

Nurimov T. Imomqulov N. Yo.

MATEMATIKA

(analitik geometriya elementlari)

Elektron o'quv qo'llanma

Samarqand – 2008

Nurimov T. Imomqulov N. Yo. **Matematika** (analitik geometriya elementlari). Electron o'quv qo'llanma. – Samarqand: SamDU nashri, 2008. – 114 bet.

Ushbu electron oq'uv qo'llanmada analitik geometriya elementlari DTS dasturi asosida bayon etilgan. Nazariy materiallar misol va masalalar yechishga tadbqiq bilan mustahkamlanadi. Har bir paragraf oxirida tekshirish uchun savollar va mashqlar keltirilgan.

O'quv qo'llanmadan 5141600–BTU, 5141800–pedagogika, psixologiya va maxsus sirtqi BTU yo'nalishida ta'lim oluvchi bakalavrlar, gumanitar fanlar yo'nalishida o'qiydigan talabalar va ijtimoiy-iqtisodiy, kasb-hunar kollejlari o'quvchilari foydalanishlari mumkin.

Ma'sul muharrir: fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent **Raxmatov M.A.**

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent **Mardiev R.M.**
fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent **Tursunov Q.N.**

KIRISH

Mamlakatimizda «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» asosida ta'lim oluvchilarning yuksak tayyorgarlik darajasi, malakasi, madaniy va ma'naviy, axloqiy saviyasining sifatini belgilab beruvchi davlat ta'lim standartlari uzluksiz ta'lim tizimining barcha bosqichlarida to'liq amalga oshirilayotgan bir davrda o'quv adabiyotlariga bo'lgan talab kuchayib bormoqda. Sunday adabiyotlar yaratish professor-o'qituvchilar zimmasiga katta mas'uliyatlar yuklaydi. Pedagogik yo'nalishlarning talabalariga mo'ljallab yozilgan ushbu o'quv qo'llanma ular uchun matematika(analitik geometriya)dan kerakli bilimlarga ega bo'lishlarida xizmat qiladi.

O'quv qo'llanmada analitik geometriya masalalari qaralgan bo'lib, vektor fazolar va chiziqli akslantirishlar haqida umumiy tushunchalar keltirilgan. Bu yerda talabalarining fazoviy tasavvurlarini rivojlantirish, fazolarni norma va skalyar yaxshi o'rganilgan fazolarga, masalan, to'g'ri chiziqqa, tekislikka, uch o'lchovli fazoga qulay tarzda olib o'rganishdan iborat. Analitik geometriyaning elementlarini to'g'ri chiziq tekislik va fazoda o'rganishga keng o'rin berilgan bo'lib, talabalar ko'pgina masalalarni mustaqil yechishlari uchun topshiriqlarni bajarishlari ham nazarda tutilgan.

Qo'llanmada bayon etilgan har bir mavzu oxirida tekshirish uchun savollar va mashqlar keltirilgan bo'lib, ulardan amaliy mashg'ulotlarda foydalanish mumkin.

ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

Analitik geometriya geometriyaning bir qismi bo'lib uning asosiy tushunchalari nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik, 2-tartibi egri chiziqlar va sirtlardan iborat. Analitik geometriyaning asosiy tadqiqot vositalari koordinatalar metodi va elementar algebra metodlari bo'lib hisoblanadi. Koordinatalar metodi XVII-asrda paydo bo'lib u astronomiya, mexanika va texnikaning rivojlanishi bilan bog'liq. Bu metod va analitik geometriya asoslari 1637 yilda R.Dekard tomonidan fanga kiritilgan bo'lib uning rivojiga P.Ferma, G.Leibnis, I.Newton, L.Euler va boshqa olimlar katta hissa qo'shishgan.

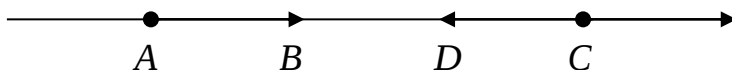
1-§. To'g'ri chiziqda koordinatalar metodi

1. O'q ustida yo'nalgan kesmalar

1-ta'rif. Yo'nalishi aniq bo'lgan to'g'ri chiziq *o'q* deb ataladi.

2-ta'rif. Agar to'g'ri chiziq ustidagi kesmaning qaysi (uchi) chegaraviy nuqtasi uning boshi, qaysi chegaraviy nuqtasi uning oxiri ekanligi ko'rsatilgan bo'lsa, u *yo'naltirilgan kesma* yoki *vektor* deb ataladi.

Boshi A nuqtada oxiri esa B nuqtada bo'lgan yo'nalgan kesmani $\overline{AB}$ simvol bilan belgilaymiz (1-chizmada $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo'nalgan kesmalar aks ettirilgan).



1-chizma

3-ta'rif. Agar kesmaning boshi va oxiri bitta nuqtada bo'lsa uni *nol* yo'nalgan kesma deyiladi.

4-ta'rif. $\overline{AB}$ yo'nalgan kesma kattaligi (miqdori) deb $\overline{AB}$ kesma uzunligi AB ga aytiladi, bunda $\overline{AB}$ ning yo'nalishi o'q yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, $\overline{AB}$ ning ishorasi «+», qarama-qarshi bo'lsa «-» ishora bilan olinadi.

Nol yo'nalgan kesmaning kattaligi nolga teng deb hisoblanadi.

2. Yo'nalgan kesmalar ustida chiziqli amallar

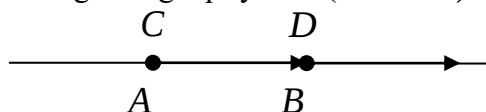
Avvalo yo'nalgan kesmalarning tengligi tushunchasini aniqlaymiz. Yo'nalgan kesmalarni o'q bo'ylab uning yunalishi va uzunligini o'zgartirmasdan siljitish mumkin deb hisoblaymiz.

5-ta'rif. Agar o'q bo'ylab siljirilganda nol bo'lmagan ikki yo'nalgan kesmalarning boshidagi va oxiridagi nuqtalari ustma-ust tushsa, bu kesmalar *o'zaro teng* deyiladi.

Tasdiq. Ikki yo'nalgan kesmaning o'zaro teng bo'lishi uchun ularning kattaliklari o'zaro teng bo'lishi zarur va yetarli.

Yo'nalgan kesmalarni qo'shish va haqiqiy songa ko'paytirish amallarini yunalgan kesmalar ustida *chiziqli amallar* deymiz.

$\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo'nalgan kesmalar berilgan bo'lsin. Ularning yig'indisini topish uchun $\overline{CD}$ kesmaning boshini $\overline{AB}$ kesmaning oxiriga qo'yamiz (2-chizma)



2-chizma

Bu holda hosil bo'lgan $\overline{AD}$ kesma $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo'nalgan kesmalarning yig'indisi deyiladi va $\overline{AB} + \overline{CD}$ kabi yoziladi.

Quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. Yo'nalgan kesmalar yig'indisining kattaligi, qo'shiluvchi kesmalar kattaliklarining yig'indisiga teng.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. A , B va C nuqtalar sonlar o'qi ustida qanday joylashmasin, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ va $\overline{AC}$ yo'nalgan kesmalar kattaliklari

$$A B + B C = A C$$

tenglikni qanoatlantiradi. Bu asosiy ayniyat deb ataladi.

Endi yo'nalgan kesmani λ haqiqiy songa ko'paytirish amalini qaraymiz.

$\overline{AB}$ yo'nalgan kesma va $\lambda \neq 0$ haqiqiy son berilgan bo'lsin. $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmaning λ haqiqiy songa ko'paytmasi deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\lambda \overline{AB}$ yo'nalgan kesmaga aytiladi:

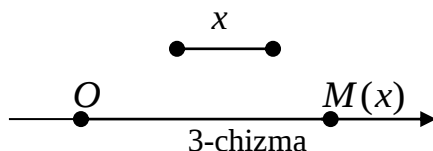
Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $\lambda \overline{AB}$ kesma $\overline{AB}$ kesma bilan bir xil yo'nalishda, agar $\lambda < 0$ bo'lsa, qarama-qarshi yo'nalishdadir.

$\lambda \overline{AB}$ yo'nalgan kesmaning uzunligi $|\lambda|$ bilan $\overline{AB}$ ning uzunligi ko'paytmasiga teng, yani $|\lambda| \overline{AB}$ ga teng.

3. To'g'ri chiziqda dekart koordinatalari

To'g'ri chiziqdagi nuqtaning vaziyatini aniqlash masalasi bilan shug'ullanamiz.

O'qdagi biror nuqtani O harfi bilan belgilab, bu nuqtani *sanoq boshlanadigan nuqta (hisob boshi)* deb qabul qilamiz. Ixtiyoriy uzunlikdagi kesmani *chiziqli birlik* sifatida qabul qilib, uni *masshtab birlik* deb ataymiz.



1-ta’rif. Agar, to’g’ri chiziqda biror O nuqta belgilangan, musbat yunalishi ko’rsatilgan va masshtab birligi tanlab olingan bo’lsa, to’g’ri chiziqda dekart koordinatalari sistemasi (sonlar o’qi) aniqlangan deyiladi. O nuqta koordinatalar boshi, Ox o’q koordinatalar o’qi deyiladi (3-chizma).

Ox o’qda O nuqta bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy M nuqta olaylik.

OM kesmaning yo’nalishini Ox o’q yo’nalishi kabi yoki bu o’q yo’nalishiga qarama-qarshi bo’lishi mumkin; birinchi holda M nuqtaning koordinatasi musbat son, ikkinchi holda esa manfiy son bo’ladi. Ana shu sonni x bilan belgilasak

$$x = \begin{cases} OM \\ -OM \end{cases}$$

x son M nuqtaning koordinatasi deyiladi va $M(x)$ shaklda yoziladi.

Agar to’g’ri chiziqda dekart koordinatalari sistemasi kiritilgan bo’lsa, bu sistema yordamida to’g’ri chiziqning nuqtalari bilan haqiqiy sonlar to’plami orasida bir qiymatli moslik o’rnatish mumkin.

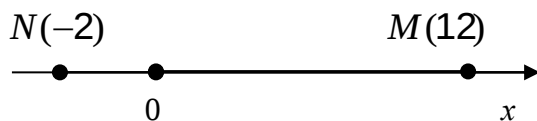
Misol. Sonlar o’qida koordinatalari quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarni yasang:

$$|x - 5| = 7$$

Yechish. Berilgan tenglama quyidagi tenglamalarga teng kuchli:

$$1) x - 5 = 7 \quad 2) -(x - 5) = 7$$

Demak, berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning koordinatalari: $x_1=12$, $x_2=-2$ (4-chizma)



4-chizma

4. Ikki nuqta orasidagi masofa

Faraz qilaylik $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$ nuqtalar to'g'ri chiziqdagi dekart koordinatalari sistemasida yotgan bo'lsin.

1-teorema. $\overline{M_1M_2}$ yo'nalgan kesmaning kattaligi $x_2 - x_1$ ga teng, ya'ni,

$$M_1M_2 = x_2 - x_1 \quad (1)$$

Isbot. O'q ustida O , M_1 va M_2 nuqtalarni qaraymiz. 2.P.dagi 1-teoremaga ko'ra

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2 \quad (2)$$

Agar $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$ ekanligini nazarga olsak (2) dan (1) kelib chiqadi.

Natija. $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalar orasidagi $\rho(M_1, M_2)$ masofa quyidagi formula yordamida hisoblanishi mumkin:

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1| \quad (\text{nima}$$

uchun?)

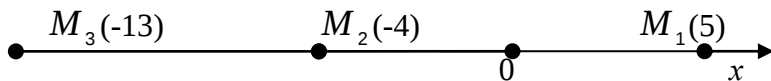
Misol. Sonlar o'qida $M_1(5)$ va $M_2(-4)$ nuqtalar berilgan. M_2 ga nisbatan M_1 nuqtaga simmetrik bo'lgan M_3 nuqtaning koordinatasini toping.

Yechish. $\overline{M_2M_1}$ kesmaning uzunligini aniqlaymiz:

$$\rho(M_2 M_1) = |x_{M_1} - x_{M_2}| = |5 - (-4)| = 9$$

Demak, M_1 nuqta M_2 nuqtadan 9 birlik uzoqda yotadi. M_3 nuqta M_2 nuqtaga nisbatan M_1 nuqtaga simmetrik bo'lishi uchun bu nuqta xam M_2 dan M_1 ga qarama-qarshi tomonda 9 birlik masofada yotishi kerak.

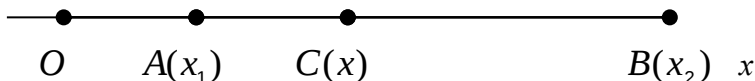
Demak, M_2 nuqtaning koordinatasi (-4) bo'lgani uchun M_3 nuqtaning koordinatasi $-9-4 = -13$ ya'ni: $M_3 = M_3(-13)$ (5-chizma)



5-chizma

5. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Boshlang'ich nuqtasi $A(x_1)$ oxirgi nuqtasi $B(x_2)$ bo'lgan $\overline{AB}$ kesmani $AC/CB = \lambda$ ($\lambda \neq -1$) nisbatda bo'luvchi $C(x)$ nuqtaning koordinatasini topamiz (6-chizma).



6-chizma

Malumki, $AC = x - x_1$, $CB = x_2 - x$. U xolda $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$.

Bundan $\lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$, $x_1 + \lambda x_2 = x(1 + \lambda)$,

Demak,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad (1)$$

Bu esa C nuqtaning koordinatasidir. Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $\overline{AC}$ va $\overline{CB}$ kesmalarning yo'nalishi bir xil, $\lambda < 0$ bulsa, qarama-qarshi buladi va aksincha.

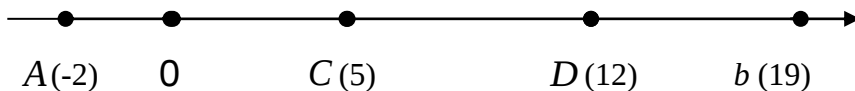
Agar $A(x_1)$ va $B(x_2)$ ikki ixtiyoriy nuqta va $C(x)$ $\overline{AB}$ kesmaning o'rtasi bo'lsa, u holda

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2)$$

(2) formula (1) formuladan $\lambda = 1$ bo'lganda hosil bo'ladi. Demak, kesma o'rtasining koordinatasi uning koordinatalari yig'indisining yarmiga teng.

Misol. Uchlari $A(-2)$ va $B(19)$ nuqtalarda bo'lgan $\overline{AB}$ kesmani C va D nuqtalar teng uch bo'lakka bo'ladi. C va D nuqtalarning koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan nuqtalarni sonlar o'qida tasvirlaymiz (7-chizma).



7-chizma

1. Shart bo'yicha C nuqta AD kesmani $\lambda = 1/2$ nisbatda bo'ladi. (1) formulaga ko'ra $x_1 = -2$, $x_2 = 19$, deb olsak, nuqtaning koordinatasi:

$$X_c = \frac{-2 + \frac{19}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ yoki } X_c = 5$$

2. D nuqta $\overline{AB}$ kesmani $AD/DB=2/1$ nisbatda bo'ladi. (1) formulaga $x_1=-2$, $x_2=19$, $\lambda=2$ qiymatlarni qo'yib D nuqtaning X_D koordinatasini topamiz:

$$X_D=12$$

Eslatma. λ ning musbat qiymatlari uchun C nuqta A va B nuqtalar orasida yotadi (6-chizmaga qarang). Bunda $\overline{AC}$ va $\overline{CB}$ kesmalar bir xil yo'nalgan bo'ladi). λ ning manfiy qiymatlari uchun C nuqta $\overline{AB}$ kesmadan tashqarida yotadi (nima uchun?).

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar.

1. O'q deb nimaga aytiladi?
2. Yo'naltirilgan kesma deb nimaga aytiladi?
3. Yo'nalgan kesmaning kattaligi (miqdori) deb nimaga aytiladi?
4. Yo'nalgan kesmalar qachon o'zaro teng bo'ladi?
5. Yo'nalgan kesmalar yig'indisining kattaligi nimaga teng?
6. Yo'nalgan kesmaning haqiqiy songa kupaytmasi deb nimaga aytiladi?
7. To'g'ri chiziqdagi, dekart koordinatalari sistemasi deb nimaga aytiladi?
8. Yo'nalgan kesmaning kattaligi qanday topiladi?
9. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
10. Kesmani berilgan nisbatta bo'luvchi nuqtaning koordinatasi qanday topiladi? Kesmaning o'rtasidagi nuqta koordinatasi-chi?
11. Koordinatalari qo'yidagi tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalarni yasang:

a) $\frac{x+2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{17}{4} = x - \frac{3(x-1)}{8}$

b) $2x^2 + 3x - 5 = 0$,

c) $|x-4|=7$

12. Koordinata to'g'ri chizig'ida $A(-3)$ va $B(5)$ nuqtalarni belgilang.
13. $M=(-4; -1)$ va $K=[-2;5]$ sonli to'plamlar berilgan. Quyidagi to'plamlarni son o'qida tasvirlang.
 - a) $M \cup K$,
 - b) $M \cap K$
14. Berilgan B nuqtadan A nuqttagacha bo'lgan kesma uzunligini bilgan holda, A nuqtaning koordinatasini toping.
 - a) $B(2)$ va $AB=8$. b) $B(-5)$ va $AB=3$
15. $C(3)$ nuqta $A(1)$ va $B(x)$ nuqtalar orasidagi masofani $\lambda = \frac{2}{3}$ nisbatda bo'ladi. B nuqtaning koordinatasini toping.
16. $A(3)$ nuqtadan 7 birlik uzoqlikda turgan C nuqtaning koordinatasini toping.
17. nuqtalarni tutashtiruvchi kesmani $m:n$ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatasini toping, agar:
 - a) $a=8, b=22, m=3, n=4$
 - b) $a=27, b=9, m=2, n=1$

2-§. Tekislikda koordinatalar metodi

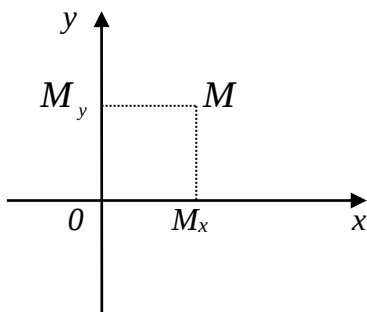
1. Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi

Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi ikkita o'zaro perpendikulyar o'qlar va chizikli birlik masshtab berilishi bilan aniqlanadi.

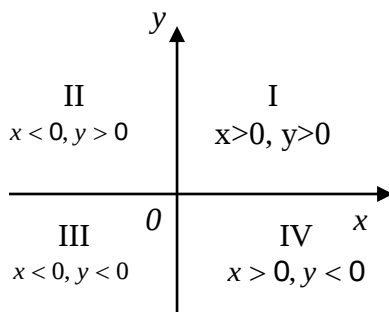
O'qlarning kesishish nuqtasi – 0 koordinatalar boshi, birinchi o'q – Ox yoki **abssissalar** o'qi, ikkinchisini esa – Oy yoki **ordinatalar** o'qi deb ataladi.

Tekislikda ixtiyoriy M nuqta olamiz. M nuqtaning Ox va Oy o'qlarga proyeksiyalarini mos ravishda M_x va M_y deb belgilaymiz.

$\overline{OM_x}$ va $\overline{OM_y}$ yo'nalgan kesmalarning kattaliklari x va y sonlar, M nuqtaning **to'g'ri burchakli dekart koordinatalari** deyiladi va $M(x; y)$ kabi yoziladi (1-chizma):



1-chizma



2-chizma

x - M nuqtaning absissasi, y - M nuqtaning ordinatasi deyiladi.

