

O'zbekiston respublikasi Oliy va o'rta maxsus
ta'lim vazirligi

Alisher Navoiy nomli Samarqand davlat universiteti
Fizika-matematika fakulteti

Matematik fizika va funksiyalar nazariyasi kafedrası

Abdullayev J.I., Shermatov M.H.

Fizika-matematika fakulteti talabalari uchun
"Funksional analiz"
fanidan uslubiy qo'llanma

I qism

S A M A R Q A N D - 2008

Mazkur uslubiy qo'llanma SamDUning o'quv uslubiy kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

Tuzuvchilar:

1. Abdullayev Janikul Ibragimovich. Fizika-matematika fanlari doktori. SamDU fizika-matematika fakulteti, "Matematik fizika va funksiyalar nazariyasi" kafedrasi professori.
2. Shermatov Mamarajab Himmatovich. Fizika-matematika fanlari nomzodi. SamDU fizika-matematika fakulteti, "Matematik fizika va funksiyalar nazariyasi" kafedrasi dotsenti.

Taqrizchilar:

1. Ikromov Isroil Akramovich. Fizika-matematika fanlari doktori. SamDU fizika-matematika fakulteti, "Matematik analiz" kafedrasi mudiri, professor.
2. Arziqulov Abduxoliq Ulashovich. Fizika-matematika fanlari nomzodi. SamDU fizika-matematika fakulteti, "Matematik analiz" kafedrasi dotsenti.
3. Yaxshiboyev Maxmadiyor Umirovich. Fizika-matematika fanlari nomzodi. Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali, "Tabiiy fanlar" kafedrasi mudiri, dotsent.

Ushbu uslubiy qo'llanma universitetlarning "matematika", "mexanika" va "informatika" yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun ishchi dasturga muvofiq tuzilgan.

K I R I SH

Funksional analiz - matematik analiz, geometriya va chiziqli algebraning g'oya va usullarini cheksiz o'lchamli fazolar uchun umumlashtiruvchi fan hisoblanadi. Hozirgi kunda funksional analizning g'oya, konsepsiya, usul va tushunchalari matematikaning barcha sohalari tomonidan tan olingan. So'nggi yillarda differensial tenglamalar, hisoblash usullari, matematik dasturlashning talab va ehtiyojlariga javoban funksional analizning yangi chiziqli bo'lmagan tarmog'i paydo bo'ldi. Zamonaviy matematikaning bu yo'nalishi amaliyotchilar va injenerlarning o'sib kelayotgan ehtiyojlarining bir qismini qondiradi.

Ushbu uslubiy qo'llanma "Funksional analiz" fanidan ishchi dasturga moslab tuzilgan bir ishlanmadir. Uslubiy qo'llanma universitetlarning matematika, mexanika va amaliy matematika bakalavriyat yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallab yozilgan.

Uslubiy qo'llanmaning asosiy maqsadi bo'lg'usi mutaxassislarni funksional analizning asosiy tushunchalari va usullari bilan tanishtirish, hamda ularda integral tenglamalar haqida umumiy tasavvur paydo qilishdan iborat.

Uslubiy qo'llanmani o'qish jarayonida talabalar o'zlarining matematik analiz, chiziqli algebra va geometriyadan olgan bilimlarini to'ldiradilar, hamda ularni funksional fazolarga moslab qo'llaydilar, ya'ni mustahkamlaydilar. Talabalar chiziqli funksional va operator tushunchalari bilan tanishadilar va ularning xossalari o'rganadilar. Cheksiz o'lchamli funksional fazolarni o'rganish jarayonida o'quvchilar funksional analizning kuchli va nozik usullarini tushunishga biroz qiyinaladilar, lekin tushunib yetganlaridan keyin o'zlarida ilmga undovchi qandaydir ichki kuch sezadilar. Bu kuch ta'siri ularda cheksiz o'lchamli fazolarda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lavermasligi va birlik sharning kompakt bo'lmasligini tushunib yetganda namoyon bo'ladi.

Ushbu uslubiy qo'llanma SamDUda "Funksional analiz" fanidan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar olib boruvchi professor-o'qituvchilarning ko'p yillik ish tajribalari asosida yozilgan.

Uslubiy qo'llanma 2 bob va 10 paragrafdan iborat. Har bir paragraf uchun ta'rif, teorema, lemma va formulalar alohida nomerlangan. Masalan, 2.3-teorema - bu 2-paragrafdagi 3-nomerli teorema degani. (1.8) belgilash esa 1-paragrafdagi 8-raqamli formula ekanligini anglatadi. $\triangle$ - belgisi teorema yoki lemma isboti tugaganligini bildiradi. Har paragraf oxirida mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar berilgan. Har bobdan so'ng talabalar o'z bilimlarini tekshirishlari uchun 50 tadan test savollari keltirilib, javoblari ham berilgan.

Uslubiy qo'llanma birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklarni jabdullaev@mail.ru yoki mshermatov@rambler.ru adreslariga jo'natishlaringizni so'raymiz.

I bob. Metrik fazolar

Bu bob metrik fazolar va undagi asosiy tushunchalarni bayon qilishga bag'ishlangan. Bu bob 4 paragrafdan iborat.

Birinchi paragrafda metrik fazo ta'riflanib, ularga ko'plab misollar keltirilgan. R^n to'plamda har xil metrikalar kiritilgan. Metrikaning uchburchak tengsizligini isbotlashda Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklaridan foydalanilgan. O'z navbatida bu tengsizliklar ham o'z isbotlarini topgan. Koshi-Bunyakovskiy, Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasi ham keltirilgan. Bundan tashqari gomeomorf va izomorf metrik fazolar ta'riflanib ularga misollar keltirilgan.

2-paragraf esa metrik fazolarda yaqinlashish va undagi ochiq va yopiq to'plamlarning xossalari bag'ishlangan. Ochiq va yopiq to'plamlarni ta'riflash uchun biz, yordamchi tushunchalar - urinish nuqta, limitik nuqta, yakkalangan nuqta va ichki nuqta ta'riflarini berganmiz. Keyin yopiq va ochiq to'plamlarning xossalari isbotlangan. Jumladan metrik fazoda to'plam ochiq (yopiq) bo'lishligining yetarli va zarur shartlari keltirilgan. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'riflanib unga misollar keltirilgan. Metrik fazoning hamma yerida zich va hech yerda zichmas to'plamlar ta'riflanib ularga misollar qaralgan. R^n , R_p^n , $C[a, b]$, $C_p[a, b]$, ℓ_2 fazolarning separabel metrik fazolar bo'lishligi ko'rsatilgan. Separabel bo'lmagan metrik fazoga misol keltirilgan. Sonlar o'qidagi ochiq to'plamlarning strukturasi berilgan.

3-paragraf to'la metrik fazolarga bag'ishlangan. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar orasidagi bog'lanish ochib berilgan. R^n , R_1^n , R_∞^n , $C[a, b]$, ℓ_2 metrik fazolarning to'laligi isbotlangan. $C_2[a, b]$ ning to'la bo'lmagan metrik fazo ekanligi isbotlangan. Metrik fazoning to'la bo'lishligi haqidagi ichma-ich joylashgan yopiq sharlar haqidagi teorema hamda Ber teoremasi isbotlangan. Har qanday metrik fazoni to'ldirish mumkinligi haqidagi teorema isboti bilan berilgan. Metrik fazolarda kompakt va nisbiy kompakt to'plam tushunchalari berilgan. Asosiy funksional fazolar $C[a, b]$ va ℓ_p da kompakt (nisbiy kompakt) lik kriteriylari keltirilib isbotlangan. Kompakt (nisbiy kompakt) va kompakt bo'lmagan (nisbiy kompakt bo'lmagan) to'plamlarga misollar keltirilgan.

4-paragraf qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbirlariga bag'ishlangan. To'la metrik fazolarda har qanday qisuvchi akslantirishning yagona qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi isbotlangan. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining R^n metrik fazodagi algebraik tenglamalar sistemasiga tadbirig'i bayon qilingan. Bundan tashqari chiziqli va chiziqli bo'lmagan integral tenglamalarni yechishda qisuvchi akslantirishlar prinsipidan qanday foydalanish mumkinligi bayon qilingan.

1-§. Metrik fazolar va ularga misollar

Reja:

1. Metrik fazo ta'rif va unga misollar.
2. Koshi-Bunyakovskiy, Gyolder, Minkovskiy tengsizliklari.
3. Uzluksiz akslantirishlar.

Tayanch iboralar: Masofa, metrik fazo, akslantirish, izometriya.

Analizdagi eng muhim amallardan biri bu limitga o'tish amalidir. Bu amalning asosida sonlar o'qidagi ikki nuqta orasidagi masofa tushunchasi yotadi. Analizda kiritilgan ko'pgina fundamental tushunchalar sonlar o'qining algebraik xususiyatlariga bog'liq emas. Haqiqiy sonlar haqidagi tasavvurimizni to'plam ma'nosida umumlashtirib, metrik fazo tushunchasiga kelimiz. Metrik fazo tushunchasi hozirgi zamon matematikasida muhim o'rinni egallaydi.

1.1-ta'rif. *Bo'shmas X to'plamning ixtiyoriy x va y elementlar juftiga aniq bir manfiymas $\rho(x, y)$ son mos qo'yilgan bo'lib, bu moslik*

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriklik aksiomasi),

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (uchburchak aksiomasi)

shartlarni qanoatlantirsa, ρ ga X dagi masofa yoki metrika deb ataladi. (X, ρ) juftlik metrik fazo deyiladi.

Odatda metrik fazo, ya'ni (X, ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda $(X, \rho_1), (X, \rho_2), \dots, (X, \rho_n)$ metrik fazolar mos ravishda $X_1, X_2, \dots, X_n$ harflari bilan belgilanadi.

Endi metrik fazoga bir nechta misollar keltiramiz.

1.1. X qandaydir bo'shmas to'plam bo'lsin va har bir x, y elementlar juftiga

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y, \\ 1, & \text{agar } x \neq y \end{cases}$$

qonuniyat bo'yicha son mos qo'yilsin. Ravshanki, $\rho(x, y)$ metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Bu metrika diskret metrika deb ataladi. Hosil bo'lgan metrik fazo yakkalangan nuqtalar fazosi deb ataladi.

1.2. Haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty; \infty)$, $\rho(x, y) = |x - y|$ masofa bo'yicha metrik fazo tashkil qiladi va bu metrik fazo ham R harfi bilan belgilanadi.

1.3. Ixtiyoriy n ta $x_1, x_2, \dots, x_n$ haqiqiy sonlarning tartiblangan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ guruhlaridan tashkil bo'lgan to'plamda har bir x va y lar jufti

(x, y) ga

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \quad (1.1)$$

manfiymas sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo n - o'lchamli arifmetik Evklid fazo deb ataladi. Endi (1.1) formula bilan aniqlangan ρ moslik metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz:

1)

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

dan 1) aksiomaning bajarilishi bevosita ko'rinib tuiribdi.

2)

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} = \rho(y, x).$$

Endi 3) aksioma bajarilishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy uchta $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ va $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nuqtalar uchun uchburchak aksiomasi

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2} \quad (1.2)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo'ladi va (1.2) tengsizlik

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (1.3)$$

ko'rinishni oladi. Ushbu

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

ayniyatni e'tiborga olsak,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (1.4)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. (1.4) *Koshi - Bunyakovski* tengsizligi deb ataladi. U holda biz

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \\ &+ 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bu munosabatdan (1.3) tengsizlik bevosita kelib chiqadi. Demak, uchburchak aksiomasi o'rinli ekan. Hosil bo'lgan metrik fazo R^n simvol bilan belgilanadi.

1.4. Yana n — ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan tuzilgan to'plamni qaraymiz va unda masofani

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \quad (1.5)$$

formula vositasida aniqlaymiz. Hosil bo'lgan metrik fazo R_1^n simvol bilan belgilanadi. Bu moslik metrikaning 1)-3) aksiomalarini qanoatlantirishini o'quvchi mustaqil tekshirib ko'rishi mumkin.

1.5. Yuqoridagi 1.3 va 1.4 misollarda keltirilgan to'plamda elementlar orasidagi masofani

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k| \quad (1.6)$$

formula bilan aniqlaymiz. Metrika aksiomalarining bajarilishi oson tekshiriladi. Hosil bo'lgan metrik fazo R_∞^n simvol bilan belgilanadi.

1.6. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va barcha uzluksiz funksiyalardan tashkil bo'lgan to'plamni $C[a, b]$ simvol bilan belgilaymiz. Bu to'plamda

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| \quad (1.7)$$

akslantirish masofa aniqlaydi. Masofaning 1)-3) aksiomalari bevosita tekshiriladi (o'quvchiga mustaqil tekshirish uchun tavsiya etiladi). Bu metrik fazo analizda muhim ahamiyatga ega bo'lib, u ham to'plam kabi $C[a, b]$ simvol bilan belgilanadi.

1.7. Haqiqiy sonlardan tuzilgan va

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan to'plamni ℓ_2 simvol bilan belgilaymiz. Bu to'plamda masofa

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} \quad (1.8)$$

formula bilan aniqlanadi. Har bir $x, y \in \ell_2$ elementlar jufti uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty$$

shartlar bajarilgani uchun va $(x_k \pm y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$ elementar tengsizlikdan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Endi (1.8) formula bilan aniqlangan ρ moslikning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Ravshanki, 1) va 2) aksiomalar bajariladi. Uchburchak aksiomasi esa

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - z_k)^2} \quad (1.9)$$

ko'rinishga ega. Yuqorida zikr etilganlarga ko'ra (1.9) tengsizlikdagi qatorlarning hammasi yaqinlashadi. Ikkinchi tomondan esa 1.3— misolda isbotlanganiga ko'ra har bir n da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - z_k)^2}$$

tengsizlik o'rinli. Oxirgi tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ limitga o'tsak, (1.9) tengsizlikning to'g'riligi isbotlanadi, ya'ni uchburchak aksiomasi o'rinli.

