

Кўп ўлчовли фазода мунтазам кўпёқлилар ва уларнинг баъзи бир хоссалари

Отабек +ўзиев,
Эркин Жумаев

Кўп ўлчовли геометрия ғоялари билан танишишнинг биринчи босқичида бизни қуйидаги саволлар кизиктирди: учдан ортиқ фазо ўлчами нима, бу фазонинг реал моделлари мавжудлиги, оддий геометриянинг аналогси сифатида бундай фазо геометриясини қанчалик яшаш мумкин ва уч ўлчовлини тўрт ўлчовли фазо геометриясидан фарқлари нималардан иборат? Хақиқатан, тўрт ўлчовли евклид фазо нуқталарини оддий икки ёки уч урнида тўртта декарт координаталарига эга фазо сифатида тасаввур этиш қийин эмас. Ундан ташқари n -ўлчовли евклид фазосини ўрганиш n -ўлчовли фазонинг $n=3$ даги хусусий ҳоли бўлган оддий фазо геометрияси қонун-қоидаларини урганишда жуда фойдали. Жуда кўп фактларни умумий кўринишда исботлаш икки ўлчовли ва уч ўлчовли фазонинг ҳар бир ҳоли учун уларни такрорлашдан халос этади.

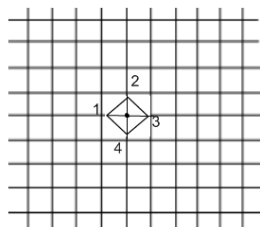
Геометрик терминологиядан фойдаланиш алгебра ва анализнинг айрим масалаларини текширишни соддалаштиради. Бунда, агар геометрик жиҳатдан фойдаланилса, уларнинг ифодаси фақатгина соддалашмай, балки муаммонинг ечими тез ва осон топилади. Масалан, алоқа назарияси ва чизикли дастурлашда икки абонентни ўлчашда, энг кўлай усулни танлашда, энг қисқа йўл каби барча ҳолларда бир неча номаълумлар билан боғланган масалаларни ечишда зарур ғоялар ёрдамга келади.

Кўп ўлчовли фазода содда геометрик фигуралардан бири бизда қаралган эди. Бу уч ўлчовли фазодаги кубга ўхшаш фигура тўрт ўлчовли фазода кубдир.

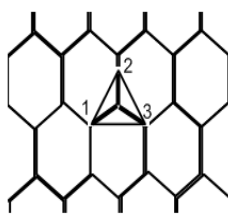
Ҳар бир $n=3,4,5,\dots$ сони учун n томони мунтазам кўпбурчак мавжуд. Текисликда n та тенг кесмалар олиб улардан мунтазам кўп бурчаклар тузиш мумкин. Учбурчак, квадрат, бешбурчак, олтибурчак ясалади. Мунтазам етти бурчак яшаш имкони бўлмади. 1786 йилда немис математиги Гаусс қайси мунтазам кўпбурчакларни циркул ва линейка ёрдамида яшаш мумкинлигини, баъзиларини мумкин эмаслигини аниқлаган. У аниқлаган қонун математиканинг иккита йирик тармоғи геометрия ва сонлар назариясини ўз ичига олади. У қуйидагича шархланади: Циркул ва линейка билан мунтазам n -бурчак яшаш мумкин фақат ва фақат шу ҳолдаги, агар унинг $n=3$ томонлар сонини кўпайтмада такрорланмайдиган ягона истисно кўпайтувчилар 2 та қаррала; кўпайтувчилар таркибида Π сони қатнашиши мумкин, унда ясалган кўпбурчак томонини иккилантириш иложи бўлмайди, ҳар бир форманинг содда сон бўладиган содда кўпайтувчига ажратиш мумкин.

Форманинг содда сони $2^{2^n} + 1$ формула билан ифодаланади. Улардан биринчи бештаси: 3, 5, 17, 257, 65537. $2^{2^6} + 1$ содда сон эмас. Буни Эйлер исботлаган.

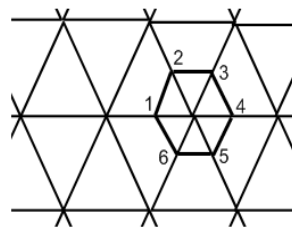
Биз осонгина мунтазам кўпбурчак билан қопланган текисликни кўз оолдимизга келтиришимиз мумкин. Текисликни кўпбурчак билан шундай тўлдириш керакки, очиқ жойлар қолмасин ва улар бир-бирининг устига тушмасин. Энг яққол ҳол 1- расмда тасвирланган. Бошқа ҳоллар бўлиши ҳам мумкин, улар 2 ва 3 -расмларда тасвирланган.