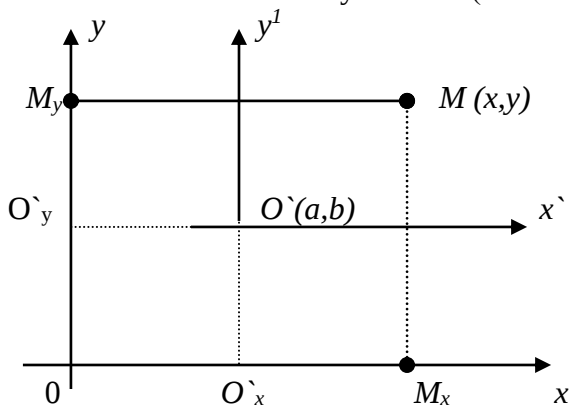
Koordinata o'qlari tekislikni 4 ta **kvadrantga** bo'ladi (2-chizma). Chizmada har bir kvadrantga mos nuqta koordinatalarining ishoralari ham ko'rsatilgan.

2. Tekislikda koordinatalarni almashtirish.

Bitta tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini turlicha tanlash mumkin.

A. Koordinata boshini kuchirish.

Oxy koordinata sistemasini olamiz va unda $O'(a,b)$ nuqtani belgilaymiz. Bu nuqtadan Ox va Oy nuqtalarga mos ravishda parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ulardagi yo'nalishlarni mos ravishda Ox va Oy o'qlar yo'nalishiga mos qilib olamiz. U holda birlik masshtabni **Oxy** sistemadagi kabi olsak, ikkinchi koordinatalar sistemasi $O'x'y'$ ga ega bo'lamiz. $O'x'y'$ sistema **Oxy** sistemadan koordinata boshini kuchirish natijasida hosil qilingan deyiladi. Koordinata tekisligida biror M nuqta olamiz. Uning berilgan koordinatalar sistemasidagi koordinatalari x va y bo'lsin. Yangi koordinatalar sistemasida ular x' va y' bo'ladi (3-chizma).



3-chizma

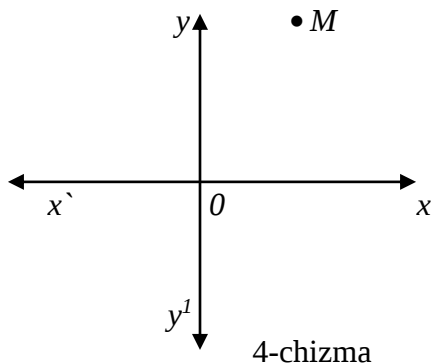
x' va y' larni x va y lar orqali ifodalaymiz, yani nuqtaning yangi sistemasidagi koordinatalarini topamiz. Buning uchun nuqtalardan koordinata o'qlariga perpendikulyar tushiramiz, yani bu nuqtalarni o'qlarga proyeksiyalaymiz. Abssissa o'qida nuqtalarga ega bo'lamiz. Ularning koordinatalari a va x ga teng. Chizmadan ko'rinib turibdiki, $x=a+x'$ ni hisobga olsak $x'=x-a$ ga ega bo'lamiz. Xuddi shuningdek $y=b+y'$ ni topamiz.

Demak, x' va y' larni x va y lar orqali ifodalovchi formulalar

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

dan iborat ekan. Bu tekislikda **koordinatalarni almashtirish** formulalaridir. a va b yangi koordinata sistemi boshining koordinatalari bo'ladi.

B. O'qlar yo'nalishini o'zgartirish. Oxy koordinatalar sistemi berilgan bo'lsin. Koordinata boshini o'zgartirmasdan o'qlar yo'nalishini teskarisiga o'zgartiramiz. Bu holda yangi $Ox'y'$ sistema hosil bo'ladi (4-chizma).



Bu holda har ikkala x va y koordinatalar o'z ishoralarini o'zgartiradi.

$$\left. \begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned} \right\}$$

C. Masshtabni o'zgartirish. Endi, koordinata o'qlarining yo'nalishini (holatini) va koordinata boshini o'zgartirmasdan birlik kesma uzunligini k marta o'zgartirishni qaraymiz.

Bunday o'zgartirishda nuqtaning yangi va eski koordinatalari ko'pyidagicha bog'lanishda bo'ladi

$$x' = \frac{x}{k} \quad y' = \frac{y}{k}$$

1-misol. Koordinata boshi $O'(4;-3)$ nuqtaga ko'chirilgan. $A(5;2)$ nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalari qanday bo'ladi?

Yechish. $a = 4, b = -3, x = 5, y = 2$ larga ko'ra

$$x' = x - a = 5 - 4 = 1. \quad y' = y - b = 2 + 3 = 5$$

Demak, A nuqtaning yangi koordinatalari 1 va 5 bo'ladi.

2-misol. Agar koordinata boshi va o'qlarning yo'nalishi o'zgartirilmasdan birlik kesma (masshtab) 3 marta orttirilgan (yoki kamaytirilgan) bo'lsa, $A(9; -3)$ nuqtaning yangi koordinatalari qanday bo'ladi?

Yechish. a) $K=3$ bo'lgani uchun $x' = \frac{9}{3} = 3,$

$$y' = \frac{-3}{3} = -1.$$

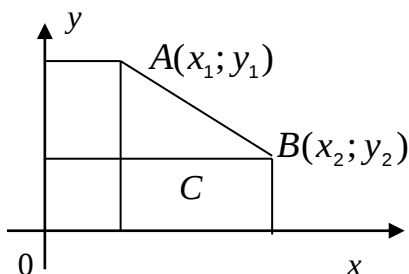
Demak, A nuqtaning yangi koordinatalari 3 va -1 bo'ladi.

b) $K = \frac{1}{3}$ bo'lgan holda esa

$x' = 9; \frac{1}{3} = 27, \quad y' = -3; \frac{1}{3} = -9.$ Demak, bu holda A nuqtaning yangi koordinatalari 27 va -9 bo'ladi.

3. Ikki nuqta orasidagi masofa

Faraz qilaylik to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, x_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, bunda $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ bo'lsin (5-chizma).



5-chizma

A va B nuqtalar orasidagi masofani topish talab etiladi. Ko'rinib turibdiki, A va B nuqtalar orasidagi masofa, $\rho(A, B)$

$\overline{AB}$ yo'nalgan kesma uzunligiga teng. Bu esa o'z navbatida ACB to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga teng.

Shu gipotenuza uzunligini topsak, masala yechilgan bo'ladi.

Uchburchakning Ox o'qiga parallel tomonining uzunligi, $\overline{CB}$ kesmaning Ox o'qiga proyeksiyasi uzunligiga, yani $|x_2 - x_1|$ ga teng. Xuddi shuningdek, uning Oy o'qiga parallel tomonining uzunligi $\overline{CA}$ kesmaning Oy o'qiga proyeksiyasi uzunligiga, yani $|y_2 - y_1|$ ga teng.

To'g'ri burchakli ACB uchburchakka Pifagor teoremasini tadbiiq etib quyidagini topamiz:

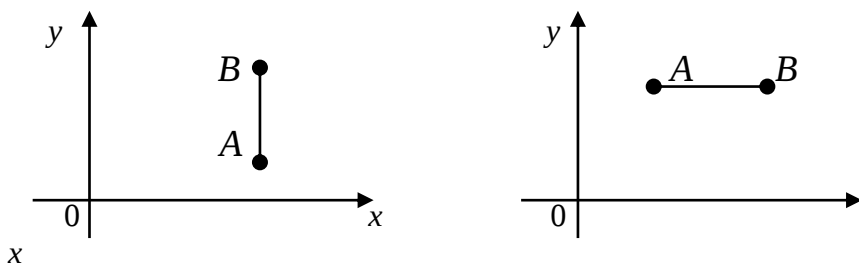
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \rho^2$$

Demak, nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

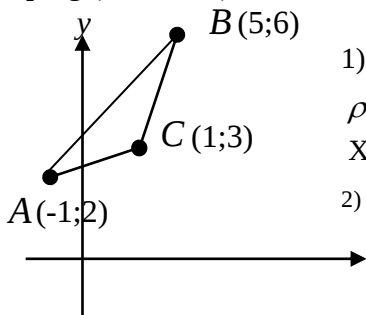
formula yordamida topiladi.

Garchi, nuqtalar orasidagi masofani beruvchi (1) formula $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ dan iborat farazda chiqarilgan bo'lsada, u boshqa hollarda ham o'z kuchini saqlaydi. Haqiqatdan ham, $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ bo'lsa, $\rho(A, B) = |y_2 - y_1|$ ga teng. Agar $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ bo'lsa $\rho(A, B) = |x_2 - x_1|$ ga teng $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ bo'lsa A va B nuqtalar ustma-ust tushadi va $\rho(A, B) = 0$ bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

Misol. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan $A(-1; 2)$, $B(5; 6)$, va $C(1; 3)$. Uning tomonlari uzunliklarini toping (7-chizma).



1) AC tomonning uzunligini topamiz:

$$\rho(A, C) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$$

Xuddi shuningdek

$$2) \rho(AB) = \sqrt{52} \quad \rho(C, B) = 5$$

4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ ikki nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazib, unda musbat yo'nalishni aniqlasak, bu to'g'ri chiziq o'qqa aylanadi. Bu o'q koordinata o'qlariga parallel emas deb olaylik. Olingan o'qda A va B nuqtalar $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmani aniqlaydi.

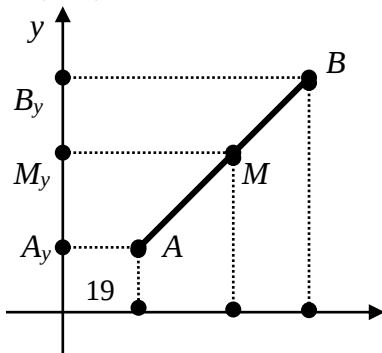
Faraz qilaylik, $M(x, y)$ B nuqtadan farqli bo'lgan

(aytilgan o'qdagi) nuqta bo'lsin. $\overline{AB}$ kesmani

$\lambda = AM : MB$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatasini topish talab etiladi.

Eslatma. Agar M nuqta A va B nuqtalar orasida yotsa $\overline{AM}$ va $\overline{MB}$ kesmalarning yo'nalishi bir xil bo'lib, λ musbat son, M nuqta $\overline{AB}$ kesmaning tashqarisida yotsa, $\overline{AM}$ va $\overline{MB}$ kesmalarning yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lib λ manfiy son, va aksincha.

Quyilgan masalani hal etish uchun A , M va B nuqtalarni koordinata o'qlariga proyeksiyalaymiz: Ular $A_x, M_x, B_x, A_y, M_y, B_y$ lardan iborat bo'ladi.



$$0 \quad A_x \quad M_x \quad B_x \quad x$$

8-chizma

Ko'rinib turibdiki, M_x nuqta $\overline{A_x B_x}$ yo'nalgan kesmani λ nisbatda bo'ladi, yani

$$A_x M_x : M_x B_x = \lambda \quad (*)$$

Agar $A_x M_x = x - x_1$, $M_x B_x = x_2 - x$ ekanligini nazarga olsak, (*) tenglikdan $x = (x_1 + \lambda x_2) : (1 + \lambda)$ ekanligini topamiz.

Xuddi shu yo'l bilan $y = (y_1 + \lambda y_2) : (1 + \lambda)$ ni topamiz. Shunday qilib, berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

formulalar yordami bilan topiladi.

Agar $M(x; y)$ nuqta $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmaning o'rtasida bo'lsa $\lambda = 1$ bo'lib yuqoridagi formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar.

1. Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi qanday aniqlanadi?
2. Nuqtaning dekart koordinatalari deb nimalarga aytiladi?

3. Tekislikda koordinata boshini kuchirish qanday amalga oshiriladi?
4. Tekislikda koordinata o'qlarining yo'nalishini uzgartirish qanday amalga oshiriladi?
5. Masshtab uzgarishi bilan nuqtaning koordinatalari qanday uzgaradi?
6. Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasini isbotlang.
7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalarini isbotlang.

Mashqlar.

1. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(-1; 2)$, $B(4;7)$, $C(0;3)$. Uning tomonlari uzunliklarini toping.
2. Absissalar o'qida $M(2;5)$ nuqtadan 13 uzunlik birligi uzoqlikda yotuvchi nuqtani toping.
3. $A(-5;4)$ va $B(5;6)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi $C(x; y)$ nuqtaning koordinatalarini toping.
4. $A(-5;-7)$ nuqta hamda AB kesmaning o'rtasida yotuvchi $C(-9;-12)$ nuqta berilgan. B uchining koordinatalarini toping.
5. Uchlari $O(0;0)$, $A(8;0)$ va $B(0;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning OC medianasi va OD bissektrisasining uzunliklarini toping.
6. $A(-2;-4)$ nuqta to'g'ri chiziq buylab harakatlanib, $B(4;2)$ nuqtaga keladi. O'tilgan yo'lning uzunligi va nuqtaning trayektoriyasi bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchakni toping.

7. AB kesmaning o'qlardagi proyeksiyalari $MP_{ox} \overline{AB}=5$

$MP_{oy} \overline{AB}=-4$ bo'lib oxirgi uchi $B(2;-2)$ nuqtada. Uning A

nuqtasi koordinatasini toping.

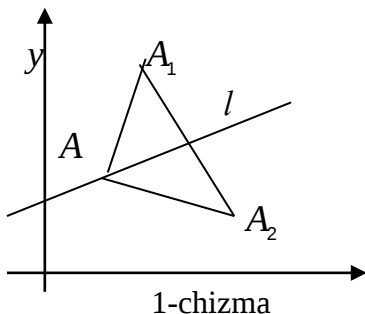
3-§. Chiziq tenglamalari

1. To'g'ri chiziq tenglamasining umumiy ko'rinishi

1-teorema. Har qanday to'g'ri chiziq ushbu
$$ax + by + c = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglama bilan ifodalanadi, bunda a, b, c – o'zgarmas sonlar.

Isbot. Dekart koordinatalar sistemasida biror l to'g'ri chiziq berilgan bo'lib $A_1(a_1, b_1)$ va $A_2(a_2, b_2)$ lar shu to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalar bo'lsin (1-chizma).



Bunday holda to'g'ri chiziq ustidagi istalgan $A(x, y)$ nuqta bu nuqtalardan baravar uzoqlikda yotadi va aksincha A_1 va A_2 nuqtalardan baravar uzoqlikda yotgan A nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. $A_1A = A_2A$ bo'lganidan to'g'ri chiziq tenglamasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz.

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2$$

tenglamaning hamma hadlarini chap tomonga o'tkazib soddalashtirishlarni bajarsak

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0$$

yoki

$$ax + by + c = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bunda $a = 2(a_2 - a_1)$ $b = 2(b_2 - b_1)$, $c = a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2$. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar a va b lar bir vaqtda nolga teng bo'lmasa, tenglamasi

$$ax + by + c = 0$$

dan iborat to'g'ri chiziq mavjud (isbotlang).

(1) tenglama to'g'ri chiziqning *umumiy tenglamasi* deyiladi

2. To'g'ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyati

Tenglamasi $ax + by + c = 0$ dan iborat l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

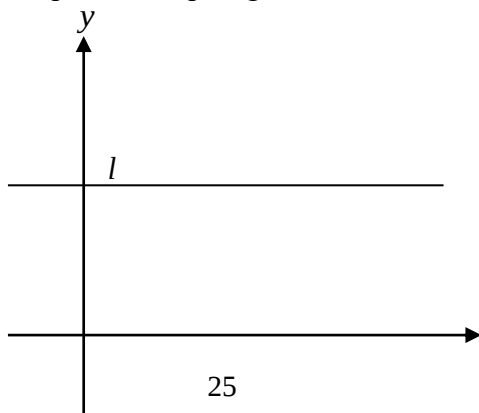
1^o. $a=0$. Bu holda to'g'ri chiziq tenglamasi $by + c = 0$ yoki

$y = -\frac{c}{b}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bundan to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari bir hil $(-c/b)$ ordinataga egaligi kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziq absissa o'qiga parallel (2-chizma).

Agar $a=0$, $c=0$ bo'lsa, $y=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu holda to'g'ri chiziq absisa o'qining o'zi bo'ladi.



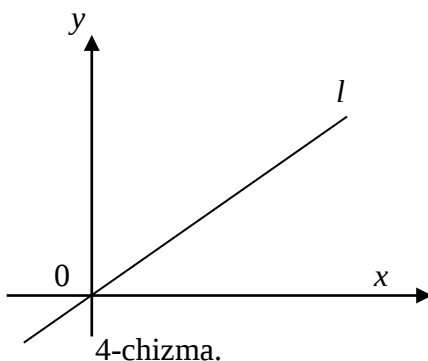
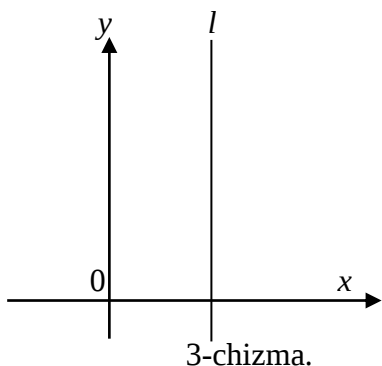
0

x

2-chizma.

-2^0 . $b=0$. Bu holda to'g'ri chiziqli tenglamasi $ax+c=0$ yoki $x=-\frac{c}{a}$ ko'rinishda bo'lib, y ordinata o'qiga parallel bo'ladi (3-chizma).

Agar $b=0$, $c=0$ bo'lsa, $x=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu holda to'g'ri chiziqli ordinata o'qi bilan ustma-ust tushadi.



3^0 . $c=0$. Bu holda to'g'ri chiziqli koordina boshidan o'tadi, chunki $(0,0)$ nuqta $ax+by=0$ tenglamani qanoatlantiradi (4-chizma).

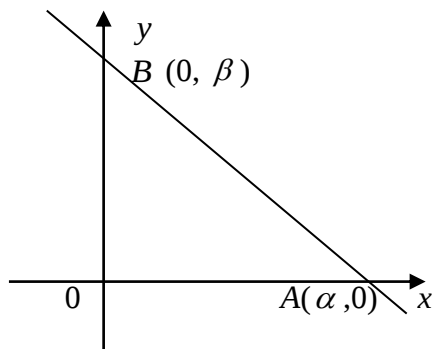
4^0 . $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ bo'lsin. Bu holda to'g'ri chiziqli koordinata boshidan ham o'tmaydi, koordinata o'qlariga parallel ham bo'lmaydi.

(1) tenglamani c ga bo'lib quyidagini topamiz.

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, \text{ bu yerda } \alpha = -\frac{c}{a} \quad \beta = -\frac{c}{b}$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqli **kesmalar bo'yicha tenglamasi** deb ataladi. Bunda ishoralaridan qat'iy nazar α va

β lar to'g'ri chiziqning koordinatalar o'qlaridan ajratgan kesmalari uzunliklariga teng (5-chizma).



5-chizma.

Chunki $x=0$ bo'lsa $y=\beta$, $y=0$ bo'lsa $x=\alpha$ bo'lib to'g'ri chiziq koordinata o'qlarini $A(\alpha, 0)$ va $B(0, \beta)$ nuqtalarda kesadi.

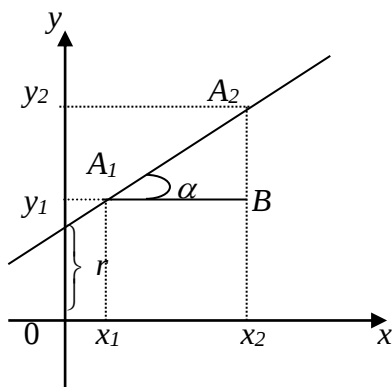
3. To'g'ri chiziqning burchak koeffisientli tenglamasi

Tenglamasi $ax+by+c=0$ ko'rinishda berilgan to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel emas deb faraz qilaylik ($b \neq 0$). Berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y = kx + r, \quad (1)$$

bu yerda $k = -\frac{a}{b}$, $r = -\frac{c}{b}$ deb belgilangan. Bu tenglama to'g'ri chiziqning **burchak koeffisientli tenglamasi** deyiladi. (1) tenglamadagi k koeffisient ($k = \operatorname{tg} \alpha$) to'g'ri chiziqning burchak koeffisienti, r esa to'g'ri chiziqning Oy o'qdan ajratgan kesmasi.