1.8. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va barcha uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamida

$$\rho_2(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

formula yordamida masofa aniqlash mumkin. Hosil bo'lgan metrik fazo $C_2[a, b]$ simvol bilan belgilanadi va uzluksiz funksiyalarning o'rtacha kvadratik metrikali fazosi deb ataladi. Ravshanki, ρ_2 moslik metrikaning 1) va 2) aksiomalarini qanoatlantiradi. Uchburchak aksiomasining bajarilishi Koshi - Bunyakovskiyning ushbu

$$\left(\int_a^b x(t) \cdot y(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t) dt \cdot \int_a^b y^2(t) dt \quad (1.10)$$

integral tengsizligidan bevosita kelib chiqadi. Koshi - Bunyakovskiy tengsizligi esa osongina tekshirish mumkin bo'lgan

$$\left(\int_a^b x(t) \cdot y(t) dt \right)^2 = \int_a^b x^2(t) dt \cdot \int_a^b y^2(t) dt - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [x(s)y(t) - y(s)x(t)]^2 ds dt$$

ayniyatga asoslangan.

1.9. Yana $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda ushbu

$$\rho_1(x, y) = \int_a^b |(x(t) - y(t))| dt \quad (1.11)$$

formula bilan aniqlangan akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo $C_1[a, b]$ simvol bilan belgilanadi. ρ_1 akslantirish metrikaning 1)-3) aksiomalarini qanoatlantirishini tekshirish, o'quvchiga mustaqil mashq sifatida tavsiya qilinadi.

1.10. Barcha chegaralangan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ haqiqiy sonlar ketma - ketliklaridan iborat to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi har bir x va y elementlar juftiga

$$\rho(x, y) = \sup_{1 \leq k \leq \infty} |x_k - y_k| \quad (1.12)$$

sonni mos qo'yuvchi ρ akslantirish masofa aniqlaydi. Hosil bo'lgan metrik fazo m harfi bilan belgilanadi. O'quvchi uchun 1)-3) aksiomalarining bajarilishini tekshirish qiyin emas.

1.11. n - ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlaridan iborat R^n to'plamda har bir $p \geq 1$ son uchun

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.13)$$

formula bilan aniqlangan ρ_p moslik masofa aniqlaydi va hosil bo'lgan metrik fazo R_p^n simvol bilan belgilanadi. Bu misolda ham 1) va 2) aksiomalarining bajarilishini tekshirish qiyin emas. Shuning uchun 3) aksiomaning bajarilishini tekshirish yetarli. Qaralayotgan to'plamdan ixtiyoriy uchta $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ nuqtalarni olib $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ belgilashlarni kiritsak, $x_k - z_k = a_k + b_k$ bo'ladi va natijada $\rho_p(x, z) \leq \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z)$ uchburchak tengsizligi

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.14)$$

ko'rinishni oladi. Hosil bo'lgan (1.14) tengsizlik Minkovskiy tengsizligi deb ataladi. Agar $p = 1$ bo'lsa, Minkovskiy tengsizligining bajarilishi ko'rinish turibdi (chunki, yig'indining moduli modullar yig'indisidan oshmaydi), shuning uchun $p > 1$ deb hisoblaymiz.

Minkovskiy tengsizligining isboti Gyolder tengsizligi deb nomlanuvchi

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.15)$$

tengsizlikka asoslangan. Bu yerda $p > 1$ va $q > 1$ sonlar

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.16)$$

shart bilan bog'langan. (1.16) dan quyidagi tengliklar kelib chiqadi

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad p = \frac{q}{q-1}.$$

Ta'kidlash lozimki, (1.15) tengsizlik $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ va $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ nuqtalar uchun bajarilsa, u ixtiyoriy λ va μ sonlarda $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ va $\mu b = (\mu b_1, \mu b_2, \dots, \mu b_n)$ nuqtalar uchun ham bajariladi va aksincha. Ya'ni (1.15) bir jinsli tengsizlikdir. Shunday ekan, (1.15) tengsizlikni

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^q = 1 \quad (1.17)$$

shartni qanoatlantiruvchi a va b nuqtalar uchun isbotlash yetarli. U holda (1.15) tengsizlik (1.17) shart bajarilganda

$$\sum_{k=1}^n |a_k \cdot b_k| \leq 1 \quad (1.18)$$

ko'rinishni oladi. (1.17) shartda (1.18) tengsizlikni isbotlash uchun (ξ, η) tekislikda $\eta = \xi^{p-1}$ ($\xi > 0$) yoki $\xi = \eta^{q-1}$ ($\eta > 0$) tenglamalar bilan aniqlangan egri chiziqli (1-chizma) trapetsiya yuzini hisoblaymiz. Chizmadan ko'rinib turibdiki, musbat a va b sonlarni qanday tanlamaylik $ab \leq S_1 + S_2$. S_1 va S_2 yuzalarni hisoblaymiz:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

1-chizma.

Shunday qilib, quyidagi sonli tengsizlik o'rinli:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Agar a ni a_k ga, b ni b_k ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o'zgartirib yig'indi tuzsak, (1.16) va (1.17) shartlar bajarilganda (1.18) tengsizlik hosil bo'ladi. Shunday qilib, (1.18) tengsizlik isbotlandi. Shunday ekan, umumiy (1.15) tengsizlik ham isbotlandi.

Agar $p = 2$ bo'lsa (1.15) Gyolder tengsizlidani (1.4) Koshi - Bunyakovski tengsizligi kelib chiqadi.

Endi Minkovskiy tengsizligining isbotiga o'tamiz. Buning uchun

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|$$

ayniyatdan foydalanamiz. Bu ayniyatda $|a|$ ni $|a_k|$ ga, $|b|$ ni $|b_k|$ ga almashtirib va k ni 1 dan n gacha o'zgartirib yig'indi tuzsak, quyidagi ayniyatga ega bo'lamiz

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Tenglikning o'ng tomonidagi har ikkala yig'indiga ham Gyolder tengsizligini qo'llasak va $(p-1)q = p$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \leq \left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \right).$$

Bu tengsizlikning har ikkala tomonini

$$\left(\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

ga bo'lib, isbotlanishi kerak bo'lgan (1.14) Minkovskiy tengsizligiga ega bo'lamiz. Shunday qilib, uchburchak aksiomasi o'rinli ekan.

Agar bu misolda $p = 2$ desak, ρ_p metrika 1.3— misoldagi metrikaga va agar $p = 1$ desak, 1.4— misoldagi metrikaga aylanadi. Ko'rsatish mumkinki, 1.5— misolda kiritilgan

$$\rho_{\infty}(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

metrika ρ_p metrikaning $p \rightarrow \infty$ dagi limitik holati bo'ladi, ya'ni

$$\rho_{\infty}(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.19)$$

1.12. Elementlari

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad p \geq 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ haqiqiy sonlar ketma-ketliklaridan iborat va ikki nuqtasi orasidagi masofa

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.20)$$

formula bilan aniqlangan to'plamni qaraymiz. Bu to'plamni ℓ_p deb belgilaymiz. Ixtiyoriy $x, y \in \ell_p$ lar uchun har bir n da

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.21)$$

Minkovskiy tengsizligi o'rinli bo'lgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$$

shartlar bajarilgani uchun (1.21) da $n \rightarrow \infty$ limitga o'tsak,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ga ega bo'lamiz. Bundan ixtiyoriy $x, y \in \ell_p$ lar uchun (1.20) qator yaqinlashishiga ega bo'lamiz. (1.20) tenglik bilan aniqlangan ρ funksiya metrikaning 1) va 2) aksiomalarini qanoatlantirishi ko'rinib turibdi. Uchburchak aksiomasi (1.14) Minkovskiy tengsizligidan foydalanib isbotlanadi.

Endi biz Minkovskiy va Gyolder tengsizliklarining integral formasini beramiz.

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad (1.22)$$

Bu Minkovskiy tengsizligi deb ataladi. Minkovskiy tengsizligi ya'ni (1.22) tengsizlik $[a, b]$ kesmada p - chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ixtiyoriy $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar uchun o'rinli.

Quyidagi tengsizlik

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1.23)$$

Gyolder tengsizligi deb ataladi. Gyolder tengsizligi $[a, b]$ kesmada p ($p > 1$) - chi darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi $x(t)$ va q ($q > 1$) - chi darajasi bilan integrallanuvchi $y(t)$ ixtiyoriy funksiyalar uchun o'rinli.

(1.10) tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining integral formasidir.

Endi haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi fanida xossalari o'rganilgan o'zgarishi chegaralangan va absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini qaraymiz.

1.13. Berilgan $[a, b]$ kesmada aniqlangan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamida ikki nuqtasi orasidagi masofani

$$\rho(x, y) = V_a^b[x - y] \quad (1.24)$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu yerda $V_a^b[f]$ - o'zgarishi chegaralangan f funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi to'la o'zgarishi (variatsiyasi). (1.24) tenglik bilan aniqlangan ρ akslantirishning metrika aksiomalarini qanoatlantirishi funksiya to'la o'zgarishi xossalariidan kelib chiqadi. Masalan, uchburchak tengsizligi $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) +$

$\rho(y, z)$ da $x(t) - y(t) = \varphi(t)$ va $y(t) - z(t) = \psi(t)$ belgilashlar olsak u quyidagi ko'rinishni oladi

$$V_a^b[\varphi + \psi] \leq V_a^b[\varphi] + V_a^b[\psi].$$

Bu esa o'zgarishi chegaralangan funksiyalarning ma'lim xossasidir. Hosil qilingan metrik fazo o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi deyiladi va $V[a, b]$ orqali belgilanadi.

1.14. Berilgan $[a, b]$ kesmada aniqlangan va absolyut uzluksiz funksiyalar to'plamini qaraymiz. Bu to'plamda ham ikki x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x, y)$, (1.24) tenglik bilan aniqlanadi. Hosil qilingan metrik fazo absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi va $AC[a, b]$ orqali belgilanadi.

Eslatma. (X, ρ) - metrik fazo va M uning ixtiyoriy qism to'plami bo'lsin. U holda X da aniqlangan ρ masofa, uning qismi bo'lgan M da ham masofa aniqlaydi. Shuning uchun (M, ρ) metrik fazo bo'ladi. (M, ρ) metrik fazo (X, ρ) metrik fazoning qism fazosi deb ataladi.

1.1. Metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar. Izometriya

X va Y - metrik fazolar, f - esa $X = (X, \rho)$ ni $Y = (Y, d)$ ga akslantirish bo'lsin. Shunday qilib, har bir $x \in X$ elementga yagona $y = f(x) \in Y$ element mos qo'yilgan bo'lsin.

1.2-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\rho(x, x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ nuqtalar uchun $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f akslantirish $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda f ni X da uzluksiz deb ataymiz.

Agar X va Y lar sonli to'plamlar bo'lsa, ya'ni x son f sonli funksiya bo'lsa, u holda akslantirishning uzluksizlik ta'rifi matematik analizdan ma'lum bo'lgan funksiyaning uzluksizligi ta'rifiga aylanadi.

Ta'kidlash lozimki, agar X metrik fazodagi ρ masofani $X \times X$ metrik fazoni $R_+ := [0, \infty)$ metrik fazoga akslantirish deb qarasaq, ρ - uzluksiz akslantirish bo'ladi. Bu yerda $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$ to'plamda (x_1, x_2) va (y_1, y_2) juftliklar orasidagi masofa $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \rho(x_1, y_1) + \rho(x_2, y_2)$ formula yordamida aniqlanadi. Endi ρ akslantirishning uzluksizligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in X \times X$ nuqtani olamiz va mahkamlaymiz. Keyin ixtiyoriy $(x, y) \in X \times X$ nuqta olib, metrikaning uchburchak aksiomasidan foydalanamiz:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y_0) + \rho(y_0, y),$$

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_0).$$

Bu ikki tengsizlikdan $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x, x_0) + \rho(y_0, y)$ ga kelamiz. Agar $d((x, y), (x_0, y_0)) = \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0) < \varepsilon$ desak, u holda $|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$

bo'ladi, ya'ni ρ uzluksiz akslantirish ekan.

Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirish X va Y metrik fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatasa, u holda Y ni X ga akslantiruvchi $x = f^{-1}(y)$ teskari akslantirish mavjud bo'ladi. Agar f o'zaro bir qiymatli moslik bo'lib, f va f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, u holda f gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi, X va Y fazolar esa gomeomorf fazolar deb ataladi. Gomeomorf metrik fazolarga $R = (-\infty; \infty)$ sonlar o'qi va $(-1, 1)$ intervallarni misol sifatida qarash mumkin. Bu holda gomeomorfizm $y = \frac{2}{\pi} \arctg x$ formula yordamida o'rnatiladi.

Agar (X, ρ) va (Y, d) metrik fazolar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatuvchi f akslantirish ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ lar uchun $\rho(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, f akslantirish izometriya deyiladi, X va Y fazolar esa izometrik fazolar deb ataladi.

X va Y metrik fazolarning izometrikligi, ular elementlari orasidagi metrik bog'lanishlar bir xil bo'lib, faqatgina ular elementlarining tabiatiga ko'ra bir - biridan farq qilinishini bildiradi. Ular orasidagi bu farq metrik fazolar nazariyasi nuqtai - nazaridan muhim emas. Bundan keyin o'zaro izometrik fazolarni aynan bitta fazo deb qaraymiz.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Gyolder va Minkovski tengsizliklarini integral formada yozing.
2. (1.5) tenglik bilan aniqlangan $\rho_1 : R^n \times R^n \rightarrow R_+$ akslantirish metrikaning 1)-3) shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.
3. $C[a, b]$ to'plamda (1.7) tenglik bilan aniqlangan $\rho : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow R_+$ akslantirish metrikaning 1)-3) shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.
4. $C[a, b]$ to'plamda (1.11) tenglik bilan aniqlangan $\rho_1 : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow R_+$ akslantirish metrikaning 1)-3) shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.
5. 1.10 misolda (1.12) tenglik bilan aniqlangan $\rho : m \times m \rightarrow R_+$ akslantirish metrikaning 1)-3) shartlarini qanoatlantirishini isbotlang.
6. (1.19) tenglikni isbotlang.
7. $V[a, b]$ to'plamda (1.24) tenglik bilan aniqlangan $\rho : V[a, b] \times V[a, b] \rightarrow R_+$ akslantirish metrikaning 1)-3) shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.
8. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:
 - 1). Agar $1 < p < q$ bo'lsa, ℓ_p to'plam ℓ_q to'plamning qismi bo'ladi.
 - 2). Absolyut uzluksiz funksiyalar fazosi $AC[a, b]$ o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a, b]$ ning qism fazosi bo'ladi.

