

Я.М.Хусаинов, С.А. Музрапов

МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

Самарқанд – 2007 й.

Такризчилар:

Тошев Н.Т. – Самарқанд иқтисодиёт ва сервис институти доценти,
физика-математика фанлари номзоди

Хусанов Б. – СамДАҚИ доценти, физика-математика фанлари номзоди.

Ҳавола қилинаётган услубий қўлланмага эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари, тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари, вариацион қаторларни тузиш, статистик характеристикаларни ҳисоблаш, тақсимот параметрларини статистик баҳолаш, статистик гипотезаларни текшириш ҳақида маълумотлар келтирилган.

Услубий қўлланма университет талабалари учун мўлжалланган. Унга киритилган маълумотлар университетларнинг тарих ва жисмоний маданият мутахассисликлари учун «Математик статистика» фанларининг амалдаги ўқув режасига мос келади.

Ушбу қўлланма Алишер Навоий номидаги Самарқанд давлат университети ўқув-услубий кенгашининг 2007 йил 28 ноябрдаги 3-сон мажлис қарори билан нашрга тавсия этилган.

МУНДАРИЖА

I қисм.	Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари	5
I боб.	Ҳодиса ва эҳтимол	5
1-§.	Ҳодиса	5
2-§.	Тасодифий ҳодисалар устида амаллар	5
3-§.	Тасодифий ҳодисаларнинг турлари	7
4-§.	Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли	8
5-§.	Комбинатория элементлари	11
6-§.	Эҳтимолларни бевосита ҳисоблашга доир мисоллар	14
7-§.	Ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифи	15
II боб.	Тасодифий миқдорлар ва уларнинг сонли характеристикалари	17
1-§.	Тасодифий миқдор. Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар	17
2-§.	Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни	18
3-§.	Дискрет тасодифий миқдорларнинг баъзи муҳим тақсимот қонунлари	20
4-§.	Тақсимот функция ва тақсимот зичлиги	22
5-§.	Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг баъзи муҳим тақсимот қонунлари	28
6-§.	Тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари	30
II қисм.	Математик статистика	37
III боб.	Танланма усул	37
1-§.	Бош ва танланма тўплам	37
2-§.	Танланманинг статистик тақсимооти	39
3-§.	Тақсимотнинг эмпирик функцияси	41
4-§.	Тақсимотларни график тасвирлаш	43
5-§.	Статистик характеристикалар	46
IV боб.	Тақсимот параметрларини танланма тўплам бўйича баҳолаш	53
1-§.	Статистик баҳо тушунчаси	53
2-§.	Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар	55
3-§.	Статистик баҳоларни топиш усуллари	57
4-§.	Бош ўртача қиймат ва бош дисперсияни ўртача танланма қиймат ва танлама дисперсия орқали баҳолаш	61
5-§.	Баҳонинг аниқлиги. Ишончли оралиқ	64

V боб.	Статистик моментлар ва уларни ҳисоблашнинг соддалаштирилган усули	71
1-§.	Шартли вариантлар.....	71
2-§.	Оддий, бошланғич ва марказий статистик моментлар	72
3-§.	Шартли статистик моментлар. Марказий моментларни шартли моментлар бўйича топиш.....	73
4-§.	Ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар усули.....	75
5-§.	Назарий частоталар қаторини ҳисоблаш.....	78
VI боб.	Аниқ маълумотларни назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотларга мослик даражасини ўрганиш.....	83
1-§.	Аниқ маълумотлар ва гипотеза	83
2-§.	Нолинчи гипотезани текширишнинг статистик критерийси.....	84
3-§.	Бош тўплам тақсимотининг кўриниши ҳақидаги гипотезани текшириш. χ^2 критерийси.....	85

ЭХТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ I БОБ. ХОДИСА ВА ЭХТИМОЛ

1-§. Ходиса

Эхтимоллар назариясида ходиса тушунчаси бошланғич тушунчалардан биридир. Рўй беради ёки рўй бермайди деб гапириш мумкин бўлган ҳар қандай воқеа **ходиса** дейилади.

Барча ходисаларни муқаррар, мумкин бўлмаган ва тасодифий ходисаларга ажратиш мумкин.

Муқаррар ходиса деб маълум шарт-шароит бажарилганда албатта рўй берадиган ходисага айтилади. Масалан, шошқол тошни (ўйин соққасини) ташлаганда олти очкодан кўп тушмаслигини ходиса деб олсак, бу ходиса албатта рўй беради, яъни у муқаррар ходиса бўлади.

Мумкин бўлмаган ходиса деб маълум шарт-шароит бажарилганда мутлақо рўй бермайдиган ходисага айтилади. Масалан, шошқол тошни ташлаганда 7 очко тушишини ходиса деб қарасак, албатта, бу ходиса рўй бериши мумкин бўлмаган ходиса бўлади.

Тасодифий ходиса деб маълум шарт-шароит бажарилганда рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ходисага айтилади. Масалан, шошқол тошни ташлаганда жуфт (ёки тоқ) тушишлигидан иборат бўлган ходиса тасодифий ходиса бўлади.

Муқаррар ходисани U ҳарфи билан, мумкин бўлмаган ходисани V ҳарфи билан, тасодифий ходисаларни эса $A, B, C, D, \dots$ ҳарфлар билан белгилайлик. Муқаррар, мумкин бўлмаган ва тасодифий ходисалар берилган шарт-шароитга боғлиқ бўлган нисбий тушунчалардир. Берилган шарт-шароит ўзгариши билан ходиса характери ҳам ўзгариши мумкин. Масалан, сув 760 мм симоб устуни босимида 100^0 C гача иситилганда (шу шароитда) буғга айланади (A ходиса рўй беради). Лекин атмосфера босими ўзгарганда (яъни берилган шарт-шароит ўзгарганда) сув 100^0 C да буғга айланмайди (A ходиса рўй бермайди).

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Эхтимоллар назариясида «ходиса» дейилганда нимани тушунилади?
2. Қандай ходисалар тасодифий, муқаррар ва мумкинмас ходисалар дейилади? Бундай ходисаларга мисоллар келтиринг.

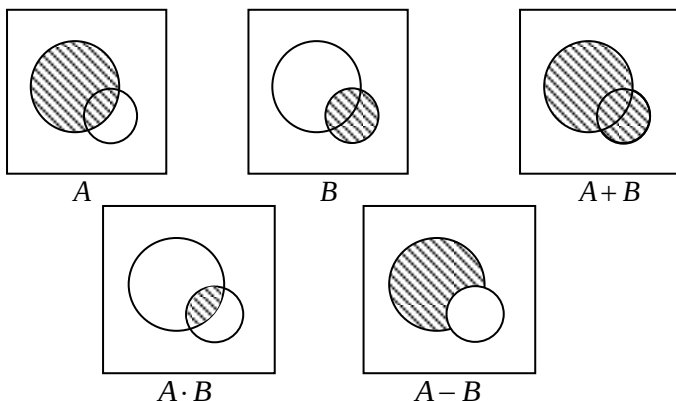
2-§. Тасодифий ходисалар устида амаллар

1. Агар A ходиса рўй беришидан B ходисанинг ҳам рўй бериши келиб чиқса, у вақтда A ходиса B ходисани эргаштиради дейилади ва қисқача $A \subset B$ деб ёзилади.

Масалан, шошқол тошни ташлаганда A ҳодиса деб 2 очко тушишини, B ҳодиса деб жуфт очко тушишини белгиласак, у вақтда A ҳодиса рўй беришидан B ҳодисанинг ҳам рўй бериши келиб чиқади.

2. Агар $A \subset B$ ва $B \subset A$, яъни A ҳодиса B ҳодисани эргаштирсин, ва аксинча, B ҳодиса A ҳодисани эргаштирсин, у ҳолда A ва B ҳодисалар тенг кучли (тенг) дейилади ва $A = B$ деб белгиланади.
3. A ва B ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда бирининг рўй беришидан иборат бўлган ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси дейилади ва $A + B$ деб белгиланади.
4. A ва B ҳодисаларнинг иккаласи бир вақтда рўй беришидан иборат ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг кўпайтмаси дейилади ва $A \cdot B$ деб белгиланади.
5. A ва B ҳодисалардан A рўй бериб, B рўй бермаслигидан иборат бўлган ҳодиса A ва B ҳодисаларнинг айирмаси дейилади ва $A \setminus B$ (ёки $A - B$) деб белгиланади.

Тасодикий ҳодисалар орасидаги юқорида киритилган тушунчаларни қуйидаги шакл ёрдамида тушунтириш қулай. Шарт-шароит квадратга нуктани таваккалига ташлашдан иборат бўлсин.



A ҳодиса деб ташланган нуктанинг катта айлана ичига тушишини, B ҳодиса деб кичик айлана ичига тушишини белгилаймиз. У ҳолда A , B , $A + B$, $A \cdot B$, $A - B$ ҳодисалар танланган нуктанинг тегишли шакллардаги штрихланган соҳаларга тушишидан иборат.

Берилган шарт-шароитда бирор ҳодисанинг рўй бериш-бермаслигини билиш учун аввал шу шарт-шароитни амалга ошириш керак бўлади. Берилган ана шу шарт-шароитни амалга ошириш тажриба

(синаш, кузатиш) дейилади. Шундай қилиб, биз ҳодисани тажриба натижаси сифатида қараймиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай ҳодисалар тенг кучли ҳодисалар деб аталади?
2. Ҳодисаларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва айирмаси деб қандай ҳодисаларга айтилади?

3-§. Тасодифий ҳодисаларнинг турлари

1. Агар A ва B ҳодисалар бир вақтда рўй бериши мумкин бўлмаса, яъни $A \cdot B = V$ бўлса, у ҳолда A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар дейилади. Масалан, ўйин соққасини бир марта ташлашда мумкин бўлган исталган очконинг тушиши (A ҳодиса) бошқа сондаги очконинг тушиши (B ҳодиса) билан биргаликда эмас. Жуфт сондаги очко тушиши (C ҳодиса) тоқ сондаги очко тушиши (D ҳодиса) билан биргаликда эмас.

2. Агар тажриба натижасида $A, B, C, \dots, L$ ҳодисалардан биттаси рўй бериши ва фақат биттасининг рўй бериши муқаррар ҳодиса бўлса, у ҳолда бу ҳодисалар ягона мумкин бўлган ҳодисалар дейилади. Масалан, иккита пул-буюм лотереяси сотиб олинганда қуйидаги ҳодисалардан биттаси ва фақат биттаси албатта рўй беради: «ютуқ бир билетга чиқмади, иккинчисига чиқди», «ютуқ иккила билетга ҳам чиқди», «ютуқ иккала билетга ҳам чиқмади». Бу ҳодисалар ягона мумкин бўлган ҳодисалардир.

3. Агар $A, B, C, D, \dots, L$ ҳодисалардан ҳеч бирини бошқаларига нисбатан мумкинроқ дейишга объектив сабаблар бўлмаса улар тенг имкониятли ҳодисалар дейилади. Масалан, симметрик танга ташлашда гербли ва рақамли томон тушишидан иборат G ва P ҳодисалар тенг имкониятли ҳодисалар. Чунки танга бир жинсли материалдан тайёрланган, тўғри цилинрик шаклга эга. Ўйин соққасини бир марта ташлашда у ёки бу сондаги очколар тушишидан иборат бўлган ҳодисалар тенг имкониятли ҳодисалар. Чунки соққа бир жинсли материалдан тайёрланган мунтазам кўпёк шаклига эга.

4. Агар тажриба натижасида $A, B, C, D, \dots, L$ ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттаси рўй берса, яъни

$$A + B + C + D + \dots + L = U$$

бўлса, у ҳолда бу ҳодисалар ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил қилади дейилади.

Кўпроқ ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил қилувчи ўзаро биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг қизиқтиради. Масалан, ўйин

соққасини бир марта ташлашда мос равишда 1, 2, 3, 4, 5, 6 очколарни тушишидан иборат бўлган $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ ҳодисалар тўплами ва танга ташлашда герб ва рақам томон тушишдан иборат бўлган G ва P ҳодисалар тўплами биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил қилади.

5. Тўла гуруҳ ташкил этувчи ягона мумкин бўлган иккита ҳодиса қарама-қарши ҳодисалар дейилади. Қарама-қарши ҳодисалардан бири A деб белгиланса, иккинчисини $\bar{A}$ билан белгилаш қабул қилинган. Масалан, нишонга қарата ўқ узишда ўқнинг нишонга тегиш ва тегмаслик ҳодисалари қарама-қарши ҳодисалардир. Агар A нишонга тегиш ҳодисаси бўлса, у ҳолда $\bar{A}$ нишонга тегмаслик ҳодисаси бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар дейилади?
2. Қандай ҳодисалар ўзаро қарама-қарши ҳодисалар дейилади?
3. Қарама-қарши ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўладими?
4. Ягона мумкин бўлган ҳодисалар деб қандай ҳодисаларга айтилади.
5. Қандай ҳодисалар тенг имкониятли ҳодисалар деб аталади?
6. Ҳодисаларнинг тўла гуруҳи деб нимага айтилади? Унга мисоллар келтиринг.

4-§. Тасодифий ҳодисаларнинг эҳтимоли

Биз тасодифий ҳодисаларни таққослаб, кўп ҳолларда улардан бири иккинчисига нисбатан кўпроқ имкониятли деб айтамыз. Масалан, тангани ташлаганда гербли томоннинг тушиши икки кишининг туғилган куни бир хил бўлишига нисбатан кўпроқ имкониятли ҳодисалар, бу ҳодисалардан иккинчиси эса ўз навбатида «Спортлото»дан максимал ютуқ олишга нисбатан кўпроқ имкониятлидир.

Буларга ўхшаш таққослашларга микдорий маъно бериш учун ҳар бир ҳодиса билан унинг имкониятлик даражасини боғлаш лозим. Мана шу сон ҳодисанинг эҳтимоли деб аталади. Шундай қилиб, эҳтимол ҳодисанинг рўй бериш имконияти даражасини характерловчи сондир. Бундай сонни, яъни эҳтимолни киритишнинг классик усули куйидагидан иборат.

Тажриба натижасида рўй берадиган ҳодисалар сони чекли бўлсин. Тажрибада рўй бериши мумкин бўлган ҳар бир ҳодисани

элементар ҳодиса деб атаймиз. Элементар ҳодисаларни $E_1, E_2, \dots, E_n$ орқали белгилаймиз ва уларга қуйидаги шартларни қўямиз:

1. Бу ҳодисалар биргаликда эмас.
2. $E_1, E_2, \dots, E_n$ ҳодисалар ягона мумкин бўлган ҳодисалар.
3. $E_1, E_2, \dots, E_n$ ҳодисалар тенг имкониятли.

Айтайлик, A ҳодиса берилган бўлиб, у E_i элементар ҳодисалардан баъзилари рўй берганда рўй берсин, бошқалари рўй берганда рўй бермасин. Бундай ҳолда биз E_i элементар ҳодисалардан рўй бериши A ҳодисанинг рўй беришига ҳам олиб келадиганларини A ҳодисага қулайлик туғдирувчи деб айтамиз.

Фараз қилайлик, қаралаётган n та $E_1, E_2, \dots, E_n$ элементар ҳодисалардан m таси A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирсин. У ҳолда A ҳодисанинг эҳтимоли деб A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонини тажрибанинг ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли элементар ҳодисалари жами сонига бўлган нисбатига айтилади. A ҳодисанинг эҳтимоли $P(A)$ деб белгиланади.

Шундай қилиб, A ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги формула билан аниқланади:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

бу ерда m – A ҳодисанинг рўй беришига қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони, n эса тажрибанинг мумкин бўлган барча элементар ҳодисалари сони.

Келтирилган таърифни мисолда тушунтирамиз. Ўйин соққасини бир марта ташлаш тажрибасини қарайлик. Бу тажрибамизда элементар ҳодисалар 6 та:

E_1 – бир очко тушишидан,

E_2 – икки очко тушишидан,

E_3 – уч очко тушишидан,

E_4 – тўрт очко тушишидан,

E_5 – беш очко тушишидан,

E_6 – олти очко тушишидан иборат ҳодисалар.

Бу ҳодисалар юқорида кўйилган шартларнинг ҳаммасини қаноатлантиришини осонгина текшириб кўриш мумкин. Бундан таърифга кўра

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_6) = \frac{1}{6}$$

бўлиши келиб чиқади, чунки $E_1, E_2, \dots, E_6$ ҳодисаларнинг ҳар бирига фақат унинг ўзи қулайлик туғдиради, яъни бу ерда $m = 1, n = 6$.

Агар A ҳодиса жуфт сондаги очко тушишидан иборат бўлса, у ҳолда унга икки, тўрт ва олти очколар тушишидан иборат бўлган E_2, E_4 ва E_6 элементар ҳодисалар қулайлик туғдиради. Демак, A ҳодиса учун $m = 3$ бўлиб,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

бўлади.

Айтайлик, B ҳодиса уч сонга карали очко тушишидан иборат бўлсин. У ҳолда B ҳодисага E_3 ва E_6 элементар ҳодисалар қулайлик туғдиради, демак, B ҳодиса учун $m = 2$ бўлиб,

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

бўлади.

Юқорида келтирилган таъриф эҳтимолнинг классик таърифи деб юритилади. Бу таъриф жуда тушунарли ва содда бўлса-да, камчиликлардан холи эмас. Бу камчиликларга кейинроқ тўхталамиз (7-§ га қаранг). Ҳозир эса юқорида келтирилган таърифга асосланган эҳтимолнинг содда хоссаларини келтираемиз.

1. Муқаррар ҳодисанинг эҳтимоли бирга тенг:

$$P(U) = 1$$

Ҳақиқатдан ҳам, агар ҳодиса муқаррар бўлса, у ҳолда тажрибанинг ҳар бир элементар ҳодисаси унга қулайлик туғдиради. Бу ҳолда $m = n$ ва демак,

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2. Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоли нолга тенг:

$$P(V) = 0$$

Ҳақиқатдан ҳам, агар ҳодиса рўй бермайдиган бўлса, у ҳолда тажрибанинг ҳеч бир элементар ҳодисаси унинг рўй беришига қулайлик туғдирмайди. Бу ҳолда $m = 0$ ва демак,

$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

3. Тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли нол ва бир орасида бўлади.

$$0 < P(A) < 1$$

Ҳақиқатдан ҳам, тасодифий ҳодисанинг рўй беришига тажрибанинг барча элементар ҳодисаларидан бир қисмигина қулайлик туғдиради. бу ҳолда $0 < m < n$, шунинг учун $0 < \frac{m}{n} < 1$ ва демак,

$$0 < P(A) < 1$$

Шундай қилиб, исталган A ҳодисанинг эҳтимоли қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Элементар ҳодиса нима?
2. Эҳтимолнинг классик таърифини айтинг. У қандай хоссаларга эга?

5-§. Комбинаторика элементлари

Классик таърифдан фойдаланиб масалалар ечишда комбинаторика элементлари муҳим роль ўйнайди, шуни эътиборга олиб комбинаториканинг баъзи элементлари устида тўхталиб ўтамиз.

1. Ўринлаштиришлар сони: n та элементдан m ($n \geq m$) тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар деб барча шундай бирлашмаларга (гуруҳларга) айтиладики, бу бирлашмаларнинг ҳар бирида m тадан элемент бўлиб, улар бир-бирларидан m элементлари билан m элементларнинг тартиби билан фарқ қилади. Масалан, 3 та a, b, c элементлардан 2 тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар:

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb$$

бўлади.

n та элементдан m тадан олиб тузилган барча ўринлаштиришлар сони A_n^m символ билан белгиланади ва у

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

формула билан аниқланади.

Шундай қилиб, n та элементдан m тадан олиб тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришлар сони энг каттаси n бўлган m та кетма-кет бутун сонларнинг кўпайтмасига тенг. Масалан,

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

2. Ўрин алмаштиришлар сони. Ҳар бирига берилган n та элементнинг ҳаммаси кирадиган ва бир-биридан фақат элементларининг тартиби билан фарқ қиладиган бирлашмалар ўрин алмаштиришлар дейилади. Масалан, учта a, b, c элементдан ҳаммаси бўлиб 6 та турли ўрин алмаштиришлар тузиш мумкин:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

n та элементдан тузиш мумкин бўлган ўрин алмаштиришлар сонини P_n символ билан белгилаш қабул қилинган. Ўрин алмаштиришни ҳар бир ўринлаштиришга кирувчи элементлар барча элементлар сонига тенг, яъни $m = n$ бўлган ўринлаштириш деб қараш мумкин. Бундан n та элементдан тузилган барча ўрин алмаштиришлар сони учун куйидаги формула ҳосил бўлади:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))$$

ёки кўпайтувчиларни тескари тартибда ёзсак,

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n = n!$$

бўлади.

Демак, n та элементдан тузиш мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сони 1 дан n гача (n ҳам киради) кетма-кет натурал сонлар кўпайтмасига тенг. Масалан,

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

3. Гуруҳлашлар сони n та элементдан m тадан олиб тузилган гуруҳлашлар деб, ҳар бири m та турли элементлардан тузилган ва бир-биридан камида бита элементи билан фарқ қиладиган бирлашмаларга айтилади. Масалан, 4 та a, b, c, d элементлардан 3 тадан олиб гуруҳлашлар тузсак, улар ҳаммаси бўлиб тўртта бўлади:

$$abc, abd, acd, bcd$$

n та элементдан m тадан олиб тузилган гуруҳлашлар сонини C_n^m символ билан белгилаш қабул қилинган. У

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \quad (1)$$

формула билан аниқланади.

(1) тенгликнинг ўнг томонини $(n-m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-m)$ га кўпайтириб ва бўлиб, гуруҳлашлар сонини топиш формуласини бошқача, чунончи

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (1')$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Бу формулада m сонни $n - m$ сон билан алмаштирсак, у ҳолда

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (2)$$

формуласини ҳосил бўлади.

