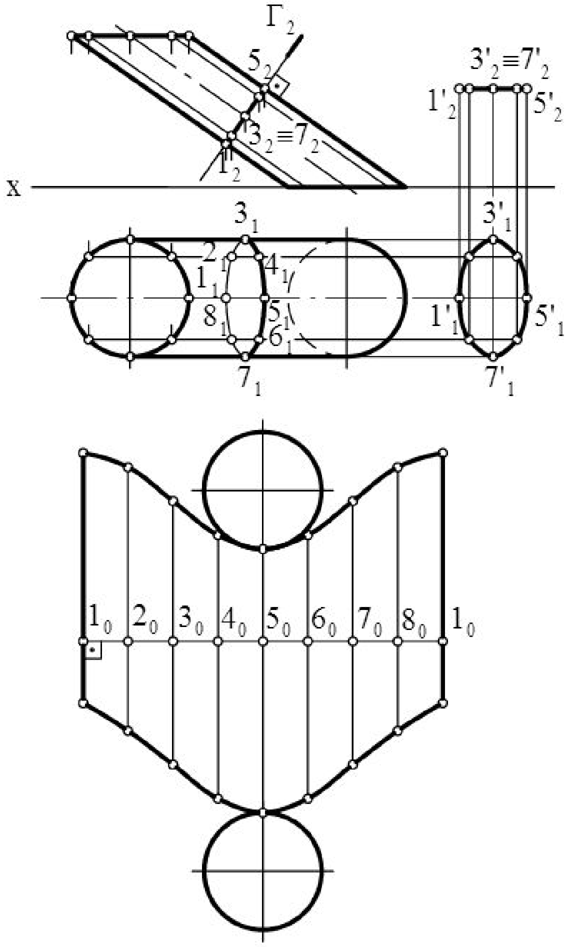


Рис. 12.8

Образующие цилиндра параллельны плоскости проекций $П_2$, поэтому и в этом примере применяют способ нормального сечения. Для этого выполняют следующие построения:

1) делят основание цилиндра на 12 частей;

2) проводят через точки деления основания образующие;

3) проводят плоскость Г, перпендикулярную к образующим цилиндра;

4) находят натуральную величину нормального сечения. В данном примере она найдена способом плоскопараллельного перемещения;

5) на свободном поле чертежа натуральную величину линии сечения разворачивают в прямую линию $1_0 1_0$;

6) через точки деления проводят перпендикулярно прямой $1_0 1_0$ отрезки, на которых откладывают длины образующих от линии сечения до оснований. Длину образующих берут на фронтальной плоскости проекций;

7) полученные точки соединяют плавной кривой. Образованная фигура является разверткой боковой поверхности наклонного цилиндра.

Сущность способа триангуляции (треугольников) состоит в том, что каждая грань многогранника разбивается диагональю на два треугольника, далее определяют натуральную величину всех сторон треугольников, которые последовательно в натуральную величину вычерчиваются на свободном поле чертежа.

На рис. 12.9 дано построение развертки поверхности наклонной призмы.

Построение выполняют в следующем порядке:

1) каждую грань ABB'A', BCC'B' и CAA'C' разбивают диагоналями на два треугольника. Затем определяют натуральную величину всех сторон треугольников,

одной из сторон любого треугольника будет являться ребро призмы, второй – диагональ, а третьей – сторона основания наклонной призмы. Основание призмы принадлежит плоскости проекций $П_1$, поэтому проецируется на нее в натуральную величину;

2) все ребра призмы одинаковы, поэтому находят натуральную величину одного из ребер (AA') призмы любым из способов преобразования. В данном случае применяют способ вращения вокруг прямой, перпендикулярной плоскости проекций $П_1$ и проходящей через точку A_1;

3) находят натуральную величину диагоналей способом плоскопараллельного перемещения;

4) на свободном поле чертежа последовательно в натуральную величину вычерчиваются треугольники $A_0A_0'B_0'$, $A_0B_0B_0'$, $B_0B_0'C_0'$, $B_0C_0C_0'$, $C_0A_0C_0'$ и $A_0A_0'C_0'$ по трем сторонам;

5) для построения полной развертки поверхности наклонной призмы к любой грани пристраивают два основания.