2-§. Metrik fazolarda yaqinlashish. Ochiq va yopiq to'plamlar

Reja:

1. Metrik fazoning asosiy tushunchalari.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar.
3. Zich to'plamlar, hamma yerda zich to'plam.
4. Sonlar o'qidagi ochiq to'lam strukturasi.

Tayanch iboralar: Ochiq va yopiq shar, limitik nuqta, urinish nuqtasi, ichki nuqta, to'plam yopig'i, ochiq va yopiq to'plam, zich to'plam, sanoqli to'plam, yaqinlashuvchi ketma-ketlik.

Biz bu paragrafda metrik fazoning asosiy tushunchalarini keltiramiz va ochiq va yopiq to'plamlarning xossalarini o'rganamiz.

2.1-ta'rif. X metrik fazoda $x_0 \in X$ va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. $\rho(x, x_0) < r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan ochiq shar deb ataladi va u $B(x_0, r)$ orqali belgilanadi. Berilgan $x_0 \in X$ va $r > 0$ da $\rho(x, x_0) \leq r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami $B[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan yopiq shar deb ataladi.

Metrik fazolar nazariyasida markazi x_0 nuqtada va radiusi $\varepsilon > 0$ bo'lgan $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq shar x_0 nuqtaning ε -atrofi deyiladi va u $O_\varepsilon(x_0)$ ko'rinishda belgilanadi.

Misollar. 2.1. Shunday metrik fazoga va undagi ikkita $B(x_1, r_1)$, $B(x_2, r_2)$ sharlarga misol keltiringki, $r_1 < r_2$ va $B(x_1, r_1) \supset B(x_2, r_2)$ bo'lsin.

Yechish. $X = ([0; \infty), \rho)$, $\rho(x, y) = |x - y|$ bo'lsin. Agar $B(1, 5) = \{x \in [0; \infty) : |x - 1| < 5\}$ deb markazi 1 nuqtada va radiusi 5 ga teng sharni, hamda $B(3, 4) = \{x \in [0; \infty) : |x - 3| < 4\}$ deb markazi 3 nuqtada va radiusi 4 ga teng bo'lgan ochiq sharlarni olsak, u holda $r_2 = 5 > 4 = r_1$, ammo $B(1, 5) \subset B(3, 4)$.

2.2-ta'rif. Agar X metrik fazoning M qism to'plami uchun uni o'zida saqlovchi shar mavjud bo'lsa, M chegaralangan to'plam deb ataladi.

2.3-ta'rif. X metrik fazo va uning qism to'plami M hamda x nuqta berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning urinish nuqtasi deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat $[M]$ to'plam M ning yopig'i deyiladi.

Shunday qilib, biz metrik fazo qism to'plamlari uchun ulardan ularning yopig'iga o'tish amalini aniqladik. To'plam yopig'i amali quyidagi xossalarga ega.

2.1-teorema. *Quyidagi tasdiqlar o'rinli:*

- 1) $M \subset [M]$,
- 2) $[[M]] = [M]$,
- 3) agar $M_1 \subset M_2$ bo'lsa, u holda $[M_1] \subset [M_2]$,
- 4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Isbot. M to'plamning har bir nuqtasi uning uchun urinish nuqtasi bo'lishi ta'rifdan bevosita kelib chiqadi, shuning uchun $M \subset [M]$.

Endi ikkinchi tasdiq isbotiga o'tamiz. Birinchi tasdiqqa ko'ra $[M] \subset [[M]]$. Endi $x \in [[M]]$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap [M] \neq \emptyset$, ya'ni shunday $y \in [M]$ mavjudki, $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Shunga o'xshash, $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap M \neq \emptyset$. Ya'ni shunday $z \in M$ mavjud bo'lib, $\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. U holda

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ya'ni $O_{\varepsilon}(x) \cap M \neq \emptyset$. Bundan $x \in [M]$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday ekan, $[[M]] \subset [M]$. Demak, $[[M]] = [M]$.

Uchinchi tasdiqning isboti. $[M_1]$ to'plamning ixtiyoriy x nuqtasini olamiz. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\varepsilon}(x) \cap M_1 \neq \emptyset$. Bundan $O_{\varepsilon}(x) \cap M_2 \neq \emptyset$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, x nuqta M_2 to'plamning urinish nuqtasi, ya'ni $x \in [M_2]$ ekan. Bundan $[M_1] \subset [M_2]$.

Nihoyat, to'rtinchi tasdiq isbotiga o'tamiz. Agar $x \in [M_1 \cup M_2]$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_{\varepsilon}(x) \cap (M_1 \cup M_2) \neq \emptyset$ bo'ladi. Bundan, $O_{\varepsilon}(x) \cap M_1 \neq \emptyset$ yoki $O_{\varepsilon}(x) \cap M_2 \neq \emptyset$ tengsizliklardan kamida bittasi bajariladi. U holda $x \in [M_1]$ yoki $x \in [M_2]$, bundan $x \in [M_1] \cup [M_2]$ ekan. Ya'ni $[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2]$. Ikkinchi tomondan, $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ va $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ bo'lgani uchun, uchinchi tasdiqqa ko'ra $[M_1] \subset [M_1 \cup M_2]$ va $[M_2] \subset [M_1 \cup M_2]$. Shunday ekan, $[M_1] \cup [M_2] \subset [M_1 \cup M_2]$. Demak, $[M_1] \cup [M_2] = [M_1 \cup M_2]$. $\triangle$

2.4-ta'rif. X — metrik fazo va M — uning bo'shmas qism to'plami bo'lsin. Agar $x \in X$ ning ixtiyoriy $O_{\varepsilon}(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda $x \in X$ nuqta M to'plamning limitik nuqtasi deyiladi.

To'plamning limitik nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

2.2. Agar Q barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsa, u holda $R = (-\infty, \infty)$ ning har bir nuqtasi Q uchun limitik nuqta bo'ladi.

2.5-ta'rif. Agar M to'plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_{\varepsilon}(x) \cap M = \{x\}$ bo'lsa, u holda x nuqta M to'plamning yakkalangan nuqtasi deyiladi.

O'quvchi mustaqil isbotlashi mumkin bo'lgan quyidagi tasdiqlar o'rinli.

M to'plamning istalgan urinish nuqtasi shu to'plamning limitik nuqtasi, yoki yakkalangan nuqtasi bo'ladi. Bu yerdan xulosa sifatida kelib chiqadiki, $[M]$

to'plam uch turdagi nuqtalardan tashkil bo'lishi mumkin.

- 1) M to'plamning yakkalangan nuqtalari,
- 2) M ga tegishli bo'lgan, M ning limitik nuqtalari,
- 3) M ga tegishli bo'lmagan M ning limitik nuqtalari.

Bu xulosalardan kelib chiqadiki, M dan uning yopig'i $[M]$ ga o'tish, M ga tegishli bo'lmagan limitik nuqtalarni M ga qo'shib olish bilan amalga oshiriladi.

2.1. Metrik fazolarda yaqinlashish

2.6-ta'rif. X metrik fazoda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ nuqtalar ketma-ketligi va x nuqta berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib barcha $n > n_0$ lar uchun x_n nuqta x ning $O_\varepsilon(x)$ atrofiga tegishli bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Bu ta'rifni quyidagicha ham ifodalash mumkin:

Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$$

munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma - ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi.

Yaqinlashuvchi ketma - ketlik ta'rifidan quyidagi ikki xulosa bevosita kelib chiqadi:

- 1) hech qanday ketma- ketlik ikkita har xil limitga ega emas;
- 2) agar $\{x_n\}$ ketma- ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, u holda uning ixtiyoriy qisman ketma- ketligi ham x nuqtaga yaqinlashadi.

2.2-teorema. *Biror x nuqta M to'plamning urinish nuqtasi bo'lishi uchun M da x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma - ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.*

Isbot. Zaruriyligi. x nuqta M to'plamning urinish nuqtasi bo'lsin. U holda ixtiyoriy n natural son uchun $O_{\frac{1}{n}}(x)$ atrofda kamida bitta $x_n \in M$ element mavjud. Bu x_n nuqtalardan tuzilgan $\{x_n\} \subset M$ ketma - ketlik x nuqtaga yaqinlashadi.

Yetarliligi. Agar $\{x_n\} \subset M$ ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, $n > n_0$ bo'lganda $x_n \in O_\varepsilon(x)$ bo'ladi, ya'ni $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$. Demak, x nuqta M ning urinish nuqtasi bo'ladi. $\triangle$

Agar $x - M$ to'plamning limitik nuqtasi bo'lsa, u holda $x_n \in O_{\frac{1}{n}}(x) \cap M$ nuqtalarni har xil qilib tanlash mumkin, chunki $O_{\frac{1}{n}}(x) \cap M$ cheksiz to'plam. Shunday qilib, x nuqta M to'plam uchun limitik nuqta bo'lishi uchun M da x ga yaqinlashuvchi har-xil nuqtalardan tashkil bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

X metrik fazoni Y metrik fazoga akslantiruvchi f akslantirish uzluksizligi tushunchasini quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Bizga $f : X \rightarrow Y$ akslantirish va $x_0 \in X$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma - ketlik uchun unga mos keluvchi $\{y_n = f(x_n)\}$ ketma - ketlik, $y_0 = f(x_0)$

nuqtaga yaqinlashsa, $f : X \rightarrow Y$ akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. 1 – § da keltirilgan uzluksizlik ta’rifi bilan bu ta’rifning teng kuchli ekanligini isbotlashni o’quvchiga qoldiramiz.

2.2. Zich to’plamlar

2.7-ta’rif. X metrik fazoning ikkita A va B qism to’plamlari berilgan bo’lsin. Agar $[A] \supset B$ bo’lsa, u holda A to’plam B to’plamda zich deyiladi. Xususan, agar $[A] = X$ bo’lsa, A to’plam hamma yerda zich (X da zich) deyiladi. Agar A to’plam birorta ham sharda zich bo’lmasa (ya’ni har bir $B \subset X$ sharda A to’plam bilan umumiy elementga ega bo’lmagan B' shar saqlansa), u holda A hech yerda zichmas to’plam deyiladi.

Misollar. 2.3. Q – ratsional sonlar to’plami R da zich to’plamdir.

2.4. Natural sonlar to’plami N haqiqiy sonlar metrik fazosi $R = (-\infty; \infty)$ ning hech yerida zichmas to’plamdir.

Endi hamma yerda zich sanoqli qism to’plamga ega bo’lgan metrik fazolarga misol qaraymiz. Odatda hamma yerda zich sanoqli qism to’plamga ega bo’lgan metrik fazolar "separabel metrik fazolar" deb ataladi.

2.5. 1 – § ning 1.1– misolida keltirilgan "diskret" fazo, hamma yerda zich sanoqli to’plamni fazoning elementlari sanoqli bo’lgan holda va faqat shu holda saqlaydi. Chunki bu fazoda ixtiyoriy M uchun $[M] = M$ tenglik o’rinli. Shuning uchun "diskret" fazo separabel bo’lishi uchun uning sanoqli bo’lishi zarur va yetarli.

2.6. Haqiqiy sonlar o’qi $R = (-\infty; \infty)$ separabel fazodir, chunki ratsional sonlar to’plami sanoqli va u R ning hamma yerida zich.

2.7. R^n , R_1^n , R_∞^n , va R_p^n ($1 < p < \infty$) metrik fazolarning hammasida ratsional koordinatali vektorlar to’plami sanoqli va hamma yerda zichdir. Shuning uchun R^n , R_1^n , R_∞^n , va R_p^n ($1 < p < \infty$) lar separabel metrik fazolardir.

2.8. $C[a, b]$, $C_1[a, b]$, va $C_2[a, b]$ metrik fazolarda ratsional koeffitsientli ko’phadlar to’plami sanoqli va hamma yerda zichdir. Shunday ekan, ular separabel fazolardir.

2.9. ℓ_2 fazoda hadlari ratsional sonlar bo’lib, ulardan cheklitasi noldan farqli bo’lgan ketma - ketliklar to’plami sanoqli bo’ladi va u ℓ_2 ning hamma yerida zich. Demak, ℓ_2 separabel metrik fazo.

2.10. Yuqoridagi metrik fazolardan farqli o’laroq m separabel bo’lmagan metrik fazoga misol bo’ladi. Buni isbotlash uchun hadlari 0 va 1 lardan iborat barcha mumkin bo’lgan ketma-ketliklar to’plamini Φ bilan belgilaymiz. $\Phi \subset m$ va ikkita ixtiyoriy $x, y \in \Phi$ ketma-ketliklar kamida biror hadi bilan farq qilgani uchun $\rho(x, y) = 1$. Ma’lumki, Φ sanoqsiz (kontinuum quvvatli) to’plam. Φ ning elementlarini markaz qilib radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng ochiq sharlarni olamiz. Bu sharlar

o'zaro kesishmaydi. Agar biror $M \subset m$ to'plam hamma yerda zich bo'lsa, har bir sharda M ning kamida bitta elementi yotadi. Sharlar soni Φ dagi elementlar soniga teng. M dagi elementlar soni esa sharlar sonidan, shuning uchun, Φ dagi elementlar sonidan kam emas. Shunday ekan, M sanoqsiz to'plam ekan. Demak, m ning hamma yerida zich sanoqli to'plam mavjud emas ekan.