(1') ва (2) формулаларнинг ўнг томонлари ўзаро бир-бирига тенг, демак, уларнинг чап томонлари ҳам тенг, яъни

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (3)$$

$m = n$ бўлсин, у ҳолда (1'), (2) ва (3) формулалардан мос равишда куйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!}, \quad C_n^0 = \frac{n!}{0!n!} \quad \text{ва} \quad C_n^n = C_n^0$$

$C_n^n = 1$, чунки n та элементдан n та элементдан иборат бўлган фақат битта гуруҳлаш тузиш мумкин. Шунинг учун юқоридаги тенгликларнинг тўғрилигини тасдиқлаш учун

$$C_n^0 = 1 \quad \text{ва} \quad 0! = 1$$

деб ҳисоблаш керак.

1-Мисол. 10 та элементдан тўрттадан олиб тузилган гуруҳлашлар сонини топинг.

Ечиш: (1) формуладан фойдаланиб,

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

га эга бўламиз.

2-Мисол. 20 та элементдан 17 тадан олиб тузилган гуруҳлашлар сонини топинг.

Ечиш: Аввал (3) формуладан, кейин (1) формуладан фойдаланамиз:

$$C_{20}^{17} = C_{20}^{20-17} = C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 1140$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ўринлаштиришлар сони нима?
2. Ўрин алмаштиришлар сони нима?
3. Гуруҳлашлар сони нима?

6-§. Эҳтимолларни бевосита ҳисоблашга доир мисоллар

Бу параграфда классик таърифдан фойдаланиб, баъзи ҳодисаларнинг эҳтимолларини ҳисоблаймиз.

1-Мисол. Телефонда номер тера туриб, абонент битта рақамни эсидан чиқариб қўйди ва уни таваккалига терди. Керакли рақам терилганлик эҳтимолини топинг.

Ечиш: A орқали керакли рақам терилганлик ҳодисасини белгилаймиз. Абонент 10 та рақамдан исталган бирини терган бўлиши мумкин, шунинг учун мумкин бўлган элементар ҳодисалар сони 10 га тенг. Бу элементар ҳодисалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли.

A ҳодисага биттагина элементар ҳодиса (керакли рақам фақат битта) қулайлик туғдиради. Демак, $n = 10$, $m = 1$. У ҳолда

$$P(A) = \frac{1}{10}$$

бўлади.

2-Мисол. Телефонда номер тера туриб, абонент охирги иккита рақамни эсдан чиқариб қўйди ва фақат шу рақамларнинг ҳар хиллигини эслаб, уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар тузилганлик эҳтимолини топинг.

Ечиш: B орқали керакли иккита рақам терилганлик ҳодисасини белгилаймиз. Ҳар хил рақамлар жуфтини 10 та рақамдан 2 тадан олиб тузилган ўринлаштиришлар сони нечта бўлса, шунча сондаги усул, яъни $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ та усул билан териш мумкин. Шундай қилиб, тажрибанинг мумкин бўлган элементар ҳодисалари жами сони 90 га тенг. Бу элементар ҳодисалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли. B ҳодисага қулайлик туғдирадиганлари фақатгина битта, чунки керакли бўлган иккита ҳар хил рақам фақат битта. Демак, $n = 90$, $m = 1$. У ҳолда

$$P(B) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

3-Мисол. 5 та бир хил карточкага О, П, Р, С, Т ҳарфлар ёзилган. Карточкаларни тасодифий жойлаштирганда «спорт» сўзи ҳосил бўлиши (A ҳодиса) эҳтимолини топинг.

Ечиш: Кўрсатилган 5 та ҳарфнинг 5 тадан қилиб мумкин бўлган жойлаштиришлари сони, яъни тажрибанинг мумкин бўлган барча элементар ҳодисалари сони 5 та элементдан тузилган ўрин алмаштиришлар сонига тенг:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Бу элементар ҳодисалар ягона мумкин бўлган ва тенг имкониятли. Шу элементар ҳодисалардан фақат биттасида «спорт» сўзи ҳосил бўлади. Демак, изланаётган эҳтимол

$$P(A) = \frac{1}{120}$$

4-Мисол. Гуруҳда 12 та талаба бор. Улардан 8 таси аълочи. Рўйхат бўйича, тасодифий равишда 7 та талаба танланган. Ажратиб олинган талабалар орасида 5 та аълочи талаба бўлиши эҳтимолини топинг.

Ечиш: Тажрибада рўй бериши мумкин бўлган барча элементар ҳодисалар 12 та элементдан 7 тадан қилиб тузилган гуруҳлашлар сониға, яъни C_{12}^7 га тенг.

Бизни қизиқтираётган A ҳодиса «танланган 7 та талабадан 5 таси аълочи» бўлишиға қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сонини ҳисоблаймиз: 8 та аълочи талабадан 5 та аълочи талабани C_8^5 усул билан танлаш мумкин; бунда қолган $7-5=2$ та талаба аълочи бўлмаслиги лозим; 2 та аълочи бўлмаган талабани $12-8=4$ та аълочи бўлмаган талабадан C_4^2 та усул билан олиш мумкин. Демак, қулайлик туғдирувчи элементар ҳодисалар сони $C_8^5 C_4^2$ га тенг. У ҳолда A ҳодисанинг эҳтимоли:

$$P(A) = \frac{C_8^5 C_4^2}{C_{12}^7} = \frac{14}{33}$$

7-§. Ҳодиса эҳтимолининг статистик таърифи

Эҳтимолнинг классик таърифидан тажрибаларнинг мумкин бўлган натижалари сони чекли ва тенг имкониятли бўлгандагина эҳтимолларни бевосита ҳисоблашда фойдаланиш мумкин. Амалда эса мумкин бўлган натижалари сони чексиз бўлган тажрибалар анча кўп учраб туради. Бундай ҳолларда классик таърифни қўллаб бўлмайди. Тўғри, бу камчиликни эҳтимол таърифини тегишлича умумлаштириш йўли билан бартараф қилиши мумкин. аммо тажриба натижасини ҳамма вақт ҳам тенг имкониятли элементар ҳодисалар тўплами сифатида тасвирлаб бўлмайди. Элементар ҳодисаларға тенг асос бўла оладиган шартларни кўрсатиш эса ундан ҳам қийин. Одатда, элементар ҳодисаларнинг тенг имкониятлилиги ҳақида симметрияға асосланиб хулоса чиқарилади. Масалан, ўйин соққасини ташлашда бундай ҳол соққа мунтазам кўпёкли (куб) бўлганда бўлади. Бироқ симметриклик мулоҳазаларға асосланиш мумкин бўлган масалалар амалиётда жуда

кам учрайди. Бундай ҳолларда эҳтимолни киритишнинг табиийроқ усули қуйидагидан иборат.

A – бирор тажрибага нисбатан тасодифий ҳодиса бўлсин. Бир хил шарт-шароитда тажриба N марта ўтказилган бўлиб, уларнинг N_A таси A ҳодиса рўй берди деб Фараз қиламиз. Ушбу

$$\mu = \frac{N_A}{N}$$

нисбатни тузамиз. Бу нисбат ўтказилаётган тажрибалар сериясида A ҳодиса рўй беришининг нисбий частотаси деб аталади.

Жуда кўп (деярли барча) тасодифий ҳодисалар учун нисбий частота турғунлик хоссасига эга бўлади. Бу тажрибалар сонини оширганда нисбий частотанинг барқарорлашувини ва бирор ўзгармас сонга яқинлашишини англатади. Айнан шу ўзгармас сон A ҳодисанинг рўй бериш имконияти даражасини белгилайди деб ҳисоблаш табиийдир.

Шу ўзгармас сонни A ҳодисанинг эҳтимоли деб қабул қиламиз. Бундай усулда аниқланган эҳтимол ҳодисанинг статистик эҳтимоли дейилади.

Шундай қилиб, тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли – берилган ҳодисага боғлиқ ўзгармас сон бўлиб, тажрибаларнинг кўп сериясида ҳодисанинг рўй бериш нисбий частотаси шу сон атрофида тебранади.

Частотанинг турғунлиги «тасодифлар» доирасида вужудга келадиган энг содда қонуниятлардан бирини ифода қилишини қайд қиламиз.

Эҳтимолнинг статистик таърифи назариянинг ўзи учун эмас, балки унинг амалий тадбиқлари учун ниҳоятда муҳимдир.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ҳодисанинг нисбий частотаси деб нимага айтилади?
2. Статистик эҳтимол тушунчаси қандай киритилади?

II БОБ. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ВА УЛАРНИНГ СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

1-§. Тасодифий миқдор. Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар

Тасодифий миқдор тушунчаси эҳтимоллар назариясининг марказий тушунчаларидан биридир.

Тасодифий миқдор деб берилган тажриба натижасида олдиндан инобатга олиб бўлмайдиган тасодифий сабабларга боғлиқ ҳолда у ёки бу сон қийматларни қабул қиладиган ўзгарувчи миқдорга айтилади.

Тасодифий миқдорлар лотин алфавитининг бош харфлари $X, Y, Z, \dots$ билан, уларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини эса тегишли кичик харфлари билан белгиланади.

1-Мисол. Ўйин соққасини ташлаш тажрибасини қарайлик. Бу тажриба натижасида соққанинг 1, 2, 3, 4, 5, 6 очколи томонлари тушиши мумкин. бунда тушадиган очколар сонини аввалдан айтиб бўлмайди. Демак, тушадиган очколар сони тасодифий миқдор бўлади. Бу тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 сонлар бўлади.

2-Мисол. Тўпдан отилган снаряднинг учиб ўтиш масофасини қарайлик. Бу масофа фақат нишонга олувчи асбобнинг ўрнатилишигагина боғлиқ бўлмай, балки аввалдан тўла-тўқис ҳисобга олиб бўлмайдиган бир қанча бошқа сабабларга (шамолнинг кучи ва йўналиши, харорат ва бошқаларга) ҳам боғлиқ бўлади. Шу сабабли бу масофани олдиндан айтиб бўлмайди, у тасодифий миқдор бўлади. Бу тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари сони чексиз бўлиб, улар бирор (a, b) ораликқа тегишли бўлади.

Тасодифий миқдорлар икки турга ажратилади: дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар.

Дискрет (узлукли) тасодифий миқдор деб айрим, ажралган қийматлар қабул қиладиган тасодифий миқдорга айтилади. Дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин.

Масалан, юқорида келтирилган мисолларнинг биринчисидаги тасодифий миқдор дискрет тасодифий миқдор бўлади. Одатда дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари бундай белгиланади:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_n$$

Узлуксиз тасодифий миқдор деб, чекли ёки чексиз ораликдан барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий миқдорга айтилади.

Масалан, юқорида келтирилган мисоллардан иккинчисидagi тасодифий миқдор узлуксиз тасодифий миқдор бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дискрет тасодифий миқдор таърифини беринг. Мисоллар келтиринг.
2. Узлуксиз тасодифий миқдор таърифини беринг. Мисоллар келтиринг.

2-§. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни

Юқорида кўрдикки, X дискрет тасодифий миқдорни ўрганиш учун Аввало унинг қабул қилиши мумкин бўлган $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларини билиш лозим. Бироқ бу ҳали етарли бўлмайди, яна $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ ҳодисаларнинг эҳтимолларини, яъни

$$p_i = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

эҳтимолларни ҳам кўрсатиш лозим.

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни деб унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари билан уларнинг эҳтимоллари орасидаги боғланишга айтилади.

Тақсимот қонунини жадвал орқали, аналитик усулда (формула кўринишида) ва график усулда бериш мумкин.

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни жадвал орқали берилишида жадвалнинг биринчи сатри қабул қилиши мумкин булган қийматларидан иккинчи сатри эса уларнинг эҳтимолларидан тузилади:

$$X : \begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p_i & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array} \quad (1)$$

Битта тажрибада X тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларидан биттасини ва фақат биттасини албатта қабул қилади. шу сабабли $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ ҳодисалар биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил қилади, демак бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари йиғиндиси, яъни жадвалнинг иккинчи сатридаги эҳтимоллар йиғиндиси бирга тенг:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Дискрет тасодифий миқдор учун юқорида жадвал тасодифий миқдорни тўла характерлаб беради. Шунинг учун ҳам (1) жадвал X дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни деб аталади.

1-Мисол. Битта тажриба ўтказилади, унда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг. A ҳодисанинг рўй бериш сонидан иборат X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини тузинг.

Ечиш: X тасодифий миқдор фақат иккита қиймат қабул қилади: 0 (A ҳодиса рўй бермаса, яъни A га қарама-қарши бўлган $\bar{A}$ ҳодиса рўй берса) ва 1 (A ҳодиса рўй берса). Бундан

$$p_1 = P(X = 0) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - p,$$

$$p_2 = P(X = 1) = P(A) = p$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, X тасодифий миқдорнинг изланаётган тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

$$X : \begin{array}{c|c|c} x_i & 0 & 1 \\ \hline p_i & 1-p & p \end{array}$$

2-Мисол. Пул-буюм лотареяси 100 та чипта чиқарилган. Унда битта 50 сўмлик ютуқ ва ўнта 20 сўмлик ютуқ ўйналмоқда. X тасодифий миқдор – битта лотареяси бор кишининг ютиғи. Унинг тақсимот қонунини тузинг.

Ечиш: X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини ёзамиз:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 20, \quad x_3 = 50$$

Бу қийматларни қабул қилиш эҳтимолларини топамиз:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{89}{100} = 0,89$$

$$p_2 = P(X = 20) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$p_3 = P(X = 50) = \frac{1}{100} = 0,01$$

Энди X тасодифий миқдорнинг изланаётган тақсимот қонунини ёзишимиз мумкин:

$$X : \begin{array}{c|c|c|c} x_i & 0 & 20 & 50 \\ \hline p_i & 0,89 & 0,1 & 0,01 \end{array}$$

$$\text{Текшириш: } 0,89 + 0,1 + 0,01 = 1$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолларининг тақсимот қонуни таърифини беринг: мисоллар келтиринг.

3-§. Дискрет тасодикий микдорларнинг баъзи муҳим тақсимот қонунлари.

1. Биномиал тақсимот қонун. Ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли p га тенг (демак, рўй бермаслик эҳтимоли $q = 1 - p$ га тенг) бўлган n та боғлиқ бўлмаган тажриба сериясини қарайлик. X тасодикий микдор – A ҳодисанинг рўй бериш сони бўлсин. X дискрет тасодикий микдор бўлиб, унинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари $0, 1, 2, \dots, n$ сонлардан иборат бўлади.

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимоллари $X = m$ ҳодисанинг эҳтимолини аниқловчи

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (*)$$

формула билан берилади, бу ерда $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

(*) формула эҳтимолларнинг биномиал тақсимоли қонуни деб аталади.

Қонуннинг биномиал дейилишига сабаб, (*) формуланинг ўнг томони

$$(p + q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + \dots + C_n^m p^m q^{n-m} + \dots + C_n^n p^n q^0$$

Ньютон биноми ёйилмасининг умумий ҳадидан иборат бўлгани.

(*) формула тақсимот қонунининг аналитик ифодасидир. Унинг жадвал кўриниши қуйидагича бўлади:

	m	0	1	...	m	...	n
$X :$	$p_n(m) =$	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n
	$P_n(X = m)$						

1-Мисол. 3 та чигит экилган. Экилган ҳар бир чигитнинг униб чиқиш эҳтимоли 0,8 га тенг. X тасодикий микдор – униб чиққан чигитлар сони. Унинг тақсимот қонунини тузинг.

Ечиш: Экилган 3 та чигитдан ё ҳеч бири униб чиқмаслиги, ёки 1 таси, ёки 2 таси, ёки 3 таси ҳам униб чиқиши мумкин. демак, X тасодикий микдор 0, 1, 2, 3 қийматлар қабул қилиши мумкин.

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимоллари (*) формулага кўра

$$P_3(m) = P_3(X = m) = C_3^m (0,8)^m \cdot (0,2)^{3-m}$$

бўлади.

Бундан

$$P_3(0) = P_3(X = 0) = C_3^0 p^0 q^3 = C_3^0 p^0 (1-p)^3 = (0,8)^0 \cdot (0,2)^3 = (0,2)^3 = 0,008;$$

$$P_3(1) = P_3(X = 1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot (0,8) \cdot (0,2)^2 = 0,096;$$

$$P_3(2) = P_3(X = 2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2) = 0,384;$$

$$P_3(3) = P_3(X = 3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0,8)^3 \cdot (0,2)^0 = (0,8)^3 = 0,512$$

Демак, экилган 3 та чигитдан униб чиққан чигитлар сонидан иборат X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни куйидагича бўлади:

$$X : \begin{array}{c|c|c|c|c} m & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P_3(m) & 0,008 & 0,096 & 0,384 & 0,512 \end{array}$$

$$\text{Текшириш: } 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1$$

2. Пуассон тақсимот қонуни. X – манфий бўлмаган бутун сон кийматлар қабул қиладиган тасодифий миқдор бўлиб, бу мумкин бўлган кийматларини

$$P(X = m) = P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (**)$$

эҳтимоллар билан қабул қилсин, бу ерда λ мусбат сон.

(**) формула эҳтимолларнинг Пуассон тақсимот қонуни деб аталади.

Пуассон тақсимот қонуни кўп ҳолларда камдан-кам рўй берувчи (сийрак) ҳодисаларнинг тақсимот қонуни деб ҳам юритилади.

Пуассон тақсимот қонунининг жадвал кўриниши

$$X : \begin{array}{c|c|c|c|c} m & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline P_m & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} & \dots \end{array}$$

бўлади. Бунда

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^0 = 1$$

Эслатма: λ ва m нинг турли қийматларида $P_m(\lambda)$ эҳтимолларни топиш учун махсус жадвал тузилган.

Бирор ҳодисанинг рўй бериши (белгининг намоён бўлиши) жуда кичик p эҳтимолга эга бўлса ва тажрибалар сони n етарлича катта бўлиб, np кўпайтма ўзгармас сон, яъни $np = \lambda$ бўлса бундай ҳолларда Пуассон тақсимот қонуни ўринли бўлади. Масалан, экин экилган

майдондаги бегона ўтлар сони, турли зараркунандалар билан зарарланган уруғликлар сони ва ҳ.к.лар бу тақсимот қонунга бўйсунди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай тақсимот биномиал тақсимот деб айтилади?
2. Қандай тақсимот Пуассон тақсимои деб айтилади?

4-§. Тақсимот функция ва тақсимот зичлиги

Биз 2-§да дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ўтгандик ва у дискрет тасодифий миқдорнинг тўла характеристикасини бера олишини кўрдик. Лекин узлуксиз тасодифий миқдор учун бундай тақсимот қонунни тузиб бўлмайди. Бунинг сабаби, узлуксиз тасодифий миқдор ўзининг ўзгариш оралиғидаги барча қийматларини қабул қилиши мумкин. Бундай тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларининг «саналган ва саналмаган» рўйхатини тузиш мумкин эмас. Эҳтимоллар назариясида турли типдаги тасодифий миқдорларни ягона (умумий) усул билан таърифлаш мақсадида тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси тушунчаси киритилади.

Айтайлик, X ихтиёрий тасодифий миқдор, x эса бирор ҳақиқий сон бўлсин. X нинг x дан кичик қиймат қабул қилишидан иборат ҳодисанинг, яъни $X < x$ ҳодисанинг эҳтимолини $F(x)$ оркали белгилаймиз. x нинг ўзгариши билан умуман олганда $F(x)$ ҳам ўзгаради, яъни у x нинг функцияси.

Тақсимот функцияси деб, ҳар бир x қиймат учун X тасодифий миқдорнинг x дан кичик қиймат қабул қилишини аниқловчи $F(x)$ функцияга айтилади, яъни

$$F(x) = P(X < x)$$

Бу тенгликни геометрик нуктаи назардан бундай талқин қилиш мумкин: агар тасодифий миқдорнинг қийматларини сон ўқининг нуқталари билан тасвирласак ва x абциссали нуқтани N ҳарфи билан белгиласак, у ҳолда $F(x)$ функция тасодифий миқдорнинг қиймати бўлган M нуқтанинг N нуқтадан чапроқда бўлиши эҳтимолидан иборат бўлади.

Тақсимот функцияни исталган типдан – узлуксиз, шунингдек, дискрет типдаги тасодифий миқдорлар учун ҳам ёзиш мумкин эканини кайд қилиб ўтамиз.

Дискрет тасодифий миқдор учун тақсимот функция қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P_i$$

Бу ерда Σ символ қўшиш бўлиб, қўшиш x_i нинг $x_i < x$ шартни қаноатлантирувчи барча қийматлари учун бажарилади. X нинг кетма-кет иккита қийматлари орасида $F(x)$ функция ўзгармасдир. x аргумент тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган x_i қийматидан ўтганда $F(x)$ функция сакраб, $P_i = P(X = x_i)$ қийматга ўсади, демак, x_i нукта $F(x)$ функциянинг биринчи тур узилиш нуктаси бўлади.

Шундай қилиб, дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси поғонавий функциядир.

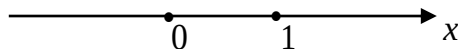
Тақсимот функциясини топишга доир мисоллар келтирамиз.

1-мисол. X тасодифий миқдор битта ўқ узишда нишонга тегиш сони бўлиб, бунда ўқнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,3 га тенг. X тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.

Ечиш: X нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари иккита: 0 ва 1 экани равшан. Унинг тақсимот қонунини ёзамиз:

$X :$	x_i	0	1
	p_i	0,7	0,3

Тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматларини сон ўқида ясаймиз:



$x \leq 0$ бўлсин. У ҳолда $X < x$ ходисаси мумкин бўлмаган ходиса бўлади, чунки бу ҳолда тасодифий миқдорнинг $x_i < x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи битта ҳам қиймати йўқ. Демак,

$$F(x) = P(X < x) = P(V) = 0$$

Энди $0 < x \leq 1$ бўлсин. Бу ҳолда тасодифий миқдорнинг $x_i < x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қиймати фақат битта, у ҳам бўлса $x_1 = 0$ қиймат. Шунинг учун

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = p_1 = 0,7$$

Ва ниҳоят, $x > 1$ бўлганида тасодифий миқдорнинг ҳар иккала қийматлари ҳам $x_i < x$ тенгсизликни қаноатлантиради. У ҳолда

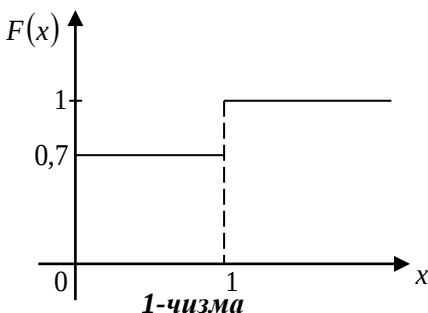
$$F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = p_1 + p_2 = 0,7 + 0,3 = 1$$

бўлади.

