

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ал-Хоразмий номли Урганч Давлат университети

Қулёзма ҳуқуқида

Матёқубов Муҳаммад Махсудович

**Ярим ўқда берилган чексиз зонали штурм ливилл оператори
учун тескари масалани ечиш.**

Мутахассислик: 5А 460102 – «Дифференциал тенгламалар»

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я

"Математика магистри" академик даражасини олиш учун

Иш кўриб чиқилди ва ҳимояга рухсат берилди

«Математик физика ва амалий математика»

кафедраси мудири:

_____ ф.-м.ф.н., доц. Уразбоев Г.У.

« 25 » май _____ 2006 й.

Илмий раҳбар:

_____ ф.-м.ф.д., проф. Ҳасанов А.Б.

Илмий консультант:

_____ ф.-м.ф.н., доц. Яхшимуратов А.Б.

Урганч – 2006 й.

МУНДАРИЖА

Кириш.....	3
I БОБ. Бутун ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм-Лиувилл масаласи.	
1-§. Спектрдаги лакуналар сони чексизта бўлган ҳолда тескари масала	4
2-§. Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқариш.	14
II БОБ. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала.	
1-§. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл масаласининг чегаравий шартини спектрал берилганлар орқали ифодалаш	21
2§. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл чегаравий масаласи учун Дубровин – Трубовиц системаси.	30
Адабиётлар.....	33

Кириш

Ярим ўқда берилган даврий чекли зонали ва даврий бўлмаган чекли зонали потенциалли Штурм – Лиувилл оператори учун тескари масалалар Н.И.Ахиезер [1], Х.Хохштадт, В.Гольдберг [2], Б.М.Левитан, А.В.Савин [3] лар томонидан яхши ўрганилган. Бутун ўқда берилган даврий ёки чекли зонали потенциалли Штурм – Лиувилл оператори учун эса тескари масалалар В.А.Марченко, И.В.Островский [4], А.Р.Итс, В.Б.Матвеев [5], Е.Трубовиц [6], Б.А.Дубровин [7], С.П.Новиков [8] ва бош қа олимлар томонидан етарлича тўлиқ тадқиқ қилинган.

Ярим ўқда тескари масалани ечишда чегаравий шартни спектрал берилганлар орқали топиш ҳам талаб қилинади. Чунки чегаравий шартдаги *ctgб* Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасида ҳам қатнашади.

Б.М.Левитан [9] томонидан чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл операторларининг айрим синфлари ўрганилган.

Мазкур магистрлик диссертациясида ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл чегаравий масаласи учун чегаравий шартни спектрал берилганлар орқали ифодаладиган формула ҳамда Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системаси келтириб чиқарилган. Бу ишда қараладиган чексиз зонали потенциалга мос келувчи лакуналар фақат чексизликда қуюқлашади, яъни лакуналар сони чексизта бўлиб ихтиёрий чегараланган интервалда фақат чеклита лакуна бўлади.

1-§. Спектрдаги лакуналар сони чексизта бўлган ҳолда тескари масала

1. Чекли зонали Штурм-Лиувилл оператори учун олинган ушбу

$$q_N(t) = \sum_{k=1}^N [\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)], \quad (1.1)$$

$$q_N(t) - \frac{1}{2}q_N''(t) = \sum_{k=1}^N [\lambda_k^2 + \mu_k^2 - 2\xi_k^2(t)] \quad (1.2)$$

излар формулалари, чексиз зонали Штурм – Лиувилл оператори учун тескари масалаларни ўрганиш имконини беради.

Ушбу

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \dots < \lambda_k < \mu_k < \dots \quad (1.3)$$

сонлар кетма – кетлиги учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) = a_1 < \infty, \quad (1.4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot (\mu_k - \lambda_k) = a_2 < \infty. \quad (1.5)$$

Ушбу $(-\infty, 0)$, (λ_k, μ_k) , $k = \overline{1, \infty}$ интервалларни лакуналар деб атаймиз.

$$\xi_k \in (\lambda_k, \mu_k), \quad k = \overline{1, \infty}$$

ихтиёрий сонлар ва $\sigma_k = \pm 1$, $k = \overline{1, \infty}$ ихтиёрий ишоралар бўлсин.

N орқали ихтиёрий натурал сонни белгилаймиз, $q_N(x)$ орқали эса, $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_N, \mu_N)$ лакуналар ва $\eta_k = \{\xi_k, \sigma_k\}$, $k = \overline{1, N}$ спектрал параметрлар бўйича бир қийматли тузиладиган N - зонали потенциални белгилаймиз.

Лемма 1.1. Агар (1.4), (1.5) шартлар бажарилса, у ҳолда ушбу

$$|q_N(x)| < a_1, \quad x \in R^1 \quad (1.1')$$

$$|q_N'(x)| < 2a_1^2 + 4a_2 + 2a_1, \quad x \in R^1 \quad (1.2')$$

$$|q_N''(x)| < 2a_1^2 + 4a_2, \quad x \in R^1 \quad (1.3')$$

баҳолашлар ўринли бўлади.

Исбот: Аввало (1.1') ва (1.3') тенгсизликларни исбот қиламиз. Бунинг учун (1.1), (1.2) излар формулаларидан (Б.М.Левитан [9]) фойдаланамиз. $\xi_k(t) \in [\lambda_k, \mu_k]$ бўлгани учун

$$\begin{aligned} |q_N(t)| &\leq \sum_{k=1}^N |\xi_k(t) - \lambda_k| + \sum_{k=1}^N |\mu_k - \xi_k(t)| = \\ &= \sum_{k=1}^N (\xi_k(t) - \lambda_k) + \sum_{k=1}^N (\mu_k - \xi_k(t)) = \sum_{k=1}^N (\mu_k - \lambda_k) < \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) = a_1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

бўлади. Худди шундай

$$\begin{aligned} |q_N''(t)| &\leq 2|q_N^2(t)| + 2\sum_{k=1}^N (\mu_k^2 - \lambda_k^2) < \\ &< 2a_1^2 + 4\sum_{k=1}^N \mu_k(\mu_k - \lambda_k) < 2a_1^2 + 4a_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Энди эса, (1.1') ва (1.3') дан (1.2') ни келтириб чиқарамиз. Аввало қуйидаги баҳолашни келтириб чиқарамиз:

$$|q_N'(x)| = \left| \int_0^x q_N''(t) dt + q_N'(0) \right| \leq (2a_1^2 + 4a_2)|x| + |q_N'(0)|. \quad (1.4')$$

1-ҳол. $x > 0$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\begin{aligned} (e^{-t}(q_N'(t) + q_N(t)))' &= -e^{-t} \cdot (q_N'(t) + q_N(t)) + e^{-t}(q_N''(t) + q_N'(t)) = \\ &= e^{-t} \cdot (q_N''(t) - q_N(t)) \end{aligned}$$

айниятни $[x; \infty)$ ораликда интегралласак, (1.4') га асосан

$$-e^{-x} \cdot (q_N'(x) + q_N(x)) = \int_x^{\infty} e^{-t} (q_N''(t) - q_N(t)) dt \quad (1.5')$$

келиб чиқади, чунки

$$|e^{-t}(q_N'(t) + q_N(t))| \leq e^{-t}((2a_1^2 + 4a_2)|t| + |q_N'(0)| + a_1) \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty).$$

(1.5') га биноан ушбу

$$q_N'(x) = -q_N(x) - e^x \cdot \int_x^{\infty} e^{-t} (q_N''(t) - q_N(t)) dt \quad (1.6')$$

айният ўринли бўлади. Бунга кўра

$$|q'_N(x)| < a_1 + e^x \cdot \int_x^\infty e^{-t} \cdot (2a_1^2 + 4a_2 + a_1) dt = 2a_1^2 + 4a_2 + 2a_1.$$

Лемма 1.1 исботланди.

Арцел теоремасига кўра $\{q_{N_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ функциялар тўплами ҳар бир чегараланган кесмада предкомпакт тўплам бўлади. Демак, бу тўпландан шундай $q_{N_k}(x)$ қисмий кетма – кетлик ажратиш мумкинки, бунда

$$q_{N_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} q(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.8)$$

ўринли бўлади. $[a, b]$ кесма ихтиёрий.