Haqiqatan ham, $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$ to'g'ri chiziqdagi ikkita nuqta bo'lsin (6-chizma)



6-chizma.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BA_2}{BA_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + r) - (kx_1 + r)}{x_2 - x_1} = k.$$

bu holda to'g'ri chiziq Oy o'qni $(0, r)$ nuqtada kesishi ko'rinib turibdi.

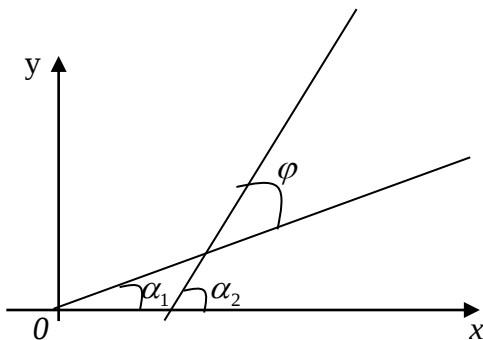
4. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

Ikki to'g'ri chiziq $y = k_1x + r_1, y = k_2 + r_2$ berilgan bo'lsin. Ular orasidagi φ burchakni topish masalasini qaraymiz.

To'g'ri chiziqlarning Ox o'qining musbat yunalishi bilan hosil qilgan burchaklarini α_1 va α_2 desak, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ bo'ladi. ABC uchburchakdan (7-chizma) ko'rinib turibdiki $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$

Demak, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Shuning uchun

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$



7-chizma.

Shunday qilib, $y = k_1x + r_1$ va $y = k_2x + r_2$ to'g'ri **chiziqlar orasidagi burchak**

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

formula orqali ifodalanadi.

5. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik sharti

xoy tekislikda ikki to'g'ri chiziq umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c = 0.$$

Bu to'g'ri chiziqlarning koeffisientlari qanday shartlarni qanoatlantirganda ular a) parallel, b) perpendikulyar bo'lishlarini aniqlaymiz.

Faraz qilaylik, bu to'g'ri chiziqlarning hech biri Oy o'qqa parallel bo'lmasin, yani $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ bo'lsin. U holda ularning tenglamalarini burchak koeffisientli tenglamalar ko'rinishiga keltirishimiz mumkin:

$$y = k_1x + r_1, \quad y = k_2x + r_2 \quad k_1 = -\frac{a_1}{b_1}, k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

1. Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, u holda ular orasidagi φ burchakning tangensi nolga teng bo'ladi va demak, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ifodasidan

$$k_2 - k_1 = 0 \quad (1)$$

ni topamiz. k_1 va k_2 larning qiymatlarini bunga qo'ysak

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \quad (2)$$

(1) yoki (2)lar to'g'ri chiziqlarning parallellik shartini

ifodalaydi.

2. Endi berilgan to'g'ri chiziqlar uzaro perndikulyar bo'lsin. U holda $tg\varphi = \infty$ bo'lib, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ifodasidan

$$1 + k_1k_2 = 0 \quad (3)$$

ni topamiz. k_1 va k_2 larning ifodasini nazarga olsak uni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \quad (4)$$

(3) yoki (4) lar to'g'ri chiziqlarning perndikulyarlik shartini ifodalaydi.

1-eslatma. Yuqorida hosil qilingan (1) yoki (2) va (3) yoki (4) formulalarni chiqarishda to'g'ri chiziqlarning hech biri Oy o'qiga parallel emas deb faraz qilgan edik. Ko'rsatish mumkinki ular bu faraz bo'zilganda ham o'rinli bo'ladi.

Masalan, birinchi to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'lsin. Bu holda $b_1 = 0$ bo'ladi. Agar ikkinchi to'g'ri chiziq birinchi

to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u ham Oy o'qiga parallel bo'ladi va demak, $b_2 = 0$. (1) yoki (2) shart bajarilaveradi.

Agar ikkinchi to'g'ri chiziq birinchisiga perpendikulyar bo'lsa, unda u Ox o'qiga parallel, demak $a_2 = 0$. Bunday holda (3) yoki (4) shartlar bajariladi (tekshiring).

2-eslatma. Yuqorida topilgan (1) yoki (2) ((3) yoki (4)) shart bajarilganda ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel (perpendikulyar) bo'lishini ham osongina ko'rsatish mumkin.

6. To'g'ri chiziqqa oid ba'zi masalalar

a. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Ixtiyoriy $A(x_1; y_1)$ nuqta berilgan. Shu nuqtadan utuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq tenglamasini to'zish talab etilgan bo'lsin.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini olaylik: $ax + by + c = 0$ (1)

To'g'ri chiziq $A(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tganligi uchun uning koordinatalari tenglamani qanoatlantiradi: $ax_1 + by_1 + c = 0$. Bundan c ni topamiz: $c = -a_1x - b_1y$. Buni (1) formulaga qo'yamiz. U holda $ax + by + a_1x - b_1y = 0$ hosil bo'ladi.

Bundan

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \quad (2)$$

kelib chiqadi. Bu esa izlangan tenglamadir.

b. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Tekislikda berilgan $A_1(x_1; y_1)$ va $A_2(x_2; y_2)$ nuqtalardan utuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini to'zish talab etilgan bo'lsin.

Yuqorida ko'rdikki to'g'ri chiziq $A_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o'tsa uning tenglamasi

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi. Lekin bu to'g'ri chiziq $A_2(x_2; y_2)$ nuqtadan ham o'tadi. Shuning uchun

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0 \quad (4)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (2) va (4) lardan:

$$\frac{a}{b} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}, \frac{a}{b} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bulardan izlangan to'g'ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5)$$

c. *To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.*

Faraz qilaylik ikkita $ax_1 + by_1 + c_1 = 0$ $ax_2 + by_2 + c_2 = 0$ to'g'ri chiziq berilgan. Ularning kesishish nuqtasining koordinatalarini topish talab etilgan bo'lsin.

Agar bu ikki to'g'ri chiziq uzaro kesishsa ularning kesishish nuqtasining koordinatasi ushbu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

sistemani qanoatlantirishi kerak. Boshqacha so'z bilan aytilganda to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish uchun (5) sistemani yechish kerak ekan.

7. Chiziq tenglamasi tushunchasi

To'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasi va bu sistemada biror chiziq berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Berilgan koordinatalar sistemasida chiziqlarning tenglamasi deb, shunday ikki nomalumli

$$F(x, y) = 0 \quad (1)$$

tenglamaga aytiladiki, shu chiziqda yotuvchi har qanday nuqtaning x va y koordinatalari uni qanoatlantiradi. Bu chiziqqa tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari uni qanoatlantirilmaydi.

Masalan, $x^2 - y = 0$ tenglamani qaraylik. U qandaydir chiziqning tenglamasi bo'lib $M(2, 4)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi, $N(0, 2)$ nuqtaning koordinatalari tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak, M nuqta shu chiziqda yotadi, N nuqta esa yotmaydi.

Shunday qilib, chiziqning tenglamasi malum bo'lsa, koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradigan har bir nuqta shu chiziqda yotadi.

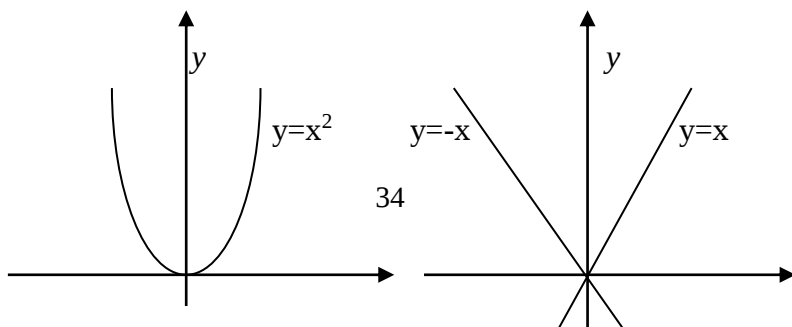
Ixtiyoriy (1) tenglama bilan aniqlangan chiziq x va y lar orasida shu tenglama bilan o'rnatilgan funksional bog'lanishning grafigi deyish ham mumkin.

Yuqoridagi misolda $x^2 - y = 0$ tenglama bilan aniqlangan chiziqni $y = x^2$ funksiyaning grafigi deyish mumkin. U bizga malum bo'lgan parabolaning tenglamasidir (1-chizma)

Biror koordinata sistemasida berilgan tenglama bilan aniqlanuvchi chiziq, koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradigan tekislik nuqtalarining geometrik o'rnidir.

Masalan, tekislikda $F(x, y) = y^2 - x^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rinini aniqlang deyilsa, bu masala ustida quyidagicha muloxaza yuritamiz:

Berilgan tenglamani $(y - x)(y + x) = 0$ ko'rinishida yozib olamiz. Bundan $y = x$, $y = -x$ tenglamalar hosil bo'ladi. Bu tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni koordinata burchaklarining bissektisalaridan iboratdir (2-chizma).



0
1-chizma

x

0

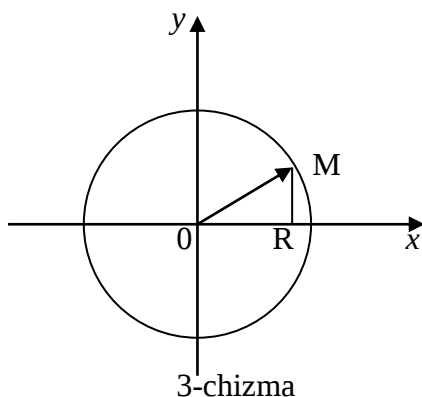
x
2 -chizma

Ko'p masalalarni yechishda chiziqning $A(x,y)=0$ ko'rinishdagi tenglamasidan tashqari **parametrik tenglama** deb ataluvchi tenglamalardan foydalanish qulay bo'ladi. Bunday tenglamalar

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lib, t parametr vaqt, burchak, uzunlik va hokazolardan biri bo'lishi mumkin. Tekislikda $M(x,y)$ nuqta x va y lar t ga bog'liq ravishda o'zgarganda tekislikda harakatlanib qoldirgan izi chiziqdan iborat bo'ladi.

Masalan, markazi koordinata boshida radiusi r ga teng bo'lgan aylananing parametrik tenglamasini tuzish talab etilgan bo'lsin. Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x,y)$ deylik.



3-chizmadan: $x=OR$ $y=RM$, $\angle ROM=t$ desak, $OR=OM\cos t$, $MR=OM\sin t$ yoki $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ larni topamiz.

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \text{ -aylananing parametrik tenglamasidir.}$$

Agar bu tenglamadan parametrlar t ni chiqarsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$ yoki $x^2 + y^2 = r^2$ bu bizga malum bo'lgan aylana tenglamasidir.

Chiziq $F(x, y) = 0$ analitik tenglama bilan berilganda ikki xil masala yuzaga keladi:

1. Chiziq tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rni sifatida berilgan, bu chiziqning tenglamasini tuzish.

2. Biror chiziqning tenglamasi berilgan, bu tenglama yordamida chiziqning geometrik xossalari, tekislikda joylashishi va grafigini tekshirish. Bu masalalar bilan biz kelajakda shug'ullanamiz.

8. Ikki chiziqning kesishishi haqida. L_1 va L_2 chiziqlar $F_1(x, y) = 0$, va $F_2(x, y) = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. Bu chiziqlarning kesishish nuqtalarini topish masalasi ham muhim masalalardan hisoblanadi. Izlanadigan kesishish nuqtalar bir vaqtda L_1 va L_2 chiziqlarda yotishi kerak (agar ular mavjud bo'lsa). Demak, bunday nuqtalarning koordinatalari yuqoridagi tenglamalarning har ikkalasini ham qanoatlantirishi kerak.

Shunday qilib chiziqlarning barcha kesishish nuqtalarini topish uchun

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak ekan.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar: 1. Har qanday to'g'ri chiziq $ax + by + c = 0$ tenglama bilan ifodalanishini isbotlang.

2. To'g'ri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan vaziyati qanday aniqlanadi? Har bir holni izohlang.

3. To'g'ri chiziqning kesmalar bo'yicha tenglamasini chiqaring.

4. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini keltirib chiqaring.

5. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini keltirib chiqaring.

6. To'g'ri chiziqlarning parallellik shartini keltirib chiqaring.

7. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartini keltirib chiqaring.

8. Berilgan nuqtadan utuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini keltirib chiqaring.

9. Ikki nuqtadan utuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini keltirib chiqaring.

10. Ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?

11. Chiziqning tenglamasi deb nimaga aytiladi?

12. Chiziqning parametrik tenglamasi deb nimaga aytiladi?

13. Aylananing parametrik tenglamasini chiqiring.

14. Ikki o'zgaruvchili tenglamaning geometrik manosi tushuntiring.

15. Ikki chiziqning kesishish nuqtalari qanday topiladi?

Mashqlar:

1. $5x + 6y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqni yasang.

2. $7x + 14y = 0$ to'g'ri chiziqni yasang.

3. Absissalar o'qining musbat yo'nalishi bilan $\gamma = 45^\circ$ burchak hosil qilib ordinatalar o'qidan 5 birlik kesma ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini to'zing.

4. Quyidagi to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarini toping:

a) $2x + 3y + 5 = 0$. b) $-4x + 2y - 5 = 0$. c) $3x - 5y + 15 = 0$.

5. $y = kx + r$ to'g'ri chiziq $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tadimi?

Agar: 1)

$k = 4, r = 1, x_0 = -2, y_0 = -7$; 2) $k = 1, r = 6, x_0 = 4, y_0 = 9$;

6. $y = 2x - 4$ to'g'ri chiziqda absissasi 3ga teng bo'lgan nuqtani toping.

7. Quyidagi berilgan to'g'ri chiziqlardan o'zaro parallel va o'zaro perpendikulyar bo'lganlarini toping:

a) $y = 3x - 4$, b) $y = -\frac{1}{3}x + 7$, c) $y = \frac{1}{3}x + 6$, d) $y = 3x$,

e) $y = -3x + 2$, f) $y = -3x + 11$, g) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, h)

$y = \frac{1}{3}x - 1$, i) $y = -2x + 8$.

8. a) $y = 4x + 2$, b) $y = -x + 1$ to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini toping.

9. $A(6; -3)$ nuqtadan utib $y = 5x - 1$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

10. $y = 5x - 1$ va $y = x + 8$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini toping.

11. Qo'yidagi tenglamalarning grafiklarini chizing:

a) $|x| = y$, b) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 10$, c) $y = x^3$,

d) $|y| = x^2$

12. Qo'yidagi tenglamalar bilan berilgan aylanalarning markazi va radiusini toping:

a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y = 110$ b) $x^2 + y^2 - 4x - 12y = 24$,

c) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 32 = 0$

13. $x^2 + y^2 - 3x - 4y - 4 = 0$ aylana ustida absissasi 4 ga teng bo'lgan nuqtani toping.

14. $M(x, y)$ nuqtaning koordinatalari harakat paytida $x = 5t^2 - 1$, $y = 10t^2 + 1$ tenglamalar bilan aniqlanadi. M nuqta trayektoriyasining dekart koordinatalari sistemasidagi tenglamasini tuzing.
15. $A(6, 0)$ nuqtadan hamda $x = -4$ to'g'ri chiziqdan barobar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rninging tenglamasini tuzing.
16. $x^2 + y^2 = 25$ va $3x - 4y = 0$ b) $y = 9 - x^2$ va $y = x^2 - 4$, c) $2x + 3y = 1$, va $3x - 4y = -9$ chiziqlarning kesishish nuqtalarini toping.

4-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqning ta'rifi

Ushbu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

Ikkinchi tartibli tenglama bilan aniqlanuvchi chiziq **ikkinchi tartibli egri chiziq** deyiladi, bu yerda $A, 2B, C, 2D, 2E$ va F koeffisientlar haqiqiy sonlar bo'lib, A, B yoki C larning hech bo'lmaganda biri noldan farqli.

Bizga

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

aylana tenglamasi malum, Bu x va y larga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamadir. Demak, aylana ikkinchi tartibli egri chiziqdan iborat. Biz kelajakda to'rt xil ikkinchi tartibli egri chiziqlarni yani aylana, ellips, giperbola va parabolalarni ko'rib o'tamiz.

2. Aylana

Yuqoridagi (2) tenglamada qavslarni ochib uni

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Uni (1) umumiy tenglama bilan solishtirib shuni ko'ramizki, 1) xy ko'paytma qatnashgan had yo'q, 2) x^2 va y^2 larning koeffisiyentlari teng.

Endi teskari masalani qaraymiz. Faraz qilaylik (1) tenglamada xy qatnashgan had yo'q va x^2, y^2 larning koeffisientlari teng. Bunday tenglama aylana tenglamasi bo'la oladimi?

Demak, ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (4)$$

ko'rinishda berilgan. Bu tenglamani quyidagicha yozib olamiz

$$x^2 + 2Dx + D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 - D^2 - E^2 + F = 0$$

yoki

$$(x + D)^2 + (y + E)^2 = D^2 + E^2 - F \quad (5)$$

Quyidagi uch holni qaraymiz

1) $D^2 + E^2 - F > 0$. Bu holda (5) tenglama va demak unga teng kuchli bulgan (4) tenglama markazi $O_1(-D; -E)$ radiusi $R = \sqrt{D^2 + E^2 - F}$ bo'lgan aylanani aniqlaydi.

2) $D^2 + E^2 - F = 0$. Bu holda (5) tenglama $(x + D)^2 + (y + E)^2 = 0$ ko'rinishda bo'lib, uni va demak (4) tenglamani yagona $O_1(-D; -E)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi.

3) $D^2 + E^2 - F < 0$. Bu holda (5) tenglama va demak, (4) tenglama hech qanday chiziqni aniqlamaydi.

Misol. Ushbu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ tenglama aylanani aniqlashni ko'rsating. Uning radiusi va markazini toping.

Yechish. $A = C = 1$ va $2B = 0$ shartlar bu yerda bajariladi. Berilgan tenglamada shakl almashtiramiz:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 - 11 = 0$$

yoki

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

demak, berilgan tenglama markazi $O_1(1; -2)$ nuqtada va radiusi $R = 4$ aylanani aniqlaydi.

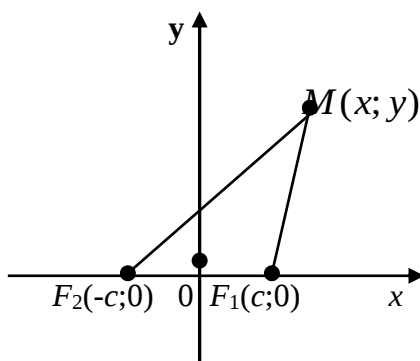
3. Ellips

1-ta'rif. Tekislikda ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikkita F_1 va F_2 nuqtasigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdorga ($2a$ ga) teng bo'lgan barcha nuqtalar to'plami *ellips* deb ataladi (o'zgarmas miqdor $2a$ fokuslar orasidagi masofadan katta deb olinadi).

Ellips tenglamasini to'zish uchun koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan F_1 va F_2 nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqni abssissalar o'qi deb qabul qilamiz, koordinatalar boshini esa berilgan nuqtalar o'rtasida olamiz. F_1 va F_2 nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz.

U holda F_1 va F_2 nuqtalarning koordinatalri $(c;0)$ va $(-c;0)$ ga teng bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra $2a > 2c$ yoki $a > c$. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasini $M(x; y)$ bilan belgilaylik (1-chizma).



1-chizma

M nuqtaning F_1 va F_2 fokuslardan masofalarini uning **fokal radiuslari** deyiladi va mos ravishda r_1 va r_2 bilan

belgilanadi, ya'ni, $u_1 = \rho(F_1, M), u_2 = \rho(F_2, M)$
 ellipsning ta'rifiga ko'ra $u_1 + u_2 = 2a$.

Demak,

$$\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a \quad (6)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra

$$\left. \begin{aligned} \rho(F_1, M) &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \rho(F_2, M) &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\text{Demak, } \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Buni soddalashtirish maqsadida uning birinchi hadini o'ng tomonga o'tkazamiz va tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

buni soddalashtirib, $cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ni hosil qilamiz. Buning har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

ta'rifga ko'ra $2a > 2c$ bo'lgani uchun $a^2 - c^2 = b^2$ deb belgiylaymiz. U holda tenglama ushbu

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi. Endi ellipsning bu kanonik tenglamasiga ko'ra uning shaklini tekshiramiz.