Шундай қилиб, қаралаётган X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 0,7, & \text{агар } 0 < x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

бўлади. Унинг графиги 1-чизмада тасвирланган.



2-мисол. Нукта $[0,1]$ кесмага таваккалига ташланган. Кесмага тушган нуктанинг абциссаси X тасодифий миқдор бўлсин (нукта кесмага албатта тушади деб фараз қилинади). X нинг тақсимот функциясини топинг.

Ечиш: Бу мисолимизда биз $[0,1]$ кесмадаги барча қийматларни қабул қилиши мумкин бўлган узлуксиз тасодифий миқдорга эгамиз. Шунинг учун $x \leq 0$ бўлганда $F(x) = 0$ бўлади, чунки $X < x$ ҳодисаси бу ҳолда мумкин бўлмаган ҳодиса. $x > 1$ бўлганда эса $X < x$ ҳодиса муқаррардир, демак, бу ҳолда $F(x) = 1$.

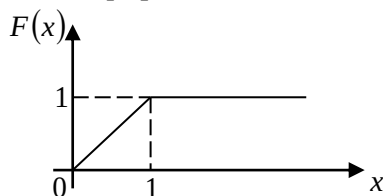
Энди x сон $0 < x \leq 1$ тенгсизликни қаноатлантирсин. Нукта кесмага таваккалига ташланаётганлиги сабабли абциссанинг барча қийматлари тенг имкониятлидир. Эҳтимолнинг $[1]$ да берилган геометрик таърифига кўра нуктанинг бирор ораликқа тушиш эҳтимоли шу ораликнинг узунлигига пропорционалдир. Ҳозирги ҳолда бу эҳтимол шу ораликнинг узунлигига тенг, чунки $[0, 1]$ кесманинг узунлиги 1 га тенг. $P(X < x)$ эҳтимол $(0, x)$ оралиқнинг узунлигига тенг, яъни

$$F(x) = P(X < x) = x$$

Шундай қилиб, X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси узил-кесил

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 0 < x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

кўринишида бўлади. Унинг графиги 2-чизмада тасвирланган.



2-чизма

Энди биз узлуксиз тасодифий миқдорнинг аниқроқ таърифини берсак бўлади: тасодифий миқдорнинг $F(x)$ тақсимот функцияси x аргументнинг барча қийматларида узлуксиз бўлса, тасодифий миқдорни узлуксиз деймиз.

Энди узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси билан боғлиқ бўлган тақсимот зичлиги тушунчасини киритамиз.

Тақсимот зичлик деб, тақсимот функциядан олинган биринчи тартибли $f(x) = F'(x)$ ҳосилага айтилади.

Келтирилган бу таърифга кўра, тақсимот функция тақсимот зичликнинг бошланғич функцияси бўлиб у $x \rightarrow -\infty$ да нолга айланади. Шунинг учун

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Шундай қилиб, тақсимот зичлигини билган ҳолда тақсимот функцияни топиш мумкин ва аксинча, тақсимот функция маълум бўлса, тақсимот зичликни топиш мумкин.

Тақсимот зичликнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1⁰. Тақсимот зичлик манфий эмас, яъни

$$f(x) \geq 0$$

2⁰. Тақсимот зичликдан $-\infty$ дан $+\infty$ гача олинган интеграл бирга тенг, яъни

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

3⁰. X тасодифий миқдор $a < X < b$ тенгсизликларни қаноатлантириш эҳтимоли тақсимот зичликдан a дан b гача олинган интегралга тенг, яъни

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Мисоллар:

1. X узлуксиз тасодифий миқдор ушбу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \sin x & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{2} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

тақсимот функция билан берилган. X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлигини топинг.

Ечиш: Таърифга кўра зичлик тақсимот функциядан олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Демак,

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ \cos x & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > \frac{\pi}{2} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, $(0, \frac{\pi}{2}]$ интервалда изланаётган тақсимот зичлик

$$f(x) = \cos x$$

бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$.

2. X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги бутун Ox ўқда

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

тенглик билан берилган. а) C ўзгармас параметрли топинг; б) X тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.

Ечиш:

а) тақсимот зичликнинг иккинчи хоссасига кўра

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1$$

Бундан

$$c = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}}.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \arctg(\infty) - \arctg(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Демак, $f(x)$ тақсимот зичлик $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ кўринишга эга бўлади.

б) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi} \arctg u \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctg x - \frac{1}{\pi} \arctg(-\infty) = \\ &= \frac{1}{\pi} \arctg x - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Демак, $F(x) = \frac{1}{2} + \arctg x$

3. X узлуксиз тасодифий миқдор $(0, 2)$ интервалда

$f(x) = x - \frac{1}{2}$ тақсимот зичлик билан берилган; бу интервалдан

ташқарида $f(x) = 0$. Тажриба натижасида X тасодифий миқдор $(0, 5; 1)$ интервалга тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимолини топинг.

Ечиш: Тақсимот зичликнинг учинчи хоссасига кўра изланаётган эҳтимол:

$$P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 f(x) dx = \int_{0,5}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \Big|_{0,5}^1 = -\frac{(0,5)^2 - (0,5)}{2} =$$

$$= \frac{-(0,5-1)}{4} = \frac{1-0,5}{4} = \frac{0,5}{4} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси деб нимага айтилади?
2. Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси қандай таърифланади?
3. Тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги деб нимага айтилади? У қандай хоссаларга эга.
4. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги билан тақсимот функцияси ўзаро қандай боғланган?

5-§. Узлуксиз тасодифий миқдорларнинг баъзи муҳим тақсимот қонунлари

Амалиётда қўйиладиган кўпчилик масалаларни ечишда узлуксиз тасодифий миқдорларнинг турли тақсимот қонунлари билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, текис тақсимот, нормал тақсимот, кўрсаткичли тақсимот, хи-квадрат тақсимот, Стюдент тақсимотлари шулар жумласидандир.

1. **Текис тақсимот.** Эҳтимолларнинг текис тақсимоти деб тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари тегишли бўлган интервалда тақсимот зичлиги ўзгармас, бу интервалдан ташқарида эса нолга тенг бўлган тасодифий миқдор тақсимотиға айтилади.

Демак, X узлуксиз тасодифий миқдор (a, b) интервалда текис тақсимланган бўлса, унинг тақсимот зичлиги

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{агар } a < x < b \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \leq a \text{ ёки } x \geq b \text{ бўлса.} \end{cases}$$

кўринишда бўлади.

2. **Нормал тақсимот.** Нормал тақсимот деб тақсимот зичлиги

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

кўринишида бўлган тасодифий миқдорнинг тақсимо­тига ай­тилади. Бунда $-\infty < x < \infty$, $\sigma > 0$, a – ихтиёрий сон.

3. **Кўрсаткичли тақсимот.** Кўрсаткичли тақсимот деб, тақсимот зичлиги

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

кўринишида бўлган тасодифий миқдорнинг тақсимо­тига ай­тилади. Бунда $\lambda > 0$ сон.

4. **Хи квадрат тақсимот.** k эркинлик даражали хиквадрат тақсимот деб, тақсимот зичлиги

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

кўринишида бўлган тасодифий миқдорнинг тақсимо­тига ай­тилади.

Бунда $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ – гамма функция

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

5. **Стьюдент тақсимо­ти.** k эркинлик даражали Стьюдент тақсимо­ти деб тақсимот зичлиги

$$f_k(x) = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

кўринишида бўлган тасодифий миқдорнинг тақсимо­тига ай­тилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай тақсимот текис тақсимот деб ай­тилади?
2. Қандай тақсимот нормал тақсимот деб ай­тилади?
3. Қандай тақсимот кўрсаткичли тақсимот деб ай­тилади?
4. Қандай тақсимот χ_u – квадрат тақсимот деб ай­тилади?
5. Стьюдент тақсимот деб қандай тақсимо­тга ай­тилади?

6-§. Тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари.

Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни тасодифий миқдор ҳақида тўлиқ маълумот беришини биламиз. Аммо ҳар бир масалада ҳам тақсимот қонунни билиш шарт бўлмайди. Қатор ҳолларда тақсимот қонуннинг энг муҳим хусусиятларини белгиловчи бир ёки бирнечта сонлар билан кифояланиш мумкин. Бундай турдаги сонлар тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари деб аталади. Уларнинг эҳтимоллар назариясидаги аҳамияти ниҳоятда катта. Жуда кўп масалалар тақсимот қонунни четда қолдириб фақат сонли характеристикаларга таянган ҳолда ҳал қилиниши мумкин.

Тасодифий миқдорнинг ҳозир биз танишадиган асосий сонли характеристикалари унинг математик кутилиши (ўртача қиймати) ва дисперсиясидир.

1. Тасодифий миқдорнинг математик кутилиши. Айтайлик,

X дискрет тасодифий миқдор бўлиб, u $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \dots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилсин.

X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (1)$$

тенглик билан аниқланадиган сонга айтилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари сони чексиз бўлиши ҳам мумкин. Бундай ҳолда тасодифий миқдорнинг математик кутилиши

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (2)$$

тенглик билан аниқланади. Математик кутилиш мавжуд бўлиши учун (2) қаторни абсолют яқинлашувчи деб фараз қилинади.

Шундай қилиб, дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши унинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларини мос эҳтимолларга кўпайтмалари йиғиндисидан иборат.

1-Мисол. Қуйидаги тақсимот қонуни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг:

$X :$	x_i	- 4	6	10
	p_i	0,2	0,3	0,5

Ечиш: (1) формулага асосан

$$MX = -4 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,5 = 6$$

2-Мисол. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Ечиш: Бу ҳолда, маълумки X тасодифий миқдор $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ қийматларни мос равишда $\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}, \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}, \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}, \dots, \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \dots$ эҳтимоллар билан қабул қилади. (2) формулага кўра

$$\begin{aligned} MX &= 0 \cdot \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots + n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \dots = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right) \end{aligned}$$

Қавс ичидаги қатор e^{λ} функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасидан иборатлиги математик анализ курсидан маълум.

Демак,

$$MX = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

Шундай қилиб, биз Пуассон тақсимотини характерловчи λ параметрнинг эҳтимолий маъносини аниқладик: λ параметр тасодифий миқдорнинг математик кутилишига тенг.

Энди узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши таърифини берамиз.

Айтайлик, X узлуксиз тасодифий миқдор $f(x)$ тақсимот зичлиги орқали берилган бўлсин.

Қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари (a, b) интервалга тегишли бўлган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг математик кутилиши деб,

$$MX = \int_a^b x f(x) dx \quad (3)$$

интегралга айтилади.

Агар X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун Ox ўққа тегишли бўлса, у ҳолда унинг математик кутилиши

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (4)$$

тенглик билан аниқланади. Бунда интеграл абсолют яқинлашади, яъни

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$$

интеграл мавжуд деб фараз қилинади.

3-Мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор $(0,1)$ интервалда

$$f(x) = 3x^2$$

тақсимот зичлик билан берилган. Бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$
 X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Ечиш: (3) формулага асосан

$$MX = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^1 = 0,75$$

4-Мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган. Унинг математик кутилишини топинг.

Ечиш: (4) формулага кўра нормал тақсимотнинг тақсимот зичлиги ифодасини (5-§.га қаранг) қўйсак

$$MX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаш учун $t = \frac{x-a}{\sigma}$ алмаштириш бажарамиз.

У ҳолда $x = \sigma t + a$, $dx = \sigma dt$ бўлиб,

$$MX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

бўлади.

Ҳосил қилинган интеграллардан биринчиси интеграл остидаги функция тоқ бўлганлиги сабабли нолга тенг. Иккинчиси Пуассон интегралли $\sqrt{2\pi}$ га тенг. Демак,

$$MX = a$$

Шундай қилиб, нормал тақсимот қонунидаги a параметрнинг эҳтимолий маъносини аниқладик: a параметр тасодифий миқдорнинг математик кутилишига тенг.

Энди математик кутилишнинг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1⁰. Ўзгармас миқдорнинг математик кутилиши шу миқдорнинг ўзига тенг:

$$MC = C$$

2⁰. Ўзгармас кўпайтувчини математик кутилиш белгисидан ташқарига чиқариб ёзиш мумкин:

$$M(CX) = C \cdot MX$$

3⁰. Чекли сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n$$

Шундай қилиб, тасодифий миқдорнинг ўртача қийматини характерловчи сонли характеристикалардан бири математик кутилиш билан танишдик.

2. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси. Тасодифий миқдорнинг математик кутилишинигина билиш билан унинг мумкин бўлган қийматлари қандай жойлашганлигини кўз олдимизга келтира оламиз. Масалан, - 1 ва + 1 қийматларнинг ҳар бирини 0,5 га тенг эҳтимол билан қабул қилувчи тасодифий миқдор учун ҳам, - 100 ва +100 қийматларнинг ҳар бирини худди шундай эҳтимоллар билан қабул қилувчи тасодифий миқдор учун ҳам математик кутилиш бир хил ва нолга тенг, шунга қарамасдан бу тасодифий миқдорларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари умуман математик кутилишга нисбатан сочилиши (тарқоқлиги) тамомила ҳар хил.

Тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари унинг ўртача қийматидан четланиш даражасини баҳолаш учун тасодифий миқдорнинг дисперсияси тушунчаси киритилади.

X тасодифий миқдорнинг *дисперсияси (тарқоқлиги, сочилиши)* деб шу тасодифий миқдор ва унинг математик кутилиши орасидаги айирма квадратининг математик кутилишига айтилади ва DX билан белгиланади.

Таърифга кўра,

$$DX = M(X - MX)^2 \quad (5)$$

бўлади.

Айтайлик, X дискрет тасодифий миқдор бўлиб, у $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларни мос равишда $p_1, p_2, \dots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилсин. $X = x_i$ ва $X - MX = x_i - MX$ ҳодисалар тенг кучли бўлганлиги учун уларнинг эҳтимоллари тенгдир. Шу сабабли $(X - MX)^2$ тасодифий миқдор $(x_i - MX)^2$ қийматни p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) эҳтимоллар билан қабул қилади. демак, дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсияси учун (5) формула ушбу

$$DX = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - MX)^2 p_i$$

кўринишда бўлади.

Айнан шунга ўхшаш, узлуксиз тасодифий миқдорлар учун (5) формула ушбу

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x) dx,$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 f(x) dx$$

кўринишларда бўлади, бу ерда $f(x)$ функция X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги.

Тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилишни қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенглигидан фойдаланиб, дисперсияни ҳисоблаш учун (5) формулага нисбатан қулайроқ формулани ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{aligned} DX &= M(X - MX)^2 = M(X^2 - 2 \cdot X \cdot MX + (MX)^2) = MX^2 - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = \\ &= MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2 \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$DX = MX^2 - (MX)^2, \quad (6)$$

яъни X тасодифий миқдорнинг дисперсияси шу тасодифий миқдор квадрати математик кутилишидан математик кутилиши квадратининг айирмасига тенг.

5-Мисол. Қуйидаги тақсимот қоунни билан берилган X дискрет тасодифий миқдорнинг дисперсиясини топинг:

$X :$	x_i	2	3	5
	p_i	0,1	0,6	0,3

Ечиш: X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топамиз:

$$MX = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$$

X^2 тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топиш учун унинг тақсимот қонунини тузамиз:

$X :$	x_i^2	4	9	25
	p_i	0,1	0,6	0,3

X^2 миқдорнинг математик кутилишини топамиз:

$$MX^2 = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3$$

Изланаётган дисперсия (6) формулага кўра

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05$$

6-Мисол. X тасодифий миқдор (a, b) интервалда текис тақсимланган. Унинг дисперсиясини топинг.

Ечиш: X тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топамиз. Бунинг учун (3) формуладан фойдаланамиз. Бу формулага кўрсаткичли тақсимотнинг тақсимот зичлиги ифодасини (5-§ га қаранг) қўйиб,

$$MX = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a} \int_a^b xdx = \frac{1}{2(b-a)} x^2 \Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

ни ҳосил қиламиз.

MX^2 ни топамиз. Таърифга кўра

$$MX^2 = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Демак,

$$MX^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

(6) формулага асосан изланаётган дисперсия:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Шундай қилиб, (a, b) интервалда текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг дисперсияси

$$DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

га тенг.

Энди тасодифий миқдорлар дисперсиясининг баъзи хоссаларини келтирамиз.

1⁰. Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг:

$$DC = 0$$

2⁰. Ўзгармас кўпайтувчини дисперсия белгисидан ташқарига уни квадратга ошириб чиқариш мумкин:

$$D(CX) = C^2 DX$$

3⁰. Ўзаро боғлиқ бўлмаган чекли сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси кўшилувчилар дисперсиясининг йиғиндисига тенг:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дискрет тасодифий миқдор математик кутилмасини таърифини айтинг.
2. Узлуксиз тасодифий миқдор математик кутилишининг таърифини айтинг.
3. Математик кутилишнинг асосий хоссаларини айтинг.
4. Тасодифий миқдорининг дисперсияси деб нимага айтилади? Унинг вазифаси нимадан иборат?
5. Дисперциянинг асосий хоссаларини айтинг.

2-ҚИСМ. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА III-БОБ. ТАНЛАНМА УСУЛ

1-§. Бош ва танланма тўплам

Айтайлик, маълум пахта майдонидаги ҳали очилмаган кўсакларнинг ўртача оғирлигини аниқлаш керак бўлсин. Бунинг учун майдондаги ҳамма кўсакларни йиғиб олиш ва уларни тортиш лозим, лекин бу билан катта майдондаги ҳосилни исроф қилган бўлар эдик. Бундай ҳолларда кўсакларнинг бир қисминигина йиғиб олиб, уларнинг ўртача оғирлиги аниқланади ва бу билан бутун майдондаги кўсакларнинг ўртача оғирлигини аниқлаш мумкин бўлади. Текширишнинг бундай усули *танланма усул* дейилади. Ўлча учун йиғиб олинган кўсаклар *танланма тўплам* ёки оддий қилиб *танланма* дейилади. Пахта майдонидаги барча кўсаклар тўплами эса бош тўплам дейилади.

Баъзан ялпи текширишлар ҳам ўтказилади. Лекин ялпи текшириш амалда нисбатан кам қўлланилади, сабаби ялпи текшириш ўтказиш катта сарф-харажатлар билан боғлиқ бўлиши ёки жисмонан жуда қийин бўлиши мумкин.

Масалан, мамлакат аҳолисининг сони, уларнинг ёши бўйича тақсимланиши, миллий таркиби тўғрисида маълумотларни талаб қилувчи ижтимоий-иқтисодий тадбирларни режалаштиришни олайлик. Бу маълумотларни йиғиш учун ҳар 10 йилда аҳоли сони рўйхатга олинади, яъни ялпи текшириш ўтказилади, қолган вақтларда эса зарур маълумотни йиғиш учун танланма сўровлар ўтказилади. Бу мисолда мамлакат аҳолисининг сўров ўтказиладиган қисми *танланма тўплам* дейилади. Мамлакатнинг бутун аҳолиси эса *бош тўплам* дейилади.

Шундай қилиб, бирор белгига¹ нисбатан ўрганиладиган барча бир жинсли объектлар тўплами *бош тўплам* дейилади. Бош тўпламдаги барча объектлар сони *бош тўпламнинг ҳажми* дейилади, уни N ҳарфи билан белгилаймиз. *Танланма тўплам* деб эса бош тўпламдан текшириш учун тасодифий равишда танлаб олинган объектлар тўпламига айтилади. Танланма тўпламдаги барча объектлар сони *танланманинг ҳажми* дейилади; уни n ҳарфи билан белгилаймиз.

Танланмалар ҳосил қилиниш усули бўйича такрор ва нотақрор танланмаларга ажратилади. Агар танланманинг объектлари (элементлари) бош тўпламдан олинган элементни (кейингисини олишдан олдин) яна бош тўпламга қайтариш йўли билан ажратилса, бундай танланма *такрор танланма* дейилади. Бунда ҳар бир танланган

¹ Параграф охиридаги изокга лъаранг.

элемент кейинги танлашда такрор чиқиши мумкин. агар танланманинг элементлари яна бош тўпламга қайтармасдан ажратилса, бундай танланма *нотакрор танланма* дейилди.

Амалиётда кўпинча нотакрор танланмадан фойдаланилади.

Бош тўплам тўғрисида танланма тўпламга асосланиб етарича ишонч билан фикр юритиш учун танланма тўпламнинг элементлари бош тўпламни тўғри тасвишлаши лозим, яъни танланма тўпламни мумкин қадар бош тўпламга «*ўхшаш*» қилиб танлаш керак. Бундай танланма *репрезентатив (масвирлай оладиган) танланма* дейилади.

Репрезентатив танланма ҳосил қилиш учун биз танланмани тасодикий танланма қилиб тузамиз, яъни уни шундай усул билан танлаб оламизки, бу усул бош тўпламнинг ҳар бир элементи танланмада бир хил имкониятлар билан қатнашишини таъминлайди.

Агар танланма тўплам репрезентатив бўлмаса, у ҳолда танланма тўплам устида чиқарилган хулосани бош тўпламга нисбатан тадбиқ қилиш нотўғри хулосаларга олиб келиши мумкин.

Мисол. 1936 йили АҚШ президентлигига Ф.Д.Рузвельт ва А.М.Лондон номзоди кўрсатилади. Америка журналларидан бири бу икки номзоддан қайси бирининг президент бўлиши мумкинлигини олдиндан айтмоқчи бўлган. Бунинг учун бош тўплам сифатида барча сайловчиларни, танланма сифатида хусусий телефонлар қайд қилинган китобдан – маълумотномадан таваккалига 4 миллион кишининг фамилиясини ажратади ва уларнинг фикрини билиш учун ҳар бирига хат ёзади. Жавобларни йиғиб кўргач, А.М.Лондон президент бўлиши мумкинлигини эълон қилади. Шу вақтда америкалик социологлар Геллен ва Роупер бош тўпламдан фақат 4 минг сайловчини ажратиб оладилар. Сайловчиларни ажратиб олишда уларнинг жамиятдаги тугган ўринлари, социал тенгсизликлар, сайловчиларнинг жамиятдаги нисбати каби факторларга эътибор берганлар. Бу социологларнинг танланмасида репрезентативлик сақланган. Натижада улар бу 4 минг сайловчининг фикри бўйича сайловда Ф.Д.Рузвельт сайланиши мумкинлигини айтадилар. Сайлов ўтгандан сўнг Геллен ва Роупернинг фикри тасдиқланади. Биринчи ҳолда танланма тўпламнинг ҳажми катта бўлгани билан репрезентативлик сақланмагани учун нотўғри хулоса чиқаришга асос бўлган. Бу мисолдан кўринадики, танланма тўпламни тўғри танлаган ҳолда бош тўплам ҳақида фикр юритилса математик статистиканинг хулосалари тўғри бўлади.