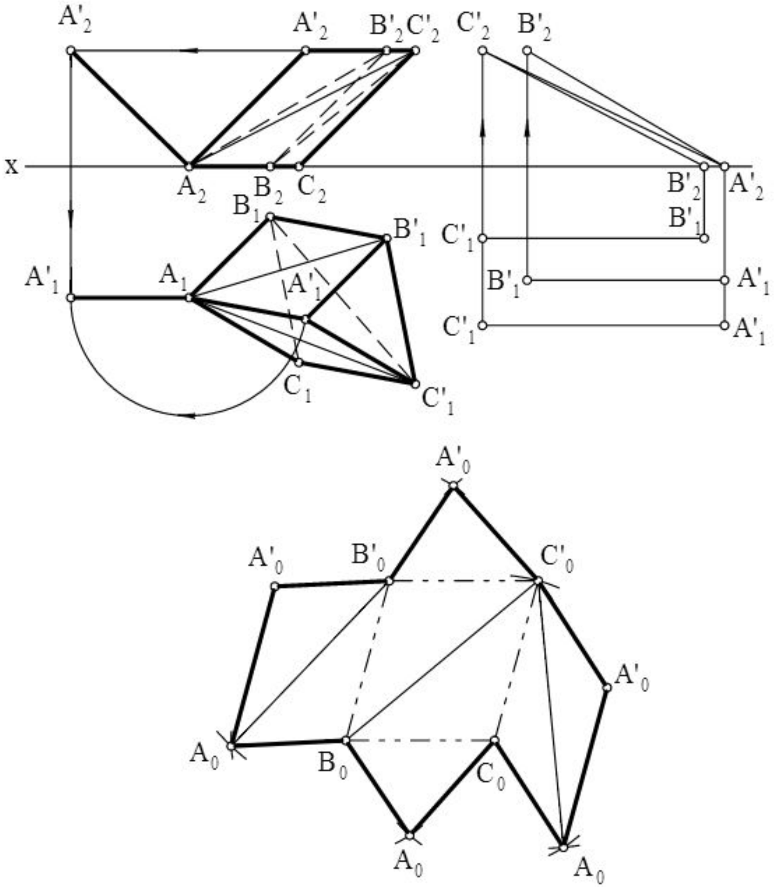


Рис. 12.9

На рис. 12.10 дано построение развертки поверхности наклонного конуса.

Построение развертки конической поверхности выполняется так же, как в случае построения развертки боковой поверхности пирамиды – способом триангуляции (треугольников).