1. (8) tenglama x va y larning juft darajalarini saqlagani uchun ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir. Ko'rinib turibdiki, (8) tenglamani

$$M_1(x; y), M_2(-x; y), M_3(x; -y), M_4(-x; -y)$$

nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi. Shuning uchun koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlari, ular kesishgan nuqta *ellipsning markazi* deyiladi, fokuslar yotgan o'q uning *fokal o'qi* deyiladi.

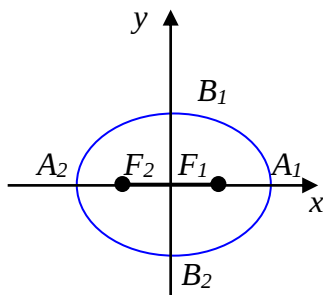
2. Ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Ellipsning Ox o'q bilan kesishgan nuqtalarini topish uchun ushbu tenglamalar sistemasini yechish kerak.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Bu sistemaning yechimi $x = \pm a$.

Demak, ellips Ox o'qini $A_1(a; 0)$ va $A_2(-a; 0)$ nuqtalarda kesadi. Xuddi shunday qilib ellipsning Oy o'qi bilan kesishish nuqtalari $B_1(0; b)$ va $B_2(0; -b)$ ekanligini topamiz.

A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar *ellipsning uchlari* deyiladi.



2-chizma.

Ular 2-chizmada tasvirlangan. A_1A_2 kesma uzunligi $2a$ ga teng bo'lib, u ellipsning *katta o'qi*, OA_1 kesma uzunligi a ga teng bo'lib, uni ellipsning *katta yarim o'qi* deyiladi. B_1B_2 kesma uzunligi $2b$ ga teng bo'lib, u ellipsning *kichik o'qi*, OB_1 kesma uzunligi b ga teng bo'lib, u ellipsning *kichik yarim o'qi* deyiladi.

2-ta'rif. Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning katta o'qining uzunligiga nisbati ellipsning **ekstsentrisiteti** deyiladi va u e harfi bilan belgilanadi:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Bu yerda $c < a$ bo'lgani uchun $0 < e < 1$ bo'ladi.

Misol. $M(0;5)$ nuqta orqali o'tuvchi fokuslari orasidagi masofa 6 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

Yechish. Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ni qaraymiz. $M(0;5)$ nuqta ellipsga tegishli bo'lgani uchun $\frac{25}{b^2} = 1$, bundan $b^2 = 25$. Endi a^2 ni topish qoldi; ma'lumki, $a^2 - b^2 = c^2$, bunda c fokuslar orasidagi masofaning yarimi $a^2 = 25 + 9 = 34$. Demak, izlangan tenglama

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

bo'ladi.

4. Giperbola

1-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqttagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati uzgarmas miqdor $2a$ ga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami *giperbola* deyiladi. (o'zgarmas miqdor $2a$ fokuslar orasidagi masofadan ($2c$ dan) kichik deb olinadi).

Giperbola tenglamasini keltirib chiqarish uchun ellipsdagidek ish ko'ramiz.

Bu yerda ham absissa o'qini fokuslardan o'tkazamiz, koordinata boshini esa fokuslarning o'rtasidan olamiz. U holda $F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ fokuslar bo'ladi. Ta'rifga ko'ra

$$|\rho(F_1, M) - \rho(F_2, M)| = 2a,$$

yoki

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Buni soddalashtirib,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (10)$$

tenglamaga kelamiz, bu yerda $a^2 - c^2 < 0$, chunki $2a < 2c$. Shuning uchun $c^2 - a^2 = b^2$ deb olamiz. U holda (10) tenglama

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama *giperbolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Endi (11) tenglamaga ko'ra giperbolaning shaklini aniqlaymiz.

(11) tenglama x va y o'zgaruvchilarning juft darajalarini saqlagani uchun giperbola ikkita simmetriya o'qiga ega bo'lib, ular koordinata o'qlaridan iborat. Giperbolaning simmetriya

o'qlari uning *o'qlari* deb ataladi, ularning kesishish nuqtasi esa *giperbolaning markazi* deb ataladi. Giperbolaning fokuslari joylashgan o'q uning *fokal o'qi* deyiladi.

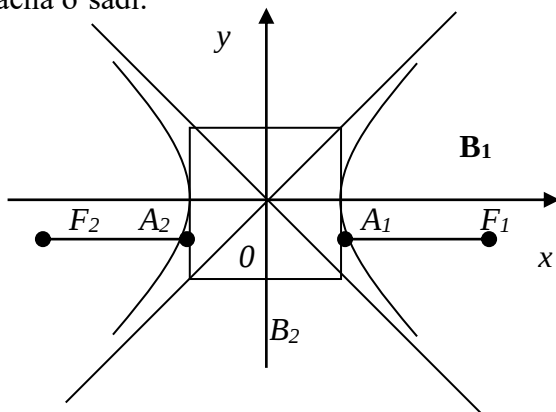
Giperbola Ox o'qni $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesib o'tadi, lekin Oy o'q bilan kesishmaydi, chunki $x=0$ bo'lganda $y^2 = -b^2$ bo'lib qoladi va bu o'rinli emas. A_1 va A_2 nuqtalar *giperbolaning uchlari*, ular orasidagi uzunligi $2a$ ga teng bo'lgan kesma esa uning *haqiqiy oqi* deyiladi.

Oy o'qida $B_1(0;-b)$ va $B_2(0;b)$ nuqtalarni belgilasak, B_1 dan B_2 gacha bo'lgan $2b$ uzunlikdagi kesma giperbolaning *maxxum o'qi* deyiladi. (11) tenglamani y ga nisbatan yechami

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (12)$$

bo'ladi. Avvalo giperbolaning shakli I chorakda tasvirlanadi. Bu holda (12) da $+$ ishora olinadi.

Bu yerda $x \geq a$ bo'lib qoladi. (12) da $x \rightarrow +\infty$ da y 0 dan $+\infty$ gacha o'sadi.



3-chizma.

Giperbola koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgani uchun uning grafigi 3-chizmadagidek bo'ladi.

$$\text{Giperbola } y = \pm \frac{b}{a} x \text{ tenglamalar bilan aniqlanuvchi}$$

ikkita assimptotaga ega.

Eslatma. Agar cheksiz tarmoqqa ega bo'lgan egri chiziqning nuqtasi shu chiziq buylab harakatlanib borganda uning 1 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasi nolga intilsa, 1 to'g'ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

Agar $a=b$ (yarim o'qlari teng) bo'lsa, giperbola *teng tomonli* deyiladi.

Bu holda giperbola tenglamasi

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad (13)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamalari $y=x$, $y=-x$ bo'lib, ular orasidagi burchak 90° ga teng bo'ladi. Koordinata o'qlarini -45° ga burchak, $0x$ o'q $y=-x$ asimptota bilan, o'q esa $y=+x$ asimptota bilan ustma-ust tushib, asimptotalar yangi koordinata o'qlari bo'lib qoladi. Bu yangi o'qlarda (13) giperbola $xy=a$ ko'rinishda ifodalanishini ko'rsatish mumkin.

2-ta'rif. Giperbola fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o'qning uzunligiga nisbati giperbolaning *ekssentrisiteti* deyiladi va e harfi bilan belgilanadi:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Misol. Giperbolaning ekssentrisiteti $\frac{13}{12}$, fokuslari

orasidagi masofasi 26 ga tengligi ma'lum bo'lsa, uning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Shartga ko'ra $2c=26$ va, demak giperbolaning katta o'qi $a=12$ bo'lgani uchun $b^2=c^2-a^2=169-144=25$ bo'ladi.

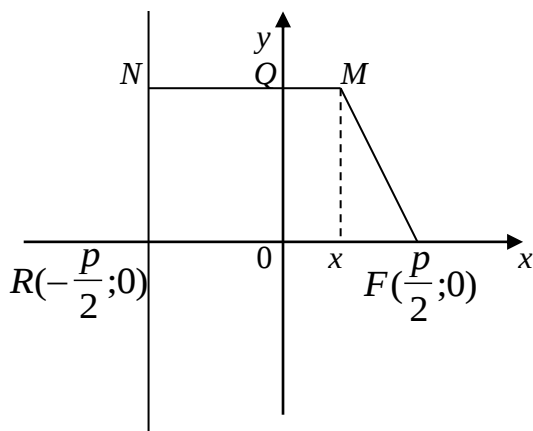
Shunday qilib giperbola tenglamasi

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

bo'ladi.

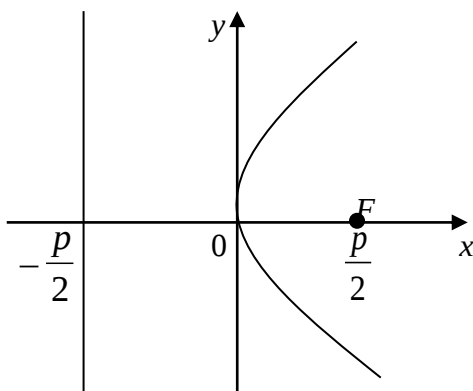
5. Parabola

6-ta'rif. Parabola deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan *fokus* deb ataluvchi berilgan nuqtagacha bo'lgan masofa *direktrisa* deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga tengdir (fokus direktrisada yoymaydi deb olinadi).



Direktrisa

4-chizma.



Direktrisa

5-chizma.

Fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofani p orqali belgilaymiz. Bu *parabolaning parametri* deyiladi.

Parabola tenglamasini chiqaramiz. Direktrisa va fokuslarni 4-chizmadagidek joylashtiramiz. Koordinata boshini RF kesmaning o'rtasidan olamiz. Bu holda fokus $F(\frac{p}{2}; 0)$

koordinataga ega bo'ladi. Direktrisa tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ (14)

ko'rinishga ega. Faraz qilaylik $M(x; y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $MN=MF$ 4-chizmada ko'rinib turibdiki

$$MN = NQ + QM = \frac{P}{2} + x, MF = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2}$$

Demak,

$$\frac{P}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2}$$

Buning har ikkala tomonini kvadratga kutarib soddalashtirsak,

$$y^2 = 2px \quad (15)$$

tenglama hosil bo'ladi.

(15) tenglama *parabolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Endi parabolaning formasini tekshiramiz. (15) tenglamada y juft darajada qatnashgani uchun absissa o'qi parabolaning simmetriya o'qi bo'ladi. $y^2 > 0$ bo'lgani uchun ham musbat bo'ladi. Shuning uchun parabola grafigi I va IV choraklarda joylashadi. $x=0$ da $y=0$. Demak, parabola koordinata boshidan o'tadi. $x \rightarrow +\infty$ da y ham cheksiz ortadi. Parabola 5- chizmada tasvirlangan.

Misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani (15) tenglama bilan solishtirsak $2p=8$, $p=4$ ekanini topamiz. Demak, direktrisa tenglamasi $x=-2$ fokus esa $F(2;0)$ bo'ladi.

Eslatma. Agar parabolaning fokus o'qi sifatida ordinata o'qini olsak, uning tenglamasi

$$x^2=2py \quad (16)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar:

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqning ta'rifini bering.

2. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi qaysi holda aylanani aniqlaydi.

3. Ellips ta'rifini bering va uning kanonik tenglamasini chiqaring. Ellips shakli qanday ko'rinishga ega?

4. Ellipsning eksentrisiteti deb nimaga aytiladi?

5. Giperbola ta'rifini bering va uning kanonik tenglamasini chiqaring. Giperbolaning shakli qanday ko'rinishga ega?

6. Qanday holda giperbola teng tomonli bo'ladi?

7. Giperbolaning eksentrisiteti deb nimaga aytiladi?

8. Parabola ta'rifini bering va uning kanonik tenglamasini chiqaring, uning shaklini chizing.

9. Parabolaning direktrisasi deb nimaga aytiladi?

Mashqlar:

1. Markazi $(0;0)$ nuqtada bo'lib, $(3;4)$ nuqtadan utuvchi aylana tenglamasini tuzing.

2. Aylana $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$ tenglama bilan berilgan. $(0;0)$, $(5;5)$, $(-2;4)$ nuqtalardan qaysi biri aylanaga tegishli?

3. Aylana tenglamasi $x^2 + y^2 - 8x + 16y - 7 = 0$ ko'rinishda berilgan. Uning markazi koordinatalarini va radiusi uzunligini toping.

4. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 22 = 0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligini ko'rsating.

5. Agar ellipsning katta yarim o'qi $a=5$ va eksentrisiteti $e=0,6$ bo'lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

6. Katta yarim o'qi $a=4$ ga teng va $(2;-3)$ nuqtadan utuvchi ellipsning tenglamasini tuzing.

7. Ellipsning fokuslari orasidagi masofa 6 sm , uning kichik o'qi 8 sm ga teng. Ellipsning kanonik tenglamasini tuzing va eksentrisitetini toping.

8. $5x^2 - 4y^2 = 20$ giperbolaning yarim o'qlarini, eksentrisitetini va fokuslarining koordinatalrini toping. $(-4, \sqrt{15})$ nuqtadagi fokal radiuslarning uzunliklarini toping.

9. O'qlari koordinat o'qlari bilan ustma-ust tushadigan giperbola $(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ va $(4; -2)$ nuqtalardan utadi. Uning kanonik tenglamasini toping.

10. Giperbolaning eksentrisiteti $e = 1,5$. M nuqtaning fokal radiusi 12. Shu M nuqtadan u bilan bir tomonda yotuvchi direktrisagacha bo'lgan masofani hisoblang.

11. Quyidagi giperbolaning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring:

$$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0.$$

12. $y^2 = 12x$ parabola fokusining koordinatalarini toping va direktrisasining tenglamasini tuzing.

13. Direktrisaning tenglamasi $x = -3$ va fokusi $f(1; 0)$ bo'lgan parabolaning tenglamasini tuzing.

14. $x^2 = +4y$ parabola fokusining koordinatalarini hamda direktrisasining tenglamasini tuzing.

5-§. Fazoda koordinatalar metodi

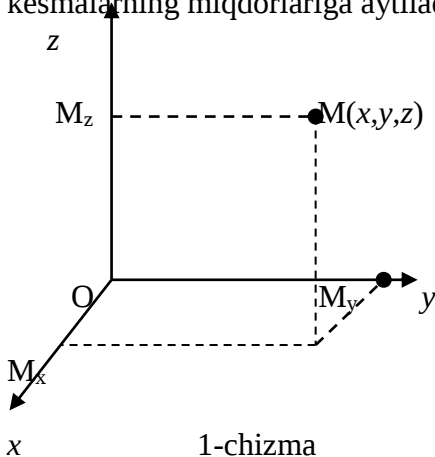
1. Fazoda dekart koordinatalari

Fazoda dekart koordinatalari tekislikda dekart koordinatalarini kiritishga o'xshashdir. Fazodagi to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi masshtab birlik va O nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar uchta o'qlardan birini Ox o'qi yoki **abssissalar o'qi**, ikkinchisi Oy o'qi yoki **ordinatalar o'qi**, uchinchisini esa Oz o'qi yoki **aplikatalar o'qi** deb atash orqali kiritiladi.

Faraz qilaylik, fazoda M nuqta berilgan bo'lib, uning Ox , Oy , Oz o'qlariga proyeksiyalari M_x , M_y , M_z lardan iborat bo'lsin.

Bu proyeksiyalar yordamida M nuqtaning fazodagi vaziyati to'liq aniqlanadi.

1-ta'rif. M nuqtaning to'g'ri burchakli dekart koordinatalri x , y , z deb $\overline{OM_x}$, $\overline{OM_y}$, $\overline{OM_z}$ yunalgan kesmalarining miqdorlariga aytiladi.



M nuqtaning x , y va z koordinatalari uning mos ravishda abssissasi, ordinatasi va aplikatasi deb ataladi va $M(x, y, z)$ deb

belgilanadi (1-chizma). Fazodagi to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi yordamida uchmadan qilib tartiblangan haqiqiy sonlar to'plami bilan fazodagi nuqtalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin.

Har ikki koordinata o'qlari jufti orqali tekisliklar o'tkazib Oxy , Oyz , Ozx tekisliklar hosil qilamiz va ularni koordinata tekisliklari deb ataymiz. Bu tekisliklar fazoni 8 ta **oktantga** ajratadi.

2. Fazoda yunalgan kesma tushunchasi va uning o'qdagi proyeksiyasi

Agar fazoda berilgan kesmaning qaysi bir chegaraviy nuqtasi uning boshi, qaysi biri oxiri ekanligi ko'rsatilgan bo'lsa, bunday kesma *yo'nalgan kesma* (yoki *vektor*) deyiladi. Xuddi to'g'ri chiziqdagi kabi boshi A nuqtada oxiri B nuqtada bo'lgan yunalgan kesma $\overline{AB}$ bilan belgilanadi.

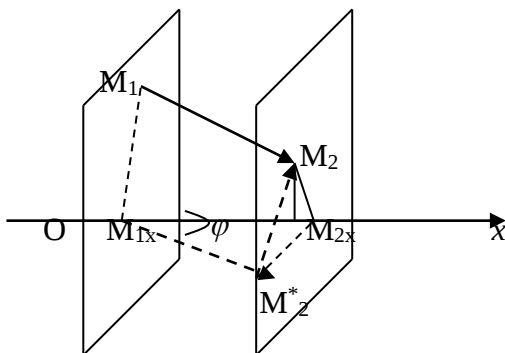
Fazoda $\overline{M_1M_2}$ yunalgan kesma va Ox o'qini qaraymiz. M_1 va M_2 nuqtalardan Ox o'qiga perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz va bu tekisliklar bo'ylab M_1 va M_2 nuqtalarni Ox o'qiga proyeksiyalaymiz. M_1 ning proyeksiyasini M_{1x} bilan, M_2 nikini esa M_{2x} deb belgilaymiz.

$\overline{M_1M_2}$ yo'nalgan kesmaning Ox o'qiga proyeksiyasi $PR_{Ox} \overline{M_1M_2}$ deb $\overline{M_{1x}M_{2x}}$ yo'nalgan kesma miqdoriga (uzunligiga) aytiladi.

Agar M_{1x} va M_{2x} nuqtalarning Ox o'qidagi koordinatalarini x_1 va x_2 bilan belgilasak,

$$PR_{Ox} \overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$$

tenglik o'rinli bo'ladi.



2-chizma.

Endi $\overline{M_1M_2}$ ni parallel kuchirib $\overline{M_{1x}M_2^*}$ vaziyatga keltiramiz va OX o'qi bilan $\overline{M_{1x}M_2^*}$ orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz ($0 < \varphi < \pi$).

$\overline{M_1M_2}$ ning OX o'qidagi proyeksiyasini hisoblash uchun quyidagi formulani ham hosil qilish mumkin.

$$PR_{OX} \overline{M_1M_2} = \left| \overline{M_1M_2} \right| \cos \varphi$$

Eslatma. Fazoda berilgan yo'nalgan kesmaning Oy va Oz o'qlaridagi proyeksiyalarini ham xuddi yuqoridagidek hisoblash mumkin.

Quaylik uchun a vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini a_x, a_y, a_z lar bilan, vektorining Ox, Oy, Oz o'qlar bilan hosil qilgan burchaklarni α, β, γ lar bilan belgilasak.

$$a_x = PR_{ox} a = |a| \cos \alpha$$

$$a_y = PR_{oy} a = |a| \cos \beta$$

$$a_z = PR_{oz} a = |a| \cos \gamma$$

$$\text{larga ega bo'lamiz. } |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ekanligini nazarga olib

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

formulani isbotlash mumkin (isbotlang).

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ lar a vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi.