Изоҳ: Одатда бош тўпламни бирор X белгига нисбатан ўрганиш талаб қилинади. Бу X белги тасодикий миқдор сифатида талқин қилинади. Белгилар икки хил – сифат ва сон белгиларга ажратилади. Масалан, бош тўплам бирор хил деталлар гуруҳидан иборат бўлса, у ҳолда бош тўпламнинг сифат белгиси бўлиб, деталнинг

стандартлиги, сон белгиси бўлиб, унинг ўлчами хизмат қилиши мумкин.

Агар бош тўплам сон белгига нисбатан ўрганилаётган бўлса, X тасодифий миқдорнинг қиймати белги қиймати билан бир хил бўлади; агар сифат белгига нисбатан ўрганилаётган бўлса, X тасодифий миқдорнинг қиймати 1 (агар «сифатли» бўлса) ва 0 (агар «сифатсиз» бўлса) сонлардан иборат бўлиши мумкин. Демак, бош тўпламдан «танланма олинди» дейиш ўрнига X сон белги устида «кузатишлар ўтказилди» дейиш ҳам мумкин.

Шундай қилиб, танланмани X сон белги устида ўтказилган кузатишлар натижаси сифатида ҳам қараш мумкин.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Бош тўплам нима?
2. Танланмага таъриф беринг.
3. Танланманинг қандай турлари бор?

2-§. Танланманинг статистик тақсимоти

Бош тўпламдан n ҳажмли танланма олинган бўлиб, у

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (1)$$

қийматлардан иборат бўлсин. Улар сон қийматлари бўйича тартибсиз жойлашган бўлиши мумкин. Бундай ҳолда биринчи вазифа танланма тўпламни, яъни (1) ифодадаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматларни тартиблашдан иборат. Агар берилган

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

қийматларни тартиб ёки камайиб бориш тартибида, масалан,

$$x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$$

тартибида ёзсак,

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \quad (2)$$

кетма-кетлик *вариацион қатор* дейилади. (1) танланмадаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ лар эса *варианталар* деб айтилади.

Масалан, танлаб олинган 10 туп ғўзадаги ғунчалар сони аниқланганда қуйидаги сонлар ҳосил бўлган:

$$15, 17, 15, 10, 18, 11, 15, 17, 16, 16$$

Бунга мос вариацион қатор қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$10, 11, 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18.$$

Умуман, (2) даги қийматларнинг ҳар бири бир неча марта такрорланиши мумкин: айтайлик, X_1^* қиймат (варианта) n_1 марта, X_2^* қиймат n_2 марта, ..., X_k^* қиймат n_k марта такрорланган, шу билан бирга $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ бўлсин. У ҳолда $n_1, n_2, \dots, n_k$ сонлар частоталар, уларнинг танланма ҳажмига нисбати $W_i = \frac{n_i}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) лар эса *нисбий частоталар* дейилади.

Нисбий частоталар йиғиндиси бирга тенг бўлади:

$$W_1 + W_2 + \dots + W_k = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Танланманинг статистик ёки эмпирик тақсимои деб, вариантлар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади:

	X_i^*	X_1^*	X_2^*	...	X_k^*
	n_i	n_1	n_2	...	n_k
ёки	X_i^*	X_1^*	X_2^*	...	X_k^*
	W_i	W_1	W_2	...	W_k

Бундан кейин, соддалик учун вариацион қаторлардаги * белгини қўймаймиз.

Агар текширилиши лозим бўлган танланма тўпланда вариантлар сони жуда кўп бўлса, у ҳолда уларни гуруҳларга ажратиб, сўнгра ҳар бир гуруҳга кирган вариантлар сони ҳисобланади. Натижада танланманинг статистик тақсимои ҳосил бўлади. Бунда такрорланишлар сони энди айрим, алоҳида олинган вариантага тегишли бўлмасдан, балки гуруҳга тегишли бўлади, яъни гуруҳнинг такрорланиш сони (частотаси) бўлади. Масалан, қуйидаги берилган катта ёшдаги эркак ишчиларнинг бўйига кўра тақсимланиши бундай тақсимотга мисол бўла олади:

Бўйи (см ҳисобида)	Эркаклар сони, n_i	Бўйи (см ҳисобида)	Эркаклар сони, n_i
143-146	1	167-170	170
146-149	2	170-173	120
149-152	8	173-176	64
152-155	26	176-179	28
155-158	65	179-182	10
158-161	120	182-185	3
161-164	181	185-188	1
164-167	201	ЖАМИ	1000

Бундай статистик тақсимот *интервалли статистик тақсимот* дейилади.

Гуруҳлар сонини танлашда одатда, қуйидаги мулоҳазаларга амал қилинади:

- 1) гуруҳлар сони тоқ бўлгани маъқул;
- 2) танланманинг ҳажми катта ($n > 100$) бўлганда гуруҳлар сони кўп (масалан, 9, 11, 13 та) бўлгани, ҳажми катта бўлмаганда эса кам (масалан, 5, 7, 9 та) бўлгани маъқул.

Тажриба шуни кўрсатдики, танланма тўпламни нечта гуруҳга ажратилишигина эмас, балки биринчи гуруҳнинг чегаралари қандай аниқланишига ҳам бефарқ қараб бўлмайди. Гуруҳ оралиғи (кенглиги)ни унча катта олмаслик керак ва биринчи гуруҳнинг чегараларини шундай олиш керакки, энг кичик варианта шу гуруҳнинг тахминан ўртасига тўғри келсин.

Бу мулоҳазаларнинг ҳаммаси оқибат натижада тақсимотнинг характерли хусусиятларини тўсиб қўймаслик, тасодифий ўзгаришларни эса силлиқлаб юбориш мақсадини назарда тутати.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Танланманинг вариацион қатори нима?
2. Танланманинг статистик (эмпирик) тақсимотига таъриф беринг.

3-§. Тақсимолтнинг эмпирик функцияси

Танланма тўплам вариантларининг бир қисми (улуши) бирор x сондан кичик, қолганлари эса унга тенг ёки ундан катта бўлиши мумкин. Шунинг учун, ҳар бир x га йиғилган нисбий частоталар мос келади, уни $F_n(x)$ билан белгилаймиз. x нинг ўзгариши билан йиғилган нисбий частоталарнинг қийматлари ҳам ўзгаради, яъни $F_n(x)$ йиғилган нисбий частота x нинг функцияси бўлади.

Варианталарнинг x сондан кичик бўлган қийматларининг нисбий частотаси

$$F_n(x) = \frac{m(x)}{n}$$

тақсимотнинг эмпирик функцияси (танланманинг тақсимот функцияси) дейилади, бу ерда $m(x)$ ифода x дан кичик бўлган вариантлар сони, n эса танланма тўпламнинг ҳажми.

$F_n(x)$ функциянинг таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади:

1. Эмпирик функциянинг қийматлари $[0,1]$ кесмага тегишли.
2. $F_n(x)$ – камаймайдиган функция.
3. Агар X_1 – энг кичик варианта бўлса, у ҳолда $x < x_1$ да $F_n(x) = 0$; x_k – энг катта варианта бўлса, у ҳолда $x > x_k$ да $F_n(x) = 1$.

Мисол. Танланманинг куйида берилган тақсимои бўйича унинг эмпирик функциясини топинг:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Ечиш: Танланма ҳажмини топамиз:

$$12+18+30=60$$

Энг кичик вариантада 2 га тенг, демак, $x \leq 2$ бўлганда $F_{60}(x) = 0$. $2 < x \leq 6$ бўлганда x дан кичик қиймат, $x_1 = 2$ қиймати 12 марта кузатилган, демак, $2 < x \leq 6$ бўлганда $F_{60}(x) = \frac{12}{60} = 0,2$.

$6 < x \leq 10$ бўлганда x дан кичик қийматлар $x_1 = 2$ ва $x_2 = 6$ қийматлар $12+18=30$ марта кузатилган, демак, $6 < x \leq 10$ бўлганда $F_{60}(x) = \frac{30}{60} = 0,5$. $x_3 = 10$ энг катта варианта бўлгани учун $x > 10$ бўлганда $F_{60}(x) = 1$. Изланаётган эмпирик функция:

$$F_{60}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \text{ бўлганда,} \\ 0,2, & 2 < x \leq 6 \text{ бўлганда,} \\ 0,5, & 6 < x \leq 10 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 10 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Бу функциянинг графиги 1-расмда тасвирланган



1-расм.

Изоҳ: X белгили бош тўпламнинг номаълум $F(x) = P(X < x)$ тақсимот функциясини, танланманинг эмпирик функциясидан фарқ қилиб бош тўпламнинг *назарий функцияси (назарий тақсимот функцияси)* дейилади. Эмпирик ва назарий функциялар орасидаги фарқ шундаки, $F(x)$ назарий функция $X < x$ эҳтимолини аниқласа, $F_n(x)$ назарий функция шу ҳодисанинг нисбий частотасини аниқлайди. Эҳтимоллар назариясидаги Бернулли теоремасидан келиб чиқадики, $X < x$ ҳодисанинг нисбий частотаси, яъни $F_n(x)$ шу ҳодисанинг эҳтимоли $F(x)$ га эҳтимол бўйича яқинлашади. Бошқача қилиб айтганда $F_n(x)$ ва $F(x)$ функциялар бир-биридан кам фарқ қилади.

Шундай қилиб, танланма тақсимотнинг эмпирик функцияси бош тўпламнинг назарий тақсимот функциясини баҳолаш учун хизмат қилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Танланманинг эмпирик тақсимот функциясига таъриф беринг.
2. Эмпирик тақсимот функциясининг графиги қандай кўринишга эга?

4-§. Тақсимотларни график тасвирлаш.

Статистик тақсимотни график усулда тасвирлашда турли полигон ва гистограмма ясалади.

Частоталар полигони деб кесмалари $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ нукталарни туташтирувчи синиқ чизикқа айтилади. Частоталар полигонини яшаш учун абциссалар ўқига x_i вариантларни, ординаталар ўқига эса уларга мос n_i частоталарни кўйиб чиқилади. Сўнгра (x_i, n_i) нукталарни тўғри чизик кесмалари билан туташтириб, частоталар полигони ҳосил қилинади.

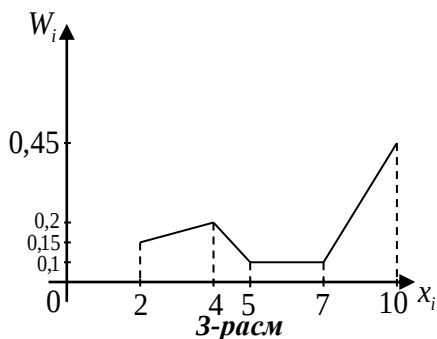
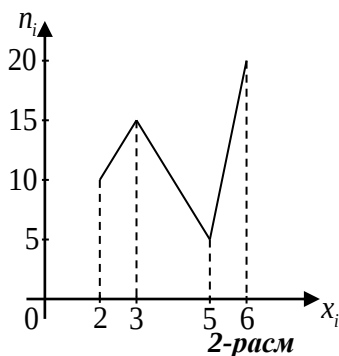
Нисбий частоталар полигони деб, кесмалар $(x_1, W_1), (x_2, W_2), \dots, (x_k, W_k)$ нукталарни туташтирувчи синиқ чизикқа айтилади. Нисбий частоталар полигонини яшаш учун абциссалар ўқига x_i вариантларни, ординаталар ўқига эса уларга мос W_i нисбий частоталарни кўйиб чиқилади. Сўнгра ҳосил бўлган (x_i, W_i) нукталарни тўғри чизик кесмалари билан туташтириб, нисбий частоталар полигони ҳосил қилинади.

2- ва 3-расмларда ушбу

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

x_i	2	4	5	7	10
W_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

таксимотларнинг частоталари ва нисбий частоталар полигони ясалган.



Статистик тақсимот интервал кўринишда берилган ҳолда гистограмма яшаш мақсадга мувофиқдир.

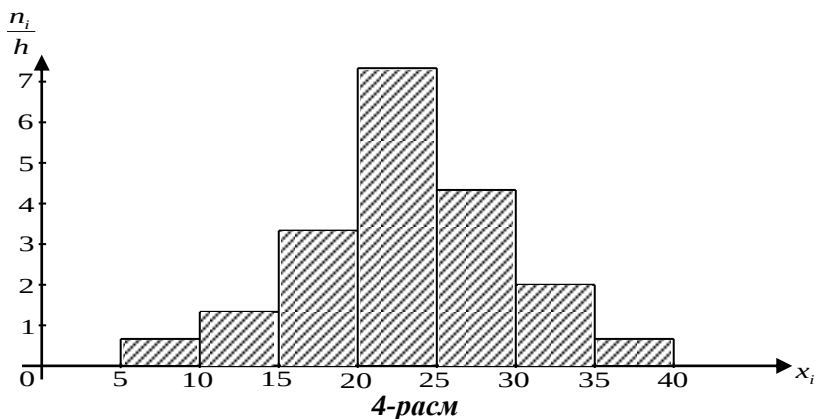
Частоталар гистограммаси деб, асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{n_i}{h}$ нисбатлар (частота зичлиги)га тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий шаклга айтилади. Частоталар гистограммасини яшаш учун абсиссалар ўқида қисмий интерваллар, уларнинг устига эса $\frac{n_i}{h}$ масофада абсиссалар ўқида параллел кесмалар ўтказилади.

i – қисмий тўртбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ га, яъни i – интервалдаги вариантлар сонига тенг, бинобарин, частоталар гистограммасининг юзи барча частоталар йиғиндисига, яъни танланма ҳажми n га тенг.

4-расмда $n = 100$ ҳажмли танланманинг ушбу

Узунлиги $h=5$ бўлган қисмий интерваллар	i – интервалга тушган вариантлар йиғиндиси – n_i	Частоталар зичлиги $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

тақсимои бўйича частоталар гистограммаси ясалган.



Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги интерваллар, баландликлари эса $\frac{W_i}{h}$ нисбатлар (нисбий частота зичлиги) га тенг бўлган тўртбурчаклардан иборат поғонавий шаклга айтилади. Нисбий частоталар гистограммасини яшаш учун абциссалар ўқида қисмий интервалларни қўйиб чиқилади, уларнинг тепасидан эса $\frac{W_i}{h}$ масофада абциссалар ўқида параллел кесмалар ўтказилади. Натижада нисбий частоталар гистограммаси ҳосил қилинади.

i – қисмий тўртбурчакнинг юзи $h \cdot \frac{W_i}{h} = W_i$ га, яъни i – интервалга тушган вариантларнинг нисбий частотасига тенг. Демак,

нисбий частоталар гистограммасининг юзи барча нисбий частоталар йиғиндисига, яъни бирга тенг.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Частоталар полигони нима ва у қандай ясалади?
2. Нисбий частоталар полигони нима ва у қандай ясалади?
3. Частоталар гистограммаси нима ва у қандай ясалади?
4. Нисбий частоталар гистограммаси нима ва у қандай ясалади?

5-§. Статистик характеристикалар

Статистик ҳисобнинг асосий масалаларидан бири *параметр* деб аталувчи ва вариацион қаторнинг (танланманинг) хусусиятларини ифодалаб берадиган характеристикаларини аниқлашдан иборат. Муҳим характеристикалар жумласига ўртача танланма қиймат, мода, медиана ва танланма дисперсиялар тегишлидир. Бундай характеристикаларни вариацион қаторнинг (танланманинг) статистик характеристикалари дейилади.

1. Ўртача танланма қиймат. Бош тўпламни X сон белгига нисбатан ўрганиш мақсадида ундан n ҳажми $x_1, x_2, \dots, x_n$ танланма олинган бўлсин.

Ўртача танланма қиймат деб, танланма тўплам белгисининг арифметик ўртача қийматига айтилади ва у $\bar{x}_T$ символ билан белгиланади.

Агар n ҳажмли танланма белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари турлича бўлса, таърифга кўра ўртача танланма қиймат

$$\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

ёки

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1')$$

Формула бўйича топилади, бу ерда $\sum$ йиғинди белгиси.

1-Мисол. Бирор физик катталикни битта асбоб билан 4 марта ўлчаш натижасида 8, 9, 11, 12 қийматлар ҳосил қилинган. Ўлчаш натижаларининг ўртача танланма қийматини топинг.

Ечиш: (1) формула бўйича $\bar{x}_T = \frac{8+9+11+12}{4} = 10$ бўлади.

Агар белгининг $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари мос равишда $n_1, n_2, \dots, n_k$ частоталарга эга, шу билан бирга $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ бўлса, у ҳолда ўртача танланма қиймат

$$\bar{x}_T = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} \quad (2)$$

ёки

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad (2')$$

формула бўйича топилади.

2-Мисол. Қуйида берилган $n = 50$ ҳажмли танланма тақсимоти бўйича ўртача танланма қийматни топинг:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Ечиш: (2) формула бўйича

$$\bar{x}_T = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76$$

ни ҳосил қиламиз.

Ўртача танланма қийматни (2) формула билан ҳисоблаш ҳар доим ҳам қулай бўлавермайди, чунки бу бевосита ҳисоблаш усули бўлиб, унга кўп меҳнат ва вақт талаб қилинади.

Математик статистикада умумий ғоя ва қоидалар билан бир қаторда тажрибадан олинган маълумотларни тез ва содда ҳисоблаш усуллари ҳам муҳим ўрин тутати. Математик статистикада бир қанча тез васодда ҳисоблаш усуллари бор, шулардан шартли вариантлар деб аталувчи усулни келтирамиз. (2) ифода ўртача танланма қиймат учун қандай қиймат берса,

$$\bar{x}_T = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - a) \quad (3)$$

ифода ҳам шу қийматни беришини осонгина кўриш мумкин. Бунда a сифатида танланма тўпلامдаги ихтиёрий варианта олинishi мумкин (a сон ҳисоб боши ҳам дейилади). a сонни шундай танлаб олиш керакки, $x_1 - a, x_2 - a, \dots, x_k - a$ айирмалар мумкин қадар кичик бўлсин.

3-Мисол. Қуйида берилган $n = 22$ ҳажмли танланма тақсимоти бўйича ўртача танланма қийматни топинг:

x_i	28	29	30	31	32
n_i	2	5	8	4	3

Ечиш: Бевосита ҳисоблаш усули. (2) формулага асосан

$$\bar{x}_T = \frac{2 \cdot 28 + 5 \cdot 29 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 31 + 3 \cdot 32}{22} = \frac{661}{22} \approx 30,05$$

Шартли вариантлар усули: a сифатида $x_3 = 30$ вариантани оламиз. У ҳолда (3) формулага асосан

$$\bar{x}_T = 30 + \frac{2 \cdot (-2) + 5 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2}{22} = 30 + \frac{-9 + 10}{22} = 30 + \frac{1}{22} \approx 30,05$$

Иккала ҳолда ҳам натижаларнинг бир хил бўлиши (3) формуланинг тўғрилигини кўрсатади.

2. Медиана. Вариацион қатор элементларининг сони тоқ бўлса, вариацион қаторнинг ўртасида жойлашган ҳад медиана дейилади ва у *Me* символ билан белгиланади. Демак, медиана вариацион қаторни ҳадлар сони бўйича иккита тенг қисмга ажратади. Масалан, ушбу

16, 19, 21, 26, 27, 31, 32, 35, 39, 41, 45, 47, 48

вариацион қатор учун 32 қиймат медиана бўлади, чунки 32 дан чапда 32 дан кичик 6 та қиймат ва ўнгда 32 дан катта 6 та қиймат жойлашган.

Энди вариацион қатор элементларининг сони жуфт бўлсин, масалан, 21, 25, 28, 32, 34, 35, 39, 42, 46, 54, 58, у вақтда таърифга кўра

$$Me = \frac{35 + 39}{2} = 37$$

бўлади.

3. Мода. Берилган вариацион қаторда (танланмада) ўрганилаётган белгининг энг кўп такрорланадиган қиймати *мода* дейилади ва у *Mo* символ билан белгиланади. Масалан, 11 нафар боланинг бўйи ўлчанганда қуйидаги натижалар олинган бўлсин (см. ҳисобида): 127, 127, 128, 128, 128, 129, 130, 131, 132, 134, 136.

Бу қаторда мода 128 қиймат бўлади, чунки у бу ерда энг кўп такрорланмоқда.

4. Танланма дисперсия. Ўртача танланма қиймат ўрганилаётган танланма тўплам учун сон белгининг қайси қиймати энг характерли эканлигини кўрсатади, лекин унинг ўзи танланма тўпламни характерлаш учун ҳам етарли эмас, чунки танланма тўпламнинг элементлари орасидаги ҳар хиллик, яъни ўзгарувчанликнинг мавжудлиги тўпламнинг асосий хусусияти ҳисобланади.

Агар ўзгарувчанлик бўлмаганда эди, танланма тўплам ҳақида маълумотни тўпламнинг битта элементидан олиш мумкин бўлар эди. Ўзгарувчанлик мавжуд бўлганда эса бу маълумот ўзгарувчанликнинг характери ва даражасини ҳисобга олишга асосланган бўлиши керак.

Юқоридаги мисолларда вариантларнинг қийматлари уларнинг ўрта арифметик қиймати (ўртача танланма қиймат)дан озми-кўпми тарқоқ бўлиши мумкинлигини кўрдик. Бу тарқоқлик белгининг қанчалик ўзгарувчанлигини кўрсатади. Шу тарқоқликни характерлаш учун танланма дисперсия тушунчаси киритилади.