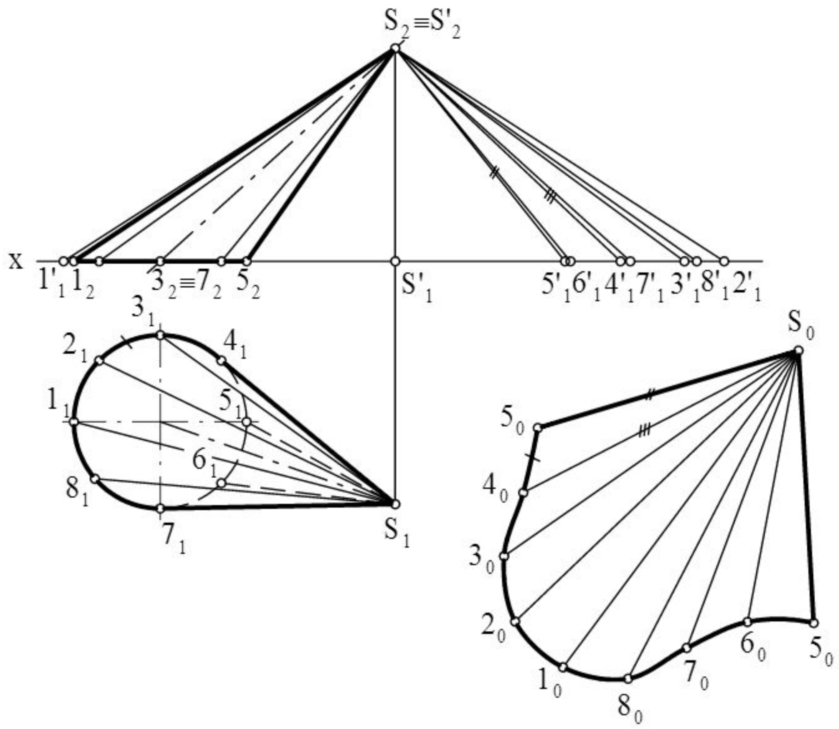


Рис. 12.10

Для этого заменяют поверхность конуса вписанной восьмигранной или двенадцатигранной пирамидой. Определяют длину всех образующих любым из методов преобразования, а затем строят треугольники в определенном порядке так, чтобы они примыкали друг к другу. Фигура $S_05_04_03_02_01_08_07_06_05_0$ является приближенной разверткой поверхности наклонного конуса.

Для построения развертки боковой поверхности наклонного усеченного конуса (рис. 12.11) выполняют следующие построения:

1) вписывают в конус многогранную усеченную пирамиду;

2) разбивают диагоналями каждую грань вписанной пирамиды на два треугольника;

3) определяют натуральную величину всех сторон треугольников (натуральную величину ребер и диагоналей) способом плоскопараллельного перемещения. Нижнее и верхнее основания конуса на горизонтальную плоскость проекций проецируются в натуральную величину, поэтому величины третьих сторон треугольников определяют на плоскости проекций $П_1$. Крайние образующие конуса, в данном примере $1_1'$ и $5_5'$, проецируются в натуральную величину на фронтальную плоскость проекций;

4) на свободном поле чертежа строят по трем сторонам треугольник $1_02_01_0'$, пристраивают к нему треугольники $1_0'2_0'2_0$, $2_03_02_0'$, $2_0'3_0'3_0$, $3_04_03_0'$, $3_0'4_0'4_0$, $4_05_04_0'$, $4_0'5_0'5_0$ и т.д.;

5) полученные точки соединяют плавными кривыми линиями.

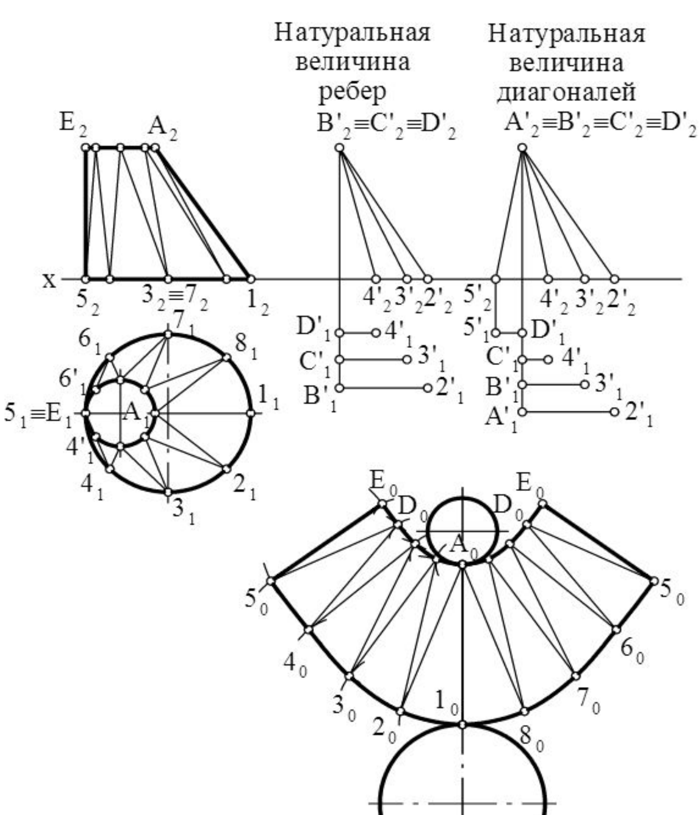


Рис. 12.11

Так как наклонный усеченный конус имеет ось симметрии, то можно построить только половину его развертки.

12.3. Построение развертки поверхности сферы

Построение развертки поверхности сферы выполняется способом вспомогательных цилиндров (рис. 12.12). Этот способ заключается в следующем: заданная поверхность сферы разбивается с помощью меридианов на равные между собой части или доли. Каждая доля заменяется цилиндрической поверхностью, которая касательна к поверхности сферы в точках главного меридиана доли.