3. Ikki nuqta orasidagi masofa

Fazoda Oxyz dekart koordinatalari sistemasini qaraymiz. Bu sistemada berilgan $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa $\rho(A, B)$ quyidagi formula bilan hisoblanishini ko'rsatish mumkin:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Fazoda ikkita $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazib unda yunalishni aniqlaymiz. Bu o'qda A va B nuqtalar $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmani aniqlaydi. Faraz qilaylik $M(x, y, z)$ nuqta aytilgan o'qda B nuqtadan farqli bo'lsin. $\overline{AB}$ kesmani $\lambda = AM : MB$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalarini

topish talab etiladi. Xuddi tekislikdagi kabi M nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1 + \lambda} \quad (1)$$

formulalar orqali topilishini ko'rsatish mumkin. Agar M nuqta $\overline{AB}$ kesmani teng ikkiga bo'lsa, $\lambda = 1$ bo'lib, uning koordinatalarini hisoblash formulalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (2)$$

bular kesmani teng ikkiga bo'lish formulalari deyiladi.

Eslatma. (1) formulalarda $\lambda > 0$ bo'lsa, M nuqta A va B nuqtalar orasida, $\lambda < 0$ bo'lsa y AB kesmadan tashqarida yotadi. $\lambda = -1$ bo'lsa (1) formula ma'nosini yo'qotadi.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Fazoda dekart koordinatalari sistemasi qanday kiritiladi?
2. Nuqtaning fazodagi vaziyati qanday aniqlanadi?
3. Koordinata tekisliklari qanday hosil qilinadi?
4. Fazoda yo'nalgan kesma va uning o'qdagi proyeksiyasi qanday hosil qilinadi? Proyeksiya qanday hisoblanadi?
5. Fazoda ikki nuqta orasidagi masofa qanday formula orqali topiladi? U formulani isbotlang.
6. Fazoda kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalarini ayting va ularni isbotlang.
7. Oxyz tekislikda $A(1;1;1)$, $B(-1;1;0)$ va $C(3;1;-1)$ nuqtalardan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtaning koordinatalarini toping.

8. $O(0;0;0)$ va $A(1;2;2)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmada uni 2:3 nisbatda bo'luvchi $M(x;y;z)$ nuqtaning koordinalarini toping.

9. $A(1;2;3)$ va $B(7;6;8)$ nuqtalarni tutashtiruvchi $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini toping.

10. $M(1, -3, 1)$ va $N(-1, -1, 0)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

11. OZ o'qda $M_1(3, -2, 5)$ va $M_2(0, 1, -3)$ nuqtalardan baravar uzoqlikda yotgan nuqtaning koordinalarini toping.

6-§. Vektor fazolar

1. Fazo tushunchasi

Fanda fazo tushunchasi har xil ma'nolarga ega. Fazoni filosofik talqin qiladigan bo'lsak, u materiyaning yashash shaklini anglatadi. Haqiqiy dunyoning fazoviy ko'rinishi undagi mikdoriy munosabatlar bilan birgalikda matematikaning o'rganiladigan predmeti bo'lib, bunda u geometriyaning bosh mazmunini tashkil qiladi. Maktab geometriyasida fazo tushunchasi sodda ko'rinishda uchraydi, fazo deganda ma'lum aksiomalar sistemasini qanoatlantiruvchi uch o'lchamli (x, y, z) haqiqiy sonlar uchligidan iborat nuqtalar to'plami tushuniladi. Fazoning har bir nuqtasi uchta koordinatalar orqali aniqlanadi va aksincha, har bir uchta sonlarning tartiblangan sistemasi fazoda qandaydir nuqtani aniqlaydi. Shunday qilib, uch o'lchamli fazoni uchta haqiqiy son sistemasi bo'lgan (x, y, z) nuqtalarning to'plami deb qarash mumkin. Bunda ikki $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$P(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formula bilan aniqlanadi.

Fazo tushunchasi matematikada ancha murakkab tuzilishga ega bo'lgan ob'yektlar uchun umumlashtiriladi. Matematikada fazo deganda, ixtiyoriy ob'yektlar (sonlar to'plami, funksiyalar to'plami va h.k.) majmuasi tushuniladi va ular orasida uch o'lchamli fazoda o'rganilgan munosabatlarga o'xshash munosabatlar o'rnatiladi. Bunda ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi muhim o'rin egallaydi.

2. n-o'lchamli vektor fazo

Geometriya, mexanika va fizikada shunday ob'yektlar uchraydiki, ular bir yoki bir necha haqiqiy sonning tartiblangan sistemasi bilan aniqlanadi. Masalan, (uch o'lchamli) fazoda har qanday vektor o'zining uchta komponentasi bilan aniqlanadi.

Fazo tushunchasini umumlashtirish vektor tushunchasini umumlashtirish bilan bog'liq. Vektorning eng sodda umumlashtirilishi *n*-o'lchamli vektor tushunchasidir.

1-ta'rif. Tartib bilan yozilgan *n* ta haqiqiy son sistemasi (majmuasi), ya'ni

$$a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

n-o'lchamli vektor deyiladi. Bunda, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar vektorning koordinatalari deyiladi.

Kelajakda, vektorlarni a, b, c va h.k. lotin alifbosining harflari bilan, ularning koordinatalarini esa shu harflarning indeksleri yordamida yozamiz.

2-ta'rif. Ikkita $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorlarning mos koordinatalari teng, ya'ni $a_1=b_1, a_2=b_2, \dots, a_n=b_n$ bo'lsa, bu vektorlar teng deb ataladi.

Bu ta'riflardan ko'rinadiki, vektor bu *n*-ta haqiqiy son to'plami bo'libgina qolmay, balki elementlari tartiblangan sistema hamdir. Berilgan vektorning koordinatalarini boshqa tartibda yozilsa, umumiy holda boshqa vektor hosil bo'ladi. Masalan, $a=(1,2,3)$ va $b=(2,3,1)$ vektorlar boshqa-boshqa vektorlardir.

Misollar. 1. Tekislikdagi vektorlar ikki o'lchamli vektorga misol bo'ladi: $a=(a_1, a_2)$, uch o'lchamli fazodagi vektorlar uch o'lchamli vektorga misol bo'ladi: $a=(a_1, a_2, a_3)$

2. Bir o'zgaruvchili (*n*-1) darajali $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$

ko'phadni *n* o'lchamli $a=(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ vektor sifatida qarash mumkin.

Endi, *n* o'lchamli vektorlar ustida chiziqli amallar kiritamiz.

3-ta'rif. Ikki $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorning yig'indisi deb $a+b$ vektorga aytiladi va u quyidagicha aniqlanadi:

$$a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

4-ta'rif. $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorning λ haqiqiy songa ko'paytmasi deb, λa vektorga aytiladi va u quyidagicha aniqlanadi: $\lambda a=(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$

5-ta'rif. Hamma koordinatalari nolga teng bo'lgan vektor nol vektor deyiladi va $0=(0, 0, \dots, 0)$ orqali yoziladi.

Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amali vektorlar ustida chiziqli amallar deyiladi va ular quyidagi xossalarga ega bo'ladi:

1⁰. $a+b=b+a$ (qo'shishning kommutativlik xossasi).

2⁰. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (qo'shishning assosiativlik xossasi).

3⁰. Ixtiyoriy a vektor uchun $a+0=a$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4⁰. Har bir a vektor uchun unga qarama-qarshi vektor deb ataluvchi $-a$ vektor mavjud bo'lib, $a+(-a)=0$ bo'ladi.

5⁰. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ (ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi)

6⁰. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$.

7⁰. $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$.

8⁰ 1. $a=a$ (har qanday vektor 1 songa ko'paytirilsa, shu vektorning o'zi hosil bo'ladi).

6-ta'rif. Ixtiyoriy a vektor bilan birga yo'nalishi a vektorga qarama-qarshi, moduli $|a|$ ga teng bo'lgan vektor, a vektorga qarama-qarshi vektor deb ataladi va $-a$ bilan belgilanadi: $-a=(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$.

Ravshanki, $a+(-a)=0$ bo'ladi.

7-ta'rif. Ikkita ixtiyoriy a va b vektorlarning ayirmasi deb, shunday uchinchi c vektorga aytiladiki, c vektor bilan b vektorning yig'indisi a vektorga teng, ya'ni:

$$c=a+(-b)=a-b.$$

8-ta'rif. Berilgan n natural son uchun hamma n o'lchamli vektorlar to'plami n o'lchamli vektor fazo deyiladi va R^n bilan belgilanadi.

3. Vektorlarni koordinata vektorlari buyicha yoyish

Bu yerda ixtiyoriy vektorni koordinata vektorlari yoki ortlar buyicha yoyish masalasini R^n vektor fazoda qaraymiz.

1-ta'rif. R^n fazodagi koordinatalaridan biri birga qolgan koordinatalari nolga teng bo'lgan vektorlar *koordinata vektorlari* yoki *ortlar* deb ataladi va ular quyidagicha yoziladi:

$$e_1=(1,0,\dots,0)$$

$$e_2=(0,1,\dots,0)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e_n=(0,0,\dots,1)$$

Demak, R^n vektor fazoda n ta koordinata vektorlari mavjud.

Vektorlar ustida amallar ta'rifidan, $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorni $a=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_n e_n$ ko'rinishda tasvirlash mumkinligi kelib chiqadi.

Haqiqatan, bu tenglikni

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)=a_1 (1,0,\dots,0)+ a_2 (0,1,\dots,0)+\dots+a_n (0,0,\dots,1)$$

ko'rinishda yozib olib o'ng tomondagi amallarni bajarsak, o'ng tomonda $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektor hosil bo'ladi.

Xususiyl holda, R^2 fazoda (a_1, a_2) vektor uchun

$$a=a_1e_1+a_2e_2 \quad (e_1=(1,0), e_2=(0,1)).$$

R^3 fazoda esa $a=(a_1, a_2, \dots, a_3)$ vektor uchun

$$a=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_3e_3 \quad (e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1))$$

ko'rinishdagi yoyilmalar o'rinli bo'ladi.

*Eslatma. Koordinata birlik vektorlari R_2 va R_3 fazolarda mos ravishda i, j va i, j, k harflar orqali belgilash qabul qilingan. Ular orqali a vektori quyidagicha yoziladi:

$a=a_x i+a_y j, a=a_x i+a_y j+a_z k$ bu yerda a_x, a_y, a_z lar a vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari. Endi R_3 fazoda

$a=a_x i+a_y j+a_z k$ va $b=b_x i+b_y j+b_z k$ vektorlarning kolleniarlik shartini keltiramiz. Agar a va b vektorlar bir to'g'ri

chiziqda yoki o'zaro parallel chiziqlarda yotsa ular *kolleniar vektorlar* deyiladi. Bu holda $a = \lambda b$ shart bajariladi, bu yerda λ qandaydir son. Vektorni songa ko'paytirilsa uning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari ham shu songa ko'paytiriladi, ya'ni $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$ va aksincha. Bu tengliklarni ushbu ko'rinishda ham yozish mumkin.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Demak, ikki a va b vektorlar kolleniar bo'lishi uchun ularning proektsiyalari proporsional bo'lishi zarur va etarli.

Ta'kidlab o'tamizki n-o'lchovli vektorlarning kolleniarlik shartlari ham yuqoridagi kabi keltiriladi (ko'rsating).

4. Vektorning normasi

R^3 fazoda vektorning *moduli (uzunligi)* tushunchasini R^n fazodagi vektorlar uchun umumlashtiramiz.

1-ta'rif. R^n vektor fazodagi $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektorning *uzunligi yoki normasi* deb, $\|a\|$ bilan belgilanuvchi ushbu songa aytiladi:

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Vektorning normasi quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Ixtiyoriy a vektor uchun $\|a\| > 0$ va $a=0$ bo'lganda, $\|a\|=0$ bo'ladi va aksincha.

2⁰. $\lambda \in R$ uchun $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$.

3⁰. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Xususiyl holda, R^3 fazoda $a=(a_1, a_2, a_3)$ vektor uchun $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ son uning uzunligini ifodalaydi. Bunda
 1) $|a| > 0$ va $|a| = 0$ agar $a=0$ bo'lsa; 2) $\forall \lambda \in R$ uchun $|\lambda a| =$
 $\sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2 + (\lambda a_3)^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
 ;

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ xossalari o'rinli. 3) xossa uchburchak tengsizligi deb ataladi (uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomondan kichik emas). Bunda, tenglik belgisi uchburchak uchlaridagi nuqtalar bir to'g'ri chiziq ustida yotgandagina o'rinli bo'ladi (isbotlang).

Shuni ta'kidlab o'tamizki, R^1 fazoda norma haqiqiy sonning modulini angladi.

Normaning 1^0 va 2^0 xossalari bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Biz faqat 3^0 xossaning isbotini keltiramiz.

3^0 xossani isbotlash uchun avvalo, *Koshi tengsizligi* deb ataluvchi

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \quad (1)$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

Koshi tengsizligining isboti quyidagi sodda tasdiqqa asoslanadi: Agar koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo'lgan $Ax^2 + Bx + C$ uchhad $\forall x \in R$ uchun manfiy bo'lmasa, u holda uning diskriminanti musbat emas, ya'ni $B^2 - AC \leq 0$ bo'ladi. Kvadrat uch hadga kelishi mumkin bo'lgan yordamchi $\varphi(x)$ ($x \in R$) funksiyani quyidagicha olamiz.

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\text{Bu yerda } A = \sum_{i=1}^m b_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^n a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$\varphi(x)$ uch had tuzilishiga ko'ra, manfiy emas: $\varphi(x) \geq 0$ u holda yuqoridagi tasdiqqa ko'ra,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0.$$

Bu esa (1) tengsizlikning boshqacharoq ko'rinishidir.

Endi, Koshi tengsizligidan uchburchak tengsizligini keltirib chiqaramiz. Norma ta'rifiga ko'ra, uchburchak tengsizligi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i + b_i\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (2)$$

Bu tengsizlik ham Koshi tengsizligi deyiladi. Shu tengsizlikni isbotlasak, 3^o xossa isbotlangan bo'ladi.

(1) Tengsizlikning har ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqaramiz:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Bu tengsizlikning har ikkala tomonini 2 ga ko'paytiramiz va

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

ifodani qo'shamiz. U holda,

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikni esa quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2$$

yoki

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right)^2.$$

Buning har ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqarsak, isbot talab etilgan tengsizlik kelib chiqadi.

Vektorning normasi quyidagi sodda xossasiga ega: agar $a \neq 0$ bo'lsa $\frac{1}{\|a\|} a$ vektorning normasi 1 ga teng.

2-ta'rif. Vektorning normasi

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

formula yordamida kiritilgan R^n vektor fazo n -o'lchamli evklid fazosi deb ataladi.

5. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi

Ma'lumki, vektorlarning skalyar ko'paytmasi nafaqat matematikada, balki mexanika va fizikada keng tatbiqlarga ega.

1-ta'rif. $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $b=(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorlarning *skalyar ko'paytmasi* (a,b) deb ushbu formula

$$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=\sum_{i=1}^na_ib_i \quad (1)$$

bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1⁰. $(a,b)=(b,a)$ (Kommutativlik).

2⁰. $(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$ (Songa ko'paytirishga nisbatan assosiativlik).

3⁰. $(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$ (Distributivlik).

4⁰. Agar $a \neq 0$ bo'lsa $(a,a)>0$.

(1) formuladan $(a,a)=a_1a_1+a_2a_2+\dots+a_na_n=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$

kelib chiqadi va bundan $(a,a)=\|a\|^2$ yoki $\|a\|=\sqrt{(a,a)}$ ekanligini topamiz. Ba'zan (a,a) ko'paytma a^2 bilan ham belgilanadi. Bu holda $a^2=\|a\|^2$.

1⁰-4⁰ xossalarning isbotini R^3 fazoda qarab chiqamiz:

$a=(a_1, a_2, a_3)$ $b=(b_1, b_2, b_3)$ vektorlar berilgan bo'lsin.

a va b vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ sonidan iborat bo'ladi.

Xossalarni isbotlash uchun skalyar ko'paytma ta'rifidan va sonlar ustida amallarning xossalariidan foydalanish kifoya. Haqiqatan,

1. $(a,b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=(b,a)$.

2. $(\lambda a,$

$b)=\lambda a_1b_1+\lambda a_2b_2+\lambda a_3b_3=\lambda(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=\lambda(a,b)$.

3. $(a,b+c)=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)=$
 $=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3=$
 $=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=(a,b)+(a,c)$.

4. $(a,a)=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2>0$.

Yuqorida isbotlangan

$$\left(\sum_{i=1}^n(a_ib_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Koshi tengsizligini skalyar ko'paytma va norma ta'rifiga ko'ra quyidagicha yozish mumkin:

$$(a,b)^2 \leq \|a\| \|b\|.$$

Buning har ikkala tomonidan kvadrat ildiz chiqarib, Koshi formulasining boshqa ko'rinishiga ega bo'lamiz:

$$|(a,b)| \leq \|a\| \|b\|.$$

Shunday qilib biz skalyar ko'paytmaning yana bir asosiy xossasini isbotladik, ya'ni ikki vektor skalyar ko'paytmasining moduli ular normalarining ko'paytmasidan oshmaydi.

2-ta'rif. Agar $(a,b)=0$ bo'lsa a va b vektorlar ortogonal deyiladi.

Bu ta'rif uch o'lchamli fazoda vektorlarning perpendikulyarlik sharti bilan mos tushadi. Yani vektorlar perpendikulyar bo'lsa ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng. Aksincha, noldan farqli vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, vektorlar perpendikulyar bo'ladi.

*Endi R_3 fazoda vektorlarning perpendikulyarlik shartini keltiramiz.

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k$$

vektorlar berilgan bo'lsin.

Ularni o'zaro skalyar ko'paytirib $(i, i)=(j, j)=(k, k)=1$, $(i, j)=(j, i)=(i, k)=(k, i)=(j, k)=(k, j)=0$ larni hisobga olsak,

$$(a, b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan ikki a va b vektorlarning perpendikulyarlik sharti

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. R_n fazoda ham vektorlarning perpendikulyarlik sharti shunga o'xshash bo'ladi (ko'rsating).

Matematika va tabiatshunoslik fanlarida skalyar ko'paytmaning boshqacha ta'rifidan ko'proq foydalaniladi.

Ta'rif. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb ular uzunliklari ko'paytmasining ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa aytiladi:

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cos \varphi$$

Bu ta'rifga ko'ra a va b vektorlar orasidagi burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}$$

bo'lib, uning proyeksiyalar yordamidagi yozuvi

$$\cos = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu formulalarni R_n fazoda tasvirlashni o'quvchiga qoldiramiz.

6. Chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan vektorlar

Faraz qilaylik $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haqiqiy sonlar va $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar berilgan bo'lsin.

7-ta'rif. $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$ ifoda n ta $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlarning **chiziqli kombinatsiyasi** deyiladi.

8-ta'rif. Agar hech bo'lmasa bittasi noldan farqli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar topilib, $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $a_1, a_2, \dots, a_n$ **vektorlar chiziqli bog'langan** deyiladi.

9-ta'rif. Agar hammasi nolga teng bo'lgan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sonlar uchungina $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlar **chiziqli bog'lanmagan** deyiladi.

5-teorema. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorlarning hech bo'lmaganda bittasi nolga teng bo'lsa, bu vektorlar chiziqli bog'langan bo'ladi.

Haqiqatan, $a_1=0, a_2, a_3, \dots, a_n$ lar ixtiyoriy deb olsak,

$\alpha_1 = 1, \alpha_1=0, \dots, \alpha_n=0$ uchun

$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra bu $a_1, a_2, \dots, a_n$ larning chiziqli bog'langanligini bildiradi.

6-teorema. Agar n ta vektorlardan qandaydir $n-1$ tasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda barcha n vektorlar chiziqli bog'langan bo'ladi (isbotlang).

7. Vektor fazoning ta'rifi va misollar

Ta'rif. Biror E to'plamning ixtiyoriy ikki x va y elementi uchun yig'indi amali aniqlangan bo'lib, unga nisbatan E kommutativ gruppasi hosil qilsin, ya'ni ushbu to'rtta shart bajarilsin.