Лемма 1.1 га асосан ҳар бир лимитни функция $q(x)$ учун

$$|q(x)| \leq a_1$$

тенгсизлик ўринли.

Қуйидаги

$$-y'' + q_{N_k}(x)y = \lambda y, \quad (-\infty < x < \infty), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.10)$$

тенгламаларни қўриб чиқамиз. Бу ердаги $q(x)$ функция (1.8) дан олинди.

(1.9) ва (1.10) тенгламаларга мос келувчи Вейл – Титчмарш функцияларини мос равишда $m_k^+(z)$, $m_k^-(z)$ ва $m^+(z)$, $m^-(z)$ орқали белгилаймиз.

Лемма 1.2. z нинг юқори (пастки) ярим текисликда ётадиган қийматлари учун

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_k^+(z) = m^+(z), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m_k^-(z) = m^-(z).$$

Исбот. Биринчи тенгликни исботлаймиз (иккинчиси шунга ўхшаш тарзда исбот қилинади). (1.9) тенгламанинг ушбу

$$\begin{cases} \theta_k(0, \lambda) = 1 \\ \theta'_k(0, \lambda) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_k(0, \lambda) = 0 \\ \varphi'_k(0, \lambda) = 1 \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини $\theta_k(x, \lambda)$, $\varphi_k(x, \lambda)$ орқали белгилаймиз. Ушбу

$$\psi_k^+(x, z) = \theta_k(x, z) + m_k^+(z)\varphi_k(x, z)$$

функция орқали (1.9) тенгламаларнинг $+\infty$ га мос келувчи Вейл ечимларини белгилаймиз.

z нинг ҳар бир тайинланган қийматида

$$\theta_k(x, z) \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \theta(x, z), \quad \psi_k(x, z) \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \psi(x, z), \quad (k \rightarrow \infty), \quad x \in [a; b]$$

ўринли. Бу ерда $[a, b]$ ихтиёрий кесма.

Вейл – Титчмарш функциясининг ва Вейл ечимининг асимптотикаларидан ([9], 2-боб) $0 < e < \arg z < p - e$ соҳада ушбу

$$|m_k^+(z)| \quad \text{ва} \quad \int_0^\infty |\psi_k^+(x, z)|^2 dx$$

функциялар k га нисбатан текис чегараланганлиги келиб чиқади. Шунинг учун z нинг тайинланган қийматида Больцано-Вейерштрасс теоремасига асосан $\{N_{k_m}\}$ қисмий кетма – кетлик топилиб,

$$m_{k_m}^+(z) \rightarrow m^+(z) \quad (m \rightarrow \infty)$$

ва

$$\int_0^\infty |\psi^+(x, z)|^2 dx < \infty$$

бўлади, яъни

$$\psi^+(x, z) = \theta(x, z) + m^+(z)\varphi(x, z)$$

функция (1.10) тенгламанинг $+\infty$ га мос келувчи Вейл ечими бўлади. $q(x)$ чегараланганлиги учун $\psi^+(x, z)$ Вейл ечими ягона бўлади, яъни Вейл – Титчмарш функцияси $m^+(z)$ ягона бўлади, бошқача қилиб айтганда $\{m_k^+(z)\}$ кетма – кетликнинг лимитик нуқталари устма – уст тушади, улар фақат $m^+(z)$ дан иборат бўлади. Демак, N_{k_m} қисмий кетма – кетликнинг танланиши шарт эмас экан. **Лемма 1.2** исботланди.

Энди (1.4) ва (1.5) шартларга қўшимча равишда қуйидаги

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{L_k} < \infty, \quad (1.11)$$

шарт ҳам бажарилади деб ҳисоблаймиз.

Мисоллар. (1.3), (1.4), (1.5), (1.11) шартларни қаноатлантирадиган

λ_n, μ_n кетма-кетликларга мисоллар келтирамиз:

$$1. \begin{cases} \lambda_n = n^2 + \frac{1}{n^4} \\ \mu_n = n^2 + \frac{2}{n^4} \end{cases}, \quad n=1,2,\dots$$

$$2. \begin{cases} \lambda_n = n^2 + \frac{a}{n^4} \\ \mu_n = n^2 + \frac{a+\varepsilon}{n^4} \end{cases}, \quad a>0, 0<\varepsilon<1, n=1,2,\dots$$

$$3. \begin{cases} \lambda_n = n^2 + \frac{1}{n^4 + 2\varepsilon} \\ \mu_n = n^2 + \frac{1}{n^4 + \varepsilon} \end{cases}, \quad 0<\varepsilon<1, n=1,2,\dots$$

$$4. \begin{cases} \lambda_n = n^2 + \frac{1}{n^4 + 2a} \\ \mu_n = n^2 + \frac{1}{n^4 + a} \end{cases}, \quad a>0 \quad n=1,2,\dots$$

1-мисолни кўриб чиқамиз, яъни (1.3), (1.4), (1.5), (1.11) шартларни бажарилишини кўрсатамиз:

$$1) \lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1},$$

$$n^2 + \frac{1}{n^4} < n^2 + \frac{2}{n^4} < (n+1)^2 + \frac{1}{(n+1)^4},$$

$$n^2 + \frac{2}{n^4} < n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{(n+1)^4},$$

$$\mu_n = n^2 + \frac{2}{n^2} \leq n^2 + 2 \leq n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{(n+1)^4} = \lambda_{n+1};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty;$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (\mu_n - \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^6}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^6} < \infty;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{n^4}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Демак, юқоридаги шартларнинг ҳаммаси бажарилар экан.

(1.11) шартдан ушбу

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{O_k - z}{L_k}, \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{L_k - z}{L_k} \cdot \frac{M_k - z}{L_k}$$

чексиз кўпайтмалар яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - z}{\lambda_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_k - z}{\lambda_k}\right) = e^{\ln \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_k - z}{\lambda_k}\right)} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_k - z}{\lambda_k}\right)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\xi_k - \lambda_k - z}{\lambda_k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda_k - z}{\lambda_k} \sim c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}, \quad |z| \leq M$$

ва охири қатор яқинлашувчи бўлгани учун ушбу

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - z}{\lambda_k}$$

чексиз кўпайтма ҳам яқинлашувчи бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритиб оламиз:

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - z}{\lambda_k}, \quad f(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - z}{\lambda_k}.$$

Чекли зонали потенциаллар назариясида қуйидаги кўпхадлар киритилган эди ([9], 8-боб, 1-§):

$$R_N(z) = z(z - \lambda_1)(z - \mu_1) \dots (z - \lambda_N)(z - \mu_N),$$

$$P_N(z) = (z - \xi_1)(z - \xi_2) \dots (z - \xi_N),$$

$$Q_N(z) = P_N(z) \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j \sqrt{-R_N(\xi_j)}}{P'_N(\xi_j) \cdot (z - \xi_j)}, \quad \sigma_j = \pm 1,$$

$$S_N(z) = \frac{P_N(z) + Q_N^2(z)}{P_N(z)} = (z - \tau_0^{(N)})(z - \tau_1^{(N)}) \dots (z - \tau_N^{(N)}),$$

$$\tau_0^{(N)} \in (-\infty, 0], \quad \tau_k^{(N)} \in [\lambda_k, \mu_k], \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Қуйидаги

$$P_N(z)S_N(z) - Q_N^2(z) = R_N(z)$$

айниятнинг иккала томонини ҳам $\prod_{k=1}^N \lambda_k^2$ га бўлсак,

$$g_N(z)h_N(z) - k_N^2(z) = f_N(z) \quad (1.12)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$f_N(z) = z \prod_{k=1}^N \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - z}{\lambda_k},$$

$$g_N(z) = \prod_{k=1}^N \frac{\xi_k - z}{\lambda_k},$$

$$h_N(z) = (z - \tau_0^{(N)}) \prod_{k=1}^N \frac{\tau_k^{(N)} - z}{\lambda_k},$$

$$k_N(z) = g_N(z) \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j \sqrt{-f_N(\xi_j)}}{g'_N(\xi_j)(z - \xi_j)}.$$

(1.11) шартдан комплекс текисликдаги ихтиёрий компакт тўпланда

$$g_N(z) \xrightarrow{\rightarrow} g(z), \quad f_N(z) \xrightarrow{\rightarrow} f(z), \quad (N \rightarrow \infty)$$

ўринли бўлиши келиб чиқади.