1 - расм



2 - расм



3 - расм

Бундай йўл билан ҳосил килинган геометрик фигура текисликда тур деб аталади. Турни белгилаш учун шлефли белгисидан фойдаланамиз. Демак, 1-расм учун шлефли белгиси $\{4;4\}$ деб ёзилади. Бу турни мунтазам тўртбурчаклардан тузилганлиги (биринчи рақам) ҳар бир уч атрофидаги тўртта бурчак (иккинчи рақам). Шунга ўхшаш, 2 ва 3- расмлардаги турлар учун шлефли белгиси $\{6;3\}$ ва $\{3;6\}$. Шлефли белгисининг умумий кўриниши $\{p;q\}$ бу ерда p ва q мос равишда, турни p томонли кўпбурчакдан ва ҳар бир нуқта атрофидаги бурчаклар сони q та.

Т а ь р и ф. 1.1 тур мунтазам дейилади, агар у мунтазам қирра ва фигуранинг мунтазам учларига эга бўлса. Бу ерда қирра деганда, иккита кўшни кўпбурчакнинг умумий томони тушунилади. Битта учидан чиқувчи ва томонларнинг ўртасини туташтиришдан ҳосил бўлган фигурани- «бек»ни ҳосил қиламиз. 1,2 ва 3- расмларда улар рақамлар билан белгиланган.

Савол туғилади. Текисликда қандай мунтазам турлар мавжуд? Бошқача қилиб айтганда, p ва q лар қандай қийматларни қабул қилади? Тур таърифига кўра, унинг қуйидаги мавжуд бўлиш шартларини бериш мумкин:

1. Битта учга эга бўлган барча бурчаклар йиғиндиси 2π га тенг, демак, ҳар бир бурчак $\frac{2\pi}{q}$ га тенг.

2. Мунтазам кўпбурчакнинг ҳар бир ички бурчаги, иккинчи томони билан $\frac{\pi(p-2)}{p}$ га тенг. Бундан:
$$\frac{\pi(p-2)}{p} = \frac{2\pi}{q}; \quad pq - 2q - 2p = 0;$$

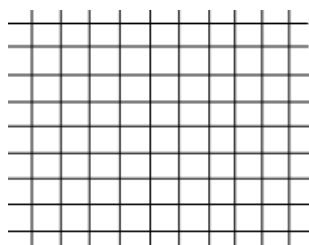
$$(pq - 2p) - (2q - 4) + 4 = 0; \quad (q-2)(p-2) = 4.$$

$(q-2)(p-2) = 4$ шар p ва q лар каноатлантириши керак. $q-2$ ва $p-2$ сонлари натурал, чунки p ва q натурал ва $p \geq 3, q \geq 3$ уларнинг кўпайтмаси 4 га тенг

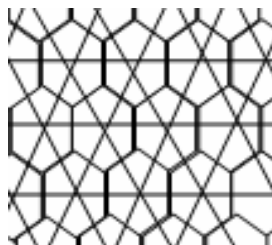
Демак, текисликда мунтазам турларнинг фақат 3 та тури мавжуд: $\{4;4\}$; $\{3;6\}$; $\{6;3\}$.

Т а ь р и ф. $\{p=q\}$ тур қирраларининг ўрта перпендикулярларидан иборат бўлган тур иккиламчи тур дейилади.

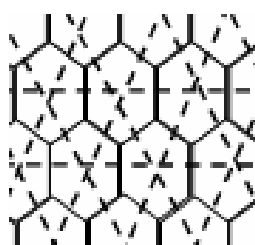
4,5,6-расмларда $\{4;4\}$; $\{3;6\}$; $\{6;3\}$ турлар учун иккиламчи турларни яшаш курсатилган. Уларга мос Шлефли белгилари $\{4;4\}$; $\{3;6\}$; $\{6;3\}$ кўринишда бўлади.



