

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI ALOQA, AXBOROTLASHTIRISH VA
TELEKOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI DAVLAT QO'MITASI**

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI

**“Algoritmlash va matematik
modellashtirish” kafedrası**

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

Fanning “Chiziqli programmalash” bo'limi bo'yicha iqtisodiyot va menejment
yo'nalishi talabalari uchun nazariy ma'lumotlar hamda amaliy ko'rsatmalar

Toshkent-2014

So'z boshi

Modellashtirish usullaridan amaliy va ilmiy-tadqiqot ishlarida azaldan foydalanib kelinadi. U texnik konstruksiya, qurilish va arxitekturada loyiha modellari; fizika, ximiya, biologiya fanlarida ma'lum formulalar asosida jarayon matematik modellarini ifodalash namunalari sifatida ma'lum. "Model" so'zi lotincha bo'lib (modulus), o'lchov, namuna, norma kabi ma'nolarni bildiradi.

So'nggi yillarda model so'zi ham moda (urf) bo'lib, modellashtirishning turli yo'nalishlari shakllanib bormoqda. Hisoblash texnikasi, kompyuter texnologiyalarining rivojlanishi esa, matematik modellashtirish amaliy samaradorligining keskin ortishiga sabab bo'lmoqda. Axborotlarni saqlash, uzatish, qayta ishlash, qisqasi axborot texnologiyalari zamonamizning eng dolzarb yo'nalishlaridan biriga aylanib bormoqda. Bu esa keng qamrovli murakkab jarayonlarni ham matematik modellashtirish va ko'plab variantlarda tadqiq qilish imkoniyatlarini yaratmoqda.

Xususan, iqtisodiy jarayonlarni matematik modeli sifatida XX asr o'rtalarida G.B.Dantzig, L.V.Kantorovich lar tomonidan amaliyotga kiritilgan "chiziqli programmalash masalalari" ChPM yo'nalishini keltirish mumkin. Yuzaki qaraganda, bozorda o'tirgan oddiy sotuvchi (tadbirkor) o'z tajribasiga suyanagan holda, narx-navo dinamikasini tahlil qilib, har kuni o'zi bilmagan holda qandaydir optimizatsiya masalalarini yechib boradi. Uning tanlagan yechimi omadli yoki omadsiz bo'lishiga qarab uning daromadi shakllanadi. Bu yerda yechimni "omadli" yoki "omadsiz" sifatlari bilan bog'ladik. Sababi, iqtisodiyot bilan bog'liq masalalar haddan tashqari ko'p variantli bo'lib ularni to'la tahlil qilish va optimal variantni tanlash zamonaviy kompyuterlar uchun ham mushkul masalalardan hisoblanar ekan. Masalan ChPM ning tanlash masalasi deb ataladigan masalasida n - tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi. Shu matritsaning har bir satri va har bir ustunidan bittadan elementni shunday tanlash kerakki, tanlangan elementlar yig'indisi maksimal bo'lsin. Bu masalani yechish uchun $n!$ variantni hisoblash va taqqoslash kerak bo'lar ekan. Hattoki oddiy $n=20$ bo'lgan holda ham $n! > 2 \cdot 10^{18}$ bo'lib, bu masalani yechish uchun sekundiga 1milliard amal bajaradigan kompyuter ham 500 yil tinimsiz ishlashi kerak ekan.

Demak, bu yerda mavjud variantlarning barchasini emas, ma'lum ma'noda optimallikka da'vogar bo'lishi mumkin bo'lgan variantlarnigina tahlil qilish va ular orasidan optimalini ajratish yo'lini tutish talab qilinadi. ChPM fani aynan shu yo'nalishda shakllangan bo'lib, uning matematik asoslarini, hamda amaliy tadbiriq bosqichlarini bilish har bir iqtisodchi, umuman har bir izlanuvchan ijodkor uchun zaruriy bo'g'inlardan biriga aylanib bormoqda.

Mazkur qo'llanmada, yuqorida keltirilgan mulohazalar hisobga olinib, ChPM matematik asoslari va amaliyoti iloji boricha sodda masalalar asosida talqin qilingan. Maqsad, vaqti kelib kompyuter matematik ta'minotida mavjud bo'lgan ChPM larni yechish dasturlaridan foydalanish zarurati paydo bo'lsa, u haqida to'la tasavvurga ega bo'lsin. Har bir paragraf so'ngida mustaqil ishlash uchun berilgan masalalar fanni to'la o'zlashtirishni ta'minlash uchun mo'ljallangan.

§ 1. Chiziqli programmalash masalalari.

Ishlab chiqarish jarayonidagi moddiy va iqtisodiy bog'lanishlarni hisobga olgan holda maqsadga muvofiq keladigan eng maqbul rejani tanlash masalasining matematik ifodasi ilmiy va o'quv adabiyotlarida **chiziqli programmalash** atamasi bilan ifodalanadi. Bunday masalalarning matematik ifodasini keltirib chiqarishda odatda ishlab chiqarish jarayoni bilan bog'liq bo'lgan barcha resurslar, narx-navolar, ishlab chiqarish normativlari hamda masala mohiyatiga ko'ra maqsad funksiyasini tuziladi. Agar muammo harajatlar bilan bog'liq bo'lsa bu harajatlarni ifodalovchi maqsad funksiyasining eng kichik qiymatini, agar maqsad funksiyasi ishlab chiqarishdan keladigan daromadni ifodalasa bu funktsiyani eng katta qiymatini topish talab qilinadi.

Aksariyat hollarda ishlab chiqarish resurslari va ishlab chiqarish kuchlari, ularning imkoniyatlarini ifodalovchi shartlar, hamda harajat yoki daromadni ifodalovchi maqsad funksiyalari chiziqli funksiyalar bilan ifodalanligi uchun bu turdagi masalalar chiziqli programmalash masalalari deb ataladi. Bu yerda programmalash so'zi dasturlash ma'nosida emas rejalashtirish ma'nosida ishlatiladi. Keyinchalik ko'riladi, masala yechimi ham optimal reja shaklida ifodalanadi.

Chiziqli programmalash usullari ishlab chiqarishning barcha sohalarida keng va samarali tatbiq qilib kelinayapti. Axborot texnologiyalarining rivojlanishi, kompyuterlarning imkoniyat va tezliklarining jadal o'sishi esa chiziqli programmalash masalalarining tatbiqini kengayishi hamda yanada mukammallashishiga yo'l ochayapti. Chiziqli programmalash masalalarining matematik ifodasi sodda bo'lsada uni yechishda funksiya maksimum, minimumlarini topishga mo'ljallangan an'anaviy usullarni tatbiq qilib bo'lmaydi. Bu yerda asosiy muammo – masala shartlariga bog'liq tarzda mumkin bo'lgan yechimlar sohasini (MBES) ni topishdan iborat bo'ladi. Optimal reja (OP) ham ana shu MBESdan izlanishi kerak.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni oydinlashtirish uchun oddiy bir masalani ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, kichik korxona meva sharbatlarini chiqaradigan bo'lsin. Korxonada 30kg olcha, 45kg olma, 12kg shakar bor. Korxona ikki xil turdagi meva sharbatlarini chiqaradi. 1 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,1kg olcha, 0,5kg olma, 0,1 kg shakar solinsin. 2 – tur meva sharbatining bir bankasiga 0,3kg olcha, 0,2kg olma, 0,1kg shakar solinsin. Agar 1 banka 1 – tur sharbat narxi 1000so'm, 2 – tur meva sharbat 1400so'm tursa, korxona har bir tur meva sharbatidan qanchadan ishlab chiqarganda korxonaning meva sharbatlarini sotishdan tushgan daromadi eng katta bo'ladi?

Masalaning matematik ifodasini tuzish uchun masala shartlariga ko'ra kelib chiqadigan munosabatlarni hosil qilishimiz kerak. Avvalo masala shartiga ko'ra topilishi kerak bo'lgan 1 – va 2 – tur meva sharbatlarining noma'lum sonini x_1, x_2 deb belgilaymiz. Bu holda 1 – , 2 – va 3 – tur xomashyo (olcha, olma, shakar) sarflarini hisoblab bu sarflar korxonadagi bor bo'lgan xomashyo zaxiralaridan ortmasligini talab qilamiz. Xususan olcha sarfi bo'yicha har bir banka 1 – tur meva sharbatiga 0,1kg olcha , 2 – tur meva sharbatiga esa 0,3kg olcha

solinadigan bo'lsa mos ravishda x_1 banka 1 – tur , x_2 banka 2 – tur meva sharbatlariga jami $x_1 \times 0,1 + x_2 \times 0,3$ kg olcha sarflanadi. Bu esa korxonada bor bo'lgan 30kg olchadan ortmasligi kerak. Demak olchalar bo'yicha qo'yiladigan shart

$$0,1 x_1 + 0,3 x_2 \leq 30$$

ko'rinishini oladi. Xuddi shunday mulohazalarga ko'ra olma va shakar sarfi bo'yicha korxona imkoniyatlaridan kelib chiqqan holda

$$0,5 x_1 + 0,2 x_2 \leq 45$$

$$0,1 x_1 + 0,1 x_2 \leq 12$$

ko'rinishdagi shartlarni hosil qilamiz. Meva sharbatlarini sotishdan tushadigan daromad esa keltirilgan narxlariga ko'ra jami

$$L(x_1, x_2) = 1000 x_1 + 1400 x_2$$

bo'lar ekan. Bu yerda $L(x_1, x_2)$ maqsad funksiyasi bo'lib, shunday ishlab chiqarish rejasini tanlash kerakki , bu reja avvalo resurslar bo'yicha shartlarga mos kelsin va maqsad funksiyasining eng katta qiymatini keltirib chiqarsin. Shunday qilib keltirilgan iqtisodiy masala quyidagicha ifodalanar ekan

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 30 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 45 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$L(x_1, x_2) = 1000 x_1 + 1400 x_2 \rightarrow \max \quad (1.2)$$

Keltirilgan (1.1) cheklashlar (shartlar)ga ko'ra (2) maqsad funksiyasining maksimumini toping. Bu masala **chiziqli programmalash masalasining** (ChPM) tipik namunasi sifatida qaralishi mumkin. Ko'rinib turibdiki, (1.1) shartlarda ham (1.2) maqsad funksiyasida ham x_1, x_2 noma'lumlar birinchi darajalari bilan qatnashadi. Bu hol ChPM atamasining kelib chiqishiga sabab bo'lgan. Avval qayd etib o'tganimizdek, (1.1) – (1.2) masalani yechishda an'anaviy ekstremumlarni topish usullarini tatbiq qilib bo'lmaydi. Haqiqatdan ham ekstremumlarning mavjud

bo'lish zaruriy sharti $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$

bu yerda bajarilmaydi. Buning asosiy sababi bu masalada an'anaviy optimizatsiya masalalaridan farqli funksiyaning lokal ekstremumlari emas global ekstremumi, ya'ni eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topish talab qilinadi. Bu qiymatlar, ya'ni $\sup L(x_1, x_2)$ va $\inf L(x_1, x_2)$ lar esa, agar mavjud bo'lsa faqat MBES chegaralarida bo'lar ekan. Buni keltirilgan masalaning geometrik tahlilidan

ko'rishimiz mumkin. Keyinchalik umumiy holda ham ChPMlar uchun MBES qabariq soha bo'lishi va uning uchun optimal yechim shu qabariq soha uchlaridan birortasida bo'lishini misollarda tahlil qilamiz.