2.11. ℓ_p , $p \geq 1$ va c_0 fazolarda hadlari ratsional sonlar bo'lib, ulardan cheklitasi noldan farqli bo'lgan ketma - ketliklar to'plami sanoqli bo'ladi va u ℓ_p va c_0 fazolarning hamma yerida zich. Demak, ℓ_p va c_0 separabel metrik fazolar bo'ladi.

2.3. Ochiq va yopiq to'plamlar

2.8-ta'rif. Agar X metrik fazodagi M to'plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M yopiq to'plam deb ataladi. Boshqacha aytganda, agar to'plam o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u yopiq to'plam deb ataladi.

Ta'kidlash lozimki, 2.1-teoremaga ko'ra M to'plamning yopig'i $[M]$ - yopiq to'plamdir, hamda $[M]$ to'plam M ni o'zida saqlovchi minimal yopiq to'plamdir.

Misollar. 2.12. Har qanday metrik fazoda yopiq shar yopiq to'plam bo'ladi. Xususan, $C[a, b]$ fazoda ixtiyoriy $C > 0$ uchun $|f(x)| \leq C$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami yopiq to'plam bo'ladi.

2.13. $C[a, b]$ fazoda $|f(x)| < C$ (ochiq shar) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami yopiq emas, uning yopig'i $|f(x)| \leq C$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamidan iborat.

2.14. Har qanday X metrik fazoda X va $\emptyset$ to'plam yopiq to'plamlardir.

2.15. Har qanday metrik fazoda chekli to'plam yopiqdir.

2.3-teorema. Ixtiyoriy sondagi yopiq to'plamlar kesishmasi va chekli sondagi yopiq to'plamlar yig'indisi yopiqdir.

Isbot. Ixtiyoriy sondagi F_α yopiq to'plamlarining

$$F = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$$

kesishmasini qaraymiz. F to'plamning ixtiyoriy x limitik nuqtasini olaylik. U holda x ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofida F ning cheksizta elementi mavjud. Shunday ekan, $O_\varepsilon(x)$ da har bir F_α ning cheksiz ko'p elementi mavjud. Bu ko'rsatadiki, x nuqta har bir F_α uchun limitik nuqta bo'ladi va F_α lar yopiq bo'lgani uchun har bir α da $x \in F_\alpha$. Bundan

$$x \in F = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni F yopiq to'plam.

Endi F - cheklita yopiq to'plamlar yig'indisi, ya'ni

$$F = \bigcup_{k=1}^n F_k$$

va $x \notin F$ bo'lsin. U holda $x \notin F_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ ya'ni x nuqta F_k uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Shuning uchun x ning $O_{\varepsilon_1}(x)$, $O_{\varepsilon_2}(x), \dots, O_{\varepsilon_n}(x)$ atroflari mavjudki, $O_{\varepsilon_k}(x)$ da F_k ning ko'pi bilan cheklita elementi bo'lishi mumkin. Agar

$$\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k$$

desak, $O_\varepsilon(x)$ atrofda har bir F_k to'plam elementlari soni cheklitadan ko'p emas. U holda $O_\varepsilon(x)$ atrofda $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ to'plam elementlarining soni ham cheklitadan ko'p emas. Shuning uchun x nuqta F uchun limitik nuqta bo'la olmaydi. Ya'ni F ning barcha limitik nuqtalari o'zida saqlanadi. Demak, F yopiq to'plam. $\triangle$

2.9-ta'rif. Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x)$ atrof M da to'liq saqlansa ($O_\varepsilon(x) \subset M$), u holda x nuqta M to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to'plam ochiq to'plam deyiladi.

Misollar. 2.16. R sonlar o'qida ixtiyoriy (a, b) interval ochiq to'plamdir. Haqiqatan, agar $x \in (a, b)$ desak, $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$ son uchun $O_\varepsilon(x) \subset (a, b)$.

2.17. Har qanday metrik fazoda $B(a, r)$ ochiq shar ochiq to'plam bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $x \in B(a, r)$ bo'lsa, u holda $\rho(x, a) < r$ va $\varepsilon = r - \rho(a, x) > 0$ bo'ladi. Ixtiyoriy $y \in B(x, \varepsilon) = O_\varepsilon(x)$ uchun $\rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + \varepsilon = \rho(a, x) + r - \rho(a, x) = r$ bo'lgani uchun $O_\varepsilon(x) \subset B(a, r)$.

2.18. $C[a, b]$ fazodagi $g(t)$ funksiyani olib tayinlaymiz va G orqali $f(t) < g(t)$, $t \in [a, b]$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. U holda G ochiq to'plam bo'ladi.

2.4-teorema. M to'plam ochiq bo'lishi uchun uning butun fazogacha to'ldiruvchisi $X \setminus M$ yopiq bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Agar M ochiq bo'lsa, u holda M dan olingan har bir x nuqta o'zining biror $O_\varepsilon(x)$ atrofi bilan M ga tegishli bo'ladi, ya'ni $O_\varepsilon(x) \cap (X \setminus M) = \emptyset$. Shuning uchun $X \setminus M$ ga tegishli bo'lmagan birorta nuqta $X \setminus M$ uchun urinish nuqtasi bo'la olmaydi, ya'ni $X \setminus M$ yopiq to'plam. Teskarisi, agar $X \setminus M$ yopiq bo'lsa, u holda uning o'ziga tegishli bo'lmagan urinish nuqtasi yo'q, ya'ni har bir x uchun $O_\varepsilon(x)$ atrof mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo'ladi. Demak, M ochiq to'plamdir. $\triangle$

2.19. Bo'sh to'plam va X fazo yopiq to'plamlardir. Ular biri-ikkinchisining to'ldiruvchisi bo'lgani uchun 2.4-teoremaga ko'ra $\emptyset$ va X lar ochiq to'plamlar ham bo'ladi.

Ikkilik prinsiplari hamda 2.3 va 2.4 teoremlar natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz.

2.5-teorema. Ixtiyoriy sondagi ochiq to'plamlar yig'indisi va chekli sondagi ochiq to'plamlar kesishmasi yana ochiq to'plamdir.

2.4. Sonlar o'qidagi ochiq va yopiq to'plamlar

Ixtiyoriy metrik fazoda, hattoki Evklid fazosida ham, ochiq va yopiq to'plamlar strukturasi, umuman olganda, juda murakkab. Ammo, sonlar o'qida barcha ochiq to'plamlarni (shu jumladan yopiq to'plamlarni), tavsiflash qiyin emas. Sonlar o'qidagi ochiq to'plamlar tavsifi quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

2.6-teorema. *Sonlar o'qidagi ixtiyoriy ochiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan intervallar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi.*

Isbot. Sonlar o'qidagi G ochiq to'plamni qaraymiz. G to'plam elementlari orasida ekvivalentlik munosabatlarini kiritamiz. Agar $x, y \in G$ nuqtalar uchun shunday (α, β) interval mavjud bo'lib, $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$ bo'lsa, $x \sim y$ deymiz. Ravshanki, bu munosabat refleksiv va simmetrikdir. Bundan tashqari $x \sim y$ va $y \sim z$ bo'lgani uchun shunday (α, β) va (γ, δ) intervallar mavjud bo'lib $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$ va $y, z \in (\gamma, \delta) \subset G$ bo'ladi. Bundan $\gamma < \beta$ bo'lishi va $(\alpha, \delta) \subset G$ ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $x, z \in (\alpha, \delta) \subset G$.

Shunday ekan, $x \sim z$ ekanligi, ya'ni kiritilgan munosabatning tranzitivligi kelib chiqadi. Shuning uchun, G o'zaro kesishmaydigan I_τ ekvivalent nuqtalar sinflariga ajraladi, ya'ni $G = \cup_\tau I_\tau$. Har bir I_τ ning (a, b) intervaldan iborat ekanligini ko'rsatamiz, bu yerda $a = \inf I_\tau$, $b = \sup I_\tau$. Agar $a = \inf I_\tau$ va $b = \sup I_\tau$ desak, $I_\tau \subset (a, b)$. Ikkinchi tomondan, agar $x, y \in I_\tau$ desak, I_τ ning aniqlanishiga ko'ra $(x, y) \subset I_\tau$. a dan o'ng tomonda va a ga ixtiyoriy yaqinlikda, b dan chap tomonda va b ga ixtiyoriy yaqinlikda I_τ ning elementlari mavjud. Shuning uchun, chetlari (a, b) ga tegishli ixtiyoriy (a', b') interval I_τ da saqlanadi. U holda $I_\tau = (a, b)$. Bunday kesishmaydigan I_τ intervallar soni ko'pi bilan sanoqli, yani har bir I_τ interval kamida bitta ratsional nuqtani saqlaydi. Shuning uchun intervallar soni ratsional nuqtalar sonidan ko'p emas. $\triangle$

Yopiq to'plamlar ochiq to'plamlarining to'ldiruvchi to'plami bo'lgani uchun, ixtiyoriy yopiq to'plam sonlar o'qidan chekli yoki sanoqlita o'zaro kesishmaydigan intervallarni chiqarib tashlashdan hosil bo'ladi.

Sonlar o'qida sodda yopiq to'plamlarga misol sifatida kesmalar, alohida nuqtalar va chekli shunday to'plamlar yig'indisini qarash mumkin. Murakkabroq yopiq to'plamga misol qaraymiz. Qaralayotgan bu yopiq to'plam "Kantor to'plami" nomi bilan taniqli.

2.20. $F_0 = [0, 1]$ bo'lsin. Undan $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intervalni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni F_1 bilan belgilaymiz. Keyin F_1 dan $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ va $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ intervallarni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni (to'rt kesmadan iborat) F_2 bilan belgilaymiz. Bu to'rtta kesmaning har biridan o'rtadagi uzunligi 3^{-3} teng bo'lgan interval chiqarib tashlanadi va hokazo. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, yopiq

to'plamlarning kamayuvchi F_n ketma-ketligini olamiz. Agar

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

deb belgilasak, 2.3— teoremaga ko'ra F yopiq to'plam bo'ladi. U $[0, 1]$ kesmadan sanoqli sondagi intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan F to'plam Kantor to'plami deb ataladi.

Endi F to'plamning strukturasini o'rganamiz. Ravshanki, F ga chiqarib tashlangan intervallarning oxirlari bo'lgan

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots, \quad (2.1)$$

nuqtalar tegishli. Biroq F to'plam faqat shu nuqtalardan iborat emas. $[0, 1]$ kesmadagi F ga tegishli bo'lgan nuqtalarni quyidagicha xarakterlash mumkin. Buning uchun $[0, 1]$ kesmadagi har bir x ni uchlik sistemada yozamiz:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

bu yerda a_n sonlar 0, 1 va 2 raqamlarni qabul qilishi mumkin. O'nli kasrlar holidagidek bu yerda ham ba'zi sonlarni ikki xil ko'rinishda yozish mumkin. Masalan,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \dots + \frac{0}{3^n} + \dots = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

Endi F to'plamga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasi haqida fikr yuritamiz. Ravshanki, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ va intervaldagi sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_1 son albatta 1 ga teng bo'ladi, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ va $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ intervallarga tegishli sonlarning uchlik sistemadagi yoyilmasida a_2 son albatta 1 ga teng bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$ va $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ intervallarga tegishli sonlar uchun ularning uchlik sistemadagi yoyilmalarida a_3 son albatta 1 ga teng bo'ladi va hokazo. Shunday qilib ixtiyoriy $x \in [0, 1] \setminus F$ son uchun uning uchlik sistemadagi yoyilmasida qatnashuvchi $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sonlarning kamida bittasi 1 ga tebg. Aytilgan mulohazalardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: F to'plamga kamida bir usul bilan uchlik kasr ko'rinishida tasvirlanuvchi shunday $x \in [0, 1]$ sonlar kiradiki, ularga mos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ketma-ketlikda 1 raqami biror marta ham uchramaydi. Shunday qilib, har bir $x \in F$ uchun

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (2.2)$$

ketma-ketlikni mos qo'yish mumkin, bu yerda a_n raqam 0 yoki 2 ga teng. Bunday ketma-ketliklar to'plami kontinuum quvvatli to'plamni tashkil qiladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun har bir (2.2) ketma-ketlikka

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots \quad (2.3)$$

ketma-ketlikni shunday mos qo'yamizki, agar $a_n = 0$ bo'lsa, $b_n = 0$ bo'ladi, agar $a_n = 2$ bo'lsa, $b_n = 1$ bo'ladi. Har bir (2.3) ketma-ketlikni, $[0, 1]$ kesmadagi biror y sonning ikkilik kasr yozuvi deb qarash mumkin. Shunday qilib, F to'plamni $[0, 1]$ ga biyektiv akslantirishni olamiz. Bu yerdan F ning kontinuum quvvatli to'plam ekanligi kelib chiqadi. (2.1) ketma-ketlikdagi sonlar to'plami sanoqli bo'lgani uchun, ular F ni to'lig'icha qoplamaydi.

Biz ko'rsatdikki, F kontinuum quvvatga ega, ya'ni $[0, 1]$ kesma bilan F to'plam o'rtasida biyektiv moslik mavjud.

Bundan tashqari Kantor to'plami $[0, 1]$ kesmaning hech yerida zichmas va o'lchovi nolga teng. Kantor to'plami F ning o'lchovi nol ekanligi $\mu([0, 1] \setminus F) = 1$ ekanligidan kelib chiqadi. Barcha chiqarib tashlangan intervallar uzunliklari yig'indisi

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots = 1.$$

Demak, $\mu(F) = 0$.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Ochiq va yopiq to'plamlarga misollar keltiring.*
2. *Ratsional sonlar to'plami Q ning yopig'ini toping.*
3. *To'plam yopig'ining xossalari keltiring.*
4. *Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plam bo'lmasligiga misol keltiring.*
5. *Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plam bo'lmasligiga misol keltiring.*
6. *Kantor to'plami $[0, 1]$ kesmada zichmi? F to'plami $[0, 1]$ kesmadagi biror (a, b) intervalda zich bo'la oladimi?*
7. *Kantor to'plamining Lebeg ma'nosida o'lchovli ekanligini ko'rsating. Uni o'lchovini toping.*
8. *Kantor to'plamining Jordan ma'nosida o'lchovlilikka tekshiring.*
9. *Kantor to'plami $[0, 1]$ kesmaning hech yerida zichmas ekanligini ko'rsating.*
10. *Sonlar o'qidagi har qanday $[a, b]$ kesma yopiq to'plam bo'lishini ko'rsating.*

3-§. To'la metrik fazolar

Reja:

1. To'la metrik fazo ta'rifi va unga misollar.
2. Fundamental ketma-ketliklar.
3. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema.
4. Metrik fazoni to'ldirish.
5. Metrik fazolarda kompakt to'plamlar.