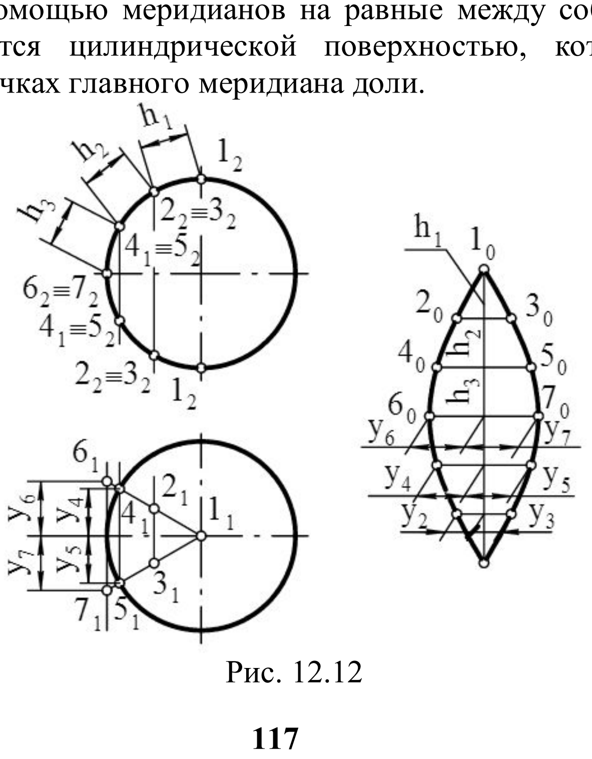


Рис. 12.12

Развертка поверхности сферы выполняется в следующем порядке:

1) поверхность сферы делят на 6 частей горизонтально-проецирующими плоскостями, которые являются меридианами;

2) описывают вокруг сферы цилиндрическую поверхность, ось которой проходит через центр сферы перпендикулярно $П_2$, таким образом, часть сферы заменяют частью цилиндрической поверхности. На горизонтальную плоскость проекций она проецируется в виде треугольника 1_1, 6_1, 7_1, а на фронтальную – в виде дуги окружности;

3) делят фронтальную проекцию дуги окружности на 6 равных частей. Величина отрезков h_1, h_2, h_3 будет натуральной на плоскости проекций $П_2$. Строят горизонтальные проекции образующих, проходящих через соответствующие точки деления;

4) находят натуральную величину образующих 2_13_1, 4_15_1 и 6_17_1 на плоскости проекций $П_1$, так как образующие параллельны горизонтальной плоскости проекций;

5) для построения развертки главный меридиан разворачивают в прямую линию и на ней откладывают вверх и вниз отрезки, равные h_1, h_2 и h_3, а через полученные точки откладывают вправо и влево отрезки, равные y_6 - y_7, y_4 - y_5, y_2 и y_3;

6) соединив плавной кривой концы отрезков, получают развертку одной доли, т.е. 1/6 части поверхности сферы. Полная развертка поверхности сферы будет состоять из шести одинаковых долей.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ:

1. Что называется разверткой поверхности?
2. Какие поверхности называются развертывающимися?
3. Какие поверхности называются не развертывающимися?
4. Какие поверхности относятся к развертывающимся?
5. Какие поверхности относятся к не развертывающимся?
6. Перечислите способы развертки наклонных поверхностей.
7. Каким способам выполняется построение развертки сферы?

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов В.Н. Начертательная геометрия. – Мн.: Выш. шк., 1977. – 360 с.

2. Начертательная геометрия / Под. ред. Н.Н. Крылова. – М.: Высш. шк., 1990. – 232 с.

3. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1981 – 258 с.

4. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии: Учеб. для втузов – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1985. – 136 с.

5. Тарасов Б.Ф., Дудкина Л.А., Немолотов С.О. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов – СПб.: Лань, 2001. – 249 с.

6. Вальков К.И., Дралин Б.И., Клементьев В.Ю. и др. Начертательная геометрия. Инженерная и машинная графика: Учеб. для студ. строит. спец. вузов / Под ред. К.И. Валькова. – М.: Высш. шк., 1997. – 495 с.

СОДЕРЖАНИЕ