1⁰. $x+y = y+x$

2⁰. $x+(y+z)=(x+y)+z$

3⁰. E ning barcha x elementlari uchun $x+0=x$ shartni qanoatlantiruvchi va **nol** deb ataluvchi 0 element mavjud bo'lsin.

4⁰. E dagi har qanday x element uchun $x+(-x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $-x \in E$ element mavjud bo'lsin. Bu element x elementga **qarama-qarshi element** deyiladi.

Bundan tashqari, har qanday $\lambda \in K$ son va $x \in E$ element uchun ularning ko'paytmasi deb ataladigan $\lambda x \in E$ element aniqlanib, quyidagi shartlar bajarilsin:

5⁰. $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x; \quad \lambda, \beta \in R$

6⁰. $1 \cdot x = x$

7⁰. $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x; \quad \lambda, \beta \in R$

8⁰. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

Agar E da bu chiziqli amallar uchun 1⁰-8⁰ shartlar bajarilsa E to'plam K maydon ustida **vektor fazo** deyiladi.

Misollar: 1. n -o'lchamli vektor fazo, vektor fazo bo'ladi. Chunki n -o'lchamli vektor fazoda chiziqli amallar aniqlangan bo'lib, 1^0-8^0 shartlar bajarilishi yuqorida ko'rilgan edi.

2. Darajasi $n-1$ dan katta bo'lmagan bir argumentli ko'phadlar to'plami $\{P_{(x)}^{n-1}\}$ vektor fazo tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallarini kiritib, 1^0-8^0 shartlarning bajarilishini tekshirib ko'rish kifoya (tekshiring).

3. Darajasi $n-1$ ga teng bo'lgan ko'phadlar to'plami vektor fazo hosil qilmaydi. Chunki bunday ikki ko'phad yig'indisining darajasi $n-1$ dan kichik bo'lishi mumkin.

Masalan,

$$f_1(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + 1$$

$$f_2(x) = -x^{n-1} + 2x^{n-2} - x^{n-3} + \dots + 2$$

ko'phadlar yig'indisi $f_1(x) + f_2(x)$ darajasi $n-2$ ga teng bo'lgan ko'phaddan iborat.

4. Haqiqiy musbat sonlar to'plami R_+ vektor fazo hosil qilmaydi, chunki $\lambda > 0$ son uchun qarama-qarshi $-\lambda$ element bu to'plamga kirmaydi.

5. $[a, b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami $C[a, b]$ vektor fazo hosil qiladi. Chunki $[a, b]$ oraliqda uzluksiz funksiyalar $f(x)$ va $g(x)$ larning yig'indisi $f(x) + g(x)$ kabi, $\lambda \in R$ songa ko'paytmasi $\lambda f(x)$ kabi aniqlanadi va 1^0-8^0 shartlar bajariladi (ko'rsating). Bu fazoni funksional fazo deb ham ataladi.

Eslatma. Umumiy vektor tushunchasidan farqli o'larok R^n fazoning vektorlarini n -o'lchamli fazoning vektorlari deb ataymiz. Agar $n=3$ bo'lsa vektorlarning odatdagi uch o'lchamli fazosini tushunamiz. $n=1$ bo'lsa har bir vektor bitta koordinata

bilan aniqlanadi. Bunday vektorlar ustida chiziqli amallar xuddi haqiqiy sonlar ustidagi amallar singari bo'ladi. Shuning uchun R^1 fazo haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Tekshirish uchun savollar

Savollar.

1. Fazo tushunchasi nima?
2. n -o'lchovli vektorlar fazosi R^n ga ta'rif bering.
3. R^n fazo vektorlari ustida chiziqli amallar nimalardan iborat?
4. Chiziqli amallar qanday xossalarga ega? Ularni isbotlang.
5. n -o'lchamli vektorlar ortlar yordamida qanday yoyiladi.
5. Vektorning normasiga ta'rif bering. U qanday xossalarga ega?
6. Koshi tengsizliklarini isbotlang.
7. n -o'lchovli vektorlarning skalyar ko'paytmasiga ta'rif bering. U qanday xossalarga ega?
8. Ikki vektor qachon ortogonal deyiladi?
9. Vektor fazoga ta'rif bering va misollar keltiring.

Mashqlar.

1. Kompleks sonlar to'plamida qo'shish va haqiqiy songa ko'paytirish amallari qaralsa, bu to'plam vektor fazo bo'lishini ko'rsating.
2. Q rasional sonlar maydoni bo'lsin. Ixtiyoriy t rasional sonning x haqiqiy songa ko'paytmasi odatdagidek bo'lsin. R fazo Q maydon ustida vektor fazo bo'ladimi?
3. $x(t)=t^2$, $y(t)=2t$, $z(t)=2t^2+4t$ funksiyalar chiziqli bog'langan ekanligini ko'rsating.
4. $x_0(t)=1$, $x_1(t)=t$, $x_n(t)=t^2$, ..., $x_n(t)=t^n$ funksiyalar chiziqli bog'lanmaganligini ko'rsating.

5. $\vec{a} = \{6; 3; -2\}$ vektorning modulini hisoblang.

6. Vektorning ikki koordinatasi $a_1=4$, $a_2=-12$ berilgan.

Agar $|\vec{a}|=13$ bo'lsa, $\vec{a}$ vektorning uchunchi a_3 koordinatasi topilsin.

7. A (3; -1; 2) va B (-1; 2; 1) nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ vektorlarning koordinatalari topilsin.

8. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlarga ko'ra 1) $\vec{a} + \vec{e}$, 2) $\vec{a} - \vec{e}$, 3) $\vec{e} - \vec{a}$, 4) $-\vec{a} - \vec{e}$ vektorlarni yasang.

9. Agar $|\vec{a}|=13$, $|\vec{e}|=19$ va $|\vec{a} + \vec{e}|=24$ bo'lsa $|\vec{a} - \vec{e}|$ ni hisoblang.

10. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlarga ko'ra 1) $3\vec{a}$, 2) $-\frac{1}{2}\vec{e}$
3) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{e}$, 4) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{e}$ vektorlarni yasang.

11. $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ va $\vec{e} = \{-6; 3; -9\}$ vektorlarning kollinearligini tekshiring.

12. α va β larning qanday qiymatlarida $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{e} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

13. $\vec{a} = \{4; 1; 3\}$, $\vec{e} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{16; 9; 1\}$ vektorlarning $3\vec{a} + 5\vec{e} - \vec{c}$ chiziqli kombinatsiyasini toping.

14. Quyidagi vektorlar sistemasining chiziqli bog'langan yoki chiziqli bog'lanmaganligini aniqlang.

a) $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{e} = \{3; 6; 7\}$

b) $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$, $\vec{e} = \{3; -1; 5\}$, $\vec{c} = \{1; -4; 3\}$

c) $\vec{a} = \{4; -2; 6\}$, $\vec{e} = \{6; -3; 9\}$

7-§. Chiziqli akslantirishlar

1. Chiziqli almashtirishlar

Ikkita P va Q tekislikni qaraylik. P tekislikda to'g'ri burchakli Ox_1x_2 koordinatalar sistemasi hamda Q tekislikda Oy_1y_2 koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. P va Q tekisliklar ustma-ust keltirilishi mumkin. Shuningdek, koordinatalar sistemalari ham ustma-ust keltirilishi mumkin.

Ushbu

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz.

Bu tengliklarga ko'ra, Ox_1x_2 tekislikning har bir $M(x_1, x_2)$ nuqtasiga Oy_1y_2 tekislikning $N(y_1, y_2)$ nuqtasi mos keladi.

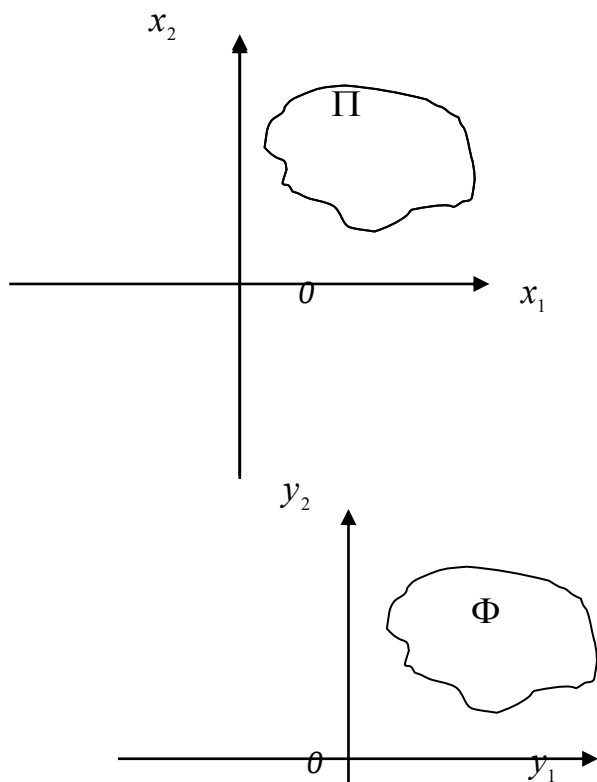
Masalan,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 - 3 \\ y_2 &= 2x_1 + 3x_2 + 4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

tengliklarga ko'ra Ox_1x_2 tekislikdagi $A(-2, 4)$ nuqta, $B(-1, 12)$ nuqtaga o'tadi. (1) tenglamalar koordinatalarning *chiziqli geometrik almashtirishlari* deb ataladi. Bu tenglamalar Ox_1x_2 tekislikni Oy_1y_2 tekislikka akslantiradi (butun tekislikka akslantirishi shart emas). (1) tenglamalar chiziqli tenglamalar bo'lganligi sababli, akslantirish *chiziqli akslantirish* deyiladi. Bunda akslantirish o'zaro bir qiymatli deb hisoblanadi.

Xususiyl holda, $y = Ax$ tenglik Ox o'qi nuqtalariga Oy o'qning nuqtalarini mos qo'yadi. y eng sodda chiziqli akslantirishga misol bo'ladi.

- (1) akslantirish Ox_1x_2 tekislikdagi biror Π sohani Oy_1y_2 dagi biror Φ sohaga o'tkazadi (1-chizma).



1-chizma

(1) akslantirish $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ koefitsiyentlar to'plami bilan to'la aniqlanadi. Bu koefitsiyentlardan tuzilgan

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

matritsa (1) *akslantirishning matritsasi* deyiladi. Matritsa elementlaridan ularning o'rinlarini almashtirmasdan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinant M *matritsaning determinanti* deb ataladi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\ y_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \end{cases} \quad (3)$$

akslantirish Ox_1x_2 koordinatalar sistemasini α burchakka burishdan iborat. Bunda Ox_1x_2 sistemadagi har bir x_1 va x_2 koordinatali nuqta (3) qonuniyat bo'yicha o'zgaradi.

Shunday qilib, (3) chiziqli almashtirish eski x_1 va x_2 koordinatalarni yangi y_1 va y_2 koordinatalarga o'tkazadi. Bu almashtirishning matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}, \quad M = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Algebra va boshqa fanlarda, masalan analitik geometriya, matematik analiz, ehtimollar nazariyasi, mexanika va boshqa fanlarda chiziqli almashtirishlarning tatbiqlari beqiyosdir. Chiziqli akslantirishlar ixtiyoriy sondagi o'zgaruvchilarga ham ega bo'lishi mumkin. $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarni yangi $y_1, y_2, \dots, y_n$ o'zgaruvchilarga o'tkazuvchi chiziqli akslantirish umumiy holda quyidagicha bo'ladi.

78

Shuni eslatib o'tamizki, bu almashtirish n -o'lchovli R_n fazoni R_n fazoga o'tkazadi. Boshqacha qilib aytganda, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorni $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorga akslantiradi. Bunda y vektor x vektorning obrazi, x vektor y vektorning proobrazi deyiladi. (4) chiziqli almashtirishning matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Umuman olganda kvadrat bo'lmagan, ya'ni satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lmagan matritsali chiziqli almashtirishlarni ham qarash mumkin.

(4) formulani qisqacha $y = f(x)$ deb yozib olamiz va uni ham chiziqli akslantirish (yoki chiziqli operator) deb ataymiz.

Endi (4) formulalarni qisqacha

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu formulani esa umumiy holda $y = f(x)$ ko'rinishda yozish mumkin.

$$f(x+t) = f(x) + f(t) \quad (6)$$

ni ko'rsatmiz.

Agar

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} t_k \quad \text{va}$$

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k + t_k) \text{ deb olsak,}$$

U holda har qanday $i = 1, 2, \dots, n$ uchun

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} (x_k + t_k) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{k=1}^n a_{ik} t_k = y_i + z_i.$$

Agar $\alpha = f(x + t)$, $y = f(x)$, $z = f(t)$ desak, oxirgi tengliklardan $\alpha = y + z$ kelib chiqadi. Demak, $f(x + t) = f(x) + f(t)$. Endi

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (7)$$

tenglikning bajarilishini ko'rsatamiz:

$$f(\lambda x) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = \lambda f(x).$$

(6) tenglik f akslantirishning *additivlik xossasi*, (7) esa *bir jinslilik xossasi* deyiladi.

Eslatma. Tekislikni tekislikka yoki fazoni fazoga akslantirishlar chiziqli bo'lmazligi ham mumkin. Masalan, tekislikni tekislikka akslantirish, ya'ni x_1 va x_2 koordinatali nuqtaning koordinatalarini koordinatalari y_1 va y_2 bo'lgan $f(M)$ nuqta orqali ifodalovchi formulalar quyidagicha beriladi.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \varphi(x_1, x_2) \\ y_2 &= \psi(x_1, x_2) \end{aligned} \right\}$$

Bu yerdagi φ va ψ funksiyalar ixtiyoriy bo'lmadan ular barcha (x_1, x_2) juftlar uchun aniqlangan va har qanday (b_1, b_2) juftlik uchun yagona (a_1, a_2) juftlik mos kelishi kerak: $\varphi(a_1, a_2) = b_1$ $\psi(a_1, a_2) = b_2$.

2. Teskari almashtirish.

Bizga ma'lum bo'lgan

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

akslantirish formulalaridan ko'rinadiki, Ox_1x_2 tekislikni Oy_1y_2 tekislikka akslantirish bir qiymatlidir, chunki, Ox_1x_2 tekislikning har bir nuqtasiga Oy_1y_2 tekislikning yagona nuqtasi mos keladi. Biz bu yerda Oy_1y_2 tekislikni Ox_1x_2 tekislikka akslantiruvchi (1) ga teskari akslantirish formulalarini keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{yoki} \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

bo'lsin. Bu holda (1) sistema yagona (x_1, x_2) yechimga ega bo'ladi. Kramer formulalariga ko'ra ular

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

yoki yoyilgan holda

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22}}{\Delta} y_1 + \frac{-a_{12}}{\Delta} y_2 \\ x_2 &= \frac{-a_{21}}{\Delta} y_1 + \frac{a_{11}}{\Delta} y_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) tenglamalarga ko'ra Oy_1y_2 tekislikning har bir $A(y_1, y_2)$ nuqtasiga Ox_1x_2 tekislikning ma'lum bir $B(x_1, x_2)$ nuqtasi mos keladi. (2) ko'rinishdagi almashtirish (1) almashtirishga *teskari almashtirish* deyiladi.

Teskari almashtirishning matritsasini M^{-1} bilan belgilaymiz:

$$M^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{array} \right\|$$

Agar M matritsaning determinanti nolga teng bo'lsa, ya'ni $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$ bo'lsa, u holda (1) almashtirishni *maxsus almashtirish* deyiladi. U o'zaro bir qiymatli bo'lmaydi.

Misol.

Ushbu

$$y_1 = 2x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

almashtirishga teskari almashtirishni toping.

Yechish. Almashtirishning determinantini topamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

Demak, berilgan almashtirish o'zaro bir qiymatli.

Teskari almashtirish quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2$$

$$x_2 = \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2$$

bu almashtirishning matritsasi

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

3. Vektor fazolarni chiziqli almashtirish.

Faraz qilaylik f E vektor fazoni F vektor fazoga akslantirish bo'lib, u E vektor fazoning har bir x vektorini F vektor fazoning $y = f(x)$ vektoriga mos qo'ysin.

Ta'rif. Agar har qanday $x, y \in E$ va $\lambda \in K$ son uchun:

$$1) \quad f(x + y) = f(x) + f(y), \quad 2) \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, f *chiziqli akslantirish* yoki *chiziqli operator* deyiladi.

Demak, ta'rifdan ko'rinadiki, f chiziqli akslantirish bo'lsa, uning natijasida ikki vektor yig'indisining obrazi ular obrazlarining yig'indisidan, vektorning songa ko'paytmasining obrazi esa, vektor obrazining shu songa ko'paytmasidan iborat bo'ladi.

1) va 2) shartlardan kelib chiqadiki, agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar E vektor fazoning qandaydir vektorlari bo'lsa, chiziqli kombinasiya $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ F vektor fazodagi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n$ chiziqli kombinasiyaga o'tadi. Bu yerda $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ lar F fazoning vektorlari. Boshqacha qilib aytganda

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

tenglik o'rinli.

Chiziqli akslantirishlar quyidagi xossalarga ega.

1⁰. Chiziqli akslantirishda E fazoning nol vektori O_E F fazoning nol O_F vektoriga o'tadi: $f(O_E) = O_F$

Haqiqatdan E fazoning ixtiyoriy x vektori uchun $O_E = 0 \cdot x$. Demak, $f(O_E) = 0 \cdot f(x) = O_F$

2⁰. Agar $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorlar chiziqli bog'langan bo'lsa, ularning obrazlari $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ ham chiziqli bog'langan bo'ladi.

Haqiqatan, shartga ko'ra shunday hech bo'lmaganda biri noldan farqli bo'lgan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar topiladiki,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = O_E$$

o'rinli bo'ladi. U holda

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots \\ &+ \lambda_n f(x_n) = f(O_E) = O_F \end{aligned}$$

Demak, $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ vektorlar chiziqli bog'langan. (Vektor fazoning vektorlari uchun chiziqli bog'lanish va chiziqli bog'lanmaganlik ta'riflari R^n fazodagidek bo'ladi).

3⁰. Faraz qilaylik f akslantirish E vektor fazoni F vektor fazoga o'zaro bir qiymatli chiziqli akslantirish bo'lsin. U holda F vektor fazoni E vektor fazoga akslantiruvchi chiziqli f^{-1} teskari akslantirish mavjud (isbotlang).

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar.

1. Chiziqli almashtirishning eng sodda ko'rinishi qanday bo'ladi?
2. Tekisliklarni chiziqli almashtirish tenglamalarini yozing.
3. Chiziqli akslantirishning matritsasi va determinanti qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. n – o'lchamli fazolarni chiziqli akslantirish formulalarini yozing. Bu formulalar qisqacha qanday yoziladi?
5. Chiziqli bo'lmagan akslantirish deb nimaga aytiladi?
6. $y = f(x)$ chiziqli akslantirish qanday xossalarga ega bo'lishi kerak?
7. Teskari akslantirish deb nimaga aytiladi. Uning matritsasi qanday ko'rinishga ega?
8. Vektor fazolarni chiziqli akslantirish ta'rifini bering va uning xossalarini ayting.

Mashqlar:

1. Ushbu

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -x_1 + 1 \\ y_2 &= -x_2 + 3 \end{aligned} \right\}$$

almashtirish $M(x_1, x_2)$ nuqtani $N(y_1, y_2)$ nuqtaga o'tkazadi.

A) Quydagi nuqtalar obrazlarining koordinatalarini toping: $M_1(4,5)$, $M_2(-4,-5)$, $M_3(-2,7)$, $M_4(7,-2)$

B) Quyidagi nuqtalar proobrazlarining koordinatalarini toping: $N_1(2,4)$, $N_2(-3,8)$, $N_3(4,-6)$, $N_4(-8,-9)$

2. Uchlari $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(3,-3)$, va $D(-3,-3)$ nuqtalarda bo'lgan $ADCD$ kvadratning obrazini toping. Bunda akslantirish formulalari

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 - 4 \\ y_2 &= x_2 + 2 \end{aligned} \right\}$$

dan iborat.