$\{h_N(z)\}$ функциялар тўплами ҳар бир компакт тўпланда чегараланганлигини кўрсатиш мақсадида аввало, $\{\phi_0^{(N)}\}$ сонларнинг чегараланганлигини кўрсатамиз.

$\phi_0^{(N)}$ сон

$$\begin{cases} -y'' + q_N(x)y = \lambda y, & (-\infty < x \leq 0) \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

ёки

$$\begin{cases} -y'' + q_N(x)y = \lambda y, & (0 \leq x < \infty) \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

масаланинг хос қиймати бўлиши бизга маълум ([9], 8-боб). $q_N(x)$ текис чегараланганлиги учун (1.13) ва (1.14) масалаларнинг спектрлари қуйидан текис чегараланган. Демак, $\{\phi_0^{(N)}\}, (\tau_0^{(N)} \in (-\infty; 0])$ сонлар чегараланган экан.

Ушбу

$$\begin{aligned}
 |h_N(z)| &\leq \|z\| + |\tau_0^{(N)}| \prod_{k=1}^N \frac{|\tau_k^{(N)} - z|}{\lambda_k} \leq \\
 &\leq \|z\| + |\tau_0^{(N)}| \prod_{k=1}^N \left| \frac{\tau_k^{(N)} - \lambda_k - z}{\lambda_k} + 1 \right| \leq \\
 &\leq \|z\| + |\tau_0^{(N)}| \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k + |z|}{\lambda_k} \right)
 \end{aligned}$$

баҳолашлардан ва (1.11) шартдан $\{h_N(z)\}$ функцияларнинг ҳар бир компакт тўпلامда текис чегараланганлиги келиб чиқади.

$\{f_N(z)\}, \{g_N(z)\}, \{h_N(z)\}$ функцияларнинг чегараланганлигидан ва (1.12) айниятдан $\{k_N(z)\}$ функцияларнинг ҳар бир компакт тўпلامда текис чегараланганлиги келиб чиқади.

Шунинг учун шундай $\{N_k\}$ қисмий кетма – кетлик топилдики, бунда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_{N_k}(z) = h(z), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k_{N_k}(z) = k(z)$$

бўлади. (1.12) айниятда лимитга ўтсак,

$$g(z)h(z) - k^2(z) = f(z) \tag{1.15}$$

айният келиб чиқади. (1.15) да $z = o_k$ десак,

$$k(\xi_k) = \sigma_k \sqrt{-f(\xi_k)}, \quad \sigma_k = \pm 1 \tag{1.16}$$

ҳосил бўлади.

Чекли зонали потенциалларни Вейл - Титчмарш функциялари учун олинган тасвирга кўра

$$\begin{aligned}
 m_k^+(z) &= \frac{k_{N_k}(z)}{g_{N_k}(z)} + i \frac{\sqrt{f_{N_k}(z)}}{g_{N_k}(z)}, \\
 m_k^-(z) &= \frac{k_{N_k}(z)}{g_{N_k}(z)} - i \frac{\sqrt{f_{N_k}(z)}}{g_{N_k}(z)},
 \end{aligned}$$

бўлади. Бу тенгликларда лемма 1.1 га асосланиб, лимитга ўтсак,

$$m^+(z) = \frac{k(z)}{g(z)} + i \frac{\sqrt{f(z)}}{g(z)},$$

$$m^-(z) = \frac{k(z)}{g(z)} - i \frac{\sqrt{f(z)}}{g(z)} \quad (1.17)$$

келиб чиқади. Ушбу

$$\xi(\lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{m^+(x+iy) - m^-(x+iy)} \right\} dx,$$

$$\eta(\lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{m^+(x+iy) + m^-(x+iy)}{m^+(x+iy) - m^-(x+iy)} \right\} dx,$$

$$\zeta(\lambda) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda - \operatorname{Im} \left\{ \frac{m^+(x+iy) \cdot m^-(x+iy)}{m^+(x+iy) - m^-(x+iy)} \right\} dx$$

формулаларга (1.17) ларни қўйсақ, (1.10) лимитик масаланинг спектрал матрица – функцияси учун қуйидаги

$$\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{g(\lambda)}{\pm \sqrt{f(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases}$$

$$\frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k(\lambda)}{\pm \sqrt{f(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases}$$

$$\frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{h(\lambda)}{\pm \sqrt{f(\lambda)}}, & \lambda \in E \\ 0, & \lambda \notin E \end{cases}$$

формулаларни оламиз. Бу ердаги \pm ишоралар $\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda} \geq 0$ шарт ёрдамида

аниқланади.

Теорема 1.1.1 (1.1), (1.2), (1.11) шартлар бажарилсин. У ҳолда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_N(z) = h(z), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} k_N(z) = k(z). \quad (1.18)$$

Исбот. Қуйидаги

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.19)$$

$$y(0) = 0 \quad (1.20)$$

масаланинг $\rho_+(\lambda)$ спектрал функцияси учун ушбу

$$\rho_+(\lambda) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda -\operatorname{Im}\{m^+(u+iv)\} du$$

формула ўринли ([10], 2-боб, 5-§). (1.21) формулага (1.17) ни қўйсақ ва

$$\lambda \in \dot{E} = (0, \lambda_1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mu_k, \lambda_{k+1})$$

деб олсак,

$$\frac{d\rho_+(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)} \quad (1.22)$$

келиб чиқади. (1.19)+(1.20) чегаравий масала дискрет спектрга ҳам эга бўлиши мумкин. Дискрет спектр $g(z)$ функция илдизларидан айримлари билан устма – уст тушади, яъни у ξ_k $\sum_{k=1}^{\infty}$ сонлар орасида бўлади. Ушбу

$$\rho_+(\xi_k + 0) - \rho_+(\xi_k - 0) = \operatorname{res}_{\xi_k} m^+(z) \approx \frac{\sigma_k \sqrt{-f(\xi_k)} + \sqrt{-f(\xi_k)}}{g'(\xi_k)} \quad (1.23)$$

тенглик ўринли бўлади. (1.22) ва (1.23) формулаларга кўра, лимитик потенциалларнинг барчаси учун $\rho_+(\lambda)$ спектрал функция битта бўлади. $\rho_+(\lambda)$ орқали потенциал ягона аниқланганлиги учун лимитик потенциаллар бир – бири билан устма – уст тушади. Демак, $x \geq 0$ бўлганда $q_N(x)$ аниқ битта потенциалга интилади. Худди шу тарзда $x \leq 0$ бўлган ҳолда ҳам шу фикр тўғрилиги кўрсатилади. Бундан ташқари лимитик потенциал чегараланган бўлади. Демак, унга фақат битта спектрал матрица – функция мос келади. Бундан эса (1.18) лимитларнинг мавжуд бўлиши келиб чиқади. **Теорема 1.1.1 исботланди.**

(1.1) ва (1.2) формулаларда $N \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак,

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k + \mu_k - 2\xi_k(t) \right], \quad (1.24)$$

$$q^2(t) - \frac{1}{2} q''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k^2 + \mu_k^2 - 2\xi_k^2(t) \right] \quad (1.25)$$

излар формулалари келиб чиқади. Бу ерда $o_k(t)$, $k = \overline{1, \infty}$ лар $q(x+t)$ потенциалга мос келувчи спектрал параметрлардир.