Tayanch iboralar: Fundamental ketma-ketlik, to'la metrik fazo, kompakt va nisbiy kompakt to'plam, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz.

Matematik analizdan ma'lumki, har qanday fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Bu tasdiq sonlar o'qining to'laligini ifodalaydi. Quyida ko'rsatiladiki, ixtiyoriy metrik fazoda har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lavermaydi.

3.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son mavjud bo'lib, barcha $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Uchburchak aksiomasidan bevosita kelib chiqadiki, har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamentaldir. Haqiqatan ham, agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik x ga yaqinlashsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε son mavjudki, barcha $n > N_\varepsilon$ nomerlarda $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. U holda ixtiyoriy $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ nomerlar uchun

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demak, $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekan.

3.2-ta'rif. Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X to'la metrik fazo deyiladi.

Misollar. 3.1. Yakkalangan nuqtalar fazosida faqatgina statsionar (ya'ni biror nomerdan boshlab hamma nomerlarda birgina nuqta takrorlanadigan) ketma-ketliklar fundamental va shuning uchun yaqinlashadi, ya'ni bu fazo - to'la.

3.2. $R = (-\infty, \infty)$ fazoning to'laligi matematik analiz kursidan ma'lum.

3.3. R^n fazoning to'laligi R fazoning to'laligidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan ham, $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$ - R^n dagi biror fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε nomer mavjud bo'lib, barcha $p > N_\varepsilon$, $q > N_\varepsilon$ lar uchun

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2. \quad (3.1)$$

Natijada har bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun $\{x_k^{(p)}\}$ ketma-ketlik barcha $p > N_\varepsilon$, $q > N_\varepsilon$ nomerlar uchun $|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi, ya'ni $\{x_k^{(p)}\}_{p=1}^\infty$ fundamental sonli ketma-ketlikdir va R fazo to'la bo'lganligi uchun u yaqinlashuvchi bo'ladi. Uning limitini

$$x_k = \lim_{p \rightarrow \infty} x_k^{(p)}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

orqali belgilaymiz. U holda, (3.1) tengsizlikda $p > N_\varepsilon$ deb $q \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak

$$\sum_{k=1}^n (x_k^{(p)} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x.$$

3.4.-3.5. R_∞^n va R_p^n fazolarning to'laligi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

3.6. $C[a, b]$ fazoning to'laligini ko'rsatamiz. $\{x_n(t)\} - C[a, b]$ da fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n, m > N_\varepsilon$ bo'lganda

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon \quad (3.2)$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n(t)\}$ funksional ketma-ketlikning $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashish shartidir. Shuning uchun $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada aniqlangan qandaydir $x(t)$ uzluksiz funksiyaga tekis yaqinlashadi. Agar (3.2) tengsizlikda $n > N_\varepsilon$ bo'lganda $m \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi, ya'ni $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlik $C[a, b]$ fazo metrikasida $x(t)$ funksiyaga yaqinlashadi.

3.7. ℓ_2 ham to'la fazodir. $\{x^{(n)}\} - \ell_2$ fazodagi ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik bo'lsin. U holda har bir $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε mavjudki, $n, m > N_\varepsilon$ bo'lganda

$$\rho^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2 \quad (3.3)$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$. (3.3) dan kelib chiqadiki, ixtiyoriy k natural son uchun $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$ bo'ladi, ya'ni har bir k da $\{x_k^{(n)}\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi fundamentaldir va shuning uchun u yaqinlashadi. Aytaylik,

$$x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

bo'lsin. Endi x bilan yuqoridagi x_k limitlar orqali tuzilgan $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ ketma-ketlikni belgilaymiz.

Quyidagilarni ko'rsatishimiz kerak:

- a) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, ya'ni $x \in \ell_2$,
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x^{(n)}) = 0$.

(3.3) tengsizlikka asosan har bir belgilangan M natural son uchun

$$\sum_{k=1}^M (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon^2$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikning chap tomonidagi yig'indida cheklita qo'shiluvchi bo'lgani uchun $n > N_\varepsilon$ ni tayinlab, $m \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\sum_{k=1}^M (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2$$

tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlik barcha M larda o'rinli, shuning uchun $M \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon^2 \quad (3.4)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lgani va

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)})^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(n)})^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2$$

munosabatdan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni a) tasdiq isbotlandi. (3.4) tengsizlikda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy kichik miqdor bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^{(n)})^2} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni ℓ_2 fazo metrikasida $x^{(n)} \rightarrow x$. b) tasdiq ham isbot bo'ldi.

3.8. $C_2[-1, 1]$ metrik fazoning to'la emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $C_2[-1, 1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -1/n], \\ nx, & x \in (-1/n, 1/n), \\ 1, & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik $C_2[-1, 1]$ fazoda fundamentaldir, chunki barcha $x \in [-1, 1]$ lar uchun $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ va $n < m$ desak, f_n, f_m lar orasidagi masofa kvadrati

$$\rho_2^2(f_n, f_m) = \int_{-1}^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx < \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1 dx = \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Biroq $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1, 1]$ fazodagi birorta ham funksiyaga yaqinlashmaydi. Haqiqatan ham, $f \in C_2[-1, 1]$ ixtiyoriy funksiya va

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x \in [-1, 0), \\ 1, & \text{agar } x \in [0, 1] \end{cases}$$

nol nuqtada uzilishga ega funksiya bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$f_n(x) - \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1], \\ nx + 1, & x \in (-\frac{1}{n}, 0), \\ nx - 1, & x \in [0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Bundan tashqari barcha $x \in [-1, 1]$ lar uchun $|f_n(x) - \varphi(x)| \leq 1$. Shuning uchun

$$\int_{-1}^1 (f_n(x) - \varphi(x))^2 dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (n \cdot x - \varphi(x))^2 dx \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Agar Minkovskiyning integral tengsizligidan foydalansak ((1.22) ga qarang),

$$\left[\int_{-1}^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{-1}^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_{-1}^1 (f_n(x) - \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

tengsizlikka kelamiz. Endi quyidagi

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx > 0 \quad (3.7)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uning isbotini ikki holga ajratamiz.

1). Faraz qilaylik $f(0) \leq 0$ bo'lsin, u holda f ning uzluksizligiga ko'ra shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [0; \delta_1]$ lar uchun $f(x) < 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$|f(x) - \varphi(x)| > 1/2, \quad x \in [0; \delta_1] \quad (3.8)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (3.8) tengsizlikni $[0; \delta_1]$ kesma bo'yicha integrallab,

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx \geq \int_0^{\delta_1} (f(x) - \varphi(x))^2 dx > \frac{\delta_1}{4}$$

tengsizlikka kelamiz.

2). Agar biz $f(0) > 0$ deb faraz qilsak, u holda shunday $\delta_2 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [-\delta_2; 0]$ lar uchun $|f(x) - \varphi(x)| > 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$\int_{-1}^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx \geq \int_{-\delta_2}^0 (f(x) - \varphi(x))^2 dx > \frac{\delta_2}{4}.$$

Demak, (3.7) tengsizlik isbot bo'ldi. (3.6) tengsizlikdan

$$\left[\int_{-1}^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \geq \left[\int_{-1}^1 (f(x) - \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int_{-1}^1 (f_n(x) - \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

ni olamiz. (3.5), (3.7) va (3.9) lardan

$$\rho(f, f_n) = \left[\int_{-1}^1 (f(x) - f_n(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

ning nolga yaqinlasha olmasligi kelib chiqadi, ya'ni $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_2[-1, 1]$ dagi birorta ham funksiyaga yaqinlasha olmaydi.

3.9. ℓ_p , $p \geq 1$ va m , c , c_0 fazolar to'la metrik fazolardir.

3.1. Ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema

Ma'lumki, analizda ichma-ich joylashgan kesmalar haqidagi lemma keng qo'llaniladi. Metrik fazolar nazariyasida esa "ichma-ich joylashgan sharlar haqidagi teorema" deb ataluvchi quyidagi teorema shunga o'xshash muhim ahamiyatga ega.

3.1-teorema. *X metrik fazo to'la bo'lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Isbot. Zaruriyligi. X to'la metrik fazo bo'lsin va $B_1, B_2, B_3, \dots$ — ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi bo'lib, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intilsin. B_n sharning markazi x_n nuqtada va radiusi r_n bo'lsin. Barcha $m > n$ uchun $\rho(x_n, x_m) < r_n$ va $n \rightarrow \infty$ da $r_n \rightarrow 0$ bo'lgani uchun, sharlarning markazlari ketma-ketligi $\{x_n\}$ fundamentaldir. X to'la metrik fazo bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

mavjud. Aytaylik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

bo'lsin. Har bir n da barcha $m > n$ lar uchun $x_m \in B_n$. Shunday ekan, har bir n da x nuqta B_n shar uchun urinish nuqtasi bo'ladi. Barcha n larda B_n yopiq

bo'lgani uchun $x \in B_n$. U holda

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

Yetarliligi. X da ixtiyoriy $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik berilgan bo'lsin. U holda bu ketma-ketlik uchun shunday n_1 nomer topiladiki, barcha $n > n_1$ nomerlarda $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Markazi x_{n_1} nuqtada va radiusi 1 ga teng B_1 yopiq sharni olamiz. Keyin $n_2 > n_1$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_2$ larda $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ tengsizlik bajarilsin. Markazi, x_{n_2} nuqtada va radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng B_2 yopiq sharni olamiz. Tanlanishiga ko'ra, $B_2 \subset B_1$, $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Endi $n_3 > n_2$ nomerni shunday tanlaymizki, barcha $n > n_3$ larda $\rho(x_n, x_{n_3}) < \frac{1}{2^3}$ tengsizlik bajarilsin. Agar shu usulda $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ nuqtalar tanlangan bo'lsa, u holda $x_{n_{k+1}}$ nuqtani shunday tanlaymizki, $n_{k+1} > n_k$ va barcha $n > n_{k+1}$ larda $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ bo'lsin. Yuqoridagidek markazi $x_{n_{k+1}}$ va radiusi $\frac{1}{2^k}$ ga teng bo'lgan yopiq sharni B_{k+1} orqali belgilaymiz. Sharlarni bunday qurush jarayonini davom ettira borib, ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligini hosil qilamiz va ularning radiuslari ketma-ketligi $\{r_k = \frac{1}{2^{k-1}}\} \quad k \rightarrow \infty$ da nolga intiladi.

Teorema shartiga ko'ra,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset \quad \text{va} \quad x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

bo'lsin. B_k sharlar ketma-ketligining qurilishiga ko'ra x nuqta $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning limiti bo'ladi. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikning $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketligi x nuqtaga yaqinlashgani uchun, $\{x_n\}$ ham x nuqtaga yaqinlashadi. Shunday qilib,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad \triangle$$

3.2-teorema. (*Ber teoremasi*). *To'la metrik fazoni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sonndagi to'plamlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin emas.*

Isbot. Faraz qilaylik

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

bo'lsin, bu yerda M_n larning har biri hech yerda zich bo'lmagan to'plamlar. Radiusi 1 ga teng biror S_0 yopiq sharni olamiz. Farazimizga ko'ra M_1 to'plam S_0 da zichmas. Shuning uchun radiusi $\frac{1}{2}$ dan kichik shunday yopiq $S_1 \subset S_0$ shar mavjudki, $S_1 \cap M_1 = \emptyset$. Hech yerda zichmas M_2 to'plam S_1 sharda ham zichmas, shunday ekan, radiusi $\frac{1}{3}$ dan kichik shunday $S_2 \subset S_1$ yopiq shar mavjudki, $S_2 \cap M_2 = \emptyset$ va hokazo. Jarayonni shu usulda cheksiz davom ettirib, yopiq sharlarning shunday ichma-ich joylashgan $\{S_n\}$ ketma-ketligini hosil qilamizki, ularning radiuslari ketma-ketligi nolga intiladi. 3.1— teoremaga ko'ra

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset.$$

Faraz qilaylik, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ bo'lsin. S_n sharlarning tuzilishiga ko'ra ixtiyoriy n da $x \notin M_n$, shunday ekan,

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad \text{ya'ni} \quad X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Bu farazimizga zid. $\triangle$

Xususiyl holda, isbotlangan teoremadan kelib chiqadiki, yakkaalangan nuqtalar-siz to'la metrik fazo sanoqsizdir.

3.2. Metrik fazolarni to'ldirish

Agar R metrik fazo to'la bo'lmasa, uni biror usul bilan (aslini olganda yagona usul bilan) biror to'la metrik fazo ichiga joylashtirishimiz mumkin.

3.3-ta'rif. Agar: 1) R metrik fazo R^* to'la metrik fazoning qism fazosi bo'lsa, 2) R to'plam R^* ning hamma yerida zich, ya'ni $[R] = R^*$ bo'lsa, u holda R^* metrik fazo R metrik fazoning to'ldirilgani deyiladi.

3.3-teorema. Har bir R metrik fazo to'ldirilgan fazoga ega va bu to'ldirilgan fazo R ning nuqtalarini qo'zg'almas holda qoldiruvshi izometriya aniqlig'ida yagonadir.