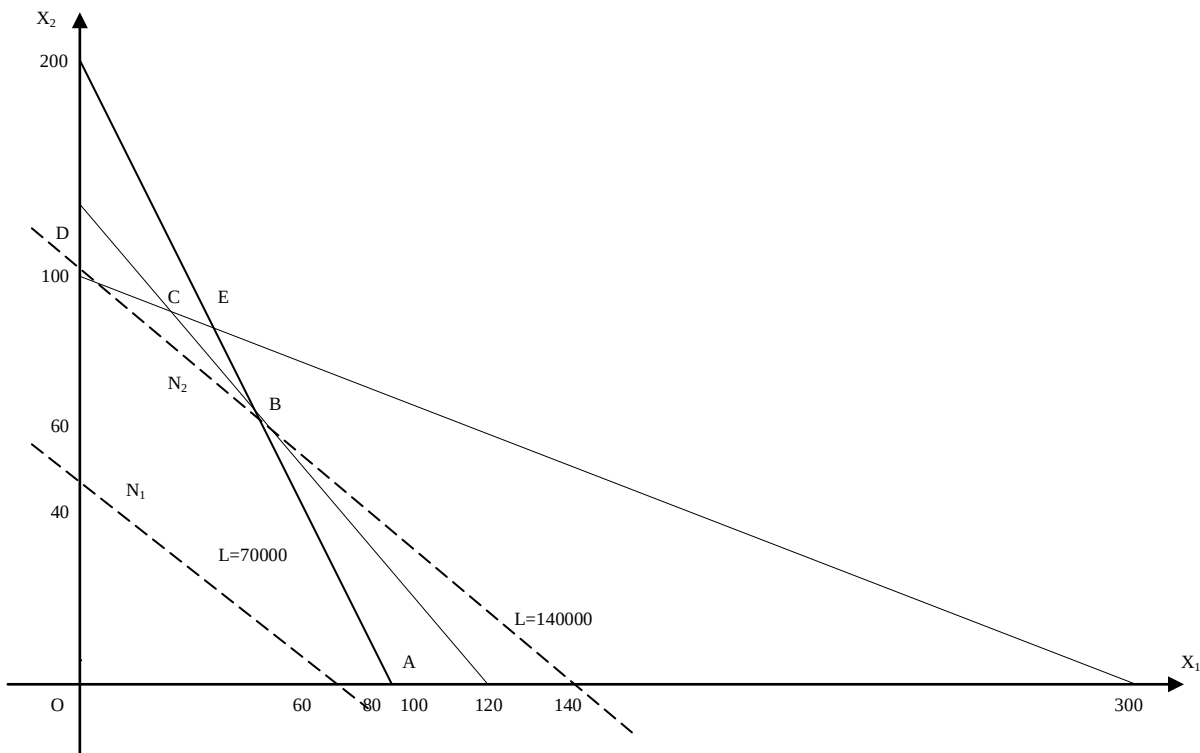
Chiziqli programmalash masalasining yechimini topishda geometrik usul.

Geometrik tahlilni (1.1) – (1.2) masala misolida olib boramiz. (1.1) shartlarning har biri OX_1X_2 koordinat tekisligini to'g'ri chiziq bo'ylab ikki bo'lish va ulardan shartga mos keladigan bittasini tanlashni ifodalaydi. Tahlilni soddalashtirish uchun (1.1) shartlarning hammasini mos ravishda 30;45;12ga bo'lib yozamiz.

$$\begin{cases} \frac{x_1}{300} + \frac{x_2}{100} \leq 1 \\ \frac{x_1}{90} + \frac{x_2}{225} \leq 1 \\ \frac{x_1}{120} + \frac{x_2}{120} \leq 1 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2 \longrightarrow \max$$

MBESni topish uchun hosil bo'lgan shartlardagi to'g'ri chiziqlarni chizamiz va ulardan pastki qismini olamiz. Natijada OABCD beshburchak shaklidagi soha hosil bo'ladi (1 – rasm).



1-rasm

Bu sohaning istalgan nuqtasining koordinatalari (1.1) – (1.2) masalaning shartlariga mos mumkin bo'lgan yechimlaridan birini ifodalaydi. Bu yerda biz

maqsad funksiyasining biror qiyamatiga mos keladigan rejalar (yechimlar)ga mos nuqtalar to'plamini ko'rib chiqamiz. Masalan $L(x_1, x_2) = 70000$ bo'ladigan nuqtalar to'plami $1000x_1 + 1400x_2 = 70000$ tenglama bilan ifodalanadi. Bu tenglamaning ikki tarafini 70000ga bo'lib yuboramiz va $\frac{x_1}{70} + \frac{x_2}{50} = 1$ ko'rinishdagi tenglamani

hosil qilamiz. Bu OX_1X_2 koordinat tekisligida $M_1(70;0)$ va $M_2(0;50)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, 1 – rasmda uning grafigi punktir chiziq bilan ifodalangan. $L(x_1, x_2)$ funksiyaning qiymati orttirilsa, masalan $L(x_1, x_2) = 140000$ deb olinsa unga mos grafik avvalgisiga parallel bo'lib yuqoriroqdan, ya'ni $M_3(140;0)$ va $M_4(0;100)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlarning MBESga taaluqli har bir nuqtasining koordinatalari (1.1) – (1.2) masalaning yechimlarini ifodalaydi. Masalan, N_1 nuqtada $L(N_1) = 70000$, N_2 nuqtada esa $L(N_2) = 140000$ bo'ladi. Maqsad funksiyasining $L(x_1, x_2) = \text{const}$ tartibda olingan grafiklari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lar ekan. Maqsad funksiyasining qiymati ortgan sari bu to'g'ri chiziq yuqorilab boraveradi. Bora – bora MBESdan chiqib ketishi mumkin. Xususan berilgan misolda maqsad funksiyasining grafigi MBESdan oxiri C nuqtadan o'tgan holda chiqib ketadi. Ana shu holat, ya'ni C nuqta koordinatalari (1.1) – (1.2) masala yechimini, optimal rejani berar ekan deyishga asos bo'ladi. (1.1) shartlarga mos tengsizliklarni juft-jufti bilan tenglik sifatida olib sistema qilib yechib C, B nuqtalar koordinatalarini topish mumkin. Masala shartlari va 1 – rasmdan kelib chiqqan holda $A(100;0)$, $B(70;50)$, $C(30;90)$, $D(0;100)$ ekanligini ko'ramiz. Chizmada ko'rilganidek MBES qabariq sohadan iborat bo'lib, bu holat barcha ChPMLar uchun o'rinli bo'lgan holatdir. Maqsad funksiyasi grafigi ham to'g'ri chiziq bo'lganligi uchun uni oshirish parallel ko'chirishdan iborat bo'ladi va maqsad funksiyasining maksimal qiymati MBES uchlaridan birida ya'ni maqsad funksiyasining grafigi MBESdan chiqib ketish arafasida o'tgan nuqtasida bo'lar ekan. Bu esa optimal reja, ya'ni ChPMLar yechimini topish uchun umumiy qoida tavsiya qilishga imkoniyat beradi.

ChPMLarni yechishda avvalo MBESni ifodalovchi qabariq soha topiladi va uning uchlarida maqsad funksiyasini hisoblanadi. Bu qiymatlardan eng kattasiga mos keluvchi nuqta koordinatalari izlanayotgan yechim – optimal rejani beradi. Bu qoidani yuqorida ko'rilgan masalaga tatbiq qilamiz. Maqsad funksiyasi (MF) $L(x_1, x_2) = 1000x_1 + 1400x_2$ bo'lib MBES uchlari $A(100;0)$ $B(70;50)$, $C(30;90)$, $D(0;100)$ dagi qiymatlarini L_A, L_B, L_C, L_D deb belgilasak $\varepsilon_A = 100000$, $\varepsilon_B = 140000$, $\varepsilon_C = 156000$, $\varepsilon_D = 140000$.

Bu qiymatlarni taqqoslash natijasida optimal reja $C(30;90)$ nuqtada ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu natija 1 – rasmdagi chizmaga ham mos keladi, ya'ni MF grafigini parallel ko'chirishda bu grafik MBESdan C nuqta orqali chiqib ketishi ko'rinib turibdi. Bu keltirilgan grafik usul ikki noma'lumli masalalarda juda qulay bo'lish bilan birga ko'plab umumiy qoida va tavsiyalar ham ishlab chiqishga imkoniyat beradi.

Optimal rejaning iqtisodiy tahlili

Yuqorida keltirilgan (1.1) – (1.2) masalaning topilgan yechimini tahlil qilamiz. Optimal reja $C(30;90)$ nuqtada bo'lib, bu nuqtada $x_1 = 30$; $x_2 = 90$ va $\xi_C = 156000$ ekanligini ko'rdik. Chizmadan (1 – rasm) ko'rinadiki, C nuqtada 1,3-homashyo to'liq sarflanadi, 2-homashyo esa ortib qolar ekan, chunki 2-homashyoga mos to'g'ri chiziq C nuqtadan o'tmaydi. Optimal reja qiymatlarini homashyo sarfi funksiyalariga qo'yib ham bunga ishonch hosil qilamiz.

$$f_1(x_1x_2) = (0,1x_1 + 0,3x_2) \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 90 \end{cases} = 0,1 \times 30 + 0,3 \times 90 = 30$$

$$f_2(x_1x_2) = (0,5x_1 + 0,2x_2) \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 90 \end{cases} = 0,5 \times 30 + 0,2 \times 90 = 33 < 45$$

$$f_3(x_1x_2) = (0,1x_1 + 0,1x_2) \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 90 \end{cases} = 0,1 \times 30 + 0,1 \times 90 = 12$$

Bu holatdan kelib chiqib quyidagi mulohaza va tavsiyalarni keltirish mumkin. Ikkinchi tur homashyo 45 birlik bo'lib, undan 33 birlik ishlatiladi. Demak, 12 birlik 2 – tur homashyo ortib qoladi. Bu ortiqchasini homashyo sifatida sotib yuborish mumkin. Ikkinchi yo'li esa chizmadan ko'rinayapti, ishlab chiqarish rejasini oshirishga to'sqinlik qilayotgan kamyob (taxchil) homashyoni ko'paytirish kerak. Bunda barcha homashyolarni to'la jalb qilish, hamda daromadni oshirish imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bizning masalada, chizmadan ko'rinadiki (1 – rasm) , 3 – tur homashyo, ya'ni shakar rejani oshirishga imkoniyat bermayapti. Agar shakarga mos to'g'ri chiziq grafigini paralell ko'chirib E nuqtagacha olib borilsa barcha homashyolar to'la ishlatilishiga erishiladi. Grafikni paralell ko'chirish esa shakar zaxirasini ko'paytirish hisobiga erishiladi. Hususan bizning masalada $f_3(x_1x_2) = (0,1x_1 + 0,1x_2) = C_3$ deb, grafik E nuqtadan o'tishi shartidan C_3 qiymat tanlanadi. E nuqta 1-,2- to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqtasi bo'lib, uning koordinatalari

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 = 30 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 = 45 \end{cases} \text{ sistemadan topiladi.}$$

Bu sistemadan $x_1 = \frac{75}{1,3}$; $x_2 = \frac{105}{1,3}$ ekanligini topamiz. 3-homashyo chizig'i bu

nuqtadan o'tishi uchun $f_3(x_1x_2) = 0,1 \times \left(\frac{75}{1,3} + \frac{105}{1,3} \right) = \frac{180}{13} = 13,8$ bo'lishi kerak ekan.

Demak, shakar zaxirasini 13,8 birlikka yetkazsak, ya'ni 1,8 birlikka oshirsak optimal planni $E\left(\frac{75}{1,3}; \frac{105}{1,3}\right)$ nuqtaga ko'chirish mumkin. Bunda maqsad funksiyasi

$\xi_E = 1000 \times \frac{75}{1,3} + 1400 \times \frac{105}{1,3} = \frac{75000 + 147000}{1,3} = \frac{222000}{1,3} \approx 170770$ qiymatga erishadi.

Bunda daromad C nuqtadalgiga qaraganda 14770 pul birligiga ortadi. Shunday qilib qo'yilgan iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish, matematik model

yordamida masala yechimini topish va topilgan yechimning iqtisodiy tahlilini to'liq o'tkazish mumkin ekan.