2-§. Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқариш

Аввало биз ушбу

$$-y'' + q(x+t)y = \lambda y, \quad (-\infty < x \leq 0), \quad t \in R^1 \quad (2.1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2.1')$$

масаланинг Вейл – Титчмарш функциясини ҳисоблаймиз. Бу ерда $q(x)$ 1-§ да тузиб олинган чексиз зонали потенциал. $q(x)$ чегараланганлиги учун ушбу

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \infty < x \leq 0 \quad (2.2)$$

$$y(0) = 0 \quad (2.2')$$

масаланинг Вейл – Титчмарш функцияси ягона бўлади. $\theta(x, \lambda)$ ва $\varphi(x, \lambda)$ орқали (2.2) тенгламанинг

$$\begin{cases} u(0, \lambda) = 1 \\ u'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(0, \lambda) = 0 \\ \varphi'(0, \lambda) = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини, $u(x, \lambda)$ ва $v(x, \lambda)$ орқали эса (2.1) тенгламанинг

$$\begin{cases} u(0, \lambda) = 1 \\ u'(0, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v(0, \lambda) = 0 \\ v'(0, \lambda) = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз.

$u(x+t, \lambda)$ ва $\varphi(x+t, \lambda)$ функциялар (2.1) тенгламанинг ечимлари бўлиши равшан. Демак, улар $u(x, \lambda)$ ва $v(x, \lambda)$ орқали чизиқли ифодаланади:

$$\theta(x+t, \lambda) = A_1 u(x, \lambda) + A_2 v(x, \lambda), \quad (2.5)$$

$$\varphi(x+t, \lambda) = B_1 u(x, \lambda) + B_2 v(x, \lambda). \quad (2.6)$$

(2.5) ва (2.6) тенгликларда $x = 0$ десак,

$$A_1 = \theta(t, \lambda), \quad (2.7)$$

$$B_1 = \varphi(t, \lambda) \quad (2.8)$$

келиб чиқади. (2.5) ва (2.6) тенгликлардан x бўйича ҳосила олиб $x = 0$ десак,

$$A_2 = \theta'(t, \lambda), \quad (2.9)$$

$$B_2 = \varphi'(t, \lambda) \quad (2.10)$$

келиб чиқади. (2.7) – (2.10) ифодаларни (2.5) ва (2.6) тенгламаларга қўйиб, ушбу

$$\theta(x+t, \lambda) = u(x, \lambda)\theta(t, \lambda) + v(x, \lambda)\theta'(t, \lambda) \quad (2.11)$$

$$\varphi(x+t, \lambda) = u(x, \lambda)\varphi(t, \lambda) + v(x, \lambda)\varphi'(t, \lambda) \quad (2.12)$$

айниятларга эга бўламиз. Булардан эса

$$\begin{aligned} \psi^+(x+t, \lambda) &= \theta(x+t, \lambda) + m^+(\lambda)\varphi(x+t, \lambda) = \\ &= u(x, \lambda)\theta(t, \lambda) + m^+(\lambda)\varphi(t, \lambda) + \\ &+ v(x, \lambda)\theta'(t, \lambda) + m^+(\lambda)\varphi'(t, \lambda) \in L_2(0; \infty) \end{aligned} \quad (2.13)$$

келиб чиқади. Вейл – Титчмарш функцияси ягона бўлганлиги учун

$$m^+(\lambda, t) = \frac{\theta'(t, \lambda) + m^+(\lambda)\varphi(t, \lambda)}{\theta(t, \lambda) + m^+(\lambda)\varphi(t, \lambda)} \quad (2.14)$$

формула ўринли бўлади.

Олдинги параграфда $m^+(\lambda)$ учун олинган ушбу

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} + i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)} \quad (2.15)$$

формулани (2.14) га қўйсақ, қуйидаги

$$m^+(\lambda, t) = \frac{g(\lambda)\theta'(t, \lambda) + k(\lambda)\varphi'(t, \lambda) + i\sqrt{f(\lambda)}\varphi'(t, \lambda)}{g(\lambda)\theta(t, \lambda) + k(\lambda)\varphi(t, \lambda) + i\sqrt{f(\lambda)}\varphi(t, \lambda)} \quad (2.16)$$

формула ҳосил бўлади. Бу тенгликда махражни иррационалликдан қутқарсак ва олдинги параграфда олинган ушбу

$$g(\lambda)h(\lambda) - k^2(\lambda) = f(\lambda) \quad (2.17)$$

айниятни ҳисобга олсак,

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda, t)}{g(\lambda, t)} + i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda, t)} \quad (2.18)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$g(\lambda, t) = g(\lambda)\theta^2(t, \lambda) + 2k(\lambda)\theta(t, \lambda)\varphi(t, \lambda) + h(\lambda)\varphi^2(t, \lambda), \quad (2.19)$$

$$k(\lambda, t) = g(\lambda)\theta(t, \lambda)\theta'(t, \lambda) + k(\lambda) \left[\theta'(t, \lambda)\lambda(t, \lambda) + \theta(t, \lambda)\varphi'(t, \lambda) \right] + h(\lambda)\phi(t, \lambda)\phi'(t, \lambda). \quad (2.20)$$

Буларга қўшимча қилиб, ушбу

$$h(\lambda, t) = g(\lambda)\theta^2(t, \lambda) + 2k(\lambda)\theta'(t, \lambda)\varphi'(t, \lambda) + h(\lambda)\varphi'^2(t, \lambda) \quad (2.21)$$

функцияни киритамиз. У ҳолда (2.19), (2.20), (2.21) тенгликларни битта матрицавий тенглик кўринишида ёзиш мумкин бўлади:

$$\begin{pmatrix} g(\lambda, t) & k(\lambda, t) \\ k(\lambda, t) & h(\lambda, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t, \lambda) & \varphi(t, \lambda) \\ \theta'(t, \lambda) & \varphi'(t, \lambda) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta(t, \lambda) & \theta'(t, \lambda) \\ \phi(t, \lambda) & \phi'(t, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

(2.22) тенгликда детерминантларга ўтсак ва матрицалар кўпайтмасининг детерминанти, детерминантлар кўпайтмасига тенг бўлишини ҳамда ушбу

$$\theta(t, \lambda)\phi'(t, \lambda) - \phi(t, \lambda)\theta'(t, \lambda) = 1 \quad (2.23)$$

айниятни ҳисобга олсак,

$$g(\lambda, t)h(\lambda, t) - k^2(\lambda, t) = g(\lambda)h(\lambda) - k^2(\lambda) \quad (2.24)$$

келиб чиқади. (2.17) ва (2.24) га кўра

$$g(\lambda, t)h(\lambda, t) - k^2(\lambda, t) = f(\lambda) \quad (2.25)$$

бўлади.

Лемма 2.1. $g(\lambda, t)$, $h(\lambda, t)$, $k(\lambda, t)$ функциялар учун ушбу

$$k(\lambda, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t}, \quad (2.26)$$

$$h(\lambda, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(\lambda, t)}{\partial t^2} + (\lambda - q(t))g(\lambda, t) \quad (2.27)$$

айниятлар ўринли.

Исбот. (2.19) дан t бўйича ҳосила олсак ва (2.20) ни ҳисобга олсак, (2.26) дарҳол келиб чиқади. (2.19) дан

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(\lambda, t)}{\partial t^2} = g(\lambda)\theta'^2 + g(\lambda)\theta\theta'' +$$

$$+ k(\lambda) \cdot \left[\varphi'' + 2\theta' \varphi' + \theta \varphi'' \right] + h(\lambda) \varphi'^2 + h(\lambda) \varphi \varphi'' \quad (2.28)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\theta'' = [q(t) - \lambda] \theta, \quad \varphi'' = [q(t) - \lambda] \varphi \quad (2.29)$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(\lambda, t)}{\partial t^2} = h(\lambda, t) + [q(t) - \lambda] g(\lambda, t) \quad (2.30)$$

хосил бўлади. **Лемма 2.1** исботланди.