3. Akslantirish ushbu

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 3x_1 - 5x_2 + 2 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 - 7 \end{aligned} \right\}$$

formulalar bilan berilgan. $M(1,8)$ nuqtaning obrazini va $N(-5,2)$ nuqtaning proobrazini toping.

4. Ushbu

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + 3x_2 - 1 \\ y_2 &= x_1 - 2x_2 + 5 \end{aligned} \right\}$$

almashtirishga teskari almashtirishni toping.

5. Ushbu

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 - 2x_2 + 4 \\ y_2 &= 2x_1 + x_2 - 5 \end{aligned} \right\}$$

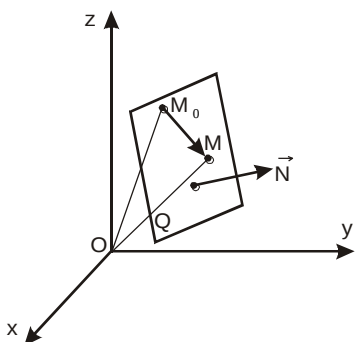
almashtirishga teskari almashtirishni toping..

8-§. Tekislik tenglamalari

1. Tekislikning umumiy tenglamasi

Ixtiyoriy tekislik tenglamasini to'g'ri burchakli dekart koordinatalari $Oxyz$ sistemasida tuzish masalasini qaraymiz.

Uch o'lchovli fazoda ixtiyoriy Q tekislikni qaraymiz. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ shu tekislikning biror nuqtasi, $\vec{N}$ noldan farqli va tekislikka perpendikulyar vektor bo'lsin. Bu holda tekislikning har qanday $M(x, y, z)$ nuqtasi uchun $\vec{M_0M}$ va $\vec{N}$ - vektorlar perpendikulyar bo'ladi. (1-chizma). Demak



1-чизма

$$(\vec{M_0M}, \vec{N}) = 0. \quad (1)$$

Faraz qilaylik, A, B, C sonlar $\vec{N}$ vektorning koordinatalari bo'lsin: $\vec{N} \{A, B, C\}$

Ravshanki, $\vec{M_0M} = \vec{OM} - \vec{OM_0}$
 $\vec{OM_0} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$. Shuning uchun (1) dan $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ (2)

Bu talab qilingan tenglamadir.

Demak, qo'yidagi tasdiq isbotlandi.

1-tasdiq. Har qanday tekislik x, y va z o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali algebrik tenglama bilan tasvirlanadi.

Xusussiy holda Q tekislik Ox va Oy o'qlari ustida yotsa uning tenglamasi $z=0$ ko'rinishda birinchi darajali algebraik tenglama bilan tasvirlanadi. Haqiqatan bu tenglamani Q tekislikda yotuvchi istalgan nuqtaning koordi natlari qanoatlantiradi.

Endi Oxy to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasini olib, ixtiyoriy birinchi darajali $Ax+By+Cz+D=0$ (3) algebraik tenglamani qaraymiz. Faraz qilaylik, x_0, y_0, z_0 - bu tenglamaning biror yechimi bo'lsin. U holda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \quad (4)$$

Endi (3) va (4) larni ayrib (3) tenglamaga ekvivalent bo'lgan qo'yidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (5)$$

Yuqorida ko'rganimizdek (5) tenglama ushbu $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{N})=0$ tenglamaga ekvivalent. Demak M_0 nuqtadan o'tib $\vec{N}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikning hamma nuqtalari (faqatgina shular) berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Demak, tenglama shu tekislik tenglamasidir. Shunday qilib, qo'yidagi tasdiq isbotlandi.

2- tasdiq. x, y, z o'zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali har qanday $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama tekislikni tasvirlaydi. (3) tenglama *tekislikning umumiy tenglamasi* deyiladi.

Misol: $M(1,-2,3)$ nuqtadan o'tib $\vec{n}=\{2,0,4\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini to'zing.

Yechish: Berilishiga ko'ra, $A=2, B=0, C=4$. (2) formulaga ko'ra

$2(x-1)+0(y+2)+4(z-3)=0$ ga ega bo'lamiz. Buni soddalashtirib izlangan tenglamani topamiz: $x+2z-7=0$

1. Tekislikning fazodagi vaziyatlari

Tekislikning ushbu $Ax+By+Cz+D=0$ (3) ko'rinishdagi umumiy tenglamasini qaraymiz. Bu yerda A, B, C , D lar istalgan haqiqiy sonlar bo'lib, A, B, C larning aqalli bittasi noldan farqli bo'lishi kerak.

Agar A, B, C, D larning barchasi noldan farqli bo'lsa (3) tenglama **to'liq** deb ataladi. Agar bularning birortasi nolga teng bo'lsa, uni **to'liqsiz** tenglama deb ataladi.

To'liqsiz tenglamalarning mumkin bo'lgan barcha ko'rinishlarini qaraymiz va ularning koordinatlar sistemasiga nisbatan joylashishdagi xususiyatlarini anqilaymiz.

1. Agar (3) tenglamadagi ozod had $D=0$ bo'lsa, tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishga keladi va bu tenglama koordinatalar boshidan o'tgan tekislikni tasvirlaydi.

2. $A=0$. Bu holda $By+Cz+D=0$ tenglama Ox o'qiga paralel bo'lgan tekislikni tasvirlaydi. (chunki bu tekislikning normal vektori $\vec{N}=\{0, B, C\}$ Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi).

3. $B=0$. Bu holda $Ax+Cz+D=0$ tenglama hosil bo'ladi u Oy o'qiga paralel bo'lgan tekislikni ifodalaydi (chunki uning normal vektori $\vec{N}=\{A; 0; C\}$ Oy o'qiga perpendikulyar).

4. $C=0$. Bu holda, $Ax+Cz+D=0$ tenglamaga ega bo'lamiz va u Oz o'qiga paralel tekislik tenglamasi bo'ladi (chunki uning normal vektori $\vec{N}=\{A; B; 0\}$ Oz o'qiga perpendikulyardir).

5. $A=0, B=0$. Bu holda, $Cz+D=0$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama Oxy tekislikka paralel tekislikni ifodalaydi (chunki bu tekislik Ox va Oy o'qlarga paralel bo'ladi).

6. $A=0, C=0$. Bu holda $By+D=0$ tenglamaga ega bo'lamiz va u Oxz tekisligiga paralel tekislikni ifodalaydi (chunki bu tekislik Ox va Oz o'qlarga paraleldir).

7. $B=0, C=0$. Bu holda $Ax+D=0$ tenglama hosil bo'ladi va u Oyz tekisligiga paralel tekislikni ifodalaydi (chunki bu tekislik Oy va Oz o'qlarga paraleldir).

8. $A=0, B=0, D=0$. Bu holda tenglama $Cz=0$ ko'rinishda bo'ladi va u oxy koordinata tekisligini ifodalaydi (chunki bu tekislik Oxy tekislikka paralel va koordinati boshidan o'tadi).

9. $A=0, C=0, D=0$. Bu holda tenglama $By=0$ ko'rinishda bo'lib Oxz koordinat tekisligini ifodalaydi (chunki bu tekislik Oxz tekislikka paralel va koordinata boshidan o'tadi).

10. $B=0$, $C=0$, $D=0$. Bu holda tenglama $Ax=0$ ko'rinishda bo'ladi u Oyz koordinatalar tekisligini ifodalaydi (chunki bu tekislik Oyz tekislikka paralel va koordinata boshidan o'tadi).

Misol. $M_1(1;2;-3)$ va $M_2(4;2;1)$ nuqtalar $2x+3y-5z-23=0$ tekislikda yotadimi?

Yechish: Nuqtaning tekislikda yotishi uchun uning koordinatalari shu tekislik tenglamasini qanoatlantirishini tekshirish kerak. Bu yerda

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5(-3) - 23 = 0$$

$2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 23 = -14 \neq 0$ Demak, M_1 nuqta tekislikda yotadi, M_2 esa yotmaydi.

2. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi

Tekislikning to'liq tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ (3) berilgan bo'lsin (bunda hamma koordinatalar noldan farqli). Bu tenglamani tekislikning kesmalar bo'yicha tenglama deb ataluvchi

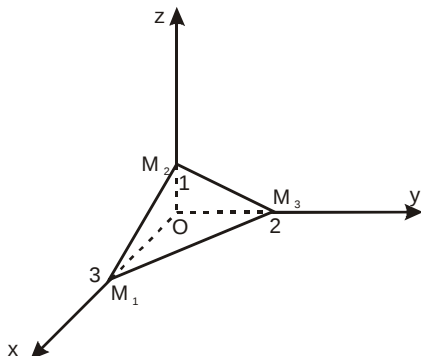
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ ko'rinishga keltirish mumkin.}$$

Buning uchun (3) tenglamadan $Ax+By+Cz = -D$

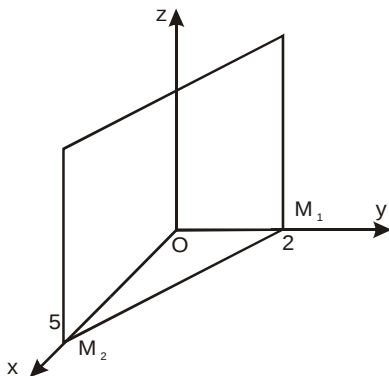
$$\frac{\frac{x}{A}}{-\frac{D}{D}} + \frac{\frac{y}{B}}{-\frac{D}{D}} + \frac{\frac{z}{C}}{-\frac{D}{D}} = 1 \text{ larni } \quad \text{yozib} \quad \text{olamiz} \quad \text{va}$$

$$a = -\frac{A}{D}, b = -\frac{B}{D}, c = -\frac{C}{D} \text{ belgilashlar kiritamiz.}$$

Agar ishoralarga e'tibor bermasak, a , b , c sonlar tekislikning koordinatalar o'qilaridan ajratgan kesmalar uzunligiga tengdir.



2-chizma.



3-chizma.

Haqiqatan ham, x o'qini ($y=0, z=0$) tekislik $M_1(a, 0, 0)$ nuqtada y o'qini $M_2(0, b, 0)$ nuqtada z o'qini esa $M_3(0, 0, c)$ nuqtada kesadi (2-chizma).

Misol. $2x+5y-10=0$ tekislikni yasang.

Yechish: Berilgan tenglamani $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ ko'rinishda yozib olamiz. Demak, tekislik x o'qidan 5 birlik y o'qidan 2 birlik kesib o'tadi va Oz o'qiga parallel bo'ladi (3-chizma).

3. Ikki tekislik orasidagi burchak

Faraz qilaylik P_1 , va P_2 tekisliklar

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ umumiy tenglamalar orqali berilgan bo'lsin. Bu tekisliklar orasidagi burchak ravshanki ularning normal vektorlari $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ orasidagi φ burchakka teng bo'ladi. φ burchakni topish uchun

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|}$$
 formuladan foydalanish mumkin. Demak,

ikki P_1 va P_2 tekisliklar orasidagi burchak ushbu

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formula yordamida topiladi.

5. Tekisliklarning paralellik va perpendikulyarlik sharti

Ushbu $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar berilgan bo'lsin. P_1 va P_2 tekisliklarining paralellik sharti ularning $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ normal vektorlarining kollinearlik shartidan kelib chiqadi. Demak, bu shart

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Xuddi shuningdek, P_1 , va P_2 tekisliklarining perpendikulyarlik sharti ularning $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ normal vektorlarning perpendikulyarlik shartidan kelib chiqadi. $\vec{N}_1$ va $\vec{N}_2$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa $(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0$ bo'lib bundan $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ kelib chiqadi va bu P_1 va P_2 tekisliklarning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar:

1. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday tuziladi?
2. Tekislikning barcha to'liqsiz tenglamalarini keltiring va ularni geometrik talqin qiling
3. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasini chiqaring.
4. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
5. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari qanday bo'ladi?

Mashklar:

1. Ushbu $4x+6y+2z-24=0$ tekislikni yasang.
2. $M(3; -2, 4)$ nuqtadan hamda oz o'qidan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
3. yoz tekislikka paralel va $M(3; -2, 4)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
4. $N(2; 3; -5)$ nuqta orqali o'tib Oy o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.
5. $M_1(2; 3; 1)$ va $M_2(3, 2, 4)$ nuqtalar berilgan M_1 nuqtadan o'tib M_1M_2 vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini tuzing.
6. $2x+3y-5=0$ va $x+y+2z+1=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.
7. Quyidagi juft tekisliklarning o'zaro paralel ekanligi, kesishishi va ustma-ust tushushligini aniqlang.
 - 1) $2x+5y-4z-12=0$ va $7x-5y-4z+8=0$
 - 2) $4x+3y-4z-12=0$ va $8x-6y-4z-6=0$
 - 3) $x+y+z-4=0$ va $3x+3y+3z-12=0$

9-§.Fazodagi to'g'ri chiziq va uning tenglamalari

1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

Ushbu birinchi darajali tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Bu sistemaning har bir tenglamasi fazoda tekislikni ifodalaydi. Fazodagi to'g'ri chizikni shu tekisliklarning kesishish chizigi deb qarash mumkin. Bu tekisliklar kesishish chizig'iga ega bo'lishi uchun

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

nisbatlar bajarilmasligi kerak (aks holda tekisliklar paralel bo'lib qoladi). (1) tenglamalar *fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi* deyiladi.

Misol. Umumiy tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} x + y + z - 3 &= 0 \\ x - 3y - z + 5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ko'rinishda bo'lgan to'g'ri chiziqni yasang.

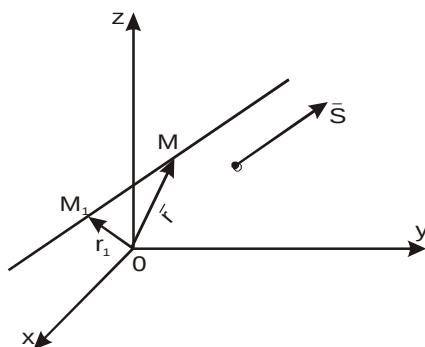
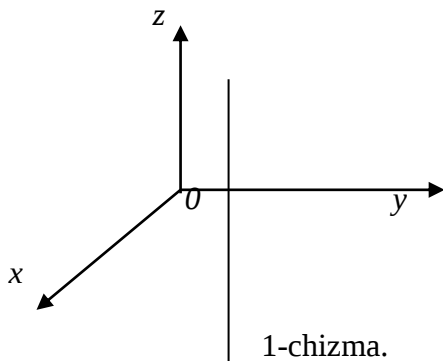
Yechish. To'g'ri chiziqni yasash uchun uning ikki nuqtasini bilish yetarli. Bunda uning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtasini topish oson bo'ladi. To'g'ri chizikning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalari to'g'ri chiziqning *izi* deyiladi. To'g'ri chiziqning Oxy tekislikdagi M_1 izini topish uchun to'g'ri chiziq tenglamasida $z=0$ deymiz. U holda

$$\left. \begin{aligned} x + y - 3 &= 0 \\ x - 3y + 5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

sistemaga kelimiz. Bundan: $x=1$, $y=2$. Demak, M_1 nuqtaning koordinatalari: $x=1$, $y=2$, $z=0$. Xuddi shuningdek

to'g'ri chiziqning Oyz tekislikdagi izini topish uchun $x=0$ deymiz. Bu holda to'g'ri chizig'ning Oyz tekislikdagi izi M_2 ning koordinatalarini topamiz. Ular $x=0, y=1, z=2$ bo'ladi.

Topilgan $M_1 (1; 2; 0)$ va $M_2 (0; 1; 2)$ nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasaymiz (1-chizma).



2. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

Fazoda to'g'ri chiziqning vaziyati biror M_1 nuqta shu to'g'ri chiziqqa paralel bo'lgan $\vec{S}$ vektor bilan to'liq aniqlanadi. To'g'ri chiziqqa paralel bo'lgan $\vec{S}$ vektor, shu

to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi vektori** uning koordinata o'qlariga proyeksiyalari esa to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi koeffitsientlari** deb ataladi.

Faraz qilaylik $M_1 (x_1; y_1; z_1)$ L to'g'ri chiziq ustidagi nuqta, $\vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ esa uning yo'naltiruvchi vektori bo'lsin. L to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M (x, y, z)$ nuqtani tutashtiruvchi $\overline{M_1M}$ vector $\vec{S}$ vektorga paralel bo'lgani uchun (2-chizma) $\overline{M_1M}$ va $\vec{S}$ vektorning mos koordinatalari proposional bo'ladi. Bunda

$\overline{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$ bo'lgani uchun

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \quad (2)$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, L to'g'ri chiziq ustida yotuvchi har qanday M nuqtaning koordinatalari (2) tenglamani qanoatlantiradi. Bu tenglama to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deb ataladi.

3. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Faraz qilaylik, L to'g'ri chiziq $M_1 (x_1; y_1; z_1)$ va $M_2 (x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orqali o'tsin. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzamiz. Shu maqsada to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorini topamiz. Bu vektor uchun M_1 va M_2 nuqtalarni tutashtiruvchi $\overline{M_1M_2}$ vektorini olamiz: $\vec{S} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ Demak, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$, bo'lib, izlangan tenglama (2) ga asosan

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (3)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. Ikki $M_1(1;3;-5)$ va $M_2(1;4;2)$ nuqtalaridan utuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish (3) tenglamadan foydalanib topamiz:

$$\frac{x-1}{1-1} = \frac{y-3}{4-3} = \frac{z+5}{2+5},$$

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}.$$

Bunda $m=0$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq $0x$ o'qiga perpendikulyar bo'ladi.

4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ va } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlarning

birining yo'naltiruvchi vektori $\vec{S}_1 = m_1 \vec{i} + n_1 \vec{j} + p_1 \vec{k}$

ikkinchisiniki esa $\vec{S}_2 = m_2 \vec{i} + n_2 \vec{j} + p_2 \vec{k}$ bo'lgani uchun, bu vektorlar orasidagi burchak berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchakka teng bo'ladi. Bu holda

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{S}_1, \vec{S}_2)}{|\vec{S}_1| |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

bo'ladi. Bu berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning kosinusidir. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari ularning yo'naltiruvchi vektorlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlaridan kelib chiqadi:.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (\text{parallellik sharti})$$

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (\text{perpendikulyarlik sharti})$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

Savollar:

1. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2. To'g'ri chiziqning izi nima?
3. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori nima?
4. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini chiqaring
5. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini chiqaring.
6. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning topish formulasini chiqaring.
7. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini keltirib chiqaring.

Mashqlar:

1.
$$\begin{cases} x + 3y + 3z - 6 = 0 \\ 3x + 3y + 4z - 10 = 0 \end{cases}$$
 to'g'ri chiziqni yasang.
2.
$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$
 to'g'ri chiziq tenglamastni kanonik ko'rinishga keltiring.
3.
$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{5} \text{ va } \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{0}$$
 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

4. $M(3; -4; 2)$ nuqtadan o'tib Oy o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.
5. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(3;4;-2)$, $B(2,-3;1)$ va $C(-2;3;4)$ AD, BK, CL medianalarning kanonik tenglamalarini tuzing.
6. $M(3;-4;1)$ nuqtadan o'tuvchi hamda $\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-3}$ va $\frac{x+5}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$ to'g'ri chiziqlarga parallel tekislikning tenglamasini tuzing.

10-§. Ikkinchi tartibli sirtlar

1. Sirt va uning tenglamasi

Berilgan to'g'ri burchakli dekart kordinatlari sistemasida koordinatalari

$$F(x;y;z)=0 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni **sirt** deb ataladi. (1) tenglama umuman **sirt tenglamasi** deb ataladi. Bu tenglama x, y, z o'zgaruvchilarning briga nisbatan yechiladi deb faraz qilamiz. Masalan, u tenglama z ga nisbata yechilishi mumkin bo'lsin, bu holda

$$z=f(x,y) \quad (2)$$

deb yozish mumkin, bunda $f(x,y)$ – x,y o'zgaruvchilarning funksiyasidir.