Isbot. Dastlab to'ldirilgan fazo yagonaligini isbotlaymiz. R^* va R^{**} lar R ning ikkita to'ldirilgan fazolari bo'lib, ρ_1 va ρ_2 mos ravishda ulardagi masofalar bo'lsin. Ta'rifga ko'ra har bir $x^* \in R^*$ uchun shunday $\{x_n\} \subset R$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $\{x_n\} \rightarrow x^*$ bo'ladi. U holda

$$\lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, x_m) = \lim_{m \geq n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, x_m) = 0$$

munosabatga ko'ra, $\{x_n\}$ ketma-ketlik R , R^* va R^{**} fazolarda fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Shuning uchun, yagona $x^{**} \in R^{**}$ mavjud bo'lib, $\{x_n\} \rightarrow x^{**}$. Bu x^{**} nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas. Chunki, agar $\{x_n\} \rightarrow x^*$ va $\{y_n\} \rightarrow x^*$ bo'lsa,

$$z_n = \begin{cases} x_k, & \text{agar } n = 2k - 1, \\ y_k, & \text{agar } n = 2k \end{cases}$$

ketma-ketlik ham x^* ga yaqinlashadi. Tuzilishiga ko'ra, $\{z_n\}$ fundamental va uning $\{x_k\}$ qisman ketligi x^{**} nuqtaga yaqinlashadi. U holda $\{z_n\}$ ning o'zi ham x^{**} ga yaqinlashadi va shunday ekan, $\{y_n\}$ qisman ketma-ketlik ham x^{**} ga yaqinlashadi. Ko'rsatilgan yo'l har bir $x^* \in R^*$ uchun yagona x^{**} ni mos qo'yadi. R^* va R^{**} o'rtasida $\varphi(x^*) = x^{**}$ moslikni o'rnatamiz. Agar $x \in R$ bo'lsa, $x \in R^*$ va $x \in R^{**}$ bo'ladi, hamda $x_n = x$ statsionar ketma-ketlik x elementga R^* va R^{**} fazolarda yaqinlashadi.

Shuning uchun, ixtiyoriy $x \in R$ uchun $\varphi(x) = x$. Bu usulda aniqlangan φ moslik R^* ni R^{**} ga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Endi φ ning izometriya ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik,

$$\{x_n\} \rightarrow x^*, \quad x^* \in R^* \quad \text{va} \quad \{x_n\} \rightarrow x^{**}, \quad x^{**} \in R^{**}$$

va

$$\{y_n\} \rightarrow y^*, \quad y^* \in R^* \quad \text{va} \quad \{y_n\} \rightarrow y^{**}, \quad y^{**} \in R^{**}$$

bo'lsin. U holda metrikaning uzluksizlik xossasiga ko'ra

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$$

va

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Bundan

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Demak, R^* ni R^{**} ga o'zaro bir qiymatli akslantiruvshi φ moslik mavjud bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

- 1) barcha $x \in R$ lar uchun $\varphi(x) = x$;
- 2) agar $x^* \leftrightarrow x^{**}$, $y^* \leftrightarrow y^{**}$ bo'lsa, u holda $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$.

To'ldirilgan fazoning yagonaligi isbotlandi.

Endi to'ldirilgan fazoning mavjudligini isbotlaymiz. R ixtiyoriy metrik fazo bo'lsin. R dan olingan $\{x_n\}$ va $\{x'_n\}$ fundamental ketma-ketliklar $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ shartni qanoatlantirsa, ular ekvivalent deb ataladi va $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ ko'rinishda yoziladi. Tekshirish qiyin emaski, fundamental ketma-ketliklar o'rtasida kiritilgan bu munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitivdir.

Bundan kelib chiqadiki, R ning elementlaridan tuzilgan barcha fundamental ketma-ketliklar to'plami har biri, o'zaro ekvivalent ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan va kesishmaydigan sinflarga ajraladi. Endi R^* fazoni aniqlaymiz. R^* ning elementlari sifatida yuqorida aniqlangan o'zaro ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan iborat sinflarni qabul qilamiz va unda masofani quyidagicha aniqlaymiz. x^* va y^* shunday sinflardan ikkitasi bo'lsin. Bu sinflarning har biridan ixtiyoriy ravishda bittadan vakil tanlaymiz, ya'ni $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ fundamental ketma-ketliklarni olamiz. x^* va y^* orasidagi masofani

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n). \quad (3.10)$$

usulda aniqlaymiz. Masofani bu usulda aniqlash nuqsonlardan xoli ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni (3.10) limit mavjud, hamda $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ vakillarning tanlanishiga bog'liq emas.

Ushbu

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \quad (3.11)$$

tengsizlik ko'rsatadiki, $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ lar fundamental ketma-ketliklar bo'lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n va m lar mavjudki,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. U holda $c_n = \rho(x_n, y_n)$ sonli ketma-ketlik Koshi kriteriyasini qanoatlantiradi va shunday ekan, $\{c_n\}$ chekli limitga ega.

Bu limitning $\{x_n\} \in x^*$ va $\{y_n\} \in y^*$ larning tanlanishiga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,

$$\{x_n\} \in x^*, \quad \{x'_n\} \in x^* \quad \text{va} \quad \{y_n\} \in y^*, \quad \{y'_n\} \in y^*$$

bo'lsin. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ va $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y'_n) = 0$$

bo'ladi. U holda

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

tengsizlikdan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi R^* da (3.10) formula bilan aniqlangan ρ^* akslantirish metrika aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Ishonch hosil qilish qiyin emaski, 1) va 2) aksiomalar bajariladi. Endi uchburchak aksiomasining bajarilishini tekshiramiz. Berilgan R fazoda uchburchak aksiomasi bajarilgani uchun ixtiyoriy, $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$ va $\{z_n\} \in z^*$ fundamental ketma-ketliklar uchun, barcha n lar-da

$$\rho(x_n, z_n) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, z_n)$$

tengsizlikni olamiz, ya'ni

$$\rho^*(x^*, z^*) \leq \rho^*(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

R metrik fazoni R^* ning qism fazosi sifatida qarash mumkinligini ko'rsatamiz.

Har bir $x \in R$ ga $\{x_n = x\}$ statsionar ketma-ketlik va unga ekvivalent fundamental ketma-ketliklardan tashkil bo'lgan sinfni mos qo'yamiz. Bu sinf x ga

yaqinlashuvchi $\{x_n\} \subset R$ ketma-ketliklardan iborat. Tuzilishiga ko'ra bu sinf bo'sh emas. Shu bilan birgalikda, agar $x, y \in R$ uchun

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{va} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

bo'lsa, u holda

$$\rho^*(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Chunki, (3.11) ko'ra

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n).$$

Shunday ekan, har bir $x \in R$ ga unga yaqinlashuvshi fundamental ketma-ketliklar sinfi x^* ni mos qo'yish bilan R ni R^* ning ichiga izometrik akslantiramiz. Bundan keyin R va uning R^* dagi aksini farq qilmay R ni R^* ning qism fazosi deb qarash mumkin. Navbat R metrik fazoning R^* ning hamma yerida zich ekanligini ko'rsatishga keldi. Ixtiyoriy $x^* \in R^*$ element va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. x^* sinfdan vakil tanlaymiz, ya'ni $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikni olamiz.

Endi N nomerni shunday tanlaymizki, $n > N$ va $m > N$ bo'lganda $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ bo'lsin. U holda $n > N$ da

$$\rho^*(x_n, x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

ya'ni x^* ning ixtiyoriy ε - atrofi R ning nuqtasini saqlaydi. Shunday qilib, R ning R^* dagi yopig'i R^* ga teng.

Endi R^* ning to'laligini isbotlash qoldi. Dastlab shuni takidlash lozimki, R^* ning tuzilishiga ko'ra R dan olingan ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik shu ketma-ketlikni saqlovchi $x^* \in R^*$ elementga yaqinlashadi. R fazo R^* da zich bo'lgani uchun R^* dan olingan nuqtalarning ixtiyoriy $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \dots$ fundamental ketma-ketligi uchun R da shunday $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ fundamental ketma-ketlik topiladiki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(x_n, x_n^*) = 0.$$

Buning uchun har bir n da $x_n \in R$ nuqtani $\rho^*(x_n, x_n^*) < 1/n$ shart bo'yisha tanlash yetarli. Tanlangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik R da fundamental va R^* ning aniqlanishiga ko'ra, biror $x^* \in R^*$ ga yaqinlashadi. U holda

$$\rho^*(x^*, x_n^*) \leq \rho^*(x^*, x_n) + \rho^*(x_n, x_n^*)$$

tengsizlikka ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(x^*, x_n^*) = 0,$$

ya'ni $\{x_n^*\}$ ketma-ketlik x^* ga yaqinlashadi. $\triangle$

Misol. 3.10. X — deb ratsional sonlar to'plamini belgilasak, u to'la bo'lmagan metrik fazo bo'ladi. Uning to'ldirilgani X^* — haqiqiy sonlardan iborat metrik fazo

bo'ladi. $C_2[a, b]$ to'la bo'lmagan metrik fazo bo'ladi. Uning to'ldirilgani $L_2[a, b]$ fazodir (8 – § ning 8.15 va 8.17-misollariga qarang).

3.3. Metrik fazolarda kompakt to'plamlar

Matematik analiz faniga qat'iy asos solishda va uning rivojida Boltsano-Veyerstrass teoremasi va Geyne-Borel lemmalari fundamental ahamiyatga ega. Boltsano-Veyerstrass teoremasiga ko'ra: sonlar o'qidagi istalgan chegaralangan cheksiz to'plam kamida bitta limitik nuqtaga ega. Geyne-Borel lemmasiga ko'ra: sonlar o'qidagi $[a, b]$ kesmaning istiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin.

Sonlar o'qidagi chegaralangan cheksiz to'plamlar va kesmalarning bu xossalari ni metrik fazolarda umumlashtirish maqsadida biz kompaktlik tushunchasiga kelamiz.

Kompakt to'plamlar tushunchasi metrik fazolardagi asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi. Kompakt to'plamlar kompakt operatorlarni ta'riflashda va ularni tekshirishda qo'llaniladi.

Bizga X metrik fazo berilgan bo'lsin. M va $\{A_\alpha\}$ to'plamlar X ning qism to'plamlari bo'lsin. $\{A_{\alpha'}\}$ to'plamlar sistemasi $\{A_\alpha\}$ to'plamlar sistemasining qismi bo'lsin.

3.4-ta'rif. Agar $M \subset \bigcup_\alpha A_\alpha$ bo'lsa, $\{A_\alpha\}$ to'plamlar sistemasi M to'plamning qoplamasi deyiladi. Agar $\{A_{\alpha'}\} \subset \{A_\alpha\}$ qism sistema uchun $M \subset \bigcup_{\alpha'} A_{\alpha'}$ bo'lsa, u holda $\{A_{\alpha'}\}$ sistema M ning qism qoplamasi deyiladi. Xususiyl holda, $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ bo'lsa, u holda $\{A_\alpha\}$ to'plamlar sistemasi X fazoning qoplamasi deyiladi.

3.5-ta'rif. Agar $K \subset X$ to'plamning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda K kompakt to'plam deyiladi. Agar X fazoning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda X kompakt metrik fazo deyiladi.

Quyida ko'rsatamizki, sonlar o'qida $[a, b]$ kesma kompakt to'plam bo'lishi bilan bir qatorda R^n va C^n fazolarda istalgan chegaralangan yopiq to'plam, kompakt to'plam bo'ladi. Aksincha, sonlar o'qi, R^n va C^n fazolar kompakt bo'lmagan metrik fazolarga misol bo'ladi.

Endi 3.5 ta'rifga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

3.6-ta'rif. Agar K to'plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa K ga kompakt to'plam deyiladi.

3.7-ta'rif. Agar M to'plamning yopig'i $[M]$ kompakt to'plam bo'lsa, yoki ixtiyoriy $\{x_n\} \in M$ ketma-ketlikdan X da yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, M ga nisbiy kompakt to'plam deyiladi.

Endi biz R^n yoki C^n fazolardagi to'plamlarning kompaktlik kriteriysini be-

ramiz. Quyida θ bilan $(0, 0, \dots, 0) \in R^n$ nuqta belgilangan.

3.4-teorema. R_p^n , $p \geq 1$ (C_p^n , $p \geq 1$) metrik fazodagi K to'plam kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan va yopiq bo'lishi yetarli va zarurdir.

Isbot. *Yetarliligi.* Chegaralangan va yopiq $K \subset R_p^n$ to'plam berilgan bo'lsin. K chegaralangan to'plam bo'lganligi uchun u biror $B[\theta, r]$ sharda saqlanadi, ya'ni

$$\rho(x, \theta) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq r, \quad \forall x \in K. \quad (3.12)$$

Endi K to'plamdan ixtiyoriy $\{x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})\}$ ketma-ketlik olamiz. $\{x^{(p)}\}$ ketma-ketlik hadalari ham (3.12) tengsizlikni qanoatlantiradi. Bundan esa $\{x_1^{(p)}\}$, $\{x_2^{(p)}\}, \dots, \{x_n^{(p)}\}$ sonli ketma-ketliklarning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Boltsano-Veyerstrass teoremasiga ko'ra $\{x_1^{(p)}\}$ ketma-ketlikdan biror $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\{x_1^{(p_{k_1})}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Chegaralangan $\{x_2^{(p_{k_1})}\}$ ketma-ketlikdan Boltsano-Veyerstrass teoremasiga ko'ra biror $x_2^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\{x_2^{(p_{k_2})}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu holda ham $\{x_1^{(p_{k_2})}\}$ qisman ketma-ketlik $x_1^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi bo'ladi. Xuddi shu yo'l bilan n -chi qadamda chegaralangan $\{x_n^{(p_{k_{n-1}})}\}$ ketma-ketlikdan Boltsano-Veyerstrass teoremasiga ko'ra biror $x_n^{(0)}$ songa yaqinlashuvchi $\{x_n^{(p_{k_n})}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Natijada hosil bo'lgan $\{x^{(p_{k_n})} = (x_1^{(p_{k_n})}, x_2^{(p_{k_n})}, \dots, x_n^{(p_{k_n})})\}$ ketma-ketlik $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ elementga yaqinlashadi. K yopiq to'plam bo'lgani uchun $x^{(0)} \in K$ bo'ladi. 3.6-ta'rifga ko'ra K kompakt to'plam bo'ladi.