Лемма 2.2. Агар $\lambda \in \overset{0}{E}$ бўлса,

$$\text{sign}g(\lambda, t) = \text{sign}h(\lambda, t) = \text{sign}g(\lambda) = \text{sign}h(\lambda) \quad (2.31)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. (2.25) га кўра

$$g(\lambda, t)h(\lambda, t) = f(\lambda) + k^2(\lambda, t). \quad (2.32)$$

$\lambda \in \overset{0}{E}$ бўлгани учун $f(\lambda) > 0$ бўлади. Бундан $g(\lambda, t)h(\lambda, t) > 0$ келиб чиқади, яъни

$$\text{sign}g(\lambda, t) = \text{sign}h(\lambda, t)$$

тенглик ўринли. Бу ерда $t = 0$ десак,

$$\text{sign}g(\lambda) = \text{sign}h(\lambda)$$

келиб чиқади. (2.19) тенгликка кўра

$$g(\lambda)g(\lambda, t) = \left[\theta(\lambda)\theta(t, \lambda) + k(\lambda)\varphi(t, \lambda) \right]^2 + f(\lambda)\varphi^2(t, \lambda)$$

бўлади. Бунда эса, $\lambda \in \overset{0}{E}$ бўлгани учун $g(\lambda)g(\lambda, t) > 0$, яъни

$$\text{sign}g(\lambda, t) = \text{sign}g(\lambda)$$

келиб чиқади. **Лемма 2.2** исботланди.

Натижа. $g(\lambda, t)$ функция хар бир $[\lambda_k, \mu_k]$ лакунада камида битта илдизга эга.

Лемма 2.3. $g(\lambda, t)$ функциянинг (λ га нисбатан) барча илдизлари ҳақиқий.

Исбот. $\lambda_0 \in C/R^1$ сон учун $g(\lambda_0, t) = 0$ бўлсин деб фараз қилайлик.

Қуйидаги

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} + i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}$$

$$m^-(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} - i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}$$

ифодага кўра

$$g(\lambda)\psi^+(t, \lambda) = g(\lambda)\theta(t, \lambda) + k(\lambda)\varphi(t, \lambda) + i\sqrt{f(\lambda)}\varphi(t, \lambda)$$

$$g(\lambda)\psi^-(t, \lambda) = g(\lambda)\theta(t, \lambda) + k(\lambda)\varphi(t, \lambda) - i\sqrt{f(\lambda)}\varphi(t, \lambda)$$

бўлади. Буларни бир – бирига кўпайтирсак,

$$g^2(\lambda)\psi^+(t, \lambda)\psi^-(t, \lambda) = g(\lambda)g(t, \lambda)$$

бўлади. Бу ерда $\lambda = \lambda_0$ десак ва $g(\lambda) \neq 0$ ни ҳисобга олсак,

$$\psi^+(t, \lambda_0)\psi^-(t, \lambda_0) = 0$$

келиб чиқади. Демак,

$$\psi^+(t, \lambda_0) = 0 \quad \text{ёки} \quad \psi^-(t, \lambda_0) = 0$$

бўлади. Айтайлик $\psi^+(t, \lambda_0) = 0$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad -\infty < x \leq 0 \quad (2.33)$$

чегаравий масала учун $y(x) = \psi^+(x+t, \lambda_0) \neq 0$ функция $\lambda = \lambda_0$ хос қийматга мос келувчи хос функция бўлади. (2.33) комплекс хос қийматга эга бўлмаслиги бизни зиддиятга келтиради, чунки $\lambda_0 \notin R^1$. **Лемма 2.3 исботланди.**

(2.19) – (2.21) тенгликларга мувофиқ $g(\lambda, t)$, $k(\lambda, t)$, $h(\lambda, t)$ функциялар λ га нисбатан бутун функциялар бўлади. Руше теоремасидан фойдаланиб, $g(\lambda, t)$ функция ҳар бир $[\lambda_k, \mu_k]$ лакунада фақат биттадан илдишга

эга бўлишини кўрсатиш мумкин. $g(\lambda, t)$ нинг илдизларини $\xi(t) \in [\lambda_k, \mu_k]$ орқали белгилаймиз. Ушбу

$$g(\lambda, t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{\lambda_k} \quad (2.34)$$

ёйилма ўринли бўлишини Лиувилл теоремасидан фойдаланиб кўрсатиш мумкин. Бунинг учун (2.19) тенглик ва биринчи параграфдаги $g(\lambda)$ учун ёзилган чексиз кўпайтмани ишлатиб (2.34) тенглик чап томонининг ўнг томонга нисбати чегараланган голоморф функция бўлишини кўрсатиш кифоя. Энди Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. (2.34) га кўра

$$\frac{g(\lambda, t)}{\partial t} \Big|_{\lambda=o_j(t)} = \frac{o'_j(t)}{\lambda_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{o_k(t) - o_j(t)}{\lambda_k} \quad (2.35)$$

бўлади. (2.25) тенгликда $\lambda = \xi_j(t)$ десак,

$$\begin{aligned} -k^2(\xi_j(t), t) &= f(\xi_j(t)), \\ k(\xi_j(t), t) &= \sigma_j(t) \sqrt{-f(\xi_j(t))} \end{aligned} \quad (2.36)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\sigma_j(t) = \text{sign} k(\xi_j(t), t). \quad (2.37)$$

(2.26) тенгликда $\lambda = \xi_j(t)$ десак,

$$\frac{\partial g(\lambda, t)}{\partial t} \Big|_{\lambda=\xi_j(t)} = 2k(\xi_j(t), t) \quad (2.38)$$

келиб чиқади. (2.38) га (2.36) ни қўйсак,

$$\frac{\xi'_{kj}(t)}{\lambda_j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_{kj}(t)}{\lambda_k} = 2\sigma_j(t) \sqrt{-f(\xi_j(t))} \quad (2.39)$$

бўлади. Бунга кўра

$$\xi'_{kj}(t) = \frac{2\lambda_j \sigma_j(t) \sqrt{-f(\xi_j(t))}}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_j(t)}{\lambda_k}}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

бўлади.

II БОБ. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала.

1-§. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл масаласининг чегарвий шартини спектрал берилганлар орқали ифодалаш

Ярим ўқда берилган қуйидаги

$$Hy = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \quad (3.1)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi) \quad (3.2)$$

Штурм – Лиувилл чегаравий масаласини кўриб чиқамиз. Бу ерда $q(x)$ коэффициент

1-§ да киритилган чексиз зонали потенциал. $\theta_\alpha(x, \lambda)$ ва $\varphi_\alpha(x, \lambda)$ орқали (3.1)

тенгламанинг қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha(0, \lambda) &= \cos \alpha, \quad \theta'_\alpha(0, \lambda) = \sin \alpha, \\ \varphi_\alpha(0, \lambda) &= -\sin \alpha, \quad \varphi'_\alpha(0, \lambda) = \cos \alpha. \end{aligned}$$

(3.1)+(3.2) масаланинг Вейл – Титчмарш функцияси $m_\alpha(\lambda)$ қуйидаги

$$\theta_\alpha(x, \lambda) + m_\alpha(\lambda)\varphi_\alpha(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), \quad \text{Im } \lambda \neq 0 \quad (3.3)$$

муносабатдан бир қийматли аниқланади, чунки $q(x)$ чегараланган функция 1-§ нинг натижаларига кўра

$$\theta(x, \lambda) + m^+(\lambda)\varphi(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), \quad \text{Im } \lambda \neq 0 \quad (3.4)$$

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} + i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}. \quad (3.5)$$

(3.4) муносабатига ушбу

$$\theta(x, \lambda) = \theta_\alpha(x, \lambda) \cos \alpha - \varphi_\alpha(x, \lambda) \sin \alpha \quad (3.6)$$

$$\varphi(x, \lambda) = \theta_\alpha(x, \lambda) \sin \alpha + \varphi_\alpha(x, \lambda) \cos \alpha \quad (3.7)$$

ифодаларни қўямиз:

$$\begin{aligned} & \theta_{\alpha}(x, \lambda)[\cos \alpha + m^{+}(\lambda) \sin \alpha] + \\ & + \varphi_{\alpha}(x, \lambda)[- \sin \alpha + m^{+}(\lambda) \cos \alpha] \in L_2(0, \infty). \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3.8) муносабатдан

$$m_{\alpha}(\lambda) = \frac{-\sin \alpha + m^{+}(\lambda) \cos \alpha}{\cos \alpha + m^{+}(\lambda) \sin \alpha} \quad (3.9)$$

бўлиши келиб чиқади. (3.9) формулага (3,5) ифодани қўйиб

$$m_{\alpha}(\lambda) = \frac{-g(\lambda) \sin \alpha + k(\lambda) \cos \alpha + i\sqrt{f(\lambda)} \cos \alpha}{g(\lambda) \cos \alpha + k(\lambda) \sin \alpha + i\sqrt{f(\lambda)} \sin \alpha} \quad (3,10)$$

бўлишини топамиз.