Sirtga berilgan yuqoridagi ta'rifga ko'ra sirt tenglamasi deb uch o'zgaruvchili shunday $f(x,y,z)=0$ yoki $z=f(x,y)$ tenglamaga aytiladiki, bu tenglamani sirtga yotgan har bir nuqtaning koordinatalari qanoatlantiriladi. Shunday qilib fazodagi nuqtalarning geometrik o'rni deb qaralgan har qanday sirt, bu nuqtalar koordinatalarini o'zaro bog'lovchi (1) tenglama bilan tasvirlanadi.

Aksincha, $x; y; z$; o'zgaruvchilarni bog'lovchi har qanday (1) tenglama koordinatalari, bu tenglamani qanoatlantiradigan fazodagi nuqtalarning geometrik o'rnini, ya'ni sirtni aniqlaydi.

Fazodagi sirtni tekshirish ikkita asosiy masalani tekshirishga olib kelinadi;

1. Fazodagi biror sirt o'zining umummiy xossasi bilan nuqtalarining geometrik o'rni, deb berilgan. Uning tenglamasini tuzish kerak.

2. Fazodagi biror sirtning tenglamasi berilgan. Bu tenglama yordamida uning xossalari va shaklini tekshirish kerak.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasida o'zgaruvchi x ; y ; z koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 \quad (3)$$

algebraik tenglama bilan tasvirlangan sirtlar **ikkinchi tartibli sirtlar** deb ataladi. Bu tenglamada A, B, C, D, E, F koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak.

2. Sfera

Ma'lumki fazoda markaz deb ataluvchi $O(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni **sfera** deb ataladi. Markazdan sferagacha bo'lgan masofa uning radiusi deyiladi. Ta'rifga ko'ra $O(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan sfera ustidagi ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqttagacha bo'lgan masofa R radiusi bo'lib, u qo'yidagicha hisoblanadi:

$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$ yoki $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$ (5). Endi (5) tenglamada qavslarni ochamiz $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0$. Bu x, y, z koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamadan iborat.

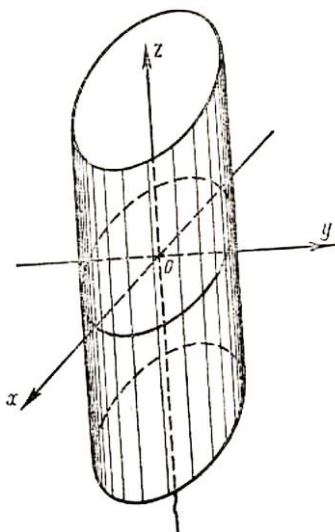
Misol. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$ tenglama sfera tenglamasi ekanligini isbotlang. Uning markazi va radiusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonini qo'yidagicha shakl almashtiramiz: $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 6z + 9) - 14 - 2 = 0$ yoki $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 16$. Bu esa markazi $O(1; -2; -3)$ nuqtada, radiusi esa $R = 4$ ga teng bo'lgan sfera tenglamasidir.

3. Silindrik sirtlar



1-chizma



2-chizma

2. Ushbu

Berilgan l to'g'ri chiziqqa parallel va L chiziqni kesuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan **sirt silindrik sirt** deb ataladi. Bunda L chiziq silindirik sirtning yo'naltiruvchisi, l to'g'ri chiziq esa uning **yasovchisi** deyiladi (1-chizma).

To'g'ri burchakli dekart koordinatlari sistemasida $f(x,y)=0$ (6) tenglama yasovchisi oz o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtни ifoda qiladi. Shunga ko'ra $f(x, z)=0$ tenglama yasovchi oy o'qqa parallel silindrik sirtни va $t(y, z)=0$ esa yasovchisi ox o'qqa parallel bo'lgan silindrik sirtни ifoda qiladi.

Misollar:

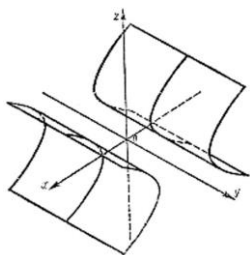
1. Ushbu
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglama bilan aniqlangan sirt **elliptik silindir** deb ataladi. Uning yasovchisi oz o'qiga parallel, yo'naltiruvchisi yarim o'qlari a va b bo'lgan xoy tekislikda yotuvchi ellispdan iborat. Xususiyy holda $a=b$ bo'lsa to'g'ri doiraviy silindirga ega bo'lamiz. Uning tenglamasi $x^2+y^2=a^2$ (8) ko'rinishda bo'ladi (2-chizma).

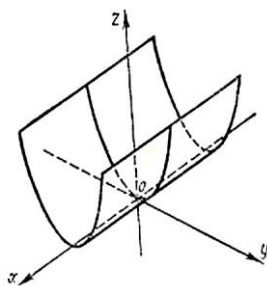
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt **giperbolik silindir** deb ataladi. Bu sirtning yasovchi oy o'qqa parallel, yo'naltiruvchi esa oxz tekislikda joylashgan, haqiqiy yarim o'qi a va mavhum yarim o'qi b ga teng bo'lgan giperboladir (3-chizma).

3. Ushbu $y^2=2pz$ tenglama bilan aniqlangan silindrik sirt **parabolik silindir** deb ataladi. Bu sirtning yasovchisi ox o'qqa parallel bo'lib yo'naltiruvchisi esa paraboldan iborat bo'ladi (4-chizma).



3-chizma.



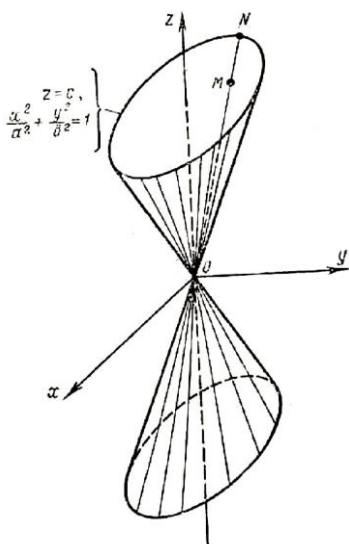
4-chizma.

Esltama. Bizga ma'lumki, fazoda to'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishishdan hosil bo'ladi. Xuddi shuningdek fazoda egri chiziq ikki sirtning kesishish natijasida hosil bo'ladi va u ikki $F(x,y,z)=0$, $f(x,y,z)=0$ tenglamaning berilishi bilan aniqlanadi.

Masalan, S aylana $z=3$ tekislik va $x^2+y^2+z^2=25$ sirtlarning kesishishi natijasida hosil bo'ladi va u

$$\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \quad (11)$$

sistema orqali beriladi.



5-chizma

ahamiyatga ega.

Ikkinchi tomndan, bu aylana $z=3$ tekislik va $x^2+y^2=16$ silindirik sirtlarning kesishish chizig'i deb ham qaralishi mumkin. Bu holda S aylana

$$\begin{cases} z = 3 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \quad (12)$$

sistema orqali beriladi. Ko'rinib turibdiki, (11) va (12) sistemalar teng kuchlidir.

Sirtlarning shakli va ulchamlarini o'rganishda ularni koordinat tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish va keimda hosil bo'lgan chiziqlarning koordinata tekisliklariga proyeksiyalarni qarash muhim

4. Konus sirt

Berilgan L chiziqini kesuvchi va berilgan P nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt *konus sirt* deb ataladi. Bunda L chiziq konus sirtning *yunaltiruvchisi*, konus sirtini tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlarning har biri unng *yasovchisi*, P esa konus sirtning *uchi* deyiladi (5-chizma).

Misol uchun uchi koordinata boshida, yo'naltiruvchi esa $z=c$ tekislikda yotuvchi va yarim o'qlari a va b lar bo'lib

$$\left. \begin{aligned} z &= c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (13).$$

ellipsdan iborat bo'lgan konus sirtini qaraymiz. Bu sirt **ikkinchi tartibli konus** deyiladi.

5. Ellipsoid

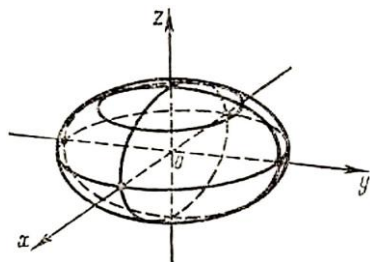
Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (14)$$

tenglama bilan aniqlangan sirt **ellipsoid** deb ataladi. a , b , c sonlar **ellipsoidning yarim o'qlari** deb ataladi. Bu tenglamada $x; y; z$ o'zgaruvchi koordinatalar juft darajada qatnashganligi uchun ellipsoid koordinata tekisliklariga simmetrik joylashgan bo'ladi. Ellipsoidning formasini tasavvur qilish uchun uni koordinata tekisliklar bilan kesamiz. Masalan, (14) ellipsoidni oxy tekislikka parallel bo'lgan $z=h$ tekislik bilan kessak kesimda ellipsis hosil bo'ladi. Haqiqatan

$$\left. \begin{aligned} z &= h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

tenglamalardan z ailikatani chiqarsak



6-chizma.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

chiziq hosil bo'ladi. Bundan

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

hosil bo'ladi. Bu esa yarim o'qlari qavs ichida turgan sonlardan iborat bo'lgan ellipsdan iboratdir. Ellipsoid boshqa koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish natijasida kesimda ellipslar hosil bo'lishini ko'rish qiyin emas. Ellipsoid 6-chizmada tasavirlangan ko'rinishga ega.

Ko'rinib turibdiki, ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kessak ham kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Xusussiy holda $a=b$ bo'lsa (14) tenglama ellipsoidni, $a=b=c$ bo'lsa sferani ifoda etadi.

A. Bir pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (15)$$

Bir pallali giperboloidni $y=0$ tekislik bilan kessak, Oxz tekislikda yotadigan ABCD giperbola hosil bo'ladi. Uning tenglamasi

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

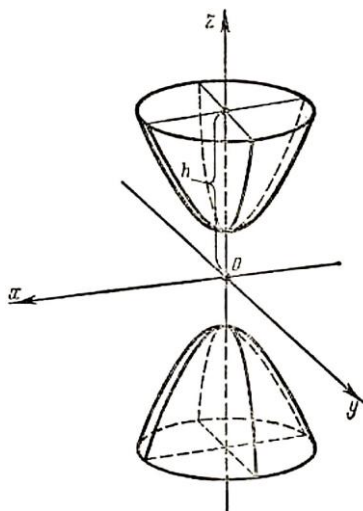
Bir pallali giperbolaidni $z=h$ tekislik bilan kesilsa tenglamasi qo'yidagi ko'inishda bo'lgan BFCG ellips hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \quad (18)$$

Agar $h=0$ bo'lsa eng kichik yarim o'qlara ega bo'lgan o'xy tekislikda yotuvchi ellips hosil bo'ladi.

B. Ikki pallali giperboloid.

Ushbu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ tenglama bilan aniqlanadigan



sirt **ikki pallali giperboloid** deyiladi. Koordinata tekisliklari ikki pallali giperboloid uchun simmetriya tekisliklaridan iborat. Bu sirtning oxz va oyz tekisliklari bilan kesilgan mos ravishda quyidagi giperbollar hosil bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ va } \left. \begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

8-chizma.

Bu giperboloidlar 8-chizmada tasvirlangan.

Agar ikki pallali giperboloidni $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} &= 1 \\ Z &= h \end{aligned} \right\}$$

tenglama bilan ifodalanuvchi ellips hosil bo'ladi.

7. Paraboloidlar

A. Elliptik paraboloid.

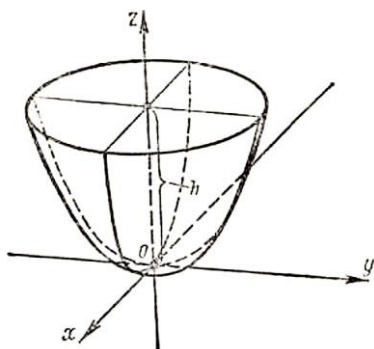
Ushbu

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \quad (20)$$

tenglama bilan aniqlanadigan sirt **elliptik paraboloid** deb ataladi. Bu tenglamada p va q lar bir xil ishorali deb hisoblanadi. Aniqlik uchun $p>0$, $q>0$ deb olinadi.

Elliptik parabolaidni oxz va oyz koordinata tekisliklari bilan kesish natijasida kesimda mos ravishda

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{x^2}{2p} \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{va} \quad \left. \begin{aligned} z &= \frac{y^2}{2q} \\ x &= 0 \end{aligned} \right\}$$



9-chizma

parabolalar hosil bo'ladi. Agar elliptik paraboloidni $z=h$ ($h>0$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} &= 1 \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ellipis hosil bo'ladi. Uning yarim o'qlari $a = \sqrt{2ph}$

$b = \sqrt{2qh}$ bo'ladi (9-chizma).

Agar $p=q$ bo'lsa,

$$2pz = x^2 + y^2 \quad (22)$$

aylanma parabolaidga ega bo'lamiz.

B. Giperbolik parabolaidd

Ushbu

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \quad (23)$$

tenglama bilan aniqlangan sirt **giperbolik parabolaidd** deb

ataladi. Aniqlik uchun $p > 0$, $q > 0$ deb hisoblandi. Bu sirtni oxz tekislik bilan kesilsa, natijada

$$2pz = x^2, y = 0 \quad (24)$$

parabola hosil bo'ladi (10 chizma).

Agar

gipeorbolaidni $x = h$ tekislik bilan kesilsa

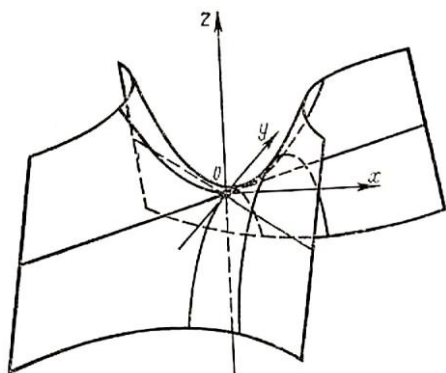
$$\left. \begin{aligned} 2z &= \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \\ x &= h \end{aligned} \right\} \text{yoki}$$

$$\left. \begin{aligned} 2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right) &= -y^2 \\ x &= h \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

parabola hosil bo'ladi.

h ning har xil qiymmatlarda o'yz tekislikka paralel bo'lgan tekisliklarda yotuvchi parabolalar oilasiga ega bo'lamiz.

Gipebolik parabolaiddni $z = h$ tekislik bilan kessak, kesimda



10-chizma.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2h \\ z &= h \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziq haqiqiy o'qi $z=h$ tekislikda, $h>0$ bo'lganda, ox o'qqa parallel giperbolani, $h<0$ bo'lganda, esa haqiqiy o'qi oy uqqa parallel giperbolani

tasvirlaydi. $h=0$ bo'lganda (26) tenglama $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$

ko'rinishni oladi. Bu tenglama esa $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ va

$\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ tenglamalarga ajraladi. Bular koordinatalar

boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamalaridir.

Tekshirish uchun savollar

Savollar:

1. Sirt ta'rifini bering. Sirt tenglamasi umummiy holda qanday ko'rinishga ega bo'ladi?
2. Fazodagi sirtni tekshirish qanday masalalarni tekshirishga olib kelinadi?
3. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
4. Sfera ta'rifini bering va tenglamasini keltirib chiqaring?
5. Silindirik sirtning ta'rifini bering.
6. Elliptik silindr deb qanday sirtga aytiladi?
7. To'g'ri doiraviy silindr tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. Giperbolik silindr tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
9. Parabolik silindr tenglamasini yozing.
10. Fazoda chiziq qanday hosil qilinadi?

11. Konus sirt ta'rifini bering. Uning yo'naltiruvchisi, yasovchisi va uchi deb nimalarga aytiladi?
12. Ikkinchi tartibli konus sirtining ta'rifini bering. Uning tenglamasi qanday keltirib chiqariladi?
13. Ellipsoid tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
14. Bir pallali giperboloid tenglamasini yozing va uni tekisliklar yordamida kesish natijasida hosil bo'ladigan chiziqlar nomini ayting.
15. Ikki pallali giperboloid qanday tenglam bilan aniqlanadi? Uni $z=h$ tekislik bilan kessak kesimda qanday chiziq hosil bo'ladi?
16. Elliptik paraboloid deb qanday tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga aytiladi? Uni kooridanta tekisliklari bilan kesganda hosil bo'ladigan chiziq tenglamalarini chiqaring.
17. Giperbolik paraboloid qanday tenglama bilan aniqlanadi? Uni $y=0$, $x=h$, $z=h$ tekisliklar bilan kessak kesimda qanday chiziqlar hosil bo'ladi?

Mashqlar.

1. $A(1;2;-1)$ nuqtadan 2 birlik Oxz tekislikdan 5 birlik uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni tenglamasini tuzing.
2. $A(7;-3;1)$ nuqtadan va
$$\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z^2+9) &= 16 \\ 4x + 4 - 2 - 9 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{aylanadan o'tuvchi}$$
 sferik sirtning tenglamasini tuzing, shuningdek markazining koordinatalari va radiusini toping.
3.
$$\left. \begin{aligned} (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 &= 36 \\ z &= 3 \end{aligned} \right\} \text{tenglamalar}$$
 birgalikda qanday chiziqni tasvirlaydi?

4.
$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - z &= 0 \\ z - x + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$
 sirtlarning kesishishidan hosil bo'lgan chiziqning Oxy tekisliklaridagi proyeksiyasini toping.
5. Ushbu $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{16} = 1$ ellipsoidning $z=0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; x=0, y=0$ tekisliklar bilan kesimdan hosil qilingan kesmalarni toping.
6. $2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 4x + 6z - 5 = 0$ sirtning ko'rinishini aniqlang.
7. $3x^2 + 4y^2 - 12x^2 + 8y + 17z = 0$ sirtning ko'rinishini aniqlang.
8. $x^2 - y^2 = 8z$ tenglama bilan berilgan sirtning ko'rinishini aniqlang. Bu sirtning koordinata tekisliklari bilan hamda koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesilganda hosil bo'lgan kesimlarni aniqlang.

ADABIYOTLAR

1. Виленкин Н.Я. ва бош. Математика. –М.: Просвещение. 1985.
2. Ражабов Ф., Нурметов А. Аналитик геометрия ва чизикли алгебра. –Т.: Ёшитувчи. 1990.
3. А.В.Погорелов. Аналитик геометрия. –Т.: Ёшитувчи. 1983.
4. Шнейдер, А.И.Слуский, А.С.Шумов. Краткий курс высшей математики. –М.: Высшая школа. 1972.
5. Ильин В.И., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. –М.: Наука. 1988.
6. Иброқимов М. Математикадан масалалар тўплами. –Т.: Ёшитувчи 1994.
7. Ёбулов В.Ў. Раъамли автоматлар, алгоритмлар. –Т.: Ёшитувчи, 1980.
8. Виленкин Н.Я. Задачник-практикум по математике. –М.: Просвещение. 1977.
9. Очилова Х., Назаров Н. Геометриядан масалалар тўплами. –Т.: Ёшитувчи, 1983.
10. Шодиев Т. Аналитик геометриядан ўалланма. –Т.: Ёшитувчи, 1973.
11. Иззатуллаев Н. Олий математика. Ёшув ўалланма. СамДУ 2002.
12. Иззатуллаев Н., Мусаев А. Олий математика. Маърузалар курси. СамДУ 2002.
13. Постушенко А.С. Высшая математика. –М.: Высшая школа, 2002.
14. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. –М.: Физматлит, 2000.

MUNDARIJA

Kirish	3
Analitik geometriya elementlari	
1-§. To‘g‘ri chiziqdan koordinatalar metodi.	4
2-§. Tekislikda koordinatalar metodi.	13
3-§. Chiziq tenglamalari	24
4-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.	40
5-§. Fazoda koordinatalar metodi.	56
6-§. Vektor fazolar.	60
7-§. Chiziqli akslantirishlar	75
8-§. Tekislik tenglamalari.	87
9-§. Fazodagi to‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari	94
10-§. Ikkinchi tartibli sirtlar.	100
Adabiyotlar	113