Танланма дисперсия деб белгининг кузатилган қийматлари билан уларнинг ўртача қиймати $\bar{x}_T$ орасидаги фарқлар квадратларининг ўртача арифметик қийматига айтилади ва у D_T символ билан белгиланади.

Агар бош тўпладан олинган n ҳажмли танланма сон белгисининг барча $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари турлича бўлса, таърифга кўра

$$D_T = \frac{(x_1 - \bar{x}_T)^2 + (x_2 - \bar{x}_T)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_T)^2}{n} \quad (4)$$

ёки

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_T)^2 \quad (4')$$

бўлади.

Агар белгининг $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари мос равишда $n_1, n_2, \dots, n_k$ частоталарга эга бўлса, у ҳолда

$$D_T = \frac{n_1(x_1 - \bar{x}_T)^2 + n_2(x_2 - \bar{x}_T)^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x}_T)^2}{n} \quad (5)$$

ёки

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}_T)^2 \quad (5')$$

дейилади.

4-Мисол. Танланма тўплам қуйидаги тақсимот жавдвали билан берилган.

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Танланма дисперсияни топинг:

Ечиш: (5) формулага кўра

$$D_T = \frac{20 \cdot (1 - \bar{x}_T)^2 + 15 \cdot (2 - \bar{x}_T)^2 + 10 \cdot (3 - \bar{x}_T)^2 + 5 \cdot (4 - \bar{x}_T)^2}{20 + 15 + 10 + 5}$$

га тенг бўлади. Буни ҳисоблаш учун $\bar{x}_T$ ўртача танланма қийматни билиш зарур. У (2) формулага кўра

$$\bar{x}_T = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2$$

қийматга эга. $\bar{x}_T$ нинг бу қийматини юқорида ёзилган ифодага қўйиб, изланаётган танланма дисперсияни топамиз:

$$D_T = \frac{20 \cdot (1-2)^2 + 15 \cdot (2-2)^2 + 10 \cdot (3-2)^2 + 5 \cdot (4-2)^2}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{50}{50} = 1$$

Танланма тўплам белгисининг кузатилган қийматлари унинг ўртача қиймати атрофида тарқоклигини характерлаш учун танланма дисперсиядан ташқари танланма ўртача квадратик фарқдан ҳам фойдаланилади.

Танланма ўртача квадратик фарқ деб, танланма дисперсиясидан мусбат ишора билан олинган квадрат илдизга айтилади ва у σ_T символ билан белгиланади.

Таърифга кўра

$$\sigma_T = \sqrt{D_T}$$

бўлади.

Ҳисолашларни осонлаштириш мақсадида танланма дисперсия ифодасини бошқача кўринишда ёзамиз:

$$(x_i - \bar{x}_T)^2 = x_i^2 - 2x_i\bar{x}_T + (\bar{x}_T)^2$$

бўлгани учун

$$\begin{aligned} D_T &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i [x_i^2 - 2x_i\bar{x}_T + (\bar{x}_T)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \\ &\quad - 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \bar{x}_T + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_T)^2. \end{aligned}$$

Бунда $\bar{x}_T$ ва $(\bar{x}_T)^2$ лар i индексга боғлиқ бўлмагани сабабли уларни йиғинди ишорасидан ташқарига чиқариб ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \bar{x}_T &= 2\bar{x}_T \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = 2\bar{x}_T \cdot \bar{x}_T = 2(\bar{x}_T)^2, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_T)^2 &= (\bar{x}_T)^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i = (\bar{x}_T)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot n = (\bar{x}_T)^2. \end{aligned}$$

Булардан пировардида

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - 2(\bar{x}_T)^2 + (\bar{x}_T)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x}_T)^2$$

ни ҳосил қиламиз.

Кўргазмалилик мақсадида 4-мисолда берилган танланма тақсимоти учун танланма дисперсияни топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 &= \frac{1}{50} (20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2) = \\ &= \frac{1}{50} (20 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 5 \cdot 16) = \frac{250}{50} = 5 \\ (\bar{x}_T)^2 &= (2)^2 = 4 \text{ бўлганда} \end{aligned}$$

$$D_T = 5 - 4 = 1$$

5. Вариация коэффиценти. D_T (5)нинг бир ўзи ўрганилаётган белгининг ўзгарувчанлигини тўлиқ характерлаб бера олмайди. Ҳақиқатдан ҳам, ўртача узунлиги 5,4 мм бўлган буғдой донлари учун $\sigma = \sqrt{D_T} = 1,8 \text{ мм}$ стандарт (ўртача квадратик четланиш) вариантларининг анчагина тарқоқ эканлигини билдирса, ўртача узунлиги 129 мм бўлган бодринглар учун эса ўша $\sigma = 1,8 \text{ мм}$ қиймат узунликларига нисбатан бу бодрингларнинг деярли бир хил эканлигини кўрсатади. Шу сабабли қуйидаги формула орқали нисбий ўртача фарк тушунчаси киритилади:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}_T}.$$

Фоизда ифодаланадиган бу миқдор, яъни $v' = v \cdot 100 \%$ вариация (ўзгарувчанлик) коэффиценти деб аталади.

Мисол. Ўрта Осиё ипакчилик илмий текшириш институтидан олинган маълумотларга кўра 100 та пилла бўйининг ўртача узунлиги $\bar{x}_T = 3,43 \text{ см}$, унинг стандарти $\sigma_x = 0,1073 \text{ см}$, уларнинг ўртача эни $\bar{y}_T = 1,65 \text{ см}$, унинг стандарти эса $\sigma_y = 0,1024 \text{ см}$. Уларнинг вариация коэффицентлари

$$\begin{aligned} v_x^* &= \frac{\sigma_x}{\bar{x}_T} \cdot 100 \% = \frac{0,1073}{3,43} \cdot 100 \% \approx 3,1\%, \\ v_y^* &= \frac{\sigma_y}{\bar{y}_T} \cdot 100 \% = \frac{0,1024}{1,65} \cdot 100 \% \approx 6,2\% \end{aligned}$$

бўлади.

Вариация коэффиценти элементлари турли ўлчам бирлигига эга бўлган танланма тўпламларнинг ўзгарувчанлигини таққослашга ҳам имкон беради, чунки у таққосланадиган миқдорларнинг ўлчам бирлигига боғлиқ бўлмаган нисбий сондир.

Масалан, олинган маълумотларга кўра соғин сигирларнинг ўртача оғирлиги $\bar{x}_T = 400$ кг., унинг стандарти $\sigma_x = 48$ кг. га тенг. Сигирларнинг сутидаги ёғнинг ўртача фоизи $\bar{y}_T = 4\%$, унинг стандарти $\sigma_y = 0,2\%$. Биз

$$v_x^* = \frac{\sigma_x}{\bar{x}_T} \cdot 100\% = \frac{48}{400} \cdot 100\% = 12\%,$$

$$v_y^* = \frac{\sigma_y}{\bar{y}_T} \cdot 100\% = \frac{0,2}{4} \cdot 100\% = 5\%$$

ларни топиб, сигирларнинг оғирлиги ва уларнинг сутидаги ёғининг ўзгарувчанлигини таққослаш имкониятига эга бўламиз, ёғ ўзгарувчанлиги оғирлик ўзгарувчанлигидан кам.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ўртача танланма қийматга таъриф беринг.
2. Танланма дисперсияга таъриф беринг.
3. Танланманинг тузатилган дисперсияси қандай аниқланади?
4. Танланманинг ўртача квадратик четланиши нима?

IV-БОБ. ТАҚСИМОТ ПАРАМЕТРЛАРИНИ ТАНЛАНМА ТЎПЛАМ БЎЙИЧА БАҲОЛАШ

1-§. Статистик баҳо тушунчаси

Математик статистиканинг асосий масаласи – бош тўпламнинг ўрганилаётган белгиси тақсимот қонунини топишдан иборатдир. Фараз қилайлик, бирор-бир мулоҳазага асосан ўрганилаётган белгининг тақсимот қонунини топишга эришган бўлайлик. Агар бу тақсимот қонунининг параметрлари ҳам маълум бўлганда эди, берилган бу ҳол учун тақсимот қонун тўлиқ аниқланган бўлар эди. Демак, ўрганилаётган белги қайси тақсимот қонунга эга эканлигини аниқлангандан кейин, масала унинг номаълум параметрларини аниқлашга келтирилади.

Текширишлар шуни кўрсатадики, битта бош тўпламдан олинган турли танланма тўпламлар учун ҳисобланган параметрларнинг қийматлари умуман олганда бир-бирига мос келмайди. Буни қуйидаги оддий мисолда кўрсатиш мумкин. Масалан, биз ҳаммаси бўлиб бешта ($N = 5$) вариантдан (элементдан) иборат бўлган ушбу

8, 16, 20, 24, 32

бош тўпламга эга бўлайлик. Бу тўпламнинг арифметик ўртача қиймати (бош ўртача қиймат):

$$\bar{x}_B = \frac{8+16+20+24+32}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

Энди бутун бош тўпламни ўрганишни ундан олинган ва ҳажми $n = 4$ бўлган ҳамма танланма тўпламларни ўрганиш билан алмаштирамиз. Танланма тасодифий тузилган $N = 5$ та элементдан $n = 4$ тадан олиб тузилган гуруҳларнинг (бирлашмаларнинг) ҳар бири тенг эҳтимол (имконият) билан шу танланма тўпламга кириши мумкин.

Маълумки, гуруҳлашларнинг умумий сони

$$C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

га тенг бўлади.

Бу гуруҳлашлар қуйидагича бўлади:

1-гуруҳлаш: 8, 16, 20, 24;

2-гуруҳлаш: 8, 16, 20, 32;

3-гуруҳлаш: 8, 16, 24, 32;

4-гуруҳлаш: 8, 20, 24, 32;

5-гуруҳлаш: 16, 20, 24, 32.

Ҳар бир танланма тўплам учун арифметик ўртача қиймат (ўртача танланма қиймат)ни ҳисоблаб,

$$\bar{x}_T : 17, 19, 20, 21, 23$$

сонларни ҳосил қиламиз. Бу арифметик ўртача қийматларининг арифметик ўртача қиймати

$$\frac{17 + 19 + 20 + 21 + 23}{5} = 20,$$

турган гап, бош ўртача қийматига тенг бўлади. Аммо бош ўртача қийматни бундай усулда топиш ҳеч қандай маънога эга бўлмайди, чунки бўлиши мумкин бўлган танланма тўпламларнинг сони одатда бош тўплам ҳадлари (элементлари) сонидан жуда кўп бўлади. Масалан, $N = 20$ бўлганда ҳажми $n = 5$ бўлган турли танланма тўпламлар сони

$$C_{20}^5 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$$

Ни ташкил этишини айтишнинг ўзи кифоя. Бундай ҳолларда бутун бош тўпламни ўрганмасдан унинг ўрнига танланма тўпламни ўраниш зарурияти туғилади.

Демак, тадқиқот деярли ҳар доим танланма тўпламлар билан иш кўради, аммо бош тўпламлар номаълумлигича қолади.

Танланма тўплам бош тўпламнинг бир қисмидан иборат бўлгани учун бутун бир бош тўплам тўғрисида фикр юритиш статистик характердаги хатоларга олиб келади.

Статистик хато катталиги бош тўпламдан тасодифий равишда олинган танланма тўпламга кирган кузатишлар сонига, яъни танланма ҳажмига боғлиқ бўлади. Шунинг учун кузатишлар сони қанча катта бўлса, статистик хато шунча кичик бўлади. Бундан ташқари статистик хато катталигига ўрганилаётган белгининг ўзгарувчанлик даражаси ҳам таъсир қилади. белги қанчалик кўп ўзгарувчан бўлса, статистик хато катталиги шунча катта бўлади, шунинг учун бош тўпламнинг элементлари қанча оз ўзгарувчан бўлса, статистик хато шунча кичик бўлади. Асосий масала – статистик хатоларни имкони борича камайтиришдан иборат. Одатда, тадқиқотчи ихтиёрида бош тўпламдан олинган танланмадаги маълумотларгина, масалан, сон белгининг n та кузатиш натижасида олинган $x_1, x_2, \dots, x_n$ қийматлари бўлади (бу ерда ва бундан кейин кузатишлар ўзаро боғлиқмас деб фараз қилинади). Баҳоладиган параметр худди шу маълумотлар орқали ифодаланади.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ларни ўзаро боғлиқ бўлмаган ва бош тўплам белгиси билан бир хил тақсимланган $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорлар деб қараймиз. Назарий тақсимот номаълум параметрининг статистик баҳосини топиш – кузатилаётган тасодифий миқдорларнинг шундай функциясини топиш демакки, бу функция баҳоланаётган

параметрнинг тақрибий қийматини берсин. Масалан, нормал тақсимотнинг математик кутилишини баҳолаш учун

$$\bar{X}_T = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

функция хизмат қилади (бу кейинроқ кўрсатилади).

Шундай қилиб, назарий тақсимот номаълум параметрнинг *статистик баҳоси* деб кузатилган тасодифий миқдордан тузилган ихтиёрий функцияга айтилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Статистик баҳога таъриф беринг.
2. Нуқтавий баҳо нима?

2-§. Силжимаган, эффектив ва асосли баҳолар

Статистик баҳолар баҳоланаётган параметрларга «яхши» яқинлашиши учун улар маълум талабларни қаноатлантиришлари лозим. Қуйида шу талабларни келтирамыз.

$\theta^* = \theta(X_1, \dots, X_n)$ назарий тақсимот θ номаълум параметрининг статистик баҳоси бўлсин. Бош тўпладан олинган n ҳажмли танланма бўйича θ_1^* баҳо топилган бўлсин. Тажрибани такрорлаймиз, яъни бош тўпладан ўша ҳажмли иккинчи танланмани оламыз ва ундаги маълумотлар бўйича θ_2^* баҳони топамиз. Тажрибани k марта такрорлаб, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$ сонларни ҳосил қиламыз, бу сонлар, умуман олганда, турлича бўлади. Шундай қилиб, θ^* баҳони тасодифий миқдор, $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*$ сонларни эса унинг мумкин бўлган қийматлари сифатида қараш мумкин.

θ^* баҳо θ нинг тақрибий қийматини ортиғи билан беради деб фараз қилайлик, у ҳолда танланма тўпламдаги маълумотлар бўйича топилган ҳар бир θ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) сон θ нинг ҳақиқий қийматидан катта бўлади. Бу ҳолда θ^* тасодифий миқдорнинг математик кутилиши (ўртача қиймати) ҳам θ дан катта, яъни $M\theta^* > \theta$ бўлиши равшан. Агар θ^* баҳо θ нинг тақрибий қийматини ками билан берса, у ҳолда $M\theta^* < \theta$ бўлиши аниқ.

Шундай қилиб, математик кутилиши баҳоланаётган параметрга тенг бўлмаган статистик баҳодан фойдаланиш систематик хатоларга

олиб келган бўлар эди. Шу сабабли θ^* баҳонинг математик кутилиши баҳоланаётган параметрларга тенг бўлишини талаб қилиш табиийдир. Бу талабга риоя қилинганда хатолар бартараф қилинмаса ҳам ҳар хил ишорали хатолар бир хил частотада учрашига эришилади. Бошқача айтганда, $M\theta^* = \theta$ талабга риоя қилиш систематик хатоларга йўл қўйишдан сақлайди.

Математик кутилиши баҳоланаётган θ номаълум параметрга тенг, яъни

$$M\theta^* = \theta$$

бўлган θ^* статистик баҳо силжимаган баҳо дейилади.

Математик кутилиши баҳоланаётган θ параметрга тенг бўлмаган баҳо эса *силжиган баҳо* дейилади.

Аммо силжимаган баҳо ҳар доим ҳам баҳоланаётган параметрга яхши яқинлаш беради деб ҳисоблаш хато бўлар эди. Ҳақиқатдан, θ^* нинг мумкин бўлган қийматлари унинг ўртача қиймати атрофида анча тарқоқ жойлашган бўлиши, яъни $D\theta^*$ дисперсия анчагина катта бўлиши мумкин. Бундай ҳолда битта танланмадаги маълумотлар бўйича топилган баҳо, масалан, θ_1^* баҳо θ^* нинг ўртача қийматидан ва демак, баҳоланаётган θ параметрнинг ўзида ҳам анча узоқлашган бўлиши мумкин; θ_1^* ни θ нинг тақрибий қиймати сифатида қабул қилсак, катта хатога йўл қўйган бўламиз. Агар θ^* нинг дисперсияси кичик бўлишини талаб қилсак, у вақтда катта хатога йўл қўйишнинг олдини олган бўламиз. Шу сабабли статистик баҳога эффективлик талаби ҳам қўйилади.

θ номаълум параметр учун θ_1^* ва θ_2^* баҳолар таклиф этилган бўлсин деб фараз қилайлик. Агар

$$M(\theta_1^* - \theta)^2 < M(\theta_2^* - \theta)^2 \quad (\text{ёки } D\theta_1^* < D\theta_2^*)$$

бўлса, у вақтда θ_1^* баҳо θ_2^* баҳога қараганда эффективроқ дейилади

Берилган n ҳажмли танланмада мумкин бўлган энг кичик дисперсияга эга бўлган статистик баҳо *эффектив баҳо* дейилади.

Катта ҳажмли танланма тўпламлар қаралганда статистик баҳоларга асослилиқ талаби қўйилади.

Агар кузатишлар сони n ни чексиз орттирганда $\theta^* = \theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ баҳо баҳоланаётган θ параметрга эҳтимол бўйича яқинлашса, яъни ҳар қандай $\varepsilon > 0$ кичик сон учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\theta^* = \theta^*(X_1, X_2, \dots, X_n)$ баҳо θ параметрнинг асосли баҳоси дейилади.

Агар баҳонинг дисперсияси $n \rightarrow \infty$ да нолга интилса, бундай баҳо асосли баҳо бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай баҳо силжимаган баҳо дейилади?
2. Асосли баҳога таъриф беринг.
3. Эффе́ктив баҳога таъриф беринг.

3-§. Статистик баҳоларни топиш усуллари

1. Моментлар усули. Фараз қилайлик, X белгили бош тўпламнинг назарий тақсимот функцияси $F(x, \theta)$ бўлиб, θ номаълум параметр бўлсин. Шу боис тўпламдан $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий танланма маълумотлар бўйича θ номаълум параметрни баҳолаш талаб қилинади. Бунинг учун бош тўплам белгисининг назарий ўртача қиймати

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, \theta) = m_1(\theta)$$

ва танланманинг ўртача арифметик қиймати (ўртача танланма қиймат)

$$\bar{X}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

тенглаштирилиб, натижада θ номаълум параметрни топиш учун

$$m_1(\theta) = \bar{X}_T$$

тенглама ҳосил қилинади. Бу тенгламани θ га нисбатан ечиб, θ номаълум параметрнинг статистик баҳоси топилади.

Агар бош тўпламнинг назарий тақсимот функцияси бир нечта номаълум параметрларга боғлиқ, яъни $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ бўлса, у ҳолда бош тўплам белгисининг S - тартибгача моменти

$$MX^j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j dF(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = m_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s), \quad j = 1, 2, \dots, s$$

ва танланманинг S – тартибгача статистик моменти

$$\bar{X}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j, \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

тенглаштирилиб, S номаълумли S та тенглама ҳосил қилинади. Бу тенгламаларни ечиб, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ номаълум параметрларнинг статистик баҳолари аниқланади.

Номаълум параметрларнинг статистик баҳосини топишнинг бундай усули *моментлар усули* дейилади.

Мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси λ параметрли кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган:

$$F(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ бўлганда,} \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Моментлар усулидан фойдаланиб λ номаълум параметрнинг статистик баҳосини топинг.

Ечиш: MX ни топамиз.

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x, \theta) = \int_0^{\infty} x dF(x, \lambda) = \int_0^{\infty} x d(1 - e^{-\lambda x}) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx.$$

Бу интегрални бўлаклаб интеграллаймиз: $u = x$, $dv = e^{-\lambda x} dx$

деб оламиз, унда $du = dx$, $v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$ бўлиб,

$$MX = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

бўлади. Бунини $\bar{X}_T$ га тенглаштириб,

$$\frac{1}{\lambda} = \bar{X}_T$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламани ечиб, λ номаълум параметрнинг статистик баҳосини топамиз:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{X}_T}$$

Агар $x_1, x_2, \dots, x_n$ лар берилган $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланманинг кузатилган қиймати бўлса, у ҳолда λ номаълум параметрнинг тақрибий қиймати сифатида

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_T}$$

қиймат олинади.

2. Ҳақиқатга максимал яқинлик усули. Айтайлик, X сон белгили бош тўпламнинг $F(x, \theta)$ назарий тақсимот функцияси $p(x, \theta)$ тақсимот зичликка эга бўлиб, θ номаълум параметр бўлсин. $X_1, X_2, \dots, X_n$ шу бош тўпландан олинган тасодифий танланма бўлсин. Ушбу

$$L(\theta) = L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = P(X_1, \theta) \cdot P(X_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(X_i, \theta)$$

функция ҳақиқатга ўхшашлик функцияси дейилади, бу ерда Π кўпайтма белгиси.

Агар X белги дискрет тасодифий бўлиб, у $X_1, X_2, \dots, X_n$ қийматларни мос равишда $P_\theta(X = X_1), P_\theta(X = X_2), \dots, P_\theta(X = X_n)$ эҳтимоллар билан қабул қилсак, у ҳолда ҳақиқатга ўхшашлик функцияси

$$L(\theta) = L(X_1, X_2, \dots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X = X_i)$$

кўринишида бўлади.

Ҳақиқатга максимал яқинлик усулида θ номаълум параметрнинг баҳоси сифатида θ аргументнинг $L(\theta)$ функцияга максимал қиймат берадиган қиймати (агар у мавжуд бўлса) олинади. $L(\theta)$ ва $\ln L(\theta)$ функциялар максимумга θ нинг бир хил қийматларида эришганликлари учун θ нинг бу қийматлари

$$\frac{\ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Тенгламадан – ҳақиқатга ўхшашлик тенгламасидан аниқланади. Ҳақиқатга ўхшашлик тенгламасининг ечими ҳақиқатга максимал ўхшаш баҳо дейилади.

Агар $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ номаълум параметрларнинг баҳолари топиладиган бўлса, у ҳолда S та

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)}{\partial \theta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

тенгламалар системасидан аниқланади.