Geometrik usulning samarali ekanligini namoyish qilish uchun uch noma'lumli ChPM na'munasini ko'ramiz. Maqsad masala mohiyati va uni yechimini topish jarayonini aks ettirish bo'lgani uchun masalaning birato'la matematik ifodasidan boshlaymiz. Vaqtincha iqtisodiy mulohazalardan holi bo'lgan holda quyidagi matematik masalani ko'ramiz.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \end{cases} \quad (1.3) \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

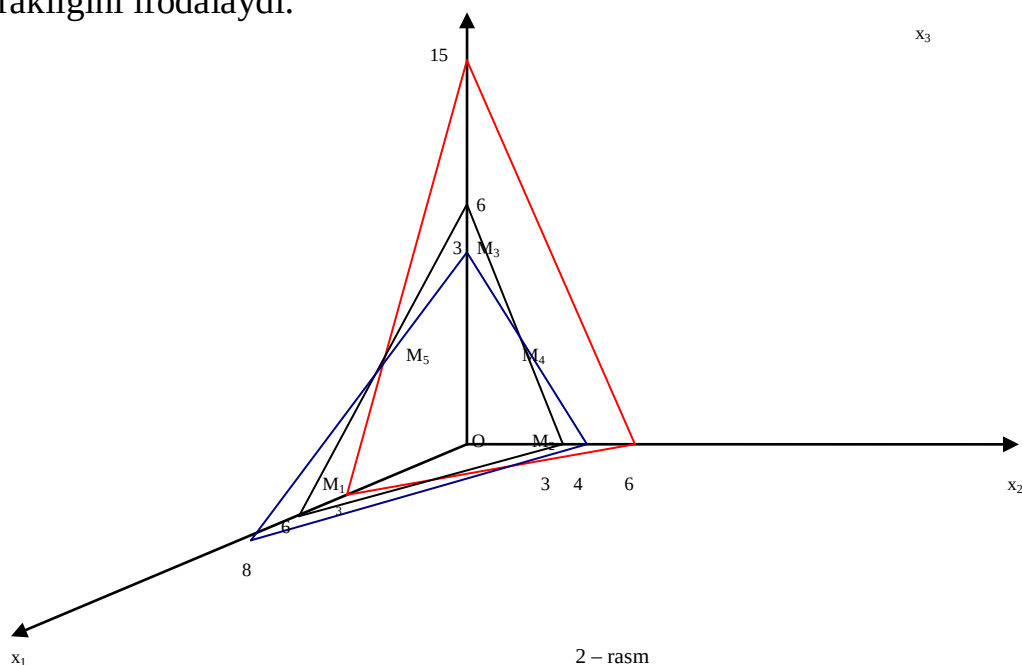
$$L(x_1, x_2, x_3) = 25x_1 + 30x_2 + 20x_3 \rightarrow \max \quad (1.4)$$

Bu yerda (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar orasidan shundayini topishni talab qilinadiki, bu nuqta koordinatalari (1.4) maqsad funksiyasining eng katta qiymatini ta'minlasin. Dastlab (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami, ya'ni ChPM uchun MBESni topish kerak bo'ladi. Bu yerda ikki o'lchovli masaladagiga o'xshash geometrik usuldan foydalanamiz. Avvalo (1.3) shartlarni kanonik ko'rinishiga keltiramiz

$$\begin{cases} \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} \leq 1 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{15} \leq 1 \\ \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

Bu shartlarning har biri tenglik sifatida olinganda tekislik kanonik tenglamasi bo'lib, shartga ko'ra shu tekislikdan pastki qismini olish kerakligini ifodalaydi. $x_i \geq 0$ shartlar esa fazoviy koordinat sistemasiga nisbatan birinchi oktantni olish kerakligini ifodalaydi.



2 – rasm

Yuqorida keltirilgan shartlar va mulohazalarga ko'ra (1.3) – (1.4) masala uchun MBESini 2 – rasmda sxematik ifodalangan. Bir-biridan farqlash va MBESni ajratish qulay bo'lishi uchun har bir tekislik uchun boshqa – boshqa rang olingan. Chizmada 1 – tekislik havo rang , 2 – tekislik qizil, 3 – tekislik qora rangda aks ettirilgan. Birinchi oktant tepasidan qaraganda MBES ostki chegarasi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi. Chizmadan ko'rinadiki M_1 2 – tekislikning OX_1 o'qi bilan , M_2 3 – tekislikning OX_2 o'qi bilan, M_3 esa 1 – tekislikning OX_3 o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi. Shunga ko'ra koordinatalar orqali $M_1(3;0;0)$, $M_2(0;3;0)$, $M_3(0;0;3)$ ekanligini ko'ramiz. M_4 nuqta esa OX_2 X_3 koordinata tekisligida 1-, 3-tekisliklar kesishgan nuqtasi ekanligini ko'ramiz. Uning koordinatalarini topish uchun 1-,3-tekislik tenglamalarida $x_1 = 0$ deb sistema hosil qilamiz. Undan esa

$$\begin{cases} 6x_2 + 8x_3 = 24 \\ 8x_2 + 4x_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_2 + 8x_3 = 24 \\ 16x_2 + 8x_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow 10x_2 = 24$$

$x_2 = 2,4$; $x_3 = 1,2$ topiladi. Demak $M_4(0;2,4;1,2)$

Xuddi shuningdek M_5 nuqta uchun $x_2=0$ deb 1-,2-tekisliklar kesishgan nuqtasini, M_6 uchun esa $x_3=0$ deb 2-,3-tekisliklar kesishgan nuqtasini topiladi. Bunda $M_5(2,6 ; 0 ; 2,03)$ va $M_6(2 ; 2 ; 0)$ ekanligi topiladi. MBES tepasida esa uchchala tekislikning kesishgan nuqtasi sifatida topiladigan M_7 nuqta bo'ladi. (1.3) tengsizliklari tenglik qilib sistema sifatida yechilsa $M_7(2,08 ; 1,36 ; 1,2)$ ekanligi topiladi. Natijada MBES qavariq soha $OM_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$ ning barcha uchlari topiladi. Maqsad funksiyasi (MF) qiymatining o'zgarmas qiymatida $25x_1 + 30x_2 + 20x_3 = C = \text{const}$ tekislik tenglamasi bo'lib, unga mos nuqtalar shu tekislikda yotadi. Bu yerda ham MF tekislikni parallel ko'chirish $C=\text{const}$ qiymatining ortishi yoki kamayishi bilan bog'liq bo'ladi. Shuning uchun optimal reja uning MBES uchlaridan eng katta qiymatga erishadiganiga mos keladi. Agar $L(M_i) = L_i$ belgilash kiritsak, bevosita hisoblashlardan $L_1 = 75; L_2 = 90; L_3 = 60; L_4 = 96; L_5 = 105,6; L_6 = 110; L_7 = 116,8$ ekanligini ko'ramiz. Demak optimal reja M_7 nuqtada bo'lib , bunda $x_1 = 2,08$; $x_2 = 1,36$; $x_3 = 1,2$ bo'lar ekan, maqsad funksiyasi esa bu nuqtada o'zining eng katta qiymatiga erishar ekan.

1.CHPM geometrik usulda yechilsin.

Misollar

$$1.1 \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 - 4x_2 \geq 12 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \\ L = 300x_1 + 200x_2 \rightarrow \max$$

$$1.2 \begin{cases} 10x_1 - 5x_2 \geq 20 \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 18 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases} \\ L = 300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$$

$$1.3 \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 8x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 300x_1 + 200x_2 \rightarrow \max$$

$$1.4 \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 300x_1 + 500x_2 \rightarrow \max$$

$$1.5 \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 800x_1 + 400x_2 \rightarrow \max$$

$$1.6 \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 8 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 1000x_1 + 1000x_2 \rightarrow \max$$

2. Berilgan CHPM uchun geometrik usulda optimal plan topilsin.

$$2.1 \begin{cases} L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.2 \begin{cases} L(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.3 \begin{cases} L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.4 \begin{cases} L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2.5 \begin{cases} L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

§ 2 . Chiziqli programmalash masalasining matematik asoslari

Umumiy holda, biror ishlab chiqarish korxonasida **n** xil mahsulot ishlab chiqarilayotgan bo'lib, buning uchun **m** xil xomashyo (ishlab chiqarish resurslari)dan foydalanilayotgan bo'lsin. Har bir ishlab chiqarilayotgan **j** –

mahsulot uchun i – xomashyodan a_{ij} birlik ishlatilayotgan bo'lsin. Korxonada i – xomashyodan b_i birlik bor bo'lsin. Agar j – mahsulotning bir birligining narxi C_j pul birligiga teng bo'lsa korxona har bir mahsulotdan necha donadan (birlikdan) ishlab chiqarganda ularni sotishdan keladigan daromad maksimal bo'ladi? Iqtisodiy nuqtai nazardan masala ana shunday ifodalanadi. Agar j – mahsulotning ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan miqdorini X_j deb belgilasak va keltirilgan shartlarning barchasini matematik tarzda ifodalasak u quyidagi ko'rinishini oladi.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n C_j X_j \rightarrow \max \quad (2.2)$$

Chiziqli programmalash masalasi (ChPM)ning matematik ifodasi (2.1) – (2.2) bo'lib, unga ko'ra n o'lchovli fazoning (2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtalari orasidan shundayini topish kerakki, (2.2) maqsad funksiyasining maksimal (eng katta) qiymatini ta'minlasin. Avvalo masalaning (2.1) shartlari va ularni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami haqida to'xtalamiz. Bu shartlarning geometrik ma'nosini $n=2$ va $n=3$ bo'lgan hollarda batafsil ko'rib chiqildi (§1). Umumiy holda (2.1) shartlarning har biri n - o'lchovli fazodagi gipertekislik tenglamasi yordamida fazoni ikkiga bo'lish va undan bir tarafini olishni aks ettiradi. $x_j \geq 0$ shartlar ham n - o'lchovli fazoda $x_j = 0$ tenglamaga mos gipertekislikdan bir tarafini olishni ifodalaydi. n - o'lchovli fazoda ham qabariq soha ta'rifi va xususiyati odatdagi 2 va 3 o'lchovli real fazolardagidek bo'ladi. Chiziqli fazo amallari n o'lchovli fazo elementlari $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar uchun quyidagicha aniqlangan bo'lsin

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) + Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = Z(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (2.3)$$

$$\alpha \times X(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

U holda n o'lchovli fazodagi biror D sohaning ixtiyoriy ikkita $X, Y \in D$ elementlari uchun va ixtiyoriy $\alpha \in (0;1)$ sonlar uchun $\alpha \times X + (1-\alpha) Y \in D$ bo'lsa D soha qabariq soha deyiladi. Bu shart real fazolardagi qabariq soha ta'rifi (agar sohaning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma ham shu sohaga tegishli bo'lsa soha qabariq soha deyiladi)ga to'la mos keladi. ChPM yechimini izlash odatda mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (MBES)ni topishdan boshlanadi. MBESdan esa (2.2) maqsad funksiyasining maksimumi izlanadi. Avvalo ChPM uchun MBES doimo qabariq soha bo'lishligini ta'kidlab o'tishimiz kerak. Haqiqatdan, agar (2.1) shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini D deb belgilasak va ixtiyoriy $X, Y \in D$ elementlarini olsak hamda $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$ elementini olsak $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uning uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha x_j + (1-\alpha)y_j) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + (1-\alpha) \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq \alpha \times b_i + (1-\alpha)b_i = b_i$$

kelib chiqadi, ya'ni $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uchun ham $\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \leq b_j \quad i = 1, 2, \dots, n$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, demak $Z \in D$ bo'ladi. Aksariyat hollarda n o'lchovli ChPMning MBESi n o'lchovli qabariq soha bo'ladi. Bu holda ham masala yechimi, ya'ni optimal rejani shu qabariq sohaning uchlaridan izlanishi kerak. (2.1) shartlarga ko'ra aniqlanadigan D sohaning uchlarini topish uchun $m+n$ ta (2.1) shartlardan n ta chiziqli erklisini tanlaymiz va ularni tenglik sifatida ifodalasak n ta noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemaning yechimini topib uni (2.1) shartlarning qolganlariga muvofiqligi tekshiriladi. Agar shunday bo'lsa, bu yechimga mos $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta MBESning tayanch nuqtasi, uning koordinatalari esa ChPMning tayanch yechimi deyiladi.

Shunday usulda hosil qilish mumkin bo'lgan sistemalar soni umumiy holda C_{n+m}^n formula bo'yicha hisoblanadi. Bu sistemalardan ChPMning tayanch yechimlari topiladi. Tayanch yechimlar orasidan maqsad funksiyasining eng katta qiymatini beruvchi optimal reja ham topiladi. Faqat n, m ortgan sari tayanch yechimlar soni ham ortib boradi. Masalan $n=5, m=4$ bo'lgan, umuman olganda oddiygina holda ham tayanch yechimlar soni $C_9^5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ bo'lishi mumkin ekan.