(3,10) тенгликда махражни иррационалликдан қутқарсак ва ушбу

$$g(\lambda)h(\lambda) - k^2(\lambda) = f(\lambda)$$

айнияти ҳисобга олсак,

$$m_{\alpha}(\lambda) = \frac{[-g \sin \alpha + k \cos \alpha + i\sqrt{f} \cos \alpha][g \cos \alpha + k \sin \alpha - i\sqrt{f} \sin \alpha]}{(g \cos \alpha + k \sin \alpha)^2 + f \sin^2 \alpha}, \quad (3.11)$$

яъни

$$m_{\alpha}(\lambda) = \frac{-\frac{1}{2} g(\lambda) \sin 2\alpha + k(\lambda) \cos 2\alpha + h(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + i\sqrt{f(\lambda)}}{(g \cos \alpha + k \sin \alpha)^2 + f \sin^2 \lambda) : g} \quad (3.12)$$

келиб чиқади.

Вейл – Титчмарш функциясининг (3.12) кўринишига асосланган ҳолда қуйидаги функцияларни киритиб оламиз:

$$A(\lambda) = h(\lambda) \sin^2 \alpha + g(\lambda) \cos^2 \alpha + 2k(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.13)$$

$$C(\lambda) = h(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha - g(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + k(\lambda)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (3.14)$$

Агар буларга қўшимча қилиб ушбу

$$B(\lambda) = h(\lambda) \cos^2 \alpha + g(\lambda) \sin^2 \alpha - 2k(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.15)$$

функцияни киритсак, (3.13), (3.14), (3.15) тенгликларни битта матрицавий тенглик кўринишида ёзиш мумкин бўлади:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

(3.16) тенгликда детерминантларга ўтсак, ушбу

$$A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = f(\lambda) \quad (3.17)$$

айният келиб чиқади.

Киритган белгилашлардан сўнг (3.12) куйидаги кўринишни олади:

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} + i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A(\lambda)}. \quad (3.18)$$

(3.18) га асосан (3.1)+(3.2) масаланинг узлуксиз спектри

$$E_{ess} = \mathbb{R}^1 \setminus \left\{ (-\infty, 0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_k, \mu_k) \right\} \quad (3.19)$$

тўпландан иборат бўлади.

$$\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

орқали

$$A(\lambda) \quad g(\lambda)A(\lambda) = (g(\lambda)\cos\alpha + k(\lambda)\sin\alpha)^2 + f(\lambda)\sin^2\alpha$$

функциянинг илдизларини белгилаймиз. Ушбу

тенгликдан $\lambda \in E_{ess}^0$ бўлганда $g(\lambda)A(\lambda) > 0$ бўлиши келиб чиқади, чунки

$\lambda \in E_{ess}^0$ бўлганда $f(\lambda) > 0$ бўлиши бизга маълум. $g(\lambda)$ функция спектрнинг бўлақларида ўз ишорасини сақлаганлиги ва бир бўлақдан бошқа бўлаққа ўтганда ишорасини қарама – қаршисига ўзгартириш сабабли $A(\lambda)$ функция лакуналарда камида биттадан илдизга эга бўлиши келиб чиқади. Агар (3.13) ифодадан фойдаланиб, ушбу

$$f_1(\lambda) = h(\lambda)\sin^2\alpha, \quad f_2(\lambda) = g(\lambda)\cos^2\alpha + 2k(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha$$

функцияларни киритсак ва Руше теоремасини қўлласак, $A(\lambda)$ функция ҳар бир лакунада фақат биттадан илдизга эга бўлиши келиб чиқади, яъни

$$\xi_0 \in (-\infty, 0], \quad \xi_n \in [\lambda_n, \mu_n], \quad n = 1, 2, \dots$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Таъриф – 1. $A(\lambda) = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлган ушбу $\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$ сонларга ва ушбу $\sigma_n = \text{sign}C(\xi_n), n = 0, 1, 2, \dots$ ишорларга (3.1)+(3.2) чегаравий масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф – 2. $\xi_n, \sigma_n, n = 0, 1, 2, \dots$ спектрал параметрларга ва $\lambda_0, \lambda_n, \mu_n, n = 1, 2, \dots$ узлуксиз спектрнинг четки нуқталарига (3.1)+(3.2) чегаравий масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

(3.1)+(3.2) чегаравий масаланинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади. Аксинча, спектрал берилганлар бўйича (3.1)+(3.2) масаладаги $q(x)$ коэффициентни ва $\text{ctg} \alpha$ ни топиш масаласига тескари масала дейилади.

Теорема 2.1.1 Қуйидаги тенгликлар ўринли

$$\text{ctg} \alpha = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)}, \quad (3.20)$$

$$q(t) = 2\text{ctg}^2 \alpha + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)), \quad (3.21)$$

бу ерда

$$f(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k}, \quad (3.21)$$

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k} \quad (3.2)$$

ва $\xi_k(t), k = 0, 1, 2, \dots$ лар ушбу

$$-y'' + q(x+t)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \quad (3.23)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0 \quad (3.24)$$

масаланинг спектрал параметрларидир. (t – ҳақийқий параметр).

Исбот. (3.1)+(3.2) масаланинг (3.18) Вейл-Титчмарш функцияси учун асимптотик формула олиб, уни классик асимптотик формула билан солиштирамиз. Шу мақсадда қуйидаги асимптотикаларни келтириб

чиқарамиз.

$$\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} = \frac{1}{\lambda - \tau_0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\tau_k - \lambda} = \frac{1}{\lambda - \tau_0} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\xi_k - \tau_k}{\tau_k - \lambda}\right) = \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

$$\frac{k(\lambda)}{h(\lambda)} = \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k \sqrt{-f(\xi_k)}}{g'(\xi_k)(\lambda - \xi_k)} = \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.26)$$

Буларга кўра

$$\begin{aligned} \frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} &= \frac{h(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha - g(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha + k(\lambda)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{h(\lambda) \sin^2 \alpha + g(\lambda) \cos^2 \alpha + 2k(\lambda) \sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \frac{k(\lambda)}{h(\lambda)}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \frac{g(\lambda)}{2h(\lambda)} \cdot \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} \cos^2 \alpha + 2\frac{k(\lambda)}{h(\lambda)} \sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.27) тенгликка асосланиб $\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}$ функцияга Миттаг-Леффлер теоремасини

қулласак, ушбу

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = \operatorname{ctg} \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(\xi_n)}{A_1'(\xi_n)(\lambda - \xi_n)} \quad (3.28)$$

тенглик хосил бўлади. Қуйидаги

$$A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = f(\lambda)$$

айниятда $\lambda = \xi_n$ десак ва $\sigma_n = \operatorname{sign} C(\xi_n)$ эканини ҳисобга олсак,

$$C(\xi_n) = \sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)} \quad (3.29)$$

келиб чиқади.

$A(\lambda)$ бутун функция ўзининг ноллари $\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ва асимптотикаси

$$\frac{A(\lambda)}{h(\lambda)} = \sin^2 \alpha + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

орқали бир қийматли аниқланади:

$$A(\lambda) = \sin^2 \alpha (\lambda - \xi_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k} \quad (3.30)$$

Қулайлик учун

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k} \quad (3.31)$$

функцияни киритиб оламиз.