Ҳақиқатга максимал яқинлик усули мураккаб бўлган тенгламалар системасини ечишга олиб келишга қарамай, бу усул билан топилган баҳо муҳим хусусиятларга эга, яъни бу баҳо одатда бошқа

баҳоларга нисбатан (баъзида бир оз силжиган бўлса-да), энг кичик дисперсияли, асосли бўлади.

1-Мисол. X белгили бош тўплам a ва σ^2 параметрли нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган. Бош тўпламдан олинган $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланмадан фойдаланиб, тақсимотдаги параметрларнинг баҳосини топинг.

Ечиш: Бу ҳолда

$$L(a, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2} \quad \ln L(a, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) -$$

$$-\frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

Сўнги ифодани a ва σ^2 бўйича дифференциаллаб, уларни нолга тенглаб, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(a, \sigma^2)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - a) = 0 \\ \frac{\partial \ln L(a, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = 0 \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламасидан

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_T$$

ни ҳосил қиламиз. Буни ҳисобга олган ҳолда иккинчи тенгламасидан

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_T)^2 = D_T$$

ни топамиз.

2-Мисол. X белгили бош тўплам ушбу $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

Пуассон тақсимот қонуни билан тақсимланган. Бош тўпламдан олинган $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма бўйича тақсимотдаги λ параметрнинг баҳосини топинг.

Ечиш: Бу ҳолда

$$L(\lambda) = \frac{\lambda^{X_1}}{X_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{X_2}}{X_2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{X_n}}{X_n!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n X_i}}{X_1! X_2! \dots X_n!} e^{-n\lambda},$$

$$\ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot \ln \lambda - n\lambda - \ln(X_1! X_2! \dots X_n!) = \ln \lambda \sum_{i=1}^n X_i - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(X_i!)$$

Сўнги ифодани λ бўйича дифференциаллаб ва нолга тенглаб,

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n X_i = 0$$

тенгамани ҳосил қиламиз, бундан

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_T$$

Демак, Пуассон тақсимотидаги λ параметрининг баҳоси $\bar{X}_T$, яъни танланманинг арифметик ўртача қиймати экан.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Моментлар усули нима?
2. Ҳақиқатга максимал ўхшашлик функцияси нима?
3. Қандай баҳо ҳақиқатга максимал ўхшаш баҳо дейилади?

4-§. Бош ўртача қиймат ва бош дисперсияни ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсия орқали баҳолаш

1. Айтайлик, бош гўпладан n ҳажмли $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма олинган бўлсин. Мулоҳазаларнинг умумийлигини камайтирмасдан, танланма қийматларни ҳар хил деб ҳисоблаймиз. $\bar{X}_B$ ўртача бош қиймат номаълум бўлиб, уни танланмадаги маълумотлар бўйича баҳолаш талаб қилинсин. Ўртача бош қийматнинг баҳоси сифатида

$$\bar{X}_T = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

ўртача танланма қиймат қабул қилинади.

$\bar{X}_T$ баҳо силжимаган баҳо эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, яъни бу баҳонинг математик кутилиши $\bar{X}_B$ га тенг эканлигини кўрсатамиз. $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий микдорлар бир хил тақсимланмаганлиги учун улар бир хил сонли характеристикаларга, жумладан, бир хил математик кутилишга эга, уни a орқали белгилаймиз. Бир хил тақсимланган тасодифий микдорларнинг

арифметик ўртача қийматининг математик кутилиши математик кутилишнинг хоссаларига кўра (II боб, 6-§)

$$\begin{aligned} M\bar{X}_T &= M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i = \frac{1}{n} \cdot nMX_1 = MX_1 = a \end{aligned}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорларнинг ҳар бири ва бош тўплам белгиси бир хил тақсимотга эга эканлигини эътиборга оладиган бўлсак, бу тасодифий миқдорларнинг ва бош тўпламнинг сонли характеристикалари бир хил деган хулосага келамиз. Жумладан, $X_1, X_2, \dots, X_n$ миқдорларнинг ҳар бирини математик кутилиши a бош тўплам X белгисининг математик кутилилишига тенг, яъни

$$MX = M\bar{X}_T = a$$

Шу билан ўртача танланма қиймат ўртача бош тўпламнинг силжимаган баҳоси эканлиги исботланди.

Ўртача танланма қиймат бош ўртача қиймат учун асосли баҳо ҳам бўлишини осонгина кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан, агар $X_1, X_2, \dots, X_n$ тасодифий миқдорлар чекли дисперсияларга эга дейдиган бўлсак, у ҳолда бу миқдорларга катта сонлар қонуни ҳақидаги Чебишев теоремасини қўллашга ҳақлимиз; бу теоремага кўра қаралаётган $X_1, X_2, \dots, X_n$ миқдорларнинг арифметик ўртача қиймати, яъни $\bar{X}_T$ қиймат n ортиши билан миқдорларнинг ҳар бирининг математик кутилиши a га, ва демак, бош ўртача қиймат $\bar{X}_B$ га (чунки $\bar{X}_B = a$) эҳтимол бўйича яқинлашади.

Шундай қилиб, танланма ҳажми n нинг ортиши билан ўртача танланма қиймат бош ўртача қийматга эҳтимол бўйича яқинлашади, бу эса ўртача танланма бош ўртача қиймат учун асосли баҳо эканлигини билдиради.

Юқорида айтилганлардан яна шу нарса келиб чиқадики, агар битта бош тўпламнинг ўзидан олинган анча катта ҳажмли бир нечта танланмалар бўйича ўртача танланма қийматлар топиладиган бўлса, улар ўзаро тақрибан тенг бўлади. Ўртача танланма қийматларнинг туркумлик хоссаси ана шундан иборатдир.

1-Эслатма. Биз танланмани такрор (қайтариладиган) деб фарз қилдик. Аммо такрор танланманинг ҳажми бош тўпалам ҳажмидан анча кичик бўладиган бўлса, юқорида ҳосил қилинган хулосалар бу

танланмалар учун ҳам қўлланилиши мумкин. Бу қоидадан амалда кўп фойдаланилади.

2. Айтайлик, D_B бош дисперсияни танланмадаги маълумотлар бўйича баҳолаш талаб қилинсин. Агар бош тўплам дисперсиясининг баҳоси сифатида танланма дисперсия қабул қилинадиган бўлса, у бош дисперсиянинг камайган қийматларини беради. Бу нарсa D_T танланма дисперсия D_B бош дисперсиянинг силжиган баҳоси бўлиши (буни исботлаш қийин эмас), яъни танланма дисперсиянинг математик кутилиши баҳоланаётган бош дисперсияга тенг бўлмасдан, балки

$$MD_T = \frac{n-1}{n} D_B$$

га тенг эканлиги билан тушунтирилади.

Танланма тўплам дисперсиясини шундай «тузатиш» мумкинки, натижада унинг математик кутилиши бош тўплам дисперсиясига тенг

бўлади. Бунинг учун D_T ни $\frac{n}{n-1}$ касрга кўпайтириш кифоя. Буни

бажариб «тузатилган дисперсия»ни ҳосил қиламиз. Уни одатда S^2 орқали белгиланади:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_T = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_T)^2}{n} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_T)^2.$$

Демак, бош тўплам дисперсиясининг баҳоси сифатида

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_T)^2.$$

«тузатилган дисперсия» қабул қилинади.

Тузатилган дисперсия бош дисперсиянинг силжимаган, асосли баҳоси бўлади (буни исботлаш мумкин).

2-Эслатма. Ушбу

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_T)^2}{n} \text{ ва } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_T)^2}{n-1}$$

формулаларни солиштирсак, улар бир-биридан фақат махражлари билангина фарқ қилишини кўрамиз. Танланма тўпламнинг ҳажми n етарлича катта бўлганда танланма ва тузатилган дисперсиялар деярли тенг эканлиги кўриниб турибди. Амалда одатда тахминан $n < 30$ бўлганда тузатилган дисперсиядан фойдаланилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ўртача танланма қиймат бош тўплам математик кутилишининг силжимаган баҳоси эканини кўрсатинг.
2. Танланма дисперсия бош дисперсиянинг силжиган баҳоси эканини кўрсатинг.
3. Тузатилган дисперсия бош дисперсиянинг силжимаган баҳоси эканини кўрсатинг.

5-§. Баҳонинг аниқлиги. Ишончли оралиқ.

Танланма тўплам маълумотлари бўйича топилган θ^* статистика θ номаълум параметрнинг баҳоси бўлиб хизмат қилсин. θ ни бирор аниқ (бизга маълум бўлмаса-да) сон деб ҳисоблаймиз. $|\theta^* - \theta|$ – айирманинг абсолют қиймати қанчалик кичик бўлса, θ^* баҳо θ параметрни шунчалик аниқ баҳолаши равшан. Бошқача сўз билан айтганда, агар $\delta > 0$ ва $|\theta^* - \theta| < \delta$ бўлса, у ҳолда δ қанчалик кичик бўлса, θ^* баҳо шунча аниқ бўлади. Шундай қилиб, δ сон *баҳонинг аниқлигини* кўрсатади. Аммо статистик усуллар θ^* баҳо $|\theta^* - \theta| < \delta$ тенгсизликни албатта қаноатлантиради деб узил-кесил тасдиқлашга тўла имкон бермайди, шу сабабли бу тенгсизлик амалга ошиши мумкин бўлган эҳтимол ҳақида гапириш мумкин.

$|\theta^* - \theta| < \delta$ тенгсизликнинг амалга ошиши эҳтимоли γ , яъни $P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$ эҳтимол θ параметр θ^* баҳосининг *ишончлилик эҳтимоли* дейилади.

Одатда баҳонинг ишончлилик эҳтимоли олдиндан берилган бўлади ва у бирга яқин қилиб олинади.

Фараз қилайлик, $|\theta^* - \theta| < \delta$ тенгсизликнинг амалга ошиши эҳтимоли γ га тенг бўлсин:

$$P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$$

$|\theta^* - \theta| < \delta$ тенгсизликни унга тенг кучли $-\delta < \theta - \theta^* < \delta$ ёки $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$ қўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma$$

эга бўламыз, яъни $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ ораликнинг (интервалнинг) θ номаълум параметрни ўз ичига олиш эҳтимоли γ га тенг.

Номаълум параметрни берилган γ ишончилилик эҳтимоли билан ўз ичига олган $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ оралик *ишончли интервал* дейилади.

1-Эслатма. $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ интервал тасодифий учларга эга (уларни *ишончли чегаралар* дейилади). Ҳақиқатдан, турли танланма тўпламларда θ^* нинг турли қийматлари ҳосил бўлади. Демак, танланмадан танланмага ўтилганда ишончли ораликнинг учлари ҳам ўзгаради, яъни ишончли чегараларнинг учлари ҳам тасодифий миқдорлар ($X_1, X_2, \dots, X_n$ ларнинг функциялари) бўлади.

Ишончли оралиқлар куришни қуйидаги мисолда кўрсатамиз.

Мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган бўлсин. Бу тақсимотнинг a номаълум математик кутилиши учун дисперсияси δ^2 маълум ва номаълум бўлган ҳолларда ишончли оралиқларни тузамиз.

1. δ^2 маълум бўлсин, a учун ишончилилик оралиғи тузамиз. a номаълум параметрнинг баҳоси сифатида, 3-§ нинг 1-мисолида кўрсатганимиздек,

$$\bar{X}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ни оламыз, бу ерда $X_1, X_2, \dots, X_n$ лар боғлиқмас ва битта a ва δ^2 параметрли нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдорлар. Демак, бу ҳолда $\bar{X}_T$ ўртача танланма қиймат a ва $\frac{\delta^2}{n}$ параметрли нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган бўлади. Эҳтимоллар назариясида исбот қилинган

$$P(|X - a| < \delta) = 2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

формулада ([1], XII боб, 6-§) X ни $\bar{X}_T$ га, σ ни $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ га алмаштириб,

$$P(|X_T - a| < \delta) = 2\phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\phi(t) \quad (*)$$

ни ҳосил қиламыз, бу ерда

$$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Бу тенгликдан $\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ни топиб, (*) тенгликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$P\left(|X_T - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\phi(t).$$

$P\left(|X - a| < t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ эҳтимол γ га тенглигини эътиборга олиб, узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$P\left(\bar{X}_T - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_T + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\phi(t) = \gamma$$

Ҳосил қилинган муносабатнинг маъноси қуйидагича: γ ишонч билан айтиш мумкинки, $\left(X_T - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_T + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ишончлилик оралиғи номаълум a параметрни қоплайди, баҳонинг аниқлиги

$$\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

t сон $2\phi(t) = \gamma$ ёки $\phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ тенгликдан аниқланади, бунинг учун

Лаплас функцияси жадвали (**2-илова**) бўйича Лаплас функциясининг $\frac{\gamma}{2}$ га тенг қиймати мос келадиган t аргумент қиймати топилади.

Мисол. Бош тўплам X сон белгиси ўртача квадратик четланиши $\sigma = 3$ маълум бўлган нормал тақсимот қонунга эга. Танланма ҳажми $n = 36$ ва баҳонинг ишончлилиги эҳтимоли $\gamma = 0,95$ берилган. Номаълум a математик кутилишни $\bar{X}_T$ танланма ўртача қийматлар бўйича ишончли интервалларни топинг.

Ечиш: t ни топамиз. $2\phi(t) = 0,95$ муносабатдан $\phi(t) = 0,475$ ни ҳосил қиламиз. Жадвалдан (2-илова) $t = 1,96$ ни топамиз.

Баҳонинг аниқлигини топамиз:

$$\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = \frac{1,96 \cdot 3}{6} = \frac{1,96}{2} = 0,98$$

Изланаётган ишонч интерваллар

$$(\bar{X}_T - 0,98; \bar{X}_T + 0,98)$$

кўринишида бўлади.

Масалан, агар $\bar{X}_T = 4,1$ бўлса, у ҳолда ишончли интервал куйидаги ишончли чегараларга эга бўлади:

$$\bar{X}_T - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12;$$

$$\bar{X}_T + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08$$

Шундай қилиб, номаълум a параметрнинг танланма маълумотлари билан мос келадиган қийматлари

$$3,12 < a < 5,08$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

Ушбу

$$P(3,12 < a < 5,08) = 0,95$$

кўринишда ёзиш хато бўлишини таъкидлаб ўтамиз. Ҳақиқатдан, a – ўзгармас катталик бўлгани учун у ё топилган интервалда ётади (у ҳолда $3,12 < a < 5,08$ ҳодиса муқаррар ва унинг эҳтимоли бирга тенг) ёки унда ётмайди (у ҳолда $3,12 < a < 5,08$ мумкин бўлмаган ҳодиса бўлиб, унинг эҳтимоли нолга тенг). Бошқача сўз билан айтганда, ишончли интервални баҳоланаётган параметр билан боғламаслик керак, параметр ишончли интервалнинг чегаралар билангина боғланган, чегаралар эса, олдин айтиб ўтилганидек, танланмадан танланмага ўзгариб боради.

Берилган ишончлилик эҳтимолининг маъносини тушунтирамиз. $\gamma = 0,95$ ишончлилик эҳтимоли куйидагини кўрсатади: агар старлича кўп сонда танланмалар олинган бўлса, у ҳолда уларнинг 95 % и шундай ишончли интерваларни аниқлайдики, бу интервалларда номаълум параметр ҳақиқатдан ҳам ётади, қолган 5 % идагина у ишончли интервал чегарасидан четда ётиши мумкин.

2-Эслатма. Агар номаълум математик кутилишни олдиндан берилган δ аниқлик ва γ ишончлилик эҳтимоли билан баҳолаш талаб қилинса, у ҳолда бу аниқликни таъминлаб берадиган минимал ҳажмли

танланманинг ҳажми $n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}$ формуладан топилади ($\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

тенгликнинг натижаси).

2. σ^2 номаълум бўлсин. Бу ҳолда олдинги банддаги натижалардан фойдаланиб бўлмайди, чунки у ерда σ^2 маълум деб фараз қилинган эди.

Танланма маълумотлари бўйича шундай

$$T = \frac{\bar{X}_T - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

тасодикий миқдорнинг тузиш мумкин эканки, у $k = n-1$ эркинлик даражали Стюдент тақсимот қонунига эга бўлар экан, бу ерда $\bar{X}_T$ – ўртача танланма қиймат, S – «тузатилган» ўртача квадратик четланиш, n эса танланма ҳажми.

Эҳтимоллар назариясида T тасодикий миқдорнинг эҳтимол зичлиги

$$S(t, n) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}}$$

эканлиги исботланган. Бу ерда B_n коэффициент

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

тенглик билан аниқланади,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

эса гамма функция. Жумладан, агар $\alpha = n+1$ (n – бутун мусбат сон) бўлса, у вақтда $\Gamma(n+1) = n!$ бўлади.

Стюдент тақсимот қонуни танланма тўплам ҳажми n га боғлиқ, лекин a ва σ параметрларга боғлиқ эмас. $S(t, n)$ функция t бўйича функция бўлгани учун

$$\left| \frac{\bar{X}_T - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \right| < t$$

тенгсизликнинг амалга ошиш эҳтимоли

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}_T - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t\right) = 2 \int_0^t S(t, n) dt = \gamma$$

га тенг ([1] XI боб, 2-§, эслатма). Бу ерда $\left|\frac{\bar{X}_T - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t$ тенгсизликни унга

тенг кучли бўлган

$$\bar{X}_T - t \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_T + t \frac{S}{\sqrt{n}}$$

кўш тенгсизлик билан алмаштириб,

$$P\left(\bar{X}_T - t \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X}_T + t \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, Стъудент тақсимот қонунидан фойдаланиб, номаълум a параметрни γ ишончилилик эҳтимоли билан ўз ичига оладиган

$$\left(\bar{X}_T - t \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_T + t \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

ишончилилик интервалини топдик.

Мисол. Бош тўпламнинг X сон белгиси нормал тақсимот қонун билан тақсимланган. $n = 16$ ҳажмли танланма бўйича $\bar{X}_T = 20,2$ ўртача танланма қиймат ва $S = 0,8$ «тузатилган» ўртача квадратик четланиш топилган. Номаълум a математик кутилишни $0,95$ ишончилилик эҳтимоли билан қопловчи ишончли интервални топинг.

Ечиш: t ни топамиз. Стъудент тақсимот қонуни жадвалидан фойдаланиб (**4-илова**) $\gamma = 0,95$ ва $n = 16$ бўйича $t = 2,13$ ни топамиз.

Ишончли чегараларни топамиз:

$$\bar{X}_T - t \frac{S}{\sqrt{n}} = 20,2 - 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} = 19,774;$$

$$\bar{X}_T + t \frac{S}{\sqrt{n}} = 20,2 + 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} = 20,626 .$$

Шундай қилиб, номаълум a параметр 0,95 ишончилилик эҳтимоли билан $19,774 < a < 20,626$ ишончли интервалда ётади.

3-Эслатма. Ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

лимит муносабатлардан танланма ҳажми чексиз ортганда Стъудент тақсимооти нормал тақсимот қонунга интилиши келиб чиқади. Шу сабабли $n > 30$ бўлганда Стъудент тақсимот қонуни ўрнига нормал тақсимот қонундан фойдаланиш мумкин.

Лекин қуйидагини таъкидлаб ўтиш айниқса муҳим: кичик танланмаларда ($n < 30$) тақсимотни нормал тақсимотга алмаштириш қўпол хатоларга, чунончи, ишончли интервални асосиз торайишига, яъни баҳо аниқлигининг ортишига олиб келади. Масалан, агар $n = 5$ ва $\gamma = 0,99$ бўлса, у ҳолда Стъудент тақсимот қонунидан фойдаланиб, $t = 4,6$ ни, Лаплас функциясидан фойдаланиб эса $t = 2,58$ ни топамиз, демак, кейинги ҳолда ишончли интервал Стъудент тақсимооти бўйича топилган интервалдан торроқ бўлиб чиқади.

Стъудент тақсимот қонуни танланма ҳажми кичик бўлганда унча аниқ бўлмаган натижалар бериши Стъудент тақсимотининг кучсизлигидан дарак бермасдан, балки кичик ҳажмли танланма бизни қизиқтираётган белги ҳақида кам маълумотга эғалиги билан тушунтирилади.

У-БОУ. СТАТИСТИК МОМЕНТЛАР ВА УЛАРНИ ҲИСОБАШНИНГ СОДДАЛАШТИРИЛГАН УСУЛЛАРИ

1-§. Шартли вариантлар

Статистик характеристикаларни ҳисоблашнинг саддалаштирилган усуллари x_i вариантларни унча катта бўлмаган u_i бутун сонлар – шартли вариантларга алмаштиришга асосланган. x_i бошлангич вариантлардан u_i шартли вариантларга ўтиш ушбу

$$u_i = \frac{x_i - c}{h}$$

тенглик орқали амалга оширилади, бу ерда c – «сохта ноль» (янги ҳисоб боши), h – кадам, яъни иккита қўшни варианта орасидаги айирма (янги масштаб бирлиги).

Агар вариацион қатор h кадам билан тенг узокликда бўлган вариантлардан ташкил топган бўлса, у ҳолда шартли вариантлар бутун сонлардан иборат бўлишини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан, сохта ноль сифатида ихтиёрий вариантани, масалан, x_m ни олайлик, у ҳолда

$$u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = \frac{x_i + (i-1)h - [x_m + (m-1)h]}{h} = i - m$$

i ва m бутун сонлар бўлгани учун уларнинг айирмаси $i - m = u_i$ ҳам бутун сондир.

Эслатма. Сохта ноль сифатида, одатда, вариацион қаторнинг тахминан ўртасида жойлашган (бундай варианта кўпинча энг кўп частотага эга бўлади) олинганда ҳисоблашларни максимал соддалашишига эришилади.

Мисол. Қуйидаги статистик тақсимотнинг шартли вариантларини топинг:

x_i	23,6	28,6	33,6	38,6	43,6
n_i	5	20	50	15	10

Ечиш: Сохта ноль сифатида 33,6 вариантани оламиз (бу варианта вариацион қаторнинг ўртасида жойлашган).