Shuncha yechimning har birini topishda 5 noma'lumli sistemalarni ishlash kerak bo'ladi. Tabiiy savol tug'iladi, optimal rejani topish uchun ana shu 126 nuqtalarning barchasini topish, hamda shu nuqtalarda maqsad funksiyasini hisoblash shartmikan? Bu ishni osonlashtirish

ya'ni optimal rejaga yetish yo'lini qisqartirish imkoniyati yo'qmikan? Bu sohadagi izlanishlar o'z samarasini bergan va rejani bosqichma – bosqich yaxshilash degan usullar yaratilgan. Usulning g'oyasi asosan quyidagi mulohazaga asoslangan. Avvalo ixtiyoriy birorta tayanch yechim topamiz. Bu yechim MBES deb ataganimiz qabariq ko'pyoqlining birorta uchiga mos keladi. Ikki o'lchovli holda bu qabariq ko'pburchak, uch o'lchovli holda qabariq ko'pyoqli (prizma, piramida ...). Bu uchidan bir qancha qirralar o'tgan bo'ladi, go'yoki chorrahada uchrashadigan yo'llardek. Har bir qirra berilgan uchini boshqa bir qo'shni uch bilan tutashtiradi. Shu yo'llardan qaysi birini tanlagan ma'qul, qay biri maqsadga tezroq olib boradi? Go'yo ertak qahramonlari oldida uchraydigan yo'llarda yozib qo'yiladigan yo'l ta'rifiga o'xshash bu yo'llar hislatlarini aniqlash mezonini yo'qmikan? Umuman maqsadga eltuvchi yo'lning o'zi bormikan? Ertaksifat bu mulohazalarning barchasiga javob beruvchi usul dastlab 1947 yil Dansig tomonidan kashf qilingan. Bu usul keyinchalik ilmiy va o'quv adabiyotlarida **simpleks usul** nomi bilan muomalaga kirib ketgan. Usulning matematik hamda amaliy tafsilotlariga o'tamiz.

3. Berilgan CHPM uchun ko'rsatilgan bazisga mos tayanch yechim topilsin. Tayanch yechimlar ko'pi bilan nechta bo'lishi mumkin.

$$\begin{aligned}
 3.1 \quad & L(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$A_1 A_2$ bazisda

$$3.2 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_3$ bazisda

$$3.3 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_2 A_3$ bazisda

$$3.4 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_1 A_3$ bazisda

$$3.5 \quad L(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_2 A_3$ bazisda

§ 3. Rejani bosqichma – bosqich yaxshilash usuli.

Biz bu yerda asosan usulning amaliy taraflari, hamda hisoblash algoritmlariga ko'proq to'xtalamiz. Usul asosan ikkita bosqichni o'z ichiga oladi. To'g'rirog'i har bosqichda ikkita savol hal qilinishi kerak bo'ladi. Avvalo, tanlangan tayanch yechim optimal reja bo'ladimi? Optimal bo'lsa, tabiiy, muammo hal bo'lgan, yechim topilgan deb hisob qilinadi. Optimal bo'lmasa, navbatdagi, bu yechimga qaraganda yaxshiroq yechimni qanday topish mumkin?

ChPMni umumiy ko'rinishini olamiz

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (3.2)$$

(3.1) shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar orasidan (3.2) maqsad funksiyasining eng katta qiymatini beruvchi nuqta koordinatalari, ya'ni optimal rejani topish kerak.

Simpleks usul kanonik ko'rinishdagi ChPMlar uchun mo'ljallangan. Bunda ChPM barcha shartlari tenglik ko'rinishida berilgan bo'lishi kerak. Kanonik ko'rinishdagi ChPM matematik ifodasi

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (3.4)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ham $x_j \geq 0$ o'z o'rnida qoladi. Alohida zarurat bo'lmasa bu shartlarni oshkora ifodalab o'tirilmaydi. Umumiy ko'rinishdagi (3.1) – (3.2) ChPMni kanonik (3.3) – (3.4) ko'rinishiga keltirishimiz mumkin. Buning uchun (3.1) shartlarning har birining chap tarafiga (u kichik bo'lganligi uchun) yangi x_{n+i} o'zgaruvchini qo'shish yordamida tenglikka aylantirish mumkin. Bunda x_{n+i} o'zgaruvchilar ham noma'lum bo'ladi. Natijada (3.1) – (3.2) masala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \rightarrow \max \quad (3.6)$$

ko'rinishini oladi, bu yerda noma'lumlar $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ $n+m$ ta bo'ladi. Maqsad funksiyasining ko'rinishini o'zgartirmaslik uchun (3.6) ifoda $C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = C_{n+m} = 0$ deb hisoblangan. Bundan ko'rinadiki, yangi kiritilgan $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar qanday bo'lishidan qat'iy nazar maqsad funksiyasining qiymatlariga mutlaqo ta'sir qilmaydi. Natijada hosil bo'lgan (3.5) – (3.6) masala (3.3) – (3.4) masala bilan aynan bir xil ko'rinishini olar ekan. Shunday qilib umumiy ko'rinishdagi ChPMni kanonik ko'rinishga keltirish mumkinligi asoslandi. Demak, kanonik ko'rinishdagi ChPMlar uchun yaratilgan usullarni umumiy ko'rinishdagi ChPMlarga ham tatbiq qilish mumkin ekan. Simpleks usul tafsilotlariga o'tamiz. Buning uchun (3.3) shartlar matritsasi $A = (a_{ij})$ $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$ ustunlarini m o'lchovli chiziqli fazo vektorlari deb, faqat uning koordinatalari yordamida tuzilgan vektorlarni $\bar{A}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$

ko'rinishida ifodalaymiz. Shunga o'xshash, narxlarga mos C_j qiymatlar yordamida $\bar{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektorni satr matritsa sifatida ifodalaymiz. Zaxiralarga mos b_j qiymatlar yordamida $\bar{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ ustun matritsani tuzsak (3.3) – (3.4) masalani kompakt (ixcham) ko'rinishda, matritsalar orqali

$$A \times \bar{X} = \bar{B} \quad (3.7)$$

$$\bar{C} \times \bar{X} \rightarrow \max \quad (3.8)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu yerda $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ noma'lumlarga mos ustun matritsa.

$\bar{A}_j (j=1,2, \dots, n)$ vektorlar $\mathbf{m}$ o'lchovli chiziqli fazo vektorlari bo'lib, ularning soni $\mathbf{n}$ aksariyat hollarda $\mathbf{m}$ dan ancha katta bo'ladi. Shuning uchun (3.7) sistema yechimlari cheksiz ko'p bo'ladi. Ular orasida (3.8) shartni qanoatlantiradiganini topishimiz kerak.

Buning uchun $\bar{A}_j$ vektorlar orasidan $\bar{X}$ musbat koordinatalariga mos keluvchi $\mathbf{m}$ ta chiziqli erklisini ajratishimiz kerak. Fazo $\mathbf{m}$ o'lchovli bo'lganligi uchun $\bar{A}_j$ lar orasida chiziqli erklisi $\mathbf{m}$ tadan ortiq bo'lmaydi. Bu vektorlar bazis vektorlar deb belgilanadi. Masala shartlari shu bazisga moslanadi. Bazis vektorlardan qolgan barcha $\bar{A}_k$ vektorlarga mos X_k lar nol deb olinadi. Shundan keyin berilgan bazisga mos tayanch yechim topiladi va u optimallikka tekshiriladi.

Biz bu yerda usulning faqat amaliy taraflariga to'xtalamiz. Usulning nazariy asoslariga qiziqqanlar maxsus adabiyotlarga murojaat qilishi mumkin. Usul mohiyati va tartibini amaliy misolni ishlash jarayonida izohlab boramiz. Quyidagi ChPM berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$L(x_1; x_2; x_3) = 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 \rightarrow \max$$

Bu masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz

$$\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 56 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 10x_1 + 12x_2 + 25x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 \rightarrow \max$$

Berilgan masala shartlaridan $\bar{A}_1 = (7;2;1)^T$, $\bar{A}_2 = (8;1;0)$, $\bar{A}_3 = (5;1;1)^T$, $\bar{A}_4 = (1;0;0)^T$, $A_5 = (1;0;0)^T$, $A_6 = (0;0;1)^T$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda yangi kiritilgan o'zgaruvchilarga mos $\bar{A}_4, \bar{A}_5, \bar{A}_6$ vektorlar bazis ekanligi ko'rinib turibdi, haqiqatdan ham $\bar{A}_1 = 7 \times \bar{A}_4 + 2 \times \bar{A}_5 + 1 \times \bar{A}_6$

ekanligini ko'rishimiz mumkin. Qolgan vektorlar, shuningdek cheklash vektori $\bar{B} = (56;10;6)^T$ ni ham ular orqali ifodalash mumkin. Masala shartlariga ko'ra shu bazisga mos tayanch yechimni topish uchun bazisga kirmagan x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarni nol deb olishimiz kerak. U holda $x_4 = 56, x_5 = 10; x_6 = 6$ ekanligi kelib chiqadi. Keltririlgan shartlarni ifodalovchi barcha sonlarni quyidagi jadval ko'rinishda ifodalaymiz.

i	C_j C_i			10	12	25	0	0	0	
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
1	0	A_4	56	7	8	5	1	0	0	11,2
2	0	A_5	10	2	1	1	0	1	0	10
3	0	A_6	6	1	0	1	0	0	1	6
	Δ_j			-10	-12	-25	0	0	0	

↑

1 – jadval

1 – jadvalda A_0 ustun shartlardagi o'ng taraf qiymatlari (resurslar miqdori) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ustunlar shartlardagi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ larning koeffitsiyentlaridan tuzilgan. Shartlarda koeffitsiyentlari birlik ustunni ifodalayotgan vektorlar bazis vektorlar deb belgilanib, ularning 1 elementlari joylashgan qator boshida bazis deb atalgan ustunda shu vektor belgisi A_k deb qo'yiladi. C_{ki} deb atalgan ustunga esa bazisga kirgan shu qatordagi A_k vektor tepasidagi narx qiymati C_k qo'yiladi. i -ustunda tenglama nomeri belgilanadi. Shu bilan masala shartlariga kiruvchi barcha sonlar jadvalda o'z o'rnini egallaydi. Shundan keyin jadvalning so'nggi qator va so'nggi ustunini to'lg'azishga o'tiladi. Dastlab

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \times C_{ki} - C_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

formula bo'yicha Δ_j lar hisoblanadi. Agar barcha Δ_j lar manfiy bo'lmasa jadvalga mos tayanch yechim optimal yechim deyiladi va hisob to'xtatiladi. Agar Δ_j lar orasida manfiylari bo'lsa jadvalga mos tayanch yechim optimal emas, uni yaxshilash kerak degan xulosa qilinadi. Buning uchun manfiy Δ_j lar orasidan eng kichigi joylashgan ustunni hal qiluvchi ustun deb belgilanadi. Agar bu ustundagi A_k elementlari $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})^T$ lar orasida musbatlari bo'lmasa masala yechimi yo'q degan xulosaga kelamiz. Agar $a_{ik} \quad i = 1, 2, \dots, m$ lar orasida musbatlari bo'lsa

- * Ular uchun $\Theta_i = a_{io} / a_{ik}$ qiymatlar hisoblanadi.

- * ulardan kichigi Θ_i tanlanadi va bu Θ_i jolashgan qator hal qiluvchi qator deb e'lon qilinadi, hamda hal qiluvchi ustun va hal qiluvchi qatorlar kesishgan joydagi a_{ek} elementni esa hal qiluvchi element deb belgilanadi.

Bu jarayonni biz tahlil qilayotgan misol (1 – jadval) uchun quyidagi tartibda bajariladi. Avvalo (3.9) formulalar bo'yicha Δ_j larni hisoblaymiz.