(3.29), (3.30), (3.31) дан фойдаланиб, (3.28) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\lambda \sin^2 \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)}}{A'_1(\xi_n)} + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.32)$$

Энди эса ушбу $\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A_1(\lambda)}$ функциянинг асимптотикасини ўрганамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A_1(\lambda)} &= \frac{\sqrt{\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k}}}{(\lambda - \xi_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0} \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\xi_k - \lambda} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\xi_k - \lambda}} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0} \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_k - \xi_k}{\xi_k - \lambda}\right) \cdot \left(1 + \frac{\mu_k - \xi_k}{\xi_k - \lambda}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0} \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2\xi_k - \lambda_k - \mu_k}{\lambda - \xi_k} + \frac{(\xi_k - \lambda_k)(\xi_k - \mu_k)}{(\lambda - \xi_k)^2}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0} \sqrt{\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{\lambda}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}\right)\right\}} = \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0} \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{1 - \frac{\xi_0}{\lambda}} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{1 + \frac{\xi_0}{\lambda} + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}\right\} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{1 - \frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \frac{\xi_0}{\lambda} + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)}}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \left\{-2\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k)\right\} + \underline{\underline{O\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}\right)}}. \end{aligned}$$

Демак, ушбу

$$\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A_1(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}} \left\{ -2\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) \right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.33)$$

асимптотик формула бажарилади. Ушбу

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} + i \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{\sin^2 \alpha A_1(\lambda)}$$

формулага (3.32) ва (3.33) ги ифодаларни қўйиб, қуйидаги асимптотикага эга бўламиз:

$$m_\alpha(\lambda) = \operatorname{ctg} \alpha + \frac{i}{\sqrt{\lambda} \sin^2 \alpha} + \frac{1}{\lambda \sin^2 \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)} - \frac{i}{2\lambda\sqrt{\lambda} \sin^2 \alpha} \left\{ -2\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) \right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Энди эса, $m_\alpha(\lambda)$ функция учун бошқа усул билан асимптотик формула оламиз.

Аввало ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad 0 < x < \infty$$

масаланинг $m(\lambda)$ Вейл-Титчмарш функциясининг асимптотикасини келтириб чиқарамиз. В.А.Марченконинг [11] ишида Штурм-Лиувилл тенгламасининг қуйидаги ечимлар мавжуд бўлиши кўрсатилган:

$$y_1(x, \lambda) = \exp \left\{ i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sigma_1(t, \lambda) dt \right\} \in L_2(0, \infty), \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0$$

$$y_2(x, \lambda) = \exp \left\{ -i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sigma_2(t, \lambda) dt \right\} \notin L_2(-\infty, 0), \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0$$

Бу ердаги $\sigma_1(t, \lambda)$ учун $q(x) \in C^1[0, \infty)$ бўлганда ушбу

$$\sigma_1(0, \lambda) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \cdot q(0) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

асимптотика ўринли бўлади.

Штурм-Лиувилл тенгламасининг ушбу $\varphi(0, \lambda) = 0$, $\varphi'(0, \lambda) = 1$, $\theta(0, \lambda) = 1$, $\theta'(0, \lambda) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $\varphi(x, \lambda)$ ва $\theta(x, \lambda)$ ечимларни $y_1(x, \lambda)$ ва $y_2(x, \lambda)$ ечимлар орқали ифодалаймиз:

$$\begin{aligned}\theta(x, \lambda) &= \frac{i\sqrt{\lambda} - \sigma_2(0, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda) + \sigma_2(0, \lambda)} \cdot y_1(x, \lambda) - \\ &\quad - \frac{i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda)}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda) - \sigma_2(0, \lambda)} \cdot y_2(x, \lambda), \\ \varphi(x, \lambda) &= \frac{1}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda) + \sigma_2(0, \lambda)} \cdot y_1(x, \lambda) - \\ &\quad - \frac{1}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda) - \sigma_2(0, \lambda)} \cdot y_2(x, \lambda).\end{aligned}$$

Буларга кўра

$$\begin{aligned}\psi(x, \lambda) &= \varphi(x, \lambda) + m(\lambda)\theta(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) \cdot \frac{1 + m(\lambda)(i\sqrt{\lambda} - \sigma_2(0, \lambda))}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda) - \sigma_2(0, \lambda)} + \\ &\quad + y_2(x, \lambda) \cdot \frac{-1 + m(\lambda)(i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda))}{2i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda) - \sigma_2(0, \lambda)}\end{aligned}\quad (3.37)$$

бўлади.

$$y_1(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), \quad \psi(x, \lambda) \in L_2(0, \infty), \quad y_2(x, \lambda) \notin L_2(0, \infty), \quad (\text{Im } \lambda \neq 0)$$

бўлгани учун (3.36) даги охирги ҳад нолга айланиши зарур. Бунга кўра ушбу

$$m(\lambda) = \frac{1}{i\sqrt{\lambda} + \sigma_1(0, \lambda)} \quad (3.38)$$

тенглик ўринли бўлади. $\sigma_1(0, \lambda)$ функциянинг (3.36) асимптотасига биноан

$$\begin{aligned}m(\lambda) &= \frac{1}{i\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \cdot q(0) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\lambda} \cdot q(0) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\right)} = \\ &= \frac{1}{i\sqrt{\lambda}} \left\{ 1 + \frac{1}{2\lambda} q(0) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\right) \right\} = -\frac{i}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2i\lambda\sqrt{\lambda}} \cdot q(0) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).\end{aligned}\quad (3.39)$$

(3.39) асимптотикани ушбу

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{\cos \alpha - m(\lambda) \sin \alpha}{\sin \alpha + m(\lambda) \cos \alpha}$$

тенгликка қўйиб, қуйидаги

$$m_\alpha(\lambda) = \operatorname{ctg} \alpha + \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} (q(0) - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha) \cdot \frac{i}{\lambda \sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (3.40)$$

формулани келтириб чиқарамиз.

Ниҳоят, (3.34) билан (3.40) ни таққосласак (3.20) ва ушбу

$$q(0) = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 \xi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2 \xi_k) \quad (3.41)$$

тенглик келиб чиқади. Агар биз $q(x)$ потенциал ўрнида $q(x+t)$ потенциални қарайдиган бўлсак (3.41) тенглик (3.21) кўринишни олади. **Теорема 2.1.1** исботланди.

**2-§. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм –
Лиувилл чегаравий масаласи учун
Дубровин – Трубовиц системаси**

(3.1)+(3.2) масала учун Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун қуйидаги айниятлардан фойдаланамиз:

$$\begin{pmatrix} g(\lambda, t) & k(\lambda, t) \\ k(\lambda, t) & h(\lambda, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(\lambda, t) & \varphi(\lambda, t) \\ \theta'(\lambda, t) & \varphi'(\lambda, t) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\lambda, t) & \varphi(\lambda, t) \\ \theta'(\lambda, t) & \varphi'(\lambda, t) \end{pmatrix}^T, \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^T. \quad (4.2)$$

Агар биз $q(x)$ ўрнида $q(x + t)$ ни олсак, (4.2) тенглик ушбу

$$\begin{pmatrix} A(\lambda, t) & C(\lambda, t) \\ C(\lambda, t) & B(\lambda, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} g(\lambda, t) & k(\lambda, t) \\ k(\lambda, t) & h(\lambda, t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^T \quad (4.3)$$

кўринишни олади. (4.2) дан

$$\begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^T \times \\ \times \begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

келиб чиқади.