Қадамни топамиз:

$$h = 28,6 - 23,6 = 5$$

Шартли вариантларни топамиз:

$$u_1 = \frac{x_1 - c}{h} = \frac{23,6 - 33,6}{5} = -2,$$

шунга ўхшаш,

$$u_2 = -1, \quad u_3 = 0, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = 2$$

ларни топамиз.

Кўриниб турибдики, шартли вариантлар унча катта бўлмаган бутун сонлардир. Улар билан амалларни бажариш бошланғич вариантларга нисбатан анча осон.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Шартли вариантлар қандай аниқланади?
2. Унинг вазифаси нимадан иборат?

2-§. Оддий, бошланғич ва марказий статистик моментлар

Юқорида ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашда қуйидаги

$$\bar{x}_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i,$$

$$D_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2.$$

формулалардан фойдаланишга тўғри келди. Бу формулаларни битта умумий

$$M_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - x)^s \quad (1)$$

формуланинг хусусий ҳоли сифатида қараш мумкин. ҳақиқатдан, $s = 1$ ва $x = 0$ бўлганда $\bar{x}_T$ ҳосил бўлади; $s = 2$ ва $x = \bar{x}_T$ бўлганда D_T ҳосил бўлади.

(1) формула s – тартибли *оддий момент* деб аталади.

Агар x сифатида ҳисоб боши, яъни $x = 0$ олинган бўлса, у ҳолда оддий момент *бошланғич момент* деб аталади ва у α_s билан белгиланади.

Демак,

$$\alpha_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^s.$$

Хусусан,

$$\alpha_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \bar{x}_T.$$

Агар x сифатида тақсимот маркази, яъни $\bar{x}_T$ олинган бўлса, у ҳолда оддий момент *марказий момент* деб аталади ва m_s билан белгиланади. Демак,

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^s$$

Хусусан,

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T) = 0, \\ m_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_T)^2 = D_T, \end{aligned} \quad (2)$$

яъни биринчи тартибли марказий статистик момент нолга тенг, иккинчи тартибли марказий статистик момент танланма дисперсиясига тенг.

Марказий моментларни оддий моментлар орқали ифодалаш қийин эмас (буни китобхоннинг ўзи мустақил бажариб кўришини тавсия қиламиз):

$$m_2 = M_2 - (M_1)^2, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} m_3 &= M_3 - 3M_2M_1 + 2(M_1)^3, \\ m_4 &= M_4 - 4M_3M_1 + 6M_2(M_1)^2 - 3(M_1)^4. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. s - тартибли оддий момент нима?
2. Оддий бошланғич момент нима?
3. Оддий марказий момент нима?
4. Марказий моментларни оддий моментлар орқали ифодалаш формулаларини ёзинг.

3-§. Шартли статистик моментлар. Марказий моментларни шартли моментлар бўйича топиш

Марказий статистик моментларни ҳисоблаш узундан-уzun ҳисоблашларни талаб қилади. Ҳисоблашларни соддалаштириш мақсадида дастлабки вариантларни шартли вариантларга алмаштирилади.

S – тартибли *шартли статистик момент* деб шартли вариантлар учун ҳисобланган s – тартибли бошланғич моментига айтилади:

$$M_s^* = \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i^s}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right)^s,$$

бу ерда c – сохта ноль, h – кадам, x_i – варианта, n_i – вариантанинг частотаси, n – танланма ҳажми.

Хусусан,

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i - \frac{c}{n} \sum_{i=1}^k n_i \right] = \frac{1}{h} (\bar{x}_T - c),$$

бундан

$$\bar{x}_T = M_1^* h + c.$$

Шундай қилиб, ўртача танланма кийматни ҳисоблаш учун биринчи тартибли шартли моментни ҳисоблаб, уни h га кўпайтириш ва натижага сохта ноль c ни қўшиш kifoya.

Оддий статистик моментларни шартли моментлар орқали ифодалаймиз:

$$M_s^* = \frac{1}{h^s} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - c)^s = \frac{M_s}{h^s}.$$

Бундан

$$M_s = M_s^* \cdot h^s$$

Шундай қилиб, s – тартибли оддий моментни топиш учун ўша тартибли шартли моментни h^s га кўпайтириш kifoya.

Оддий моментларни топгандан сўнг эса 2-§ даги (3) ва (4) тенгликлар бўйича марказий моментларни осонгина топиш mumkin. Натижада, марказий моментларни шартли моментлар орқали ифодаладиган ва ҳисоблашлар учун қулай бўлган ушбу

$$\begin{aligned} m_2 &= \left[M_2^* - (M_1^*)^2 \right] \cdot h^2, \\ m_3 &= \left[M_3^* - 3M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3 \right] \cdot h^3, \\ m_4 &= \left[M_4^* - 4M_3^* M_1^* + 6M_2^* (M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4 \right] \cdot h^4. \end{aligned} \quad (2)$$

формулаларни ҳосил қиламиз.

Жумладан, (2) га ва 2-§ даги (2) формулага асосан танланма дисперсияни биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментлар бўйича ҳисоблаш формуласини ҳосил қиламиз.

$$D_T = \left[M_2^* - (M_1^*)^2 \right] \cdot h^2 \quad (3)$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Шартли статистик моментга таъриф беринг.
2. Оддий статистик моментлар шартли моментлар орқали қандай ифодаланади?

4-§. Ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблашнинг кўпайтмалар усули

Кўпайтмалар усули вариантлари тенг узокликда бўлган вариацион қаторнинг турли тартибли шартли моментларини ҳисоблашнинг қулай усулини беради. Шартли моментларни билган ҳолда эса бизни қизиқтирадиган бошланғич ва марказий моментларни топиш қийин эмас. Жумладан, кўпайтмалар усули ёрдамида ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсияни ҳисоблаш қулай. Бунда қуйидаги тартибда тузилган ҳисоблаш жадвалидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир:

- 1) жадвалнинг биринчи устунига дастлабки (танланма) вариантлар ортиб бориш тартибида ёзилади;
- 2) иккинчи устунга вариантларнинг частоталари ёзилади; ҳамма частоталар жамланади ва уларнинг йиғиндиси (танланма ҳажми n) устуннинг остки катагига ёзилади;
- 3) учинчи устунга шартли $u_i = \frac{x_i - c}{h}$ шартли вариантлар ёзилади, бунда c сохта ноль сифатида энг катта частотали варианта танланади; амалда эса учинчи устун бундай тўлдирилади: энг катта частотали варианта бўлган сатрнинг катагига O ёзилади, нолдан юқоридаги катакларга кетма-кет $-1, -2, -3$ ва ҳ.к., нолдан пастки катакларга эса кетма-кет $1, 2, 3$ ва ҳ.к. ёзилади.
- 4) Частоталарни шартли вариантларга кўпайтирилади ва уларнинг кўпайтмалари $n_i u_i$ лар тўртинчи устунга ёзилади; ҳосил қилинган ҳамма сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндиси $\sum_i n_i u_i$ устуннинг пастки катагига ёзилади;
- 5) Частоталарни шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтирилади ва уларнинг кўпайтмалари $n_i u_i^2$ лар бешинчи устунга ёзилади; ҳосил қилинган ҳамма сонларни қўшиб,

уларнинг йиғиндиси $\sum_i n_i u_i^2$ устуннинг пастки катагига

ёзилади;

- 6) Частоталарни ҳар қайсиси битта орттирилган шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтирилади ва $n_i(u_i + 1)^2$ кўпайтмаларни олтинчи текшириш устунига ёзилади; ҳосил қилинган барча сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндиси $\sum_i n_i(u_i + 1)^2$ ни устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Ҳисоблаш жадвали тўлдирилган ва ҳисоблашлар текширилгандан сўнг, шартли моментлар ҳисобланади:

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i, \quad M_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i^2$$

Ниҳоят, 2-§ даги (1) ва (2) формулалар бўйича ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсия ҳисобланади.

Мисол. Кўпайтмалар усулидан фойдаланиб қуйидаги статистик тақсимотнинг ўртача танланма қийматини ва танланма дисперсиясини топинг:

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Ечиш: Ҳисоблаш жадвалини тузамиз. Бунинг учун

- 1) вариантларни биринчи устунга ёзамиз;
- 2) частоталарни иккинчи устунга ёзамиз; частоталар йиғиндиси 100 ни устуннинг пастки катагига ёзамиз;
- 3) сохта ноль сифатида 11,0 вариантани танлаймиз (бу варианта энг катта частотага эга); учинчи устуннинг энг катта частотали варианта бўлган сатри катагига **О** ёзамиз; нолнинг устидаги катакларга кетма-кет -1, -2, -3, -4 ни, нолнинг тагига 1, 2, 3, 4, 5 ни ёзамиз;
- 4) частоталарнинг шартли вариантларини тўртинчи устунга ёзамиз, манфий сонлар йиғиндиси (-46) ни алоҳида, мусбат сонлар йиғиндиси (103)ни алоҳида топамиз, бу сонларни қўшиб, уларнинг йиғиндиси (57)ни устуннинг пастки катагига ёзамиз;
- 5) частоталарининг шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтмаларини бешинчи устунга ёзамиз, бу устундаги сонлар йиғиндиси (383)ни устуннинг пастки катагига ёзамиз;

- б) частоталарнинг биттага орттирилган шартли вариантларнинг квадратларига кўпайтмаларини олтинчи текшириш устунига ёзамиз, бу устундаги сонлар йиғиндиси (597)ни устуннинг пастки катагига ёзамиз.

Натижада куйидаги ҳисоблаш жадвалини ҳосил қиламиз:

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i (u_i + 1)^2$
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	$A_1 = -46$		25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			$A_2 = 103$		
	$n = 100$		$\sum_i n_i u_i = 57$	$\sum_i n_i u_i^2 = 383$	$\sum_i n_i (u_i + 1)^2 = 597$

Текшириш: $\sum_i n_i u_i^2 + 2 \sum_i n_i u_i + n = 383 + 2 \cdot 57 + 100 = 597,$

$$\sum_i n_i (u_i + 1)^2 = 597$$

Ҳисоблаш тўғри бажарилган.

Биринчи ва иккинчи тартибли шартли моментларни ҳисоблаймиз:

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum_i n_i u_i = \frac{57}{100} = 0,57$$

$$M_2^* = \frac{1}{n} \sum_i n_i u_i^2 = \frac{383}{100} = 3,83$$

h қадамни топамиз: $h = 10,4 - 10,2 = 0,2$. Изланаётган ўртача танланма қиймат ва танланма дисперсияни топамиз:

$$\bar{x}_T = M_1^* \cdot h + c = 0,57 \cdot 0,2 + 11,0 = 11,1;$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [3,83 - (0,57)^2] \cdot 0,2^2 = 0,14$$

Изоҳ. Юқорида танланма характеристикаларни ҳисоблаш усули тенг узоқликдаги вариантлар учун баён қилинди. Амалиётда, одатда, кузатиш маълумотлари тенг узоқликда жойлашган сонлар бўлмайди. Бундай ҳолларда белгининг кузатилаётган барча қийматлари (дастлабки вариантлар) кирган интервални бир нечта тенг қисмий интервалларга бўлинади (амалда ҳар бир интервалга камида 8-10 тадан дастлабки варианта кириши керак). Сўнгра қисмий интервалларнинг ўрталари топилади, ана шулар тенг узоқликдаги вариантлар кетма-кетлигини ҳосил қилади.

Ҳар бир «янги» вариантнинг (қисмий интервал ўртасининг) частотаси сифатида тегишли қисмий интервалга кирган дастлабки вариантларнинг жами сони қабул қилинади.

Равшанки, дастлабки вариантларни қисмий интервалларнинг ўрталари билан алмаштириш хатоларга олиб келади (қисмий интервалнинг чап ярмидаги дастлабки вариантлар ортади, ўнг ярмидаги дастлабки вариантлар эса камаяди), аммо бу хатолар асосан йўқолади, чунки улар турли ишораларга эга.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Кўпайтмалар усули қандай мақсадга хизмат қилади?
2. Кўпайтмалар усулининг мазмуни нимадан иборат?

5-§. Назарий частоталар қаторини ҳисоблаш

Таксимот қонуни номаълум бўлган бош тўпламнинг X сон белгиси устида n та кузатиш ўтказилган бўлиб, унда X белги n_1 марта x_1 қиймат, n_2 марта x_2 қиймат, ..., n_k марта x_k қиймат қабул қилган бўлсин, бунда $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

Аслда кузатилган $n_1, n_2, \dots, n_k$ частоталар *эмпирик частоталар* деб аталади.

Ўрганилаётган X белги бирор тайин таксимот қонун бўйича тақсимланган деб тахмин қилишга асос бор бўлсин. Бу тахмин кузатиш маълумотлари билан мос келишини текшириш мақсадида кузатилаётган қийматларнинг назарий частоталари ҳисобланади, яъни X белги тахмин қилинаётган қонун бўйича тақсимланган бўлса, у кузатилаётган қийматларнинг ҳар бирини неча марта қабул қилиши назарий жиҳатдан топилади.

Назарий ҳисоблаш билан топилган частоталар назарий частоталар деб аталади ва улар n'_i билан белгиланади.

1. Дискрет таксимотнинг назарий частоталари

$$n'_i = nP_i$$

тенглик билан топилади, бу ерда n – кузатишлар сони (танланма ҳажми, P_i эса X белги тахмин қилинаётган тақсимотга эга деган фаразда кузатиладиган x_i қийматни қабул қилиш эҳтимоли, яъни

$$P_i = P(X = x_i)$$

Бу формула боғлиқ бўлмаган тажрибаларда ҳодиса рўй бериш сонининг математик кутилиши ҳақидаги теоремадан ([1] II боб, 5-§) келиб чиқади.

Шундай қилиб, дискрет тақсимотнинг кузатилаётган x_i қийматининг назарий частотаси кузатишлар сонини шу кузатилаётган қийматнинг эҳтимолига кўпайтмасига тенг.

Мисол. $n = 520$ та кузатишдан иборат тажриба ўтказилиб, кузатишларнинг ҳар бирида бирор ҳодисанинг рўй беришлари сони x_i қайд қилинган, Натижада қуйидаги эмпирик тақсимот ҳосил қилинган:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	120	167	130	69	27	5	1	1

Бош тўплам X сон белгиси Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деган тахминда назарий частоталарни топинг.

Ечиш: Пуассон тақсимот қонунини аниқлайдиган λ параметр маълумки, бу тақсимотнинг математик кутилишига тенг. Математик кутилишнинг баҳоси сифатида ўртача танланма қиймат олингани (4-боб, 4-§) учун λ нинг баҳоси сифатида ҳам ўртача танланма қиймат олинади. Ўртача танланма қиймат 1,5 га тенглигини масала шартига кўра осонгина топиш мумкин, демак, $\lambda = 1,5$ деб қабул қилиш мумкин.

Шундай қилиб,

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Пуассон формуласи, ушбу

$$P_{520}(k) = \frac{(1,5)^k e^{-1,5}}{k!}$$

кўринишни олади. Бу формуладан фойдаланиб, $P_{520}(k)$ эҳтимолни $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ бўлганда топамиз (ёзувни соддалаштириш мақсадида қуйидаги 520 индексни тушириб қолдираимиз):

$$P(0) = 0,22313$$

$$P(1) = 0,33469,$$

$$P(2) = 0,251021,$$

$$P(3) = 0,125511,$$

$$P(4) = 0,047066,$$

$$P(5) = 0,014120,$$

$$P(6) = 0,003530,$$

$$P(7) = 0,000755$$

Назарий частоталарни топамиз (кўпайтириш натижалари биргача яхлитланган):

$$n'_1 = n \cdot P(0) = 520 \cdot 0,22313 = 116,$$

$$n'_2 = n \cdot P(1) = 520 \cdot 0,33469 = 174,$$

қолган назарий частоталар ҳам шунга ўхшаш топилади. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

Эмпирик частота	123	167	130	69	27	5	1	1
Назарий частота	116	174	131	69	25	7	2	0

Эмпирик ва назарий частоталарнинг нисбатан кам фарқ қилиши текшириляётган X сон белги Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деган тахминни тасдиқлайди.

2. X белги узлуксиз бўлган ҳолда унинг мумкин бўлган алоҳида қийматларининг эҳтимоллари нолга тенг ([1], X боб, 2-§, 2-натижа). Шунинг учун мумкин бўлган қийматларнинг бутун интервалларга ажратилади ва X нинг i – қисмий интервалга тушиш эҳтимоли P_i ҳисобланади, кейин эса дискрет тақсимот учун қилингани каби кузатишлар сонини бу эҳтимолларга кўпайтирилади.

Шундай қилиб, узлуксиз тақсимотнинг назарий частоталари

$$n'_i = nP_i$$

формула бўйича топилади, бу ерда n – кузатишлар сони (танланма ҳажми), P_i эса X белги тахмин қилинаётган тақсимот қонунга эга деган фаразда X нинг i – қисмий интервалга тушиш эҳтимоли.

Жумладан, X белги нормал тақсимланган деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда назарий частоталар

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_T^*} \varphi(u_i) \quad (1)$$

Формула бўйича топилиши мумкин, бу ерда n – кузатишлар сони (танланма ҳажми), h – қисмий интервалнинг узунлиги, σ_T^* – танланма ўртача квадратик четланиш, $u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}_T}{\sigma_T^*}$ (x_i^* сон i – қисмий интервалнинг ўртаси), $\bar{x}_T$ – ўртача танланма қиймат,

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

(1) формуланинг қўлланишига доир мисол келтираимиз.

Мисол. Бош тўпланининг n сон белгиси нормал тақсимот қонун бўйича тақсимланган деган фаразда назарий частоталарни $n = 200$ ҳажмли танланманинг қуйида берилган тақсимои бўйича топинг:

Интервал номери	Интервал чегаралари		Час- тота	Интерв ал номери	Интервал чегаралари		Час- тота
i	x_i	x_{i+1}	n_i	i	x_i	x_{i+1}	n_i
1	4	6	15	6	14	16	21
2	6	8	26	7	16	18	24
3	8	10	25	8	18	20	20
4	10	12	30	9	20	22	13
5	12	14	26	$n = 200$			

Ечиш:

1) Интервалларнинг ўрталари $x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ларни топамиз.

Масалан, $x_1^* = \frac{4+6}{2} = 5$. Шунга ўхшаш иш юритиб, тенг узоқликда

турган x_i^* вариантлар ва уларга тегишли n_i эмпирик частоталар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

x_i^*	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2) кўпайтмалар усулидан фойдаланиб, ўртача танланма қиймат ва танланма ўртача квадратик четланишни топамиз:

$$\bar{x}_T^* = 12,63; \quad \sigma_T^* = 4,695.$$

3) $\bar{x}_T^* = 12,63$ ва $\sigma_T^* = 4,695$, $\frac{1}{\sigma_T^*} = 0,213$ ларни ҳисобга олиб,

$$u_i = \frac{x_i^* - \bar{x}_T^*}{\sigma_T^*} \text{ ларни топамиз; масалан,}$$

$$u_1 = \frac{x_1^* - \bar{x}_T^*}{\sigma_T^*} = \frac{5 - 12,63}{4,695} = (5 - 12,63) \cdot 0,213 = -1,63$$

$$u_2 = \frac{x_2^* - \bar{x}_T^*}{\sigma_T^*} = \frac{7 - 12,63}{4,695} = (7 - 12,63) \cdot 0,213 = -1,20$$

Қолган u_i лар ҳам шунга ўхшаш топилади. Натижада

$$u_1 = -1,63; \quad u_2 = -1,20; \quad u_3 = -0,77; \quad u_4 = -0,35; \quad u_5 = 0,08;$$

$$u_6 = 0,51; \quad u_7 = 0,91; \quad u_8 = 1,36; \quad u_9 = 1,78$$

ларни топамиз.

4) Жадвалдан (1-илова) $\varphi(u_i)$ функциянинг қийматларини топамиз:

$$\varphi(u_1) = \varphi(-1,63) = +\varphi(1,63) = +0,1057;$$

$$\varphi(u_2) = \varphi(-1,20) = +\varphi(1,20) = +0,1942;$$

$$\varphi(u_3) = \varphi(0,77) = 0,2966;$$

$$\varphi(u_4) = \varphi(0,35) = 0,3752;$$

$$\varphi(u_5) = \varphi(0,08) = 0,3977;$$

$$\varphi(u_6) = \varphi(0,51) = 0,3503;$$

$$\varphi(u_7) = \varphi(0,91) = 0,2637;$$

$$\varphi(u_8) = \varphi(1,36) = 0,1582;$$

$$\varphi(u_9) = \varphi(1,78) = 0,0818.$$

5) Назарий частоталарни топамиз (кўпайтириш натижаларини биргача яхлитлаймиз):

$$n'_1 = n \cdot \frac{h}{\sigma_T^*} \varphi(u_1) = 200 \cdot \frac{2}{4,695} \cdot 0,1057 = 85,2 \cdot 0,1057 = 9,$$

$$n'_2 = n \cdot \frac{h}{\sigma_T^*} \varphi(u_2) = 200 \cdot \frac{2}{4,695} \cdot 0,1942 = 85,2 \cdot 0,1942 = 16.$$

Қолган назарий частоталар ҳам шунга ўхшаш топилади. Натижада

Эмпирик частота	15	26	25	30	26	21	24	20	13
Назарий частота	9	16	25	31	33	29	23	14	7

ни ҳосил қиламиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Назарий тақсимот қандай танланади?
2. Назарий частоталар қандай ҳисобланади?

VI-БОБ. АНИҚ МАЪЛУМОТЛАРНИ НАЗАРИЙ ЖИХАТДАН КУТИЛАЁТГАН МАЪЛУМОТЛАРГА МОСЛИК

ДАРАЖАСИНИ ЎРГАНИШ

1-§. Аниқ маълумотлар ва гипотеза

Кўпинча бош тўплам тақсимот қонунини билиш зарур бўлади. Агар тақсимот қонуни номаълум, лекин у тайин $F(x)$ кўринишига эга деб тахмин қишга асос бор бўлса, у ҳолда қуйидаги гипотеза илгари сурилади: X белгили бош тўплам $F(x)$ кўринишли тақсимот қонунга эга.

Тақсимот қонуннинг кўриниши маълум, лекин унинг параметрлари номаълум бўлган ҳол бўлиши ҳам мумкин. Агар номаълум θ параметр тайин θ_0 қийматга тенг деб тахмин қилишга асос бор бўлса, у ҳолда қуйидаги гипотеза илгари сурилади: $\theta = \theta_0$. Демак, бу гипотезада гап маълум тақсимот номаълум параметрининг тахмин қилинаётган катталиги ҳақида боради.