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^3 a_{i1} \times C_{Ki} - C_1 = 7 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 10 = -10$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^3 a_{i2} \times C_{Ki} - C_2 = 8 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 0 - 12 = -12$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^3 a_{i3} \times C_{Ki} - C_3 = 5 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 25 = -25$$

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^3 a_{i4} \times C_{Ki} - C_4 = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = \sum_{i=1}^3 a_{i5} \times C_{Ki} - C_5 = 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_6 = \sum_{i=1}^3 a_{i6} \times C_{Ki} - C_6 = 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 0 - 0 = 0$$

Bu qiymatlar jadvalga kiritilgan Δ_j larni taqqoslash yordamida eng kichigi $\Delta_3 = -25$ ga mos kelgan 3 – ustun **hal qiluvchi ustun** deb belgilanadi. Bu ustun elementlari yordamida $\Theta_i = a_{i0} / a_{i3}$ qiymatlar hisoblanadi. $\Theta_1 = 56/5 = 11,2$; $\Theta_2 = 10/1 = 10$; $\Theta_3 = 6/1 = 6$ ular ham jadvalga kiritilgan. Θ_i lar orasida eng kichigi Θ_3 ga mos kelgan 3 – qator **hal qiluvchi qator** deb belgilanadi. Jadvalda bu ustun va qator strelka bilan belgilangan. Ular kesishgan joydagi hal qiluvchi a_{33} element ham qalin chegara bilan ajratilgan Agar hal qiluvchi element 1ga teng bo'lmasa hal qiluvchi qator barcha elementlarini hal qiluvchi elementga bo'lib yuborib bunga erishish mumkin. 3 – qator elementlarini 5ga ko'paytirib, 1 – qator elementlaridan ayiramiz, so'ngra 3 – qator elementlarini 1ga ko'paytirib, 2 – qator elementlaridan ayiramiz. Hosil bo'lgan qiymatlari 2 – jadval tarzida ifodalangan.

i	C_j C_{ik}			10	12	25	0	0	0	
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
1	0	A_4	26	2	8	0	1	0	-5	3,25
2	0	A_5	4	1	1	0	0	1	-1	4
3	25	A_3	6	1	0	1	0	0	1	
	Δ_j			15	-12	0	0	0	25	

2 – jadval

2 – jadval uchun ham (3.9) formulalar yordamida Δ_j lar hisoblanadi. Bu qiymatlar hisoblanib jadvalga kiritilgan. Δ_j lar orasida manfiysi bo'lganligi uchun bu

jadvalga mos tayanch yechim ham optimal yechim emas. Shuning uchun manfiy Δ_2 ga mos 2 – ustun hal qiluvchi ustun deb belgilandi. Hal qiluvchi ustunning musbat elementlari uchun $\Theta_j = 26/8 = 13/4 = 3,25$; $\Theta_2 = 4/1 = 4$ lar hisoblanadi. Eslatma: Manfiy va nol bo'lgan elementlar uchun Θ_i hisoblanmaydi. Agar a_{ik} lar orasida musbatlari bo'lmasa, ChPM yechimi yo'q deb hisoblash to'xtatiladi. Bizning misolda Θ_i lardan kichigi $\Theta_1 = 3,25$ ga mos qator hal qiluvchi qator deb belgilandi. Simpleks usul algoritmiga ko'ra 3 – jadvalni to'lg'azamiz.

i	C_j C_{ik}			10	12	25	0	0	0	
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	Θ_i
1	12	A_2	3,25	0,25	1	0	0,125	0	-0,625	
2	0	A_5	0,75	0,75	0	0	-0,125	1	-0,375	
3	25	A_3	6	1	0	1	0	0	1	
		Δ_j		18	0	0	1,5	0	17,5	

3 – jadval

3 – jadvalda barcha $\Delta_j \geq 0$ bo'lganligi uchun bu jadvalga mos tayanch yechimda bazis o'zgaruvchilar $x_2 = 3,25$; $x_3 = 6$; $x_5 = 0,75$ deb olinadi. Bazisga kirmagan o'zgaruvchilar esa nolga teng deb olinadi, ya'ni $x_1 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0$. Bu yechim ChPM uchun optimal planni beradi. Yordamchi noma'lumlardan holi bo'lgan holda berilgan ChPM uchun optimal plan $x_1 = 0$; $x_2 = 3,25$; $x_3 = 6$ ko'rinishda belgilanadi. Bunda maqsad funksiyasi o'zining maksimal qiymatiga erishar ekan va $L = 10 \times 0 + 12 \times 3,25 + 25 \times 6 = 189$ ga teng bo'ladi. Keltirilgan misol planni bosqichma – bosqich yaxshilash, ya'ni simpleks usulning barcha amallari va ularning bajarilish tartibini o'zida aks ettirgan. Shuning bilan birga masalani ishlash tartibiga e'tibor berilsa, geometrik usuldan farqli noma'lumlar soni ortgan, ya'ni masala murakkablashgan holda ham bu usul shundayligicha tatbiq qilinaveradi. Tabiiy bunda simpleks jadval ustun va qatorlar soni ortadi, shunga ko'ra hisoblashlar hajmi ham ortadi. Optimal planga yetib borish uchun bajariladigan qadamlar soni ham ortishi mumkin.

Simpleks usulning umumiy holdagi algoritmi (ixtiyoriy n , m lar uchun) dasturlangan va zamonaviy kompyuterlar matematik ta'minotida bu dasturlar mavjud. Ulardan foydalanish uchun iste'molchi, ya'ni tadqiqotchi, o'zi yechmoqchi bo'lgan ChPM ga taalluqli barcha qiymatlarni ko'rsatilgan tartibda kompyuter xotirasiga kiritib, shu dasturlarga murojaat qilishi yetarli.

Biz bu yerda e'tiborni qaratmoqchi bo'lgan yana bir hol, simpleks usul bo'yicha hisobni boshlashda dastlabki simpleks jadvalda bazis berilishi kerakligi. Bu bazis qanday tanlanadi, bunda nimalarga e'tiborni qaratish kerak?

§ 4. Chiziqli programmalash masalalari uchun bazis tanlash va masala shartlarini tanlangan bazisga moslashtirish.

Kanonik ko'rinishda berilgan ChPMni qaraymiz.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.1)$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$L = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max \quad (4.2)$$

Bu yerda avval ta'kidlaganimizdek $m < n$ bo'ladi, ya'ni (4.1) sistemaning yechimlari cheksiz ko'p. Shu yechimlar orasidan (4.2) shartga mos keladigani, ya'ni maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beradiganini ajratib olish kerak. Buning uchun (4.1) sistema yechimlarini ifodalash qoidasini va ular orasidan bazis o'zgaruchilarni ajratish usulini aniqlashimiz kerak. (4.1) sistema matritsasi tartibi $m \times n$ bo'lganligi va $m < n$ bo'lgani uchun $R_g A \leq m$ bo'ladi. Qulaylik uchun $R_g A = m$ deb olamiz. Aksariyat hollarda bu shart bajariladi. A matritsadan o'zaro chiziqli erkli bo'lgan m ta ustunni ajratib olamiz. Bu ustunlarni $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}$ deb belgilaymiz. Ular chiziqli erkli bo'lishi uchun shu ustun elementlaridan tuzilgan

$$C = (A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m})$$

matritsa determinanti noldan farqli bo'lishi kerak, ya'ni $\det C \neq 0$. Tanlangan bazisga mos tayanch yechimni topish uchun esa shu bazisga mos $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ noma'lumlardan boshqa barcha x_j larni nolga teng deb olamiz. Natijada (4.1) sistema soddalashib

$$\sum_{k=1}^m a_{ijk} x_{j_k} = b_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad (4.3)$$

ko'rinishni oladi. Bu sistema m noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo'lib qoladi. $\det C \neq 0$ bo'lganligi uchun uning yagona yechimi bo'ladi. Agar bu yechim uchun barcha $x_{j_k} \geq 0$ bo'lsa topilgan yechim tanlangan bazisdagi tayanch yechim deyiladi. Agar x_{j_k} lar orasida manfiylari ham chiqib qolsa, tanlangan bazisda tayanch yechim yo'q deyiladi va boshqa bazisga o'tiladi. Tayanch yechimi mavjud bo'lgan bazis tanlangach esa shu bazisdagi tayanch yechim optimallikka tekshiriladi. Bu esa avvalgi paragrafda ko'rilgan usulda amalga oshiriladi. Faqat buning uchun masala shartlari tanlangan bazisga moslashtirilishi kerak. Buning uchun tanlangan bazisga mos C matritsa uchun teskari matritsa topiladi va (4.2) sistema vektor ko'rinishida C^{-1} ga ko'paytiriladi. Bunda sistema

$$C^{-1} A \bar{X} = \bar{C}^{-1} \bar{b} \quad (4.4)$$

ko'rinishini oladi. (4.4) sistema (4.2) maqsad funksiyasi bilan birgalikda dastlabki simpleks jadval uchun asos qilib olinadi. Simpleks jadvaldan tanlangan bazisdagi

tayanch yechim optimal bo'lishi tekshirilishi mumkin. Keltirilgan mulohazalar va hisoblash jarayonini amaliy misolda tahlil qilamiz. Quyidagi ko'rinishdagi ChPM berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$L = 20x_1 + 15x_2 + 30x_3 + 25x_4 \rightarrow \max$$

Bu yerda matritsa ustunlari 4ta bo'lib ularni A_1, A_2, A_3, A_4 vektorlar deb belgilasak ular ikki o'lchovli fazo vektorlari ($m=2$) bo'lgani uchun bazis sifatida ulardan ikkitasini olish mumkin. Bunda variantlar soni $C_4^2 = 6$ ta bo'ladi. Ulardan

ixtiyoriy bittasini, masalan A_1, A_2 bazis bo'lgan holni olsak $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lib

$\det C = 1 \neq 0$ ekanligini ko'ramiz. Bu bazisga mos yechimni topish uchun $x_3, x_4 = 0$ deb olinadi va sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

ko'rinishini oladi. Bu sistemani yechib $x_3 = 3; x_2 = -1$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda $x_2 < 0$ bo'lganligi uchun bu bazisdagi yechim tayanch yechim bo'la olmaydi. Boshqa bazis tanlashga to'g'ri keladi. Masalan A_2, A_3 bazisni olsak

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \det C = -3 \neq 0$$

Demak A_2, A_3 bazis bo'la oladi. Bu bazisdagi yechimni topish uchun sistemada $x_1 = 0; x_4 = 0$ deb olinsa u quyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib $x_2 = 2; x_3 = 1$ ekanligini ko'ramiz. Bu yerda $x_i \geq 0$, demak bu bazisdagi $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = 1; x_4 = 0$ yechim tayanch yechim bo'lar ekan. Bu yechimning optimal bo'lish bo'lmasligini tekshirish uchun masala shartini tanlangan bazisga moslashtiramiz. Teskari matritsani hisoblash qoidasiga ko'ra

$$C^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ekanligini ko'ramiz. Masala shartini shu teskari matritsaga ko'paytiramiz

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \end{cases}$$

Shartlar bazisga moslashtirildi, ya'ni bazis vektorlar A_2, A_3 ga mos ustunlar birlik vektor ko'rinishini oldi. Bu bazisga mos tayanch yechim $x_2 = 2; x_3 = 1$ optimalligini tekshirish uchun simpleks jadval tuzamiz

I	C_j C_i			20	15	30	25	
		Baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ
1	15	A_2	2	1	1	0	2	
2	30	A_3	1	1/3	0	1	$-\frac{2}{3}$	
		Δ_j		5	0	0	-15	

Bu jadvaldan ko'rinadiki, tanlangan bazisga mos tayanch yechim optimal emas ekan, chunki $\Delta_4 = -15 < 0$ bo'layapti. Rejani yaxshilash uchun bazisni almashtirish kerak. Buyog'i simpleks usul davom ettirilishi mumkin.

4. CHPM shartlari tanlangan bazisga moslashtirilsin. Shu bazisdagi tayanch yechim optimallikka tekshirilsin.

$$4.1 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 25 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 26 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_4 \text{ bazis}$$

$$L = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$4.2 \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 29 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 23 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_3 \text{ bazis}$$

$$L = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 8x_4 \rightarrow \max$$

$$4.3 \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 28 \\ 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 36 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 A_2 \text{ bazis}$$

$$L = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \rightarrow \max$$

$$4.4 \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 40 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 33 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_2 \ A_3 \text{ bazis}$$

$$L = 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

$$4.5 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 22 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 33 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_1 \ A_3 \text{ bazisda}$$

$$L = 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$4.6 \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 40 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 32 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad A_3 \ A_4 \text{ bazisda}$$

$$L = 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$$

§ 5. Transport masalasi

Chiziqli programmalash masalalaridan bir turi “transport masalasi” nomi bilan ma'lum bo'lgan matematik masalalarga keltiriladigan iqtisodiy masalalardan iborat bo'ladi. Ma'lumki, ishlab chiqaruvchi bilan iste'molchi orasidagi mol almashinuvi ya'ni ishlab chiqarilgan mahsulot yoki tayyorlangan homashyoni korxonalarga yetkazib berish transport vositalari va ularga sarflanadigan moliyaviy harajatlari bilan bog'liq. Bu harajatlarni minimallashtiruvchi variantlarni tanlash transport masalasining asosiy muammosi hisoblanadi.