4-расм

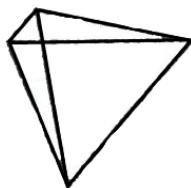


5-расм

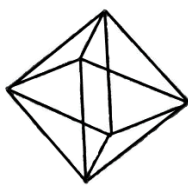


6-расм

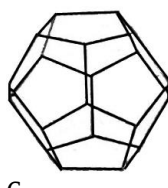
Мунтазам турлар хакидаги масала кўпёқлилар билан боғлиқ. Текисликни бирор мунтазам кўпбурчаклар билан қоплаш мумкин бўлганидек, фазони ҳам қандайдир мунтазам кўпёқлилар билан тўлдириш мумкин. Турлар ва кўпёқлилар орасидаги боғланишни биринчи бор кўплар кузатган q қуйидаги занжирни тузади: бир карра синган чизиклар бу бузилган кўпбурчак, кўпбурчак билан тўлдирилган текислик бузилган кўпёқли, кўпёқлилар эса кўпўлчовли геометрик фигурасининг вакилидир.



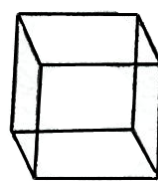
6 - a



6 - b



6 - c



6 - d



6 - e

Биз текисликни ҳар бир учиди тўртта квадрат ётадиган квадратлар билан қоплаш мумкинлигини кўриб чиқдик. Агар биз квадратни жойлаштиришга шундай ҳаракат қилсакки, унда ҳар бир учдан уларнинг фақат учтаси чиқсин, унда 6 та квадратдан фойдаланиш мумкинлиги кўринади. Кубга эга бўламиз.

$\{3;6\}$ контур шундай мисолки, ҳар бир учини 6 та тенг томонли учбурчаклар жойлашадиган қилиб текисликни тўлдириш мумкин.

Агар $3;4$ ёки 5 та учбурчакдан фойдалансак нима ҳосил бўлади. Бунда фазовий ёпиқ фигура ҳосил бўладими? Шу мақсадда мунтазам беш бурчаклардан фойдаланиш мумкинми?

Демак, биз кўз ўнгимизда турган қуйидаги саволларга жавоб беришимизга тўғри келади. Мунтазам кўпёқлиларнинг канчаси мавжуд? қайси мунтазам кўпбурчаклар бу (фигуранинг) жисмни ёқлари бўлиши мумкин? Бу жисмнинг мавжудлик шарти кўринишни олади?

Агар икки қандай ўлчовли фазода (текисликда) чексиз кўп мунтазам кўпбурчаклар мавжуд бўлса, унда уч ўлчовга ўтганда, бу ҳолат тубдан ўзгаради. Уч ўлчовли фазода фақат бешта мунтазам кўпёқлилар мавжуд. Уларни фазовий фигуралар - Платон жисмлари дейилади, чунки улар эраминдан олдинги V асрда яшаган грек (юнон) математиги Платоннинг соф фалсафасида муҳим роль ўйнайди. Булар мунтазам тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр ва икосаэдр.

Бироқ, додекаэдрнинг бешинчи тартибли симметрия хоссаси кристаллография қонунларига зид бўлса ҳамки, мунтазам додекаэдр тушунчасини греклар олтингугурт колчедан кристаллардан олинган деган тахминлар бор. Додекаэдрнинг ёқлари бўлган колчеданнинг кристалланиш кўринишидаги ҳар бир беш бурчак фақат тўрттадан тенг қирраларига эга. Биринчи бор мунтазам додекаэдр аниқ тасвири теэтраэдрга мансуб. Бу кўпёқлилар Этрис маданиятида диний аҳамиятга эга бўлган. Платон мунтазам пирамидани, октаэдрни, кубни, икосаэдрни қуйидаги тўртта элемент билан боғлайди. Олов, ҳаво, ер, сув билан додекаэдрни эса бутун коинот формаси шаклида кўриб чиққан. Мунтазам кўпёқлилар табиатан турли бўлиб, табиатнинг кўп ҳодисалари шу билан боғлиқ эканлиги ажабланарли эмас.

Масалан, Кеплер қуёш системаси планеталари орасидаги масофани сфера ичига ички чизилган ва сфера атрофида ташқи чизилган мунтазам кўпёқлиларга кўра аниқлашга ҳаракат қилган. У қуйидагича йўл тутган. Сатурн, Юпитер, Марс, Ер, Венера ва Меркурий олти планетага мос олти сфера: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр ва икосаэдрга ажратган. Буюк кашфиёт эгаси онгли равишда шундай кетма-кетликни танлайдики, Кеплер планета хоссалари орасида ва мунтазам жисм хоссасаларига мос паралеллар ўтказишга уринган.

Коинотнинг математик уйғунлиги ҳанузгача бизни лол қолдириб келса ҳам, ҳақиқатни биз тўғри формада эмас, динамика қонунларида излаймиз.

**Отабек +ўзиев,
Эркин Жумаев.**