Zaruriyligi. Bizga R^n metrik fazodagi K kompakt to'plam berilgan bo'lsin. R^n fazoning $\{B(\theta, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq qoplamasini olamiz. Tabiiyki, $\{B(\theta, n)\}_{n=1}^{\infty}$ ochiq sharlar sistemasi K to'plamni ham qoplaydi. K kompakt to'plam bo'lganligi uchun shunday chekli $\{B(\theta, n_i)\}_{i=1}^{\ell}$ qism sistema mavjudki, u ham K to'plamni qoplaydi. Agar biz $n_1, n_2, \dots, n_{\ell}$ sonlarning eng kattasini n_0 bilan belgilasak, $B(\theta, n_0)$ ochiq shar K ni saqlaydi. Bu esa K to'plamning chegaralangan ekanligini bildiradi. Endi K ning yopiqqligini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni K yopiq bo'lmasin. U holda $R^n \setminus K$ to'plamda K ning hech bo'lmaganda bit-ta limitik nuqtasi mavjud. Uni x^0 bilan belgilaymiz. Limitik nuqta ta'rifiga ko'ra x^0 ga yaqinlashuvchi $\{x_k\}$, $x_k \in K$ ketma-ketlik mavjud. K kompakt to'plam bo'lganligi uchun $\{x_k\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi $\{x_{k_{\ell}}\}$ qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. $\{x_k\}$ ketma-ketlik $x^0 \in R^n \setminus K$ elementga yaqinlashganligi uchun, uning ixtiyoriy qisman ketma-ketligi, jumladan $\{x_{k_{\ell}}\}$ qisman ketma-ketlik ham x^0 ga yaqinlashadi. Bundan $x^0 \in K$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik K ning yopiq to'plam ekanligini isbotlaydi. $\triangle$

3.1-natija. R_p^n , $p \geq 1$ (C_p^n , $p \geq 1$) metrik fazodagi K to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi yetarli va zarurdir.

Metrik fazolarda nisbiy kompaktlik tushunchasi to'la chegaralanganlik tushunchasi bilan ustma-ust tushadi. Su maqsadda to'la chegaralangan to'plam tushunchasini beramiz. Bizga (X, ρ) metrik fazodan olingan A , M to'plamlar va $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin.

3.8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in M$ uchun shunday $a \in A$ mavjud bo'lib, $\rho(x, a) \leq \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A to'plam M to'plam uchun ε to'r deyiladi.

A to'plam M ning qismi bo'lishi shart emas, umuman $A \cap M = \emptyset$ bo'lishi ham mumkin.

3.9-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M to'plamning chekli ε to'ri mavjud bo'lsa, M ga to'la chegaralangan to'plam deyiladi.

Har qanday to'la chegaralangan to'plam chegaralangan bo'ladi, lekin teskarisi o'rinli emas.

3.5-teorema. (X, ρ) to'la metrik fazodagi M to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning to'la chegaralangan bo'lishi yetarli va zarurdir.

Asosiy funksional fazolardan biri $C[a, b]$ fazodir. Bu fazodagi to'plamning kompaktlik kriteriysini keltiramiz. Paragraf so'ngida ℓ_p , $p \geq 1$ fazodagi to'plamlarning kompaktlik kriteriysini beramiz.

$F \subset C[a, b]$ funksiyalar oilasi berilgan bo'lsin.

3.10-ta'rif. Agar shunday $K > 0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\phi \in F$ va $x \in [a, b]$ lar uchun $|\phi(x)| \leq K$ tengsizlik bajarilsa, u holda F funksiyalar oilasi tekis chegaralangan deyiladi.

3.11-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $|x_1 - x_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ hamda barcha $\phi \in F$ lar uchun

$$|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz deyiladi.

3.6-teorema. (Artsela teoremasi). $M \subset C[a, b]$ to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lishi yetarli va zarurdir.

Isbot. Zaruriyligi. $M \subset C[a, b]$ — ixtiyoriy nisbiy kompakt to'plam bo'lsin. $C[a, b]$ to'la metrik fazo bo'lgani uchun 3.5-teoremaga ko'ra, ixtiyoriy ε da M ning chekli $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ elementdan iborat $\varepsilon/3$ to'ri mavjud. Har bir φ_i funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangandir, ya'ni

$$\max_{x \in [a, b]} |\varphi_i(x)| \leq K_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$K = \max_{1 \leq i \leq k} K_i + \varepsilon/3$ deb belgilash kiritamiz. $\varepsilon/3$ — to'r ta'rifiga ko'ra, har bir $\varphi \in M$ uchun birorta φ_i da

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerdan kelib chiqadiki, har bir $x \in [a, b]$ uchun

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K.$$

Shunday qilib, M to'plam - funksiyalar oilasi sifatida tekis chegaralangan ekan. Kantor teoremasiga ko'ra har bir φ_i funksiya $[a, b]$ kesmada tekis uzluksiz bo'ladi. Demak, ixtiyoriy ε son uchun shunday $\delta_i > 0$ mavjud bo'lib, $|x_1 - x_2| < \delta_i$ bo'lganda

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

tengsizlik bajariladi. Aytaylik, $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varphi \in M$ uchun φ_i funksiyaning shunday tanlaymizki, $\rho(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon/3$ bo'lsin. U holda $|x_1 - x_2| < \delta$ shart bajarilganda

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| &\leq |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \\ &\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bundan M ning tekis darajada uzluksizligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Funksiyalarning $M \subset C[a, b]$ oilasi tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lsin. Agar biz, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M ning chekli ε to'ri mavjud ekanligini ko'rsatsak, 3.5 teoremaga ko'ra M ning nisbiy kompakt to'plam ekanligi kelib chiqadi. Barcha $\varphi \in M$ va barcha $x \in [a, b]$ uchun $|\varphi(x)| \leq K$ bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ ni shunday tanlaymizki, barcha $\varphi \in M$ lar uchun $|x_1 - x_2| < \delta$ bo'lganda $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon/5$ shart bajarilsin. Koordinatalar sistemasining OX o'qidagi $[a, b]$ kesmani

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

nuqtalar bilan uzunliklari δ dan kichik oraliqlarga bo'lamiz va bu nuqtalar orqali OY o'qiga parallel (vertikal) to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Keyin OY o'qidagi $[-K; K]$ kesmani

$$-K = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = K$$

nuqtalar bilan uzunliklari $\varepsilon/5$ dan kichik oraliqlarga bo'lamiz va bu bo'linish nuqtalar orqali OX o'qiga parallel (gorizontal) to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Shunday qilib, $[a, b] \times [-K, K]$ to'g'ri to'rtburchak gorizantal tomoni δ dan kichik va vertikal tomoni $\varepsilon/5$ dan kichik yacheykalarga ajraladi. Har bir $\varphi \in M$ funksiyaga uchlari (x_k, y_l) nuqtalarda bo'lgan va har bir x_k nuqtada $\varphi(x_k)$ dan $\varepsilon/5$ dan kichik chetlangan $\psi(x)$ siniq chiziqni mos qo'yamiz (bunday siniq chiziq mavjud).

Bu $\psi(x)$ siniq chiziqning tanlanishiga ko'ra

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$$

bo'lgani uchun

$$|\psi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

tengsizlik bajariladi. Tuzilishiga ko'ra $\psi(x)$ funksiya $[x_k, x_{k+1}]$ kesmada chiziqli bo'lganligi sababli barcha $x \in [x_k, x_{k+1}]$ lar uchun

$$|\psi(x_k) - \varphi(x)| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Endi $x \in [a; b]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi va x_k esa x ga chapdan eng yaqin bo'linish nuqtasi bo'lsin. U holda

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Shunday ekan yuqorida ko'rsatilgan usulda qurilgan barcha $\psi(x)$ siniq chiziqlar chekli va M to'plam uchun ε to'r bo'ladi. 3.5 teoremaga ko'ra M nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. $\triangle$

Misol. 3.11. $C[a, b]$ fazoda

$$F = \{y(s) = \int_a^b K(s, t)x(t)dt, \quad x \in B[0, 1]\} \quad (3.13)$$

funksiyalar oilasini kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $B[0, 1]$ to'plam $C[a, b]$ fazodagi markazi nol ($x(t) \equiv 0$) nuqtada radiusi 1 ga teng bo'lgan yopiq shar. $K(s, t)$ - $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda aniqlangan uzluksiz funksiya.

Yechish. Artsela teoremasiga ko'ra F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatish yetarli. $K(s, t)$ funksiya - $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangan, ya'ni shunday $C > 0$ soni mavjudki, barcha $s, t \in [a, b]$ lar uchun $|K(s, t)| \leq C$ tengsizlik o'rinli. $x \in B[0, 1]$ shartdan $\max |x(t)| \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s)| = \left| \int_a^b K(s, t)x(t)dt \right| \leq \int_a^b |K(s, t)| \cdot |x(t)|dt \leq C \cdot 1 \cdot (b - a).$$

Bu tengsizlik F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini isbotlaydi. Endi F funksiyalar oilasining tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} |y(s_1) - y(s_2)| &= \left| \int_a^b K(s_1, t)x(t)dt - \int_a^b K(s_2, t)x(t)dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |K(s_1, t) - K(s_2, t)| \cdot |x(t)|dt \leq \varepsilon \cdot 1 \cdot (b - a). \end{aligned}$$

So'nggi munosabat $|s_1 - s_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $s_1, s_2 \in [a, b]$ lar va barcha $x \in B[0, 1]$ lar uchun o'rinli. Demak, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz ekan. Shunday qilib, Artsela teoremasiga ko'ra (3.13) tenglik bilan aniqlangan F funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam bo'lar ekan. $\triangle$

Endi tekis chegaralangan, lekin tekis darajada uzluksiz bo'lmagan Φ funksiyalar oilasiga misol keltiramiz.

3.12. $C[0, 1]$ fazoda

$$\Phi = \{x_\alpha(t) = \frac{2\alpha t}{1 + \alpha^2 t^2}, \quad \alpha \in (0; \infty)\} \quad (3.14)$$

funksiyalar oilasini kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Artsela teoremasiga ko'ra (3.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasini tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatishimiz kerak. $(1 - \alpha t)^2 = 1 - 2\alpha t + \alpha^2 t^2 \geq 0$ tengsizlikdan $|x_\alpha(t)| \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis chegaralangan ekan. Tekis darajada uzluksiz emas degan tushunchani ta'riflaymiz.

Agar biror $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $x_\alpha \in \Phi$ va shunday $t_1, t_2 \in [0, 1]$ lar mavjud bo'lib $|t_1 - t_2| < \delta$ tengsizlik bajarilganda ham

$$|x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilmasa, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas deyiladi. Endi $\varepsilon = 1/2$ va $\delta > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. Agar $\alpha > \frac{1}{\delta}$ va $t_1 = \frac{1}{\alpha}$, $t_2 = 0$ bo'lsa, u holda $|t_1 - t_2| = \frac{1}{\alpha} < \delta$ bo'ladi, ammo

$$|x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)| = \frac{2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}}{1 + \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}} = 1 > \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas ekan. Shunday qilib, (3.14) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam emas ekan. $\triangle$

Artsela teoremasining umumlashmasi quyidagicha. C_{MN} bilan M to'plamni N to'plamga akslantiruvchi barcha uzluksiz akslantirishlar to'plamini belgilaymiz. Bu yerda M va N lar kompakt to'plamlar.

3.7-teorema. (*Artsela teoremasining umumlashmasi*). $D \subset C_{MN}$ to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun D ning tekis darajada uzluksiz bo'lishi yetarli va zarur.

Endi ℓ_p , $p \geq 1$ fazoda to'plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini beramiz.

3.8-teorema. $K \subset \ell_p$ to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning chegaralangan va $\varepsilon > 0$ son qanday bo'lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, $\forall n \geq n_0$ va $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in K$ uchun

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

shartning bajarilishi yetarli va zarur.

Isbot. Zaruriyligi. Bizga nisbiy kompakt $K \subset \ell_p$ to'plam berilgan bo'lsin. U holda u to'la chegaralangan bo'lgani uchun, chegaralangan ham bo'ladi. Endi ikkinchi shartning bajarilishini ko'rsatamiz.

Biror $\eta > 0$ sonni olamiz va K uchun chekli η - to'r $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ni qo'ramiz. Har bir $x \in K$ uchun η - to'rga tegishli x_i elementni shunday tanlaymizki, $\rho_p(x, x_i) < \eta$ bo'lsin. Har bir $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell_p$ element uchun $S_n x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$ va $R_n x = (0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$ belgilashlarni kiritamiz. U holda x va $\theta = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ elementlar uchun

$$\begin{aligned} \rho_p(R_n x, \theta) &= \rho_p(x, S_n x) \leq \rho_p(x, x_i) + \rho_p(x_i, S_n x) \leq \rho_p(x, x_i) + \rho_p(S_n x_i, S_n x) + \\ &+ \rho_p(R_n x_i, \theta) \leq 2\rho_p(x, x_i) + \rho_p(R_n x_i, \theta) < 2\eta + \rho_p(R_n x_i, \theta). \end{aligned}$$

Aniqlanishiga ko'ra, har bir belgilangan x element uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_p(R_n x, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Shuning uchun, shunday n_0 nomer mavjudki, $n \geq n_0$ bo'lganda barcha $i = 1, 2, \dots, k$ lar uchun $\rho_p(R_n x_i, \theta) < \eta$ bo'ladi. Shunday ekan, $n \geq n_0$ bo'lganda

$$\rho_p(R_n x, \theta) < 3\eta.$$

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\eta = \varepsilon/3$ desak,

$$\rho_p(R_n x, \theta) = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

bo'ladi.