Transport masalasining matematik modelini ifodalashda umumiyatni cheklamagan holda sxematik tarzda quyidagi muammoni tahlil qilamiz. Faraz qilaylik ma'lum homashyo turi zaxiralari saqlanuvchi yoki tayyorlanuvchi n ta punkt bo'lsin. Bu punktlardagi homashyo miqdorlari mos ravishda $b_1, b_2, \dots, b_n$ birliklardan iborat bo'lsin. Bu yerda homashyo turiga ko'ra ma'lum bir o'lchov birligi (tonna, metr, ...) tanlangan bo'ladi. Shuningdek, keltirilgan homashyo asosida ishlaydigan m ta korxona bo'lib, bu korxonalar shu homashyoga bo'lgan ehtiyojlari mos ravishda $d_1, d_2, \dots, d_m$ birliklardan iborat bo'lsin. Shuningdek homashyo punktlari hamda korxonalar orasidagi yo'l sifati va masofasiga ko'ra homashyoni yetkazish uchun ketadigan yo'l harajatlari koeffitsientlari ma'lum bo'lsin. Ularni $C = (C_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$; matritsa ko'rinishida ifodalaymiz. Bunda matritsaning har bir elementi C_{ij} mos ravishda i -korxonaga j -punktdan bir birlik homashyo yetkazish uchun ketadigan transport harajatlarini ifodalaydi. Aksariyat hollarda ishlab chiqarish korxonalari va homashyo yetkazib beruvchi punktlar muqobil, ya'ni moslashtirilgan holda ishlaydi deb hisoblanadi. Homashyo zaxiralari va korxonalar shu homashyoga bo'lgan ehtiyojlari bir-biriga to'la mos keladi. Matematik tarzda bu shart

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{i=1}^m d_i \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Ayrim juz'iy chetlashishlarni hisobga olmaganda korxonalar to'liq quvvat bilan ishlaganda homashyolar to'liq sarflanadi. Faqat bu homashyolarni korxonalarga yetkazib berish kerak.

Masalaning matematik modelini ifodalash uchun yuqorida keltirilgan barcha shartlarni matematik munosabatlar bilan ifodalaymiz. Avvalo topilishi kerak bo'lgan optimal reja komponentlari j – punktdan i – korxonaga yetkazilishi kerak bo'lgan homashyo miqdorini X_{ij} deb belgilaymiz. Shartga ko'ra i – korxonaga yetkaziladigan barcha homashyo miqdori korxona ehtiyoji b_i ga teng bo'lishi kerak. Bu shartni

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, ya'ni barcha m ta korxona uchun bu shart bajarilishi kerak. Bunday shartni homashyo punktlari uchun ham ifodalash mumkin, ya'ni j - homashyo punktidan chiqarilgan jami homashyo miqdori d_j ga teng bo'lishi kerak.

Bu shart matematik tarzda

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

ko'rinishini oladi. Bu shartlar bajarilgan holda shunday x_{ij} larni topish kerakki jami yo'l harajatlari minimal bo'lsin. Keltirilgan normativlarga ko'ra i – korxonaga j – punktdan x_{ij} birlik homashyo keltiriladigan bo'lsa, yo'l xarajatlari bir birlik homashyo miqdori uchun C_{ij} ga teng ekanligi ma'lum bo'lgani uchun jami $C_{ij} \times x_{ij}$ pul birligiga teng bo'ladi. Bu xarajatlarni barcha korxonalar va homashyo bazalari bo'yicha qo'shib chiqsak jami xarajatlar kelib chiqadi va u quyidagicha ifodalanadi.

$$L(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \times x_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

Tabiiy, barcha chiziqli programmalash masalalarida bo'lganidek, bu yerda ham $x_{ij} \geq 0$ bo'lishi kerakligi qayd etiladi.

Shunday qilib (1), (2), (3) shartlar bajarilgan holda (4) maqsad funksiyasining minimal qiymatini ta'minlovchi plan matritsasi $X=(x_{ij})$ ni topish masalasi transport masalasi deyiladi. Bu yerda $b_1, b_2, \dots, b_m, d_1, d_2, \dots, d_n$ berilgan miqdorlar ; $C=(C_{ij})$ ham ma'lum matritsa. $C(m \times n)$ to'g'ri to'rtburchakli matritsa ham ma'lum matritsa deb hisoblanadi. Aksariyat hollarda x_{ij} noma'lumlar soni $m \times n$ shartlar soni $m+n$ dan katta bo'lib, (1), (2), (3) shartlar bilan berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Ana shu cheksiz ko'p yechimlar orasidan (4) maqsad funksiyasining minimumini ta'minlovchi variant, ya'ni optimal plan (reja)ni tanlashni talab qilinadi.

Keltirilgan transport masalasining matematik modeli (1) – (4) ko'rinishiga qarab ortiqcha tafsilotlarsiz shuni qayd etishimiz mumkinki, kommunikatsion tizimlar : ular avtomobil, poyezd yo'li bo'ladimi, gaz yoki suv yetkazuvchi quvurlar bo'ldimi, elektr quvvatini yetkazuvchi yuqori kuchlanishli elektr uzatish tizimlari bo'ladimi

barchasida shartli ravishda yetkazuvchi, iste'molchi va "transport" harajatlarini kiritish mumkin. Bu holda ham aynan (1) – (4) ko'rinishdagi optimallashtirish masalasini hosil qilishimiz mumkin.

Transport masalasi ifodalanishiga ko'ra nisbatan soddadek tuyulishi mumkin. Haqiqatdan ham barcha shartlar koeffitsientlari faqat birlardan iborat tenglamalar bo'ladi. Transport masalasining murakkabligi noma'lumlarni ko'pligida bo'lib unga odatdagi oddiy simpleks usulini tatbiq qilish ham imkoniyat darajasidan ancha yuqori bo'lib ketar ekan. Masalan $n=10$, $m=10$ bo'lgan holda ham noma'lumlar soni $n \times m=100$, shartlar soni esa $m+n-1=19$ ta bo'lib, shartlar matritsasining rangi 19 bo'lgan holda (1) – (3) shartlar bo'yicha kelib chiqadigan tayanch yechimlar soni C_{100}^{19} ta bo'ladi. Simpleks usul esa tayanch yechimlaridan optimal yechimni ajratishga imkoniyat beradi. Bu holda simpleks usul bo'yicha necha qadam qo'yilishi kerak, buni tasavvur qilish ham qiyin. Agar transport masalasini biror tuman (miqyosida, masshtabida) qaralganda ham yetarlicha murakkab bo'ladi. Viloyat yoki respublika (miqyosida, masshtabida) qaraladigan bo'lsa masala yanada murakkablashib ketishi aniq.

Biz bu yerda transport masalasi ham odatdagi ChPM ekanligini, hamda unga ham simpleks usulni tatbiq qilish mumkinligini namoyish qilish maqsadida oddiy bir masalani ko'rib chiqamiz va tahlil qilamiz. Faraz qilaylik 2ta g'isht zavodi bo'lib ularning ishlab chiqarish quvvatlari mos ravishda 35 mashina va 45 mashina g'ishtga teng bo'lsin. Shuningdek bu g'ishtlarga talabgor 2 ta qurilish bo'lib, ularga mos ravishda 30 mashina va 50 mashina g'isht kerak bo'lsin. Talab va taklif muvozanati saqlangan. Agar 1 – qurilishga 1 – zavoddan 1 mashina keltirish narxi (yo'l xarajati) 15ming so'm, 2 – zavoddan keltirish narxi esa 12ming so'm; shuningdek 2 – qurilishga 1-, 2-zavoddan 1 mashina g'isht keltirish narxi mos ravishda 20ming va 18 ming so'm bo'lsin. Zavodlardan qurilishlarga g'isht yetkazib berish shunday rejasini tuzingki, transport harajatlari minimal bo'lsin. Transport masalasining shartlarini jadval ko'rinishida ifodalash tahlil uchun qulay bo'lganligi uchun odatda ularni jadval ko'rinishida ifodalagan ma'qul. Xususan yuqorida keltirilgan masala shartlarini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

zav qur	1	2	Σ
1	x_1 15	x_2 12	30
2	x_3 20	x_4 18	50
Σ	35	45	80

jadvaldagi raqamlar masala mohiyatini aks ettiradi. So'nggi qatorda zavodlar quvvatlari, so'nggi ustunda esa qurilishlar ehtiyojlari aks etgan. Ichki kataklar tepa burchagida yo'l harajatlari koeffitsienti aks etgan. Bu yerda qulaylik uchun noma'lumlarni x_1, x_2, x_3, x_4 deb belgilangan, aslida $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ bo'lishi kerak edi.

Bu yerda maqsad, masalani simpleks usulga tushirish qulay bo'lishi uchun shu yo'l tanlangan. Shartlarning matematik ifodasiga o'tamiz.

$$x_1 + x_2 = 30 \quad \langle 1 \rangle$$

$$x_3 + x_4 = 50 \quad \langle 2 \rangle$$

$$x_1 + x_3 = 35 \quad \langle 3 \rangle$$

$$x_2 + x_4 = 45 \quad \langle 4 \rangle$$

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 18x_4 \rightarrow \min$$

$\langle 1 \rangle - \langle 4 \rangle$ shartlar orasidan chiziqli erklilari tanlanadi. Bevosita tekshirish yo'li bilan $\langle 1 \rangle - \langle 3 \rangle$ shartlardan $\langle 4 \rangle$ shart kelib chiqishini ko'rishimiz mumkin. Sxematik tarzda tengliklar ustida amallar bajarish qoidasiga ko'ra $\langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle - \langle 3 \rangle = \langle 4 \rangle$ ekanligini ko'ramiz. Demak, bu yerda ChPMni

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$x_3 + x_4 = 50$$

$$x_1 + x_3 = 35$$

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 20x_3 + 18x_4 \rightarrow \min$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu masalaga simpleks usulni tatbiq qilish uchun ChPM shartlaridan bazislarni ajratish (ustunlari orasida birlik vektorlarni hosil qilish) jarayonini namoyish etamiz. Sistemadagi x_1, x_2, x_3, x_4 ga mos koeffitsientlar A_1, A_2, A_3, A_4 vektorlarni hosil qiladi. Ulardan tuzilgan matritsa ozod hadlar ustuni bilan to'ldirilsa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 35 \end{pmatrix}_{(-1)}$$

matritsa hosil bo'ladi. Bu matritsaning 2-,4-ustunlari bazis holatida $A_2^T = (1; 0; 0; 0)$ ekanligini ko'ramiz. Agar 3 – qatorini -1 ga ko'paytirib 2 – qatorga qo'shsak 3 – ustun ham bazis ko'rinishini oladi.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & \underbrace{1 \quad 1}_{\text{bazis}} & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

Bu matritsa berilgan shartlarning shakl almashtirilib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ -x_1 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_3 = 35 \end{cases}$$

ko'rinishga keltirilganligini aks ettiradi. Bu ko'rinishdan simpleks jadvalga o'tamiz va bu jadvalga mos planni optimallikka tekshiramiz.

C_j C			15	12	20	18	
	baz	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	Θ_i
12	A_2	30	1	1	0	0	
18	A_4	15	-1	0	0	1	
20	A_3	35	1	0	1	0	
	Δ_j		-1	0	0	0	

Bu yerda $\Delta_1 = C_{baz} \times A_1 - C_1 = 12 \times 1 + 18 \times (-1) + 20 \times 1 - 15 = -1$ formula bo'yicha hisoblangan. Qolganlari ham shunga o'xshash hisoblanadi. Masala minimumini topishga mo'ljallangan bo'lsa, Δ_j lar orasida musbatlari yo'q bo'lsa, jadvalga mos plan optimal plan bo'ladi. Bizda ana shunday hol kuzatilyapti. Demak bu masalada optimal plan $x_1 = 0; x_2 = 30; x_3 = 35; x_4 = 15$ bo'lar ekan. Bu holda harajatlar minimal bo'lib, $L = 12 \times 30 + 18 \times 15 + 20 \times 35 = 1330$ ming so'm bo'lar ekan. Masala shartlari va yechimini ifodalovchi jadval

Zav qur	1	2	Σ
1	15 0	12 30	30
2	20 35	13 15	50
Σ	35	45	80

ko'rinishda bo'ladi.