Юқоридагилардан бошқача гипотезалар ҳам бўлиши мумкин: икки ёки бир нечта тақсимот қонунлари параметрларининг тенглиги ҳақида, тўпламларнинг боғлиқсизлиги ҳақида ва бошқалар.

Статистик гипотеза деб номаълум тақсимотнинг кўриниши ёки маълум тақсимотнинг номаълум параметрлари ҳақидаги тахминларга (фаразларга) айтилади.

Илгари сурилган гипотеза билан бир вақтда унга зид бўлган гипотеза ҳам қаралади. Агар илгари сурилган гипотеза рад қилинса, у ҳолда зид гипотеза ўринли бўлади. Шу сабабли бу гипотезаларни бир-биридан фарқ қилиш мақсадга мувофиқдир.

Асосий (нолинчи) гипотеза деб илгари сурилган H_0 гипотезага айтилади. *Конкурент (зид) гипотеза* деб нолинчи гипотезага зид бўлган H_1 гипотезага айтилади.

Турли гипотезалар қилиб, биз улардан ҳар хил натижалар чиқарамиз ва улар тажрибада қанчалик тўғри чиқишини текшираамиз. У ёки бу гипотезани текшириш учун кузатишлар орқали ёки махсус тажрибалар ўтказиш йўли билан аниқ маълумотлар олиш лозим ва уни қилинган гипотезага мувофиқ назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотлар билан таққослаб кўриш керак. Агар олинган маълумотлар билан мос келса, у вақтда бу тасдиқ (факт) ўша гипотезани қабул қилиш учун, яъни унинг тўғрилигини тан олиш учун етарли асос бўлиши мумкин. Агар олинган маълумотлар назарий жиҳатдан кутилаётган

маълумотларга етарлича тўғри келмаса, у вақтда олинган гипотезанинг тўғрилигига шубҳа туғилади.

Аслида кузатилган натижалар назарий жиҳатдан кутилаётган натижаларга тўғри келмаслик даражалари турлича бўлиши мумкин. баъзи ҳолларда улар орасидаги фарқ жуда кичик ва тасодифий бўлиб чиқса, бошқа ҳолларда эса улар орасидаги фарқ анчагина катта бўлиши мумкин. Шу сабабли кузатиш натижасида олинган маълумотлар ва назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотлар орасидаги фарқни статистик баҳолаш масаласи, яъни қайси ҳолларда ва қандай эҳтимоллик даражада бу фарқни муҳим (тасодифий эмас) деб ҳисоблаш мумкин, аксинча, муҳим бўлмаган, арзимас (тасодифий) деб ҳисоблаш лозим деган масала келиб чиқади. Кейинги ҳолда, яъни кузатиш натижаси олинган маълумотлар ва назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотлар орасидаги фарқни муҳим бўлмаган (тасодифий) деб ҳисоблаш мумкин бўлган ҳолда фараз килинган гипотеза ўринли деб ҳисобланади. кузатиш натижасида олинган маълумотларни назарий жиҳатдан кутилаётган маълумотларга мос келишини баҳолайдиган қатор усуллар мавжуд. Биз улардан фақат биттаси – **хи квадрат (χ^2)** **усули** билан кейинроқ (3-§ га қаранг) танишамиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Статистик гипотеза тушунчасига таъриф беринг.
2. Асосий гипотеза деб қандай гипотезага айтилади?

2-§. Нолинчи гипотезани текширишнинг статистик критерийси

Нолинчи гипотезани текшириш мақсадида махсус танланган ва аниқ ёки тақрибий тақсмоти маълум бўлган тасодифий миқдор ишлатилади. Бу миқдорни, агар у нормал қонун бўйича тақсимланган бўлса Z орқали, Стьюдент қонуни бўйича тақсимланган бўлса T орқали, χ^2 квадрат қонуни бўйича тақсимланган бўлса χ^2 орқали белгиланади ва ҳ.к. белгиланади. Бу параграфда тақсмотнинг кўриниши эътиборга олинмаганлиги учун бу миқдорни, умумийлик нуқтаи назаридан, K орқали белгилаймиз.

Статистик критерий (ёки оддийгина критерий) деб нолинчи гипотезани текшириш учун хизмат қиладиган K тасодифий миқдорга айтилади.

Масалан, иккита нормал қонун бўйича тақсимланган бош тўплам дисперсияларининг тенглиги ҳақидаги гипотеза текширилаётган бўлса, у ҳолда K критерий сифатида тузатилган танланма дисперсиялар нисбати олинади:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Бу миқдор тасодифий, чунки турли тажрибаларда дисперсиялар ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. у Фишер-Снедекор қонуни бўйича тақсимланган.

Гипотезани текшириш учун K критерийга кирган миқдорларнинг хусусий қийматлари танланмалардаги маълумотлар бўйича ҳисобланади ва, демак, критерийнинг хусусий (кузатиладиган) қиймати ҳосил қилинади. *Кузатиладиган қиймат* $K_{кузат}$ деб критерийнинг танланмалар бўйича ҳисобланган қиймати белгиланади. Масалан, нормал қонун бўйича тақсимланган бош тўпламдан олинган иккита танланма бўйича $s_1^2 = 20$ ва $s_2^2 = 5$ тузатилган танланма дисперсиялар топилган бўлса, у ҳолда F критерийнинг кузатиладиган қиймати:

$$F_{кузат} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20}{5} = 4$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Критерий тушунчасига таъриф беринг.
2. Критерийнинг кузатиладиган қиймати нима?

3-§. Бош тўплам тақсимотининг кўриниши ҳақидаги гипотезани текшириш. χ^2 квадрат критерийси

Айтайлик, бош тўпламдан олинган n ҳажмли танланма бўйича ушбу

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k

эмпирик тақсимот ҳосил қилинган бўлсин. Бош тўплам аниқ бир кўринишдаги тақсимот қонун бўйича тақсимланган деган тахминда мос $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$ назарий частоталар ҳисобланади. Умуман олганда эмпирик частоталар қатори $n_1, n_2, \dots, n_k$ назарий частоталар қатори $n'_1, n'_2, \dots, n'_k$ дан озми-кўпми фарқ қилади, бу фарқни *тасодифий (муҳим эмас)* деб ҳисоблаш мумкинми ёки мумкин эмасми? Бу масалани ҳал қилиш учун **χ^2 квадрат критерийдан** фойдаланамиз. У қуйидагидан иборат. Ушбу

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - n'_1)^2}{n'_1} + \frac{(n_2 - n'_2)^2}{n'_2} + \dots + \frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_k - n'_k)^2}{n'_k} \quad (*)$$

микдорни тузамиз. Бу микдор тасодифий, чунки у турли тажрибаларда ҳар хил, олдиндан маълум бўлмаган қийматлар қабул қилади. равшанки, эмпирик ва назарий частоталар қанча кам фарқ қилса, χ^2 микдорнинг катталиги ҳам шунча кам ва демак, у маълум даражада эмпирик ва назарий тақсимотларнинг яқинлигини характерлайди.

Шу нарса исботланганки, $n \rightarrow \infty$ да (*) тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни бош тўплам қайси тақсимот қонунга бўйсунганидан катъий назар, k озодлик даражаси χ^2 (χ^2 квадрат) тақсимот қонунга интилади. Шу сабабли, (*) тасодифий микдор χ^2 орқали белгиланган, критерийнинг ўзи эса « χ^2 квадрат» критерийси дейилади.

Озодлик даражалари сони $k = s - 1 - r$ тенглик бўйича аниқланади, бу ерда s – танланмадаги гуруҳлар (қисмий интерваллар) сони, r – тахмин қилинаётган тақсимотнинг танланма маълумотлари бўйича баҳоланган параметрлари сони.

Хусусан, тахмин қилинаётган тақсимот қонун нормал тақсимот қонун бўлса, у ҳолда иккита параметр (математик кутилиш ва ўртача квадратик четланиш) баҳоланади, шу сабабли $r = 2$ ва озодлик даражалари сони

$$k = s - 1 - r = s - 1 - 2 = s - 3$$

агар Пуассон тақсимот қонуни бўлса, у ҳолда битта параметр баҳоланади, шу сабабли $r = 1$ ва $k = s - 2$.

χ^2 нинг қийматлари нолдан чексизликкача ўсиши мумкин. шунга мос равишда унинг эҳтимоли 1 дан 0 гача камаяди. Агар χ^2 нинг қиймати 0 га тенг бўлса, у вақтда эмпирик частоталар назарий частоталарга мос келади. χ^2 нинг ҳар бир қийматига аниқ эҳтимол P мос келади, шу билан бирга χ^2 қанчалик катта бўлса, унинг эҳтимоли шунчалик кичик бўлади. χ^2 ва унга мос P эҳтимол орасидаги муносабат анча мураккаб бўлганидан бу критерийни тажрибада қўллаш учун тайёр жадваллардан фойдаланилади. Шулардан бири 3-иловада берилган. Бу жадвалнинг чап вертикал устунисида озодлик даражалари сони берилган, ўнгга эса χ^2 нинг турли эҳтимоллар ва турли озодлик даражалари учун охириги ёки чегара қийматлари берилган.

Амалда χ^2 нинг маълум қийматига эҳтимолнинг қандай қиймати мос келишини билиш унчалик муҳим бўлмасдан, балки χ^2 нинг ҳосил қилган қиймати қай даражада муқаррарлигини билиш муҳимдир.

Энди асосий гипотеза деб ҳисобланган маълум гипотезани χ^2 критерийсидан фойдаланиб текшириш қоидасини тушунтирамиз. Асосий гипотеза тажрибада кузатиш ва назарий ҳисоблаб чиқилган частоталар орасида ҳеч қандай фарқ йўқлигини билдиради.

χ^2 нинг 3-иловада бор қийматлари чегара қийматлар бўлиб, бу қийматларгача бўлган χ^2 нинг барча қийматлари аниқ эҳтимоллар билан тасодифий фарқлар доирасида қолади, яъни қабул гипотезага шубҳа қилиш учун ҳеч қандай асос бўлмайди. χ^2 нинг жадвал қийматларидан катта бўлган қийматлари ($\chi^2_{кузат}$ қийматлар) гипотезанинг ўринсизлигини кўрсатади, яъни асосий гипотезани рад этишга мажбур қилади. Одатда эҳтимолнинг мумкин бўлган чегараси деб 0,05 ни олиш қабул қилинган. демак, агар χ^2 нинг кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган $\chi^2_{кузат}$ қиймати жадвалдаги 0,99 эҳтимолдан 0,10 эҳтимолгача графалардаги χ^2 нинг қийматларига яқин ёки биров каттароқ бўлса, аммо 0,05 эҳтимолли графадаги χ^2 қийматидан катта бўлмаса, у ҳолда асосий гипотезани рад этишга ҳеч қандай асос бўлмайди. Уни аввалгидек тўғри деб ҳисоблаш мумкин.

Агар χ^2 нинг $\chi^2_{кузат}$ қиймати 0,05 эҳтимолли графадаги қийматидан маълум озодлик даражалар сонида, албатта) катта бўлса, у ҳолда асосий гипотезани рад этишга асос бор, чунки унинг тўғрилигига фақат 0,05 (ёки 5 %) имкон қолади. Агар χ^2 нинг $\chi^2_{кузат}$ қиймати жадвалдаги 0,01 эҳтимолли графадаги қийматидан катта бўлса асосий гипотезани рад этишга асос шунча кўп бўлади. Асосий гипотезани рад қилиш – бу кузатиш натижасида олинган ва назарий жиҳатдан кутилаётган частоталар орасидаги фаркнинг муҳимлигини, яъни тасодифий эмаслигини тан олиш демакдир.

Агар қўлимизда χ^2 чегара қийматларининг жадвали бўлмаса мувофиқлик критерийси ёрдами билан тез муҳокама қилиш мақсадида қуйидаги қандай фойдаланиш мумкин. ушбу

$$t_{\chi^2} = \frac{|\chi^2 - v|}{\sqrt{2v}} \quad (**)$$

микдорни тузамиз, бу ерда $v - \chi^2$ нинг озодлик даражалари сони.

Агар t_{χ^2} 3 дан катта ёки 3 га тенг бўлса, у ҳолда эмпирик ва назарий частоталар орасидаги фаркни тасодифий эмас, яъни муҳим деб

ҳисоблаш зарур; агар у 3 дан кичик бўлса, бу фаркни тасодифий, яъни муҳим эмас деб ҳисоблаш мумкин бўлади.

Эслатма. v нинг 30 дан катта қийматлари учун P эҳтимол

$$P = \frac{1}{2}[1 - \phi(x)]$$

тенгликдан топилади, бундаги $\phi(x)$ қиймат X нинг

$$x = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{v}}$$

га тенг қиймати учун –иловадаги жадвалдан олинади.

Мисол. χ^2 критерийсидан фойдаланиб, бош тўплам нормал тақсимот қонунга бўйсунади деган гипотезанинг $n = 200$ ҳажмли танланманинг ушбу

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

эмпирик тақсимои билан мос келиш-келмаслигини текширинг.

Ечиш: V бобда келтирилган ҳисоблаш усулларида фойдаланиб танланманинг арифметик ўртача қиймати ва ўртача квадратик фаркларни мос равишда

$$\bar{x}_T = 12,63 \text{ ва } \sigma_T = 4,695$$

га тенглигини топамиз.

$n = 200$, $h = 2$, $\sigma_T = 4,695$ эканлигини ҳисобга олиб, назарий частоталарни ушбу

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_T} \cdot \phi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695} \cdot \phi(u_i) = 85 \cdot \phi(u_i)$$

формула бўйича ҳисоблаймиз (V боб, 5-§).

$\phi(u)$ функциянинг қийматлари берилган 1-иловадаги жадвалдан фойдаланиб, қуйидаги ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_T}{\sigma_T}$	$\phi(u_i)$	$n'_i = 85 \cdot \phi(u_i)$
1	5	-1,62	0,1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

$\chi^2_{кузат}$ кийматни ҳисоблаш учун қуйидаги жадвални тузамиз:

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	15	9,1	-5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	3,6
3	25	25,3	-0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	-2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	-7,9	62,41	1,9
6	21	29,8	-8,8	77,44	2,3
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,0
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
					$\chi^2_{кузат} = \sum_1^9 \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = 20,0$

Бу жадвалдан $\chi^2_{кузат} = 20,0$ ни топамиз.

Танланмадаги гуруҳлар сони $s=9$ бўлгани учун озодлик даражалари сони $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ га тенг бўлади. Энди 3-иловадаги жадвалга мурожаат қиламиз.

Озодлик даражалари сони $k=6$ га тенг бўлганда χ^2 нинг кузатиладиган киймати $\chi^2_{кузат} = 20,0$ жадвалдаги 0,01 эҳтимолли графадаги киймати 12,59 дан катта бўлгани учун бош тўплам нормал тақсимои қонунига бўйсунди деган гипотеза билан танланманинг берилган эмпирик тақсимои мос келмас экан. Бошқача қилиб айтганда, эмпирик ва назарий частоталар фарқи муҳим экан. Яна саддалаштирилган (**) қоидадан фойдаланиш ҳам мумкин:

$$t_{\chi^2_{кузат}} = \frac{|\chi^2_{кузат} - v|}{\sqrt{2v}} = \frac{|20 - 6|}{\sqrt{2 \cdot 6}} = \frac{14}{\sqrt{12}} = \frac{14}{3,46} \approx 4,05$$

микдор ҳосил бўлади. Бу сон 3 дан катта бўлгани учун эмпирик ва назарий частоталар фарқи муҳим экан (тасодифий эмас экан). Демак, бош тўплам нормал тақсимои қонунга бўйсунди деган гипотеза нотўғри экан.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Пирсоннинг мовуфиклик критерийси нимадан иборат?

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функция қийматлари жадвали

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,398	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{функция қийматлари жадвали}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,34	0,1331	0,68	0,2517	1,02	0,3461
0,01	0,0040	0,35	0,1368	0,69	0,2549	1,03	0,3485
0,02	0,0080	0,36	0,1406	0,70	0,2580	1,04	0,3508
0,03	0,0120	0,37	0,1443	0,71	0,2611	1,05	0,3531
0,04	0,0160	0,38	0,1480	0,72	0,2642	1,06	0,3554
0,05	0,0199	0,39	0,1517	0,73	0,2673	1,07	0,3577
0,06	0,0239	0,40	0,1554	0,74	0,2703	1,08	0,3599
0,07	0,0279	0,41	0,1591	0,75	0,2734	1,09	0,3621
0,08	0,0319	0,42	0,1628	0,76	0,2764	1,10	0,3643
0,09	0,0359	0,43	0,1664	0,77	0,2794	1,11	0,3665
0,10	0,0398	0,44	0,1700	0,78	0,2823	1,12	0,3686
0,11	0,0438	0,45	0,1736	0,79	0,2852	1,13	0,3708
0,12	0,0478	0,46	0,1772	0,80	0,2881	1,14	0,3729
0,13	0,0517	0,47	0,1808	0,81	0,2910	1,15	0,3749
0,14	0,0557	0,48	0,1844	0,82	0,2939	1,16	0,3770
0,15	0,0596	0,49	0,1879	0,83	0,2967	1,17	0,3790
0,16	0,0636	0,50	0,1915	0,84	0,2995	1,18	0,3810
0,17	0,0675	0,51	0,1950	0,85	0,3023	1,19	0,3830
0,18	0,0714	0,52	0,1985	0,86	0,3051	1,20	0,3849
0,19	0,0753	0,53	0,2019	0,87	0,3078	1,21	0,3869
0,20	0,0793	0,54	0,2054	0,88	0,3106	1,22	0,3883
0,21	0,0832	0,55	0,2088	0,89	0,3133	1,23	0,3907
0,22	0,0871	0,56	0,2123	0,90	0,3159	1,24	0,3925
0,23	0,0910	0,57	0,2157	0,91	0,3186	1,25	0,3944
0,24	0,0948	0,58	0,2190	0,92	0,3212	1,26	0,3962
0,25	0,0987	0,59	0,2224	0,93	0,3238	1,27	0,3980
0,26	0,1026	0,60	0,2257	0,94	0,3264	1,28	0,3997
0,27	0,1064	0,61	0,2291	0,95	0,3289	1,29	0,4015
0,28	0,1103	0,62	0,2324	0,96	0,3315	1,30	0,4032
0,29	0,1141	0,63	0,2357	0,97	0,3340	1,31	0,4049
0,30	0,1179	0,64	0,2389	0,98	0,3365	1,32	0,4066
0,31	0,1217	0,65	0,2422	0,99	0,3389	1,33	0,4082
0,32	0,1255	0,66	0,2454	1,00	0,3413	1,34	0,4099
0,33	0,1293	0,67	0,2486	1,01	0,3438	1,35	0,4115

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,20	0,4861	2,94	0,4984
1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,22	0,4868	2,96	0,4985
1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,24	0,4875	2,98	0,4986
1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,26	0,4881	3,00	0,49865
1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,28	0,4387	3,20	0,49931
1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,30	0,4893	3,40	0,49966
1,42	0,4222	1,79	0,4633	2,32	0,4898	3,60	0,499341
1,43	0,4236	1,80	0,4641	2,34	0,4904	3,80	0,499928
1,44	0,4251	1,81	0,4649	2,36	0,4909	4,00	0,499968
1,45	0,4265	1,82	0,4656	2,38	0,4913	4,50	0,499997
1,46	0,4279	1,83	0,4664	2,40	0,4918	5,00	0,499997
1,47	0,4292	1,84	0,4671	2,42	0,4922		
1,48	0,4306	1,85	0,4678	2,44	0,4927		
1,49	0,4319	1,86	0,4686	2,46	0,4931		
1,50	0,4332	1,87	0,4693	2,48	0,4934		
1,51	0,4345	1,88	0,4699	2,50	0,4938		
1,52	0,4357	1,89	0,4706	2,52	0,4941		
1,53	0,4370	1,90	0,4713	2,54	0,4945		
1,54	0,4382	1,91	0,4719	2,56	0,4948		
1,55	0,4394	1,92	0,4726	2,58	0,4951		
1,56	0,4406	1,93	0,4732	2,60	0,4953		
1,57	0,4418	1,94	0,4738	2,62	0,4956		
1,58	0,4429	1,95	0,4744	2,64	0,4959		
1,59	0,4441	1,96	0,4750	2,66	0,4961		
1,60	0,4452	1,97	0,4756	2,68	0,4963		
1,61	0,4463	1,98	0,4761	2,70	0,4965		
1,62	0,4474	1,99	0,4767	2,72	0,4967		
1,63	0,4484	2,00	0,4772	2,74	0,4969		
1,64	0,4495	2,02	0,4783	2,76	0,4971		
1,65	0,4505	2,04	0,4793	2,78	0,4973		
1,66	0,4515	2,06	0,4803	2,80	0,4974		
1,67	0,4525	2,08	0,4812	2,82	0,4976		
1,68	0,4535	2,10	0,4821	2,84	0,4977		
1,69	0,4545	2,12	0,4830	2,86	0,4979		
1,70	0,4554	2,14	0,4838	2,88	0,4980		
1,71	0,4564	2,16	0,4842	2,90	0,4981		
1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,92	0,4982		

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ қийматлар жадвали

$\begin{smallmatrix} \gamma \\ n \end{smallmatrix}$	0,95	0,99	0,999	$\begin{smallmatrix} \gamma \\ n \end{smallmatrix}$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,010	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

АДАБИЁТЛАР:

1. В.Е.Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент: «Ўқитувчи», 1977.
2. В.Е.Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент: «Ўқитувчи», 1980.
3. М.М.Султонова. Вариацион статистика. Тошкент: «Ўқитувчи», 1977.
4. А.С.Солодовников. Эҳтимоллар назарияси. Тошкент: «Ўқитувчи», 1983.
5. В.М.Иванова и др. Математическая статистика. Москва: «Высшая школа», 1975.

Адади 100 нусха. Босма табағи 6,25. Буюртма 42/25.
Баҳоси келишилган нархда.

Сартепа туризм ва маиший хизмат коллежи кичик босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Самарқанд шаҳри, Сартепа маскани, Туризм коллежи биноси.