(4.4) ни (4.1) га қўямиз ва ҳосил бўлган ифодани (4.3) га қўямиз, натижада

$$\begin{pmatrix} A(\lambda, t) & C(\lambda, t) \\ C(\lambda, t) & B(\lambda, t) \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} \cdot G^T \quad (4.5)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$G = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta & \varphi \\ \theta' & \varphi' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta \cos \alpha + \varphi \sin \alpha & -\theta \sin \alpha + \varphi \cos \alpha \\ \theta' \cos \alpha + \varphi' \sin \alpha & -\theta' \sin \alpha + \varphi' \cos \alpha \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_\alpha & \varphi_\alpha \\ \theta'_\alpha & \varphi'_\alpha \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha & \varphi_\alpha \cos \alpha + \varphi'_\alpha \sin \alpha \\ -\theta_\alpha \sin \alpha + \theta'_\alpha \cos \alpha & -\varphi_\alpha \sin \alpha + \varphi'_\alpha \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

(4.6) ифодани (4.5) тенгликка қўямиз, ўнг томондаги кўпайтмани ҳисобласак ва мос элементларни бир – бирига тенгласак, қуйидаги айниятлар келиб чиқади:

$$A(\lambda, t) = A(\lambda)(\theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha)^2 + 2C(\lambda)(\theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha) \cdot \\ \cdot (\varphi_\alpha \cos \alpha + \varphi'_\alpha \sin \alpha) + B(\lambda)(\varphi_\alpha \cos \alpha + \varphi'_\alpha \sin \alpha)^2, \quad (4.7)$$

$$C(\lambda, t) = A(\lambda)(\theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha)(-\theta_\alpha \sin \alpha + \theta'_\alpha \cos \alpha) + \\ + C(\lambda)(\varphi_\alpha \cos \alpha + \varphi'_\alpha \sin \alpha)(-\theta_\alpha \sin \alpha + \theta'_\alpha \cos \alpha) + \\ + C(\lambda)(\theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha)(-\varphi_\alpha \sin \alpha + \varphi'_\alpha \cos \alpha) + \\ + B(\lambda)(\varphi_\alpha \cos \alpha + \varphi'_\alpha \sin \alpha)(-\varphi_\alpha \sin \alpha + \varphi'_\alpha \cos \alpha), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
B(\lambda, t) &= A(\lambda)(-\theta_\alpha \sin \alpha + \theta'_\alpha \cos \alpha)^2 + \\
&+ 2C(\lambda)(-\phi_\alpha \sin \alpha + \phi'_\alpha \cos \alpha)(-\theta_\alpha \sin \alpha + \theta'_\alpha \cos \alpha) + \\
&+ B(\lambda)(-\phi_\alpha \sin \alpha + \phi'_\alpha \cos \alpha)^2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.7) ва (4.8) формулаларга асосан ушбу

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial A(\lambda, t)}{\partial t} &= A(\lambda)(\theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha)(\theta'_\alpha \cos \alpha + (q(t) - \lambda)\theta_\alpha \sin \alpha) + \\
&+ C(\lambda)(\theta'_\alpha \cos \alpha + (q(t) - \lambda)\theta_\alpha \sin \alpha)(\phi_\alpha \cos \alpha + \phi'_\alpha \sin \alpha) + \\
&+ C(\lambda)(\theta_\alpha \cos \alpha + \theta'_\alpha \sin \alpha)(\phi'_\alpha \cos \alpha + (q(t) - \lambda)\phi_\alpha \sin \alpha) + \\
&+ B(\lambda)(\phi_\alpha \cos \alpha + \phi'_\alpha \sin \alpha)(\phi'_\alpha \cos \alpha + (q(t) - \lambda)\phi_\alpha \sin \alpha) = \\
&= C(\lambda, t) + (q(t) - \lambda + 1) \sin \alpha [A(\lambda, t) \cos \alpha - C(\lambda, t) \sin \alpha].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

тенгликлар ўринли. (4.10) айниятни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(\lambda, t)}{\partial t} &= 2C(\lambda, t)[\cos^2 \alpha + (\lambda - q(t)) \sin^2 \alpha] + \\
&+ A(\lambda, t)(q(t) - \lambda + 1) \sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Энди эса (4.11) айниятдан ва ушбу

$$A(\lambda, t) = -\sin^2 \alpha (\xi_0(t) - \lambda) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{\lambda_k}, \tag{4.12}$$

$$A(\lambda, t)B(\lambda, t) - C^2(\lambda, t) = f(\lambda) \tag{4.13}$$

айниятлардан фойдаланиб Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. (4.12) га биноан

$$\left. \frac{\partial A(\lambda, t)}{\partial t} \right|_{\lambda=\xi_0(t)} = -\sin^2 \alpha \cdot \xi'_0(t) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_0(t)}{\lambda_k}, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial A(\lambda, t)}{\partial t} \right|_{\lambda=\xi_n(t)} &= -\sin^2 \alpha \cdot (\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \frac{\xi'_n(t)}{\lambda_n} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{\lambda_k}, \\
&n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.15}$$

(4.13) тенгликда $\lambda = \xi_n(t)$ десак,

$$C(\xi_n(t), t) = \sigma_n(t) \sqrt{-f(\xi_n(t))}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.16}$$

келиб чиқади. (4.11) айниятда $l = o_n(t)$ деймиз ва (4.15), (4.16) тенгликларни ҳисобга оламиз:

$$\xi_0'(t) = \frac{-2[\operatorname{ctg}^2 \alpha + \xi_0(t) - q(t)]\sigma_0(t)\sqrt{-f(\xi_0(t))}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_0(t)}{\lambda_k}}, \quad (4.17)$$

$$\xi_n'(t) = \frac{-2\lambda_n[\operatorname{ctg}^2 \alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))}}{(\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{\lambda_k}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

(4.17), (4.18) системага Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасии дейилади.

Адабиётлар

- [1]. Архиезер Н.И. «Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов». // ДАН СССР, 1961, Т.141, «№2, стр. 262-266.
- [2]. Hochstadt H., Goldberg W. «An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum». // J.Math.Anal. and Appl. 1985, 105, 206-221.
- [3]. Левитан Б.М., Савин А.В. «Обратная задача на полупрямой для конечнозонных потенциалов». // Вестн. Моск. Ун-та, сер.1, математика, механика. 1988, «№1, стр. 21-28.
- [4]. Марченко В.А., Островский И.В. «Характеристика спектра оператора Хилла». // Мат. сб. 1975, 97, вып. 4, стр. 540-606.
- [5]. Итс А.Р., Матвеев В.Б. «Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N - солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза». // Теор. и мат. физика, 1975, Т.23, №1, стр. 51-68.
- [6]. Trubowitz E. «The inverse problem for periodic potentials». // Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.
- [7]. Дубровин Б.А. «Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов». // Функ. анал. и прилож., 1975, Т.9, «№3, стр. 41-51.
- [8]. Новиков С.П. «Периодическая задача Кортевега – де Фриза I». // Функ. анал. и прилож. 1974, Т.8, №3, стр. 54-66.
- [9]. Левитан Б.М. «Обратные задачи Штурма – Лиувилля». М.: «Наука», 1984, стр. 240.
- [10]. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Москва, «Наука», 1970, 672 стр.
- [11]. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 стр.

- [12]. Блох А.Ш. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции. -ДАН СССР, 1953, 42, № 2, с. 209-213.
- [13]. Gardner G., Creen I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg-de Vries equation.// Phys. Rev. Lett., 1967 , v.19, p.1095-1098.
- [14]. Ибрагимов А.М., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом на полуоси. Узбекский математический журнал, 2001, № 5-6, стр. 20-24.
- [15]. Левитан Б.М. Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов.// Изв. АН СССР, сер. Матем. 1981, т. 45, № 2, с. 291-320.
- [16]. Левитан Б.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля для конечнозонных и бесконечнозонных потенциалов.// Труды Москов. Мат. Общества, 1982, т. 45, с. 3-36.
- [17]. Левитан Б.М. О замыкании множества конечнозонных потенциалов.// Мат. сб., 1984, 123. (165), № 1, с. 69-91.
- [18]. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: "Наука" 1988 г.
- [19]. Magnus W., Winkler W. Hill's equation. - New.York: Interscience wiley, 1966.
- [20]. Маматов А.Э. Обратная задача на полупрямой для оператора Дирака в случае конечнозонных потенциалов. // УзМЖ, 1991, № 5, с. 44-49.
- [21]. Рофе-Бекетов Ф.С. Спектральная матрица и обратная задача Штурма-Лиувилля на всей оси. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1967, № 4, с. 189-197.
- [22]. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: "Наука", 1969.