Tahlil to'laqonli ko'rinishni olishini namoyish qilish uchun yuqoridagi masalada faqat bitta narx 1 – zavoddan 2 – qurilishga 1 mashina g'isht olib borish narxi 30ming so'mga o'zgargan bo'lsin deb faraz qilamiz. Bunda faqat maqsad funksiyasi ko'rinishi o'zgaradi, ya'ni

$$L = 15x_1 + 12x_2 + 30x_3 + 18x_4 \rightarrow \min$$

ko'rinishni oladi. Simpleks jadvalda ham faqat narxlar C_i ga mos qator va ustunlarga o'zgaradi va quyidagi ko'rinishni oladi

C C			15	12	30	18	
	Baz	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	Θ _i
12	A ₂	30	1	1	0	0	30
18	A ₄	15	-1	0	0	1	
30	A ₃	35	1	0	1	0	35
			9	0	0	0	

Bu jadvalga mos plan $x_1 = 0; x_2 = 30; x_3 = 35; x_4 = 15$ optimal emas, chunki $\Delta_1 = 9 > 0$. Bu planga ko'ra $L = 12 \times 30 + 18 \times 15 + 30 \times 35 = 1680$ ming. Planni yaxshilash uchun jadvaldan

$\theta_i = \frac{a_{i0}}{a_{i1}}$ larni hisoblaymiz (faqat $a_{i1} > 0$ lar uchun). $\min \theta_i$ ga mos 1 – qatorni hal qiluvchi qator deb belgilaymiz. Uning yordamida 1 – ustunni bazis ustunga aylantiramiz. Buning uchun 1 – qatorni 2 – qatorga qo'shamiz, hamda (-1) ga ko'paytirib 3 – qatorga qo'shamiz. Natijada yangi simpleks jadvalni hosil qilamiz

C C			15	12	30	18	
	Bazis	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	Θ
15	A ₁	30	1	1	0	0	
18	A ₄	45	0	1	0	1	
30	A ₃	5	0	-1	1	0	
			0	-17	0	0	

Bu jadvalda $\Delta_j > 0$ lari yo'q bo'lgani uchun bu jadvalga mos tayanch yechim $x_1 = 30; x_2 = 0; x_3 = 5; x_4 = 45$ optimal plan bo'ladi. Bu plan bo'yicha ketadigan transport harajatlari

$L = 15 \times 30 + 18 \times 45 + 30 \times 5 = 450 + 810 + 150 = 1410$ ming so'm bo'lib avvalgisidan 270 ming so'mga kam bo'lar ekan.

Bu usul bilan ixtiyoriy transport masalasini ham odatdagi ChPM ko'rinishiga keltirish mumkin ekan. Faqat shartli ravishda n ta ishlab chiqaruvchi va ularga bog'langan m ta iste'molchi bo'lgan transport masalasini tasavvur qilsak, bu unchalik oson ish emas ekanligini to'la tasavvur qilishimiz mumkin. Transport

masalasini ba'zi kichik hajmdagi hollarda mantiqiy muhokamalar asosida ham yechish mumkin ekan. Bunga misol

T n \	1	2	Σ	
1	15 x_1	20 x_2	20	
2	18 x_3	13 x_4	60	
3	14 x_5	18 x_6	40	
Σ	70	50	12	

sifatida jadvalda keltirilgan 2 ta ta'minotchi va 3ta iste'molchi bilan bog'liq transport masalasi namunasi keltirilgan. Unda bo'sh qolgan yarim kataklar aynan topilishi kerak bo'lgan ta'minot rejasini aks ettiruvchi 6 ta noma'lum $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ larga mos keladi. Mantiqan dastlab eng arzon yo'nalish tanlanishi kerak. Demak avvalo yo'l harajati 13 bo'lgan katakka iloji boricha ko'proq jo'natish miqdorini qo'ygan ma'qul. Bu qiymat 50 ekanligi ko'rinib turibdi. U holda shu qatorning birinchi katagiga 10 qo'yishimiz kerak bo'ladi. Shuningdek ikkinchi ustun qolgan ikki katagi 0 bo'lishi kerakligi ko'rinib turibdi. Qolgan kataklar ham o'z - o'zidan bir qiymatli to'ldirilishi mumkin bo'lib qoladi. Xulosa qilib aytganda $x_1 = 20; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = 50; x_5 = 40; x_6 = 0$ ekanligini topamiz. Bunda transport harajatlari $L = 15 \times 20 + 20 \times 0 + 18 \times 10 + 13 \times 50 + 14 \times 40 + 18 \times 0 = 1770$

bo'lishini ko'ramiz. Natijada masala shartlari va yechimini ifodalovchi jadvalni hosil qilamiz

T n \	1	2	Σ
1	15 20 x_1	20 0 x_2	20
2	18 10 x_3	13 50 x_4	60
3	14 40 x_5	18 0 x_6	40
Σ	70	50	120

Yuqorida keltirilgan masalani planni bosqichma – bosqich yaxshilash usuli bo'yicha simpleks jadvallar asosida ishlab ko'ramiz. Unga mos ChPM quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_3 + x_4 = 60 \\ x_5 + x_6 = 40 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 70 \\ x_2 + x_4 + x_6 = 50 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 15x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 13x_4 + 14x_5 + 18x_6 \rightarrow \min$$

Bu masala shartlaridan beshinchisi chiziqli bog'liq. Qolgan qismi uchun kengaytirilgan matritsasini yozamiz va bu matritsada rangi to'rt bo'lganligi uchun to'rtta bazis ustun hosil qilamiz. Masalan qulaylik uchun 1-,3-,4-,6- ustunlarni bazis ustunlarga aylantirish holini ko'ramiz.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 70 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-1) \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \downarrow \times(-1) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Hosil bo'lgan matritsa ko'rsatilgan tartibda 1 – qatorni (-1)ga ko'paytirib 4 – qatorga qo'shish, so'ngra 4 – qatorni (-1) ga ko'paytirib 2 – qatorga qo'shish yordamida masala shartlarini ekvivalent tarzda o'zgartirishni aks ettiradi. Matritsa ko'rinishidan yana sistema ko'rinishiga o'tilsa u

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_5 + x_6 = 40 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 50 \end{cases}$$

ko'rinishini oladi. Bevosita tekshirish bilan bazis o'zgaruvchilar

$x_1 = 20, x_3 = 50, x_4 = 10, x_6 = 40$ qolganlari $x_2 = 0; x_5 = 0$ ekanligini ko'rishimiz

mumkin. Masalaning bu ko'rinishidan dastlabki simpleks jadvalni tuzib, bu jadvalga mos tayanch yechimni optimallikka tekshirishimiz mumkin. Agar yechim optimal bo'lmasa, keyingi bosqichga o'tamiz, ya'ni Δ_j lar orasida manfiysi bo'lsa, hal qiluvchi qator va ustunlarini topib bazisni almashtiramiz. Bizning misol uchun simpleks jadval

C C			15	20	18	13	14	18	
	baz	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	Θ _i
15	A ₁	20	1	1	0	0	0	0	
13	A ₄	10	0	1	0	1	-1	0	
18	A ₆	40	0	0	0	0	1	1	40 ←
18	A ₃	50	0	-1	1	0	↑ 1	0	50
	Δ _j		0	-10	0	0	9	0	

ko'rinishda bo'ladi.

Bu jadvalda ChPM minimumga ishlanayotganligi uchun $\Delta_j > 0$ lar borligi plan optimal emasligini bildiradi. $\Delta_j = 9 > 0$ ga mos 5 – ustun hal qiluvchi ustun, shu

ustun elementlari yordamida hisoblangan $\Theta_3 = \frac{a_{30}}{a_{35}} = 40$ va $\Theta_4 = \frac{a_{40}}{a_{45}} = 50$ lar

orasidan kichigiga mos keluvchi 3 – qator hal qiluvchi qator deb belgilandi va bazisdagi A₆ ustun A₅ ustunga almashtirilishi kerak. Buning uchun jadvalning 3 – qatorini 2 – qatorga qo'shamiz, hamda 3 – qatorni (-1)ga ko'pytirib 4 – qatorga qo'shamiz. Shunda 5 – ustun ham bazis ustun ko'rinishini oladi va quyidagi simpleks jadval hosil bo'ladi.

C C									
	Bazis	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	Θ _i
15	A ₁	20	1	1	0	0	0	0	
13	A ₄	50	0	1	0	1	0	1	
14	A ₅	40	0	0	0	0	1	-1	
18	A ₃	10	0	-1	1	0	0	-1	
	Δ _j		0	-10	0	0	0	-9	

Bu jadvalga ko'ra Δ_j lar orasida musbatlari yo'q bo'lganligi uchun bu jadvalga mos tayanch yechim $x_1 = 20; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = 50; x_5 = 40; x_6 = 0$ optimal yechim bo'ladi. Shu masala uchun mantiqiy mulohazalarga ko'ra tanlangan dastlabki yechim ham xuddi shunday bo'lgan edi. Bu natijadan ikki muhim xulosani keltirib chiqarishimiz mumkin ekan. Birinchisi – transport masalasini yechishda mantiqiy mulohazalarga asoslanishimiz mumkin ekan. Bunday usulda tanlangan yechim optimal yechim bo'lib qolishi ham mumkin, bo'lmagan taqdirda ham optimal yechimga yaqin yechim bo'lib simpleks usul yordamida yaxshilash bosqichlari soni kam bo'ladi. Ikkinchidan – transport masalasi ham odatdagi ChPMga keltirilishi mumkin bo'lib, unga ham an'anviy usullarni tatbiq qilish mumkin ekan. Bunda faqat bir narsani unutmasligimiz kerak. Yuqorida ta'kidlanganidek, ta'minotchilar soni n va iste'molchilar soni m ortgan sari noma'lumlar soni $n \times m$ keskin ortib odatdagi usullarni tatbiq qilish mushkullashib boraveradi. Bunday hollarda masalani yechish uchun iteratsion usullardan foydalanish ma'qulroq bo'ladi.

Masalalar

5. Keltirilgan jadval qiymatlarga mos transport masalasini tuzing. Masala tayanch yechimini minimal harajatlar usuli bo'yicha aniqlang va uni optimallikka tekshiring.

5.1

	1	2	3	Σ
1	11 x_{11}	15 x_{12}	13 x_{13}	200
2	14 x_{21}	12 x_{22}	10 x_{23}	300
Σ	150	250	100	500

5.2

	1	2	3	Σ
1	60	45	60	400
2	55	60	58	500
Σ	200	400	300	900

5.3

	1	2	3	Σ
1	30	25	35	500
2	25	35	20	300
Σ	250	350	200	800

5.4

	1	2	3	Σ
1	25	20	18	400
2	15	22	24	300
Σ	250	150	300	700

5.5

	1	2	3	Σ
1	40	50	30	600
2	30	40	50	400
Σ	300	500	200	

6 § Chiziqli programmalash masalalari uchun egizak masalalar

Bu yerda chiziqli programmalash masalalari nazariyasida muhim o'rin egallagan egizak masalalar tushunchasida to'xtalamiz va ularning iqtisodiy ma'nosini tahlil qilamiz. ChPM umumiy ko'rinishini esga olsak (2 §).

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.1)$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (2.2)$$

Shartlarga ko'ra $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni topish talab qilinadi. Masala tarkibidagi har bir koeffitsiyentga o'z vaqtida izoh berilgan edi. Aynan shu koeffitsiyentlar yordamida quyidagi masalani tuzamiz.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} y_j \geq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.1)$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$Q(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^m b_j \cdot y_j \rightarrow \min \quad (6.2)$$

Hosil bo'lgan (6.1) – (6.2) masala (2.1) – (2.2) ChPM ga nisbatan egizak masala deyiladi. Agar (2.1) – (2.2) masala yechimi mavjud bo'lsa (6.1) – (6.2) masala yechimi ham mavjud bo'lar ekan. Shu bilan birga bu yechimlar, ya'ni optimal yechimlar uchun

$$\sup L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \inf Q(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan. Bu holat ba'zi murakkab ChPM lar uchun egizak masala yordamida tahlil o'tkazishga imkoniyat beradi. E'tibor bersak (2.1) – (2.2) va (6.1) – (6.2) masalalar aynan bir xil koeffitsiyent orqali ifodalanishi hamda ularning yechimlari ham bir xilligi bu masalalarni “ egizak masalalar ” deb atalishiga sabab bo'lgan.

Tahlil va xulosalarni soddalashtirish uchun avvalgi paragraflarda keltirilgan masalalardan foydalanamiz. Xususan § 1 da ko'rilgan (1.1) – (1.2) masalani olsak

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,3x_2 \leq 30 \\ 0,5x_1 + 0,2x_2 \leq 45 \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 \leq 12 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$L(x_1, x_2) = 1\,000x_1 + 1400x_2 \rightarrow \max \quad (1.2)$$

uning to'la tahlili va yechimi § 1 da keltirilgan. Unga ko'ra optimal reja c (30;90) nuqtada bo'lib, bunda $x_1 = 30; x_2 = 90$ bo'lib $\max L(x_1, x_2) = 15600$ ekanligini ko'rgan edik. Yuqorida keltirilgan tartibga ko'ra (1.1) – (1.2) masala uchun egizak masala tuzamiz.

$$\begin{cases} 0,1y_1 + 0,5y_2 + 0,1y_3 \geq 1000 \\ 0,3y_1 + 0,2y_2 + 0,1y_3 \geq 1400 \end{cases} \quad (6.3)$$

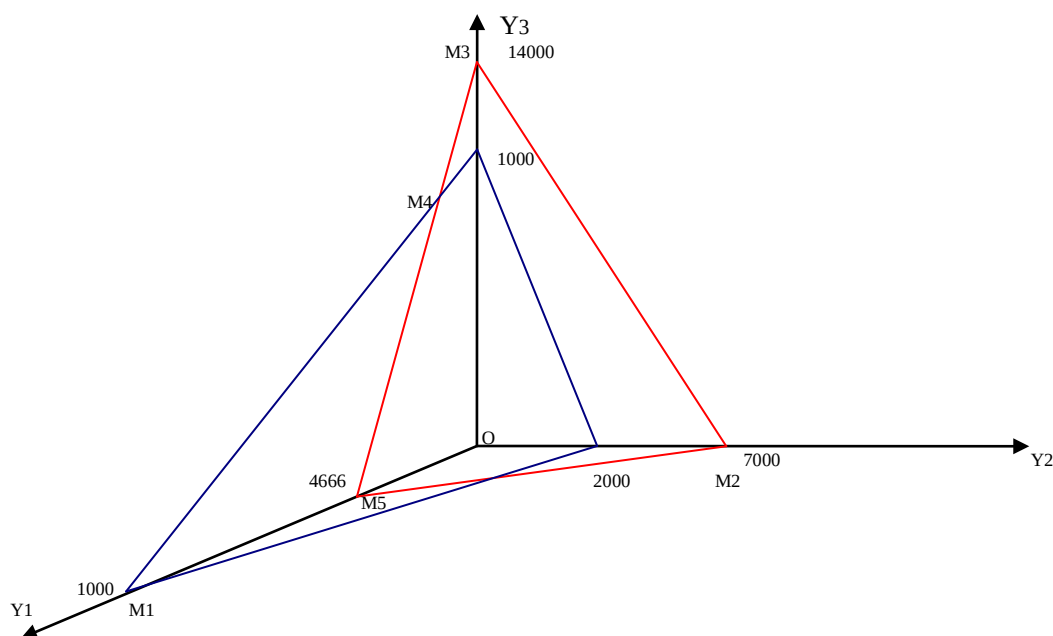
$$Q(y_1, y_2, y_3) = 30y_1 + 45y_2 + 12y_3 \rightarrow \min \quad (6.4)$$

Hosil bo'lgan (6.3) – (6.4) egizak masalani geometrik usulda yechish uchun uni kanonik ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} \frac{y_1}{1000} + \frac{y_2}{2000} + \frac{y_3}{10000} \geq 1 \\ \frac{y_1}{4666,6} + \frac{y_2}{7000} + \frac{y_3}{14000} \geq 1 \end{cases}$$

$$Q = 30y_1 + 45y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$$

Bu yerdagi har bir shart $OY_1 Y_2 Y_3$ koordinat fazosida tekislikni ifodalaydi. Ularni chizmada ifodalasak, egizak masala uchun ham MBES qavariq soha bo'lishini ko'ramiz. Bu holat barcha egizak masalalar uchun o'rinli bo'lar ekan. (6.3) – (6.4) masala shartlariga mos mumkin bo'lgan yechimlar sohasi MBES chizmada keltirilgan



MBES $OY_1 Y_2 Y_3$ koordinat fazosining 1 – oktantida (6.3) shartlar bilan berilgan tekisliklardan yuqoridagi soha bo'ladi. Bu qavariq sohaning chegaralaridagi uchlari M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 nuqtalarida bo'ladi. Optimal yechimni aynan shu nuqtalardan birida izlash kerak. Chizmadan ko'rinadiki $M_1 (10000; 0; 0)$, $M_2 (0; 7000; 0)$, $M_3 (0; 0; 14000)$, $M_4 (2000; 0; 8000)$, $M_5 (1231; 3846; 0)$. Bu yerda M_4, M_5 nuqtalar koordinatalari (6.3) sistemadan $y_2 = 0$ va $y_3 = 0$ deb topilgan. Optimal yechimni $Q(Y_1, Y_2, Y_3)$ qiymatlarini taqqoslash orqali topamiz.

$Q(M_1) = 300000$; $Q(M_2) = 315000$; $Q(M_3) = 168000$; $Q(M_4) = 156000$; $Q(M_5) = 170775$. Bu yerdan M_4 nuqtada eng kichik qiymat bo'lishini ko'ramiz. Haqiqatdan ham

$$\sup L(x_1, x_2) = \inf Q(y_1, y_2, y_3) = 156000$$

bo'lar ekan.

Egizak masala yechimini simpleks usulda asosiy masala bilan birgalikda bir yo'la topish mumkin ekan. Buni bevosita amaliy masalani yechish jarayonida namoyish qilamiz.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 32 \\ x_1 + 5x_2 \leq 25 \\ L = 300x_1 + 480x_2 \rightarrow \max \end{cases}$$

masala uchun egizak masala

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 \geq 300 \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 480 \\ Q = 32y_1 + 25y_2 \rightarrow \min \end{cases}$$

Geometrik usulda asosiy masala uchun OX_1X_2 koordinat tekisligida MBES ni chizib tayanch yechimlar $M_1(8;0)$, $M_2(0;5)$, $M_3(5;4)$ nuqtalarda bo'lib, bu nuqtalarda maqsad funksiya qiymatlari $L_1 = 2400$, $L_2 = 2400$, $L_3 = 5 \cdot 300 + 4 \cdot 480 = 3420$. Taqqoslash natijasida optimal yechim $M_3(5;4)$ nuqtada bo'lib, bu nuqtada $x_1 = 5$; $x_2 = 4$ ekanligini ko'ramiz. Shuningdek egizak masala uchun $OY_1 Y_2$ tekisligida MBES ni tuzib tayanch yechimlar $M_1(160;0)$, $M_2(0;300)$, $M_3(60;60)$ nuqtada bo'lishini ko'ramiz. Bu nuqtalardagi tayanch yechim qiymatlari $Q_1 = 5120$, $Q_2 = 7500$, $Q_3 = 3420$ larni taqqoslab $\min Q = 3420$ ekanligini va bu qiymatga $y_1 = 60$; $y_2 = 60$ bo'lgan M_3 nuqtada erishilishini ko'ramiz. Shu masalani simpleks usulda yechimini topish jarayonini keltiramiz. Sun'iy basis x_3, x_4 larni kiritib 1 – simpleks jadvalni ifodalaymiz.

$i \backslash C_j$	C_i			300	480	0	0	
		$ba2$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	O_i
1	0	A_3	32	4	3	1	0	$10\frac{2}{3}$
2	0	A_4	25	1	5	0	1	5
	Δ_j		0	-300	-480	0	0	

↑

Bu jadvalga mos tayanch yechim $x_3 = 32; x_4 = 25$ optimal emas, chunki $\Delta_j < 0$ lar mavjud. Hal qiluvchi ustun va qatorlarni aniqlab ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

$i \backslash C_i$	C_j			300	480	0	0	
		$ba2$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	O_i
1	0	A_3	17	3,4	0	1	-0,6	5
2	480	A_2	5	0,2	1	0	0,2	10
	Δ_j		2400	-204	0	0	96	

↑

Bu jadvalga mos tayanch yechim ham optimal emas. Keyingi simpleks jadvalni tuzamiz.

$i \backslash C_i$	C_j			300	480	0	0	
		$ba2$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	O_i
1	300	A_1	5	1	0	$10/34$	$-3/17$	
2	480	A_2	4	0	1	$-1/17$	$4/17$	
	Δ_j		3420	0	0	60	60	

Bu jadvalga mos barcha $\Delta_j \geq 0$. Demak, jadvaldan $x_1 = 5; x_2 = 4$ ekanligini ko'ramiz. Sun'iy bazislarga mos ustunlardan esa, Δ_j lar qatorida $y_1 = 60; y_2 = 60$ ekanligi kelib chiqadi. Bu yechimlar geometrik usulda topilgan yechimlar bilan bir xil ekanligini ko'ramiz. Egizak masalaning iqtisodiy ma'nosi. Agar asosiy masalada daromadlarni maksimal bo'lishini ta'minlaydigan reja izlangan bo'lsa, egizak masalada harajatlarni minimal bo'lishini ta'minlaydigan qiymatlar izlanar ekan. Bu yerda Y_1, Y_2 larni mos ravishda 1- va 2- homashyolarning bir birligi narxi deb tushunish mumkin. Egizak masala tushunchasi nisbiy bo'lib, agar (6.1) – (6.2), ya'ni Y_i larga nisbatan masalani asosiy desak, X_j larga nisbatan (2.1) – (2.2) masala egizak masala bo'ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar.

Berilgan ChPM uchun egizak masala tuzilsin va uning yechimi geometrik usulda topsin.

6.1

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.2

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 \leq 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.3

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 20 \\ 8x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.4

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

6.5

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3) &= 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Adabiyotlar

1. D.B. Yudin, E.T.Toldshteyn; Lineynoe programmirovaniye . M. “Nauka”, 1969.
2. Kantorovich L. V. O metodax analiza nekotorig eksperimentalnix planovo-proizvodstvennix zadach. DAN SSSR 115, N3 1957.
3. Juraev X. I. Otaniyozov B. va boshqalar Metematik programmalashtirish. Toshkent OO'MTV, 2005
4. Akulich I. I. Metematicheskoe programmirovaniye v primerax i zadachax (uchebnoye posobiye) M. “Visshaya shkola ” 1986/
5. G'ofurov M. va boshqalar. Iqtisodiy matematik usullar va modellar (O'quv qo'llanma) Toshkent 2000.
6. Zaelavskiy YU. L. Sbornik zadach po lineynomu programmirovaniyu. M. “Nauka”, 1969.

Mundarija

So'z boshi.....	2
§ 1. Chiziqli programmalash masalalari.....	3
§ 2. Chiziqli programmalash masalalarining matematik asoslari.....	10
§ 3. Rejani bosqichma-bosqich yaxshilash usullari.....	13
§ 4. Chiziqli programmalash masalalari uchun bazis tanlash va masala shartlarini tanlangan bazisga moslashtirish.....	19
§ 5. Transport masalasi.....	22
§ 6. Chiziqli programmalash masalalari uchun egizak masala.....	33

IQTISODIY MATEMATIK USULLAR VA MODELLAR

fanining «Chiziqli programmalash» bo'limi bo'yicha iqtisodiyot va menejment yo'nalishi talabalari uchun nazariy ma'lumotlar va amaliy ko'rsatmalar

“Algoritmlash va matematik modellashtirish” kafedrasining majlisida (4 mart 2014 y., № 17 bayonnoma) muhokama qilindi va TATU ilmiy-uslubiy kengashida bosmaxonada chop etish uchun tavsiya qilindi.

Tuzuvchi: dotsent A.N.Mirzayev
 assistent F.S.Raximova

Mas'ul muharrir:

dotsent Yu.M.Abduraxmanova

Muharrir: K.A.Gayubova

Bichimi 60x84 1/16

Bosma tabog'i- Adadi-

Buyurtma №

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti «ALOQACHI» nashriyot–matbaa markazida chop etildi.

Toshkent sh., Amir Temur ko'chasi, 108 –uy.