Yetarliligi. Chegaralangan $K \subset \ell_p$ to'plam uchun $\varepsilon > 0$ son qanday bo'lmasin, shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, $\forall n \geq n_0$ va $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in K$ larda

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon^p$$

tengsizlik bajarilsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun K to'plamning chekli ε - to'ri mavjudligini ko'rsatamiz. Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun n_0 nomerni shunday tanlaymizki, barcha $x \in K$ larda

$$\rho_p(R_{n_0} x, \theta) = \left(\sum_{j=n_0+1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon/2$$

tengsizlik bajarililsin. $K_{n_0} = \{S_{n_0} x : x \in K\}$ to'plamni qaraymiz. Har bir $x \in K$ da $\rho_p(S_{n_0} x, \theta) \leq \rho_p(x, \theta)$ o'rinli va K chegaralangan to'plam bo'lganligi sababli K_{n_0} chegaralangan to'plamdir.

Har bir $S_{n_0}x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}, 0, 0, \dots) \in K_{n_0}$ nuqtaga $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}) \in R_p^{n_0}$ nuqtani mos qo'yish bilan K_{n_0} to'plamni

$$E_{n_0} = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}) : (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0}, 0, 0, \dots) \in K_{n_0}\} \subset R_p^{n_0}$$

to'plamga izometrik mos qo'yamiz. K_{n_0} chegaralangan to'plam bo'lganligi sababli E_{n_0} to'plam $R_p^{n_0}$ da chegaralangan bo'ladi. U holda 3.1-natijaga ko'ra E_{n_0} nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. Demak, unga izomorf bo'lgan K_{n_0} to'plam ham nisbiy kompaktdir. Shunday ekan, K_{n_0} to'plam uchun chekli $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ elementli $\varepsilon/2$ – to'r mavjud. Bu to'plam K uchun ε – to'r bo'ladi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x \in K$ uchun $S_{n_0}x \in K_{n_0}$ va shunday $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ element mavjud bo'lib, $\rho_p(S_{n_0}x, x_i) < \varepsilon/2$ bo'ladi. U holda

$$\rho_p(x, x_i) \leq \rho_p(x, S_{n_0}x) + \rho_p(S_{n_0}x, x_i) = \rho_p(R_n x, \theta) + \rho_p(S_{n_0}x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Demak, 3.5-teoremaga ko'ra K nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. $\triangle$

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. *Fundamental, lekin yaqinlashuvchi bo'lmagan ketma-ketlikka misol keltiring.*
2. *To'la va to'la bo'lmagan metrik fazolarga misollar keltiring.*
3. *$C[a, b]$, $C_1[a, b]$ va $C_2[a, b]$ metrik fazolarni to'lalikka tekshiring.*
4. *$C[a, b]$ va ℓ_2 metrik fazolarda birlik sharning nisbiy kompakt to'plam emasligini isbotlang.*

4-§. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi va uning tadbirlari

Reja:

1. *Qisuvchi akslantirishlar.*
2. *Qisuvchi akslantirishlar prinsipi.*
3. *Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbirlari.*
4. *Qo'zg'almas nuqta.*

Tayanch iboralar. Qisuvchi akslantirish, qo'zg'almas nuqta, integral tehglama, Fredholm tenglamasi.

Berilgan shartlarda tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan bog'liq masalalarni mos metrik fazolardagi biror akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligi va yagonaligi haqidagi masala ko'rinishida ifodalash mumkin. Qo'zg'almas nuqta mavjudligi va yagonaligi belgilari ichida eng sodda va shu bilan

birga juda muhim belgi - bu "qisuvchi akslantirishlar prinsipi" deb nomlanuvchi belgidir.

4.1-ta'rif. X metrik fazo va uni o'zini-o'ziga akslantiruvshi A akslantirish berilgan bo'lsin. Agar shunday $\alpha \in (0; 1)$ son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (4.1)$$

tengsizlik bajarilsa, A qisuvchi akslantirish deb ataladi.

Har bir qisuvchi akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, agar $x_n \rightarrow x$ (ya'ni $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$) bo'lsa, u holda

$$\rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha \rho(x_n, x)$$

bo'lgani uchun $Ax_n \rightarrow Ax$.

Agar $A : X \rightarrow X$ akslantirish uchun shunday $x \in X$ nuqta mavjud bo'lib $Ax = x$ tenglik bajarilsa, x nuqta A akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.

4.1-teorema. (*Qisuvchi akslantirishlar prinsipi*). *To'la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisuvchi akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.*

Isbot. X metrik fazodan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz. Keyin $x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A^2x_0, x_3 = Ax_2 = A^3x_0, \dots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0, \dots$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz. Ixtiyoriy $m, n (n < m)$ natural sonlar uchun

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n x_0, A^m x_0) \leq \alpha^n \rho(x_0, A^{m-n} x_0) = \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\ &\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli. $\alpha \in (0, 1)$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \rho(x_0, x_1) = 0.$$

Shuning uchun $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlikdir. X to'la metrik fazo va $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lgani uchun u yaqinlashuvchi. Aytaylik,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

bo'lsin. U holda A akslantirishning uzluksizligiga ko'ra

$$Ax = A \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Shunday qilib, A akslantirish uchun qo'zg'almas nuqta mavjud ekan. Uning yagonaligini isbotlaymiz. Agar

$$Ax = x, \quad Ay = y$$

desak, (4.1) tengsizlikka ko'ra

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Bundan $\alpha \in (0; 1)$ bo'lgani uchun

$$\rho(x, y)(1 - \alpha) \leq 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0, \quad \text{ya'ni} \quad x = y$$

bo'lishi kelib chiqadi. Qo'zg'almas nuqta yagona ekan. $\triangle$

4.1. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbirlari

Qisuvchi akslantirishlar prinsipini har xil turdagi tenglamalar yechimlari mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlarni isbotlashda qo'llash mumkin. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi $Ax = x$ tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchungina qo'llanibgina qolmay, bu tenglama yechimini topish usulini ham beradi.

Qisuvchi akslantirishlar prinsipining tadbiriga doir misollar qaraymiz.

4.1. R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

formulalar orqali aniqlangan A akslantirishni qisuvchilik shartlarini toping.

Yechish. Qanday shartlarda A qisuvchi akslantirish bo'ladi? Bu savolga javob fazoda qanday metrika berilishiga bog'liq. Biz quyida uch xil variantni qaraymiz:

a) R_∞^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

bo'lsin.

$$\begin{aligned} \rho(y', y'') &= \max_{1 \leq i \leq n} |y'_i - y''_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x'_j - x''_j| = \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Bu yerdan kelib chiqadiki, A qisuvchi akslantirish bo'lishi uchun

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \tag{4.2}$$

shartning bajarilishi yetarli. Shuning uchun R_∞^n fazoda (4.2) shartni A akslantirishning qisuvchilik sharti sifatida qabul qilamiz.

b) R_1^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned}\rho(y', y'') &= \sum_{i=1}^n |y'_i - y''_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x'_j - x''_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \sum_{j=1}^n |x'_j - x''_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \rho(x', x'').\end{aligned}$$

Bu yerdan ko'rinadiki, A akslantirish uchun qisuvchilik sharti R_1^n fazoda

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (4.3)$$

ko'rinishga ega.

c) R^n fazo, ya'ni

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned}\rho^2(y', y'') &= \sum_{i=1}^n (y'_i - y''_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x'_j - x''_j) \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \sum_{j=1}^n (x'_j - x''_j)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \rho^2(x', x'').\end{aligned}$$

Yuqorida keltirilgan tenglik va tengsizliklarga ko'ra R^n fazoda A akslantirishning qisuvchilik sharti

$$\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \leq \alpha < 1 \quad (4.4)$$

ko'rinishga ega.

Shunday qilib, agar (4.2)-(4.4) shartlardan birortasi bajarilsa, u holda yagona $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqta mavjud bo'lib,

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

bo'ladi. Bundan tashqari bu nuqtada ketma-ket yaqinlashishlar quyidagi ko'rinishga ega

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i, \quad x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bu yerda $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ sifatida R^n dagi ixtiyoriy nuqtani qabul qilish mumkin.

Qaralayotgan $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo'lishi uchun (4.2)-(4.4) shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi yetarli. Isbotlash mumkinki, (4.2) va (4.3)

shartlar mos ravishda R_∞^n va R_1^n fazolarda $y = Ax$ akslantirish qisuvchi bo'lishi uchun zarur ham bo'ladi.

Ta'kidlash lozimki, (4.2)-(4.4) shartlarning birortasi ham ketma-ket yaqinlashishlar usulining tadbiri uchun zarur emas.

Agar $|a_{ij}| < n^{-1}$ bo'lsa, u holda (4.2)-(4.4) shartlarning hammasi bajariladi va ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llash mumkin.

Agar $|a_{ij}| \geq n^{-1}$ bo'lsa, u holda (4.2)-(4.4) shartlarning birortasi ham bajarilmaydi.

4.2. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining integral tenglamalarga tadbiqi Fredholm tenglamasi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipini ushbu

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \varphi(x) \quad (4.5)$$

ikkinchi tur Fredholm integral tenglamasi yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash uchun qo'llaymiz. Bu yerda K (integral tenglama yadrosi) va φ berilgan funksiyalar, f - izlanayotgan (noma'lum) funksiya, λ esa ixtiyoriy parametr.

Ko'rsatamizki, qisuvchi akslantirishlar prinsipini λ parametrning yetarlicha kichik qiymatlarida qo'llash mumkin.

Faraz qilamiz, $K(x, y)$ — $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda, $\varphi(x)$ — $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Shunday ekan, musbat M son mavjud bo'lib, barcha $x, y \in [a, b]$ uchun $|K(x, y)| \leq M$ tengsizlik bajariladi. To'la $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \varphi(x) \quad (4.6)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M(b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

yoki

$$\rho(Af_1, Af_2) \leq |\lambda| M(b - a) \cdot \rho(f_1, f_2).$$

Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b - a)} \quad (4.7)$$

bo'lganda A qisuvchi akslantirish bo'ladi. Qisuvchi akslantirishlar prinsipiga asosanib xulosa qilamizki, (4.7) shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy λ da (4.5) Fredholm tenglamasi yagona uzluksiz yechimga ega.

Bu yechimga intiluvchi ketma-ket yaqinlashishlar $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f_{n-1}(y)dy + \varphi(x)$$

ko'rinishga ega, bu yerda f_0 sifatida ixtiyoriy uzluksiz funksiyani olish mumkin.

Chiziqlimas integral tenglamalar. Qisuvchi akslantirishlar prinsipining

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

ko'rinishdagi chiziqlimas integral tenglamalarga tadbiqini qaraymiz. Bu yerda K va φ funksiyalar uzluksiz bo'lib, bundan tashqari K o'zining 3—chi funksional argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday $L > 0$ mavjud bo'lib,

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$$

tengsizlik barcha $x, y \in [a, b]$ va z_1, z_2 lar uchun o'rinli bo'lsin. Bu holda $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y)) dy + \varphi(x)$$

formula vositasida akslantiruvchi $g = Af$ akslantirish uchun

$$\max_{a \leq x \leq b} |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| \cdot L \cdot (b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Shunday ekan,

$$|\lambda| < \frac{1}{L \cdot (b - a)}$$

shartda A akslantirish qisuvchi bo'ladi.

Volterra tenglamasi. Endi Volterra tipidagi

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \quad (4.8)$$

tenglamani qaraymiz. Agar $y > x$ da $K(x, y) = 0$ desak, (4.8) Volterra tenglamasi (4.5) ko'rinishdagi ikkinchi tur Fredholm tenglamasiga keladi.

Biroq Fredholm integral tenglamasi holida biz λ parametrning kichik qiymatlari bilan chegaralanishga majburmiz. Volterra tenglamasi holida qisuvchi akslantirishlar prinsipi (va ketma-ket yaqinlashishlar usuli) ni λ ning barcha qiymatlarida qo'llash mumkin. Aniqrog'i, qisuvchi akslantirishlar prinsipining quyidagi umumlashmasi o'rinli.

4.2-teorema. *X metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi A uzluksiz akslantirish uchun biror n da $B = A^n$ - qisuvchi akslantirish bo'lsin. U holda $Ax = x$ tenglama yagona yechimga ega bo'ladi.*

Isbot. $x \in X$ nuqta B akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi bo'lsin, ya'ni $Bx = x$. U holda B qisuvchi akslantirishga ketma-ket yaqinlashishlar usulini qo'llasak,

$$Ax = ABx = AB^k x = AA^{nk} x = A^{nk+1} x = A^{nk} Ax = B^k Ax = B^k x_{0 \rightarrow x}, k \rightarrow \infty.$$

Chunki ixtiyoriy $x_0 \in X$, xususiyl holda $x_0 = Ax$ uchun, $Bx_0, B^2x_0, \dots, B^kx_0, \dots$ ketma-ketlik x qo'zg'almas nuqtaga yaqinlashadi. Shunday ekan, $Ax = x$. Bu qo'zg'almas x nuqta yagona, chunki A uchun qo'zg'almas bo'lgan x nuqta $B = A^n$ uchun ham qo'zg'almas nuqtadir, B esa yagona qo'zg'almas nuqtaga ega. $\triangle$

4.2. $C[a, b]$ fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi va

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy + \varphi(x) \quad (4.9)$$

formula bilan aniqlangan A akslantirishning biror darajasi qisuvchi ekanligini ko'rsating.

Yechish. $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f_1 va f_2 funksiyalarni olamiz. U holda

$$\begin{aligned} |(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \cdot M(x - a) \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \end{aligned}$$

Bu yerda

$$M = \max_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|.$$

Olingan tengsizlikdan kelib chiqadiki,

$$|(A^2f_1)(x) - (A^2f_2)(x)| \leq |\lambda|^2 \cdot M^2 \cdot \frac{(x - a)^2}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Umuman,

$$\begin{aligned} |(A^n f_1)(x) - (A^n f_2)(x)| &\leq |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x - a)^n}{n!} \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)| = \\ &= |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(x - a)^n}{n!} \rho(f_1, f_2). \end{aligned}$$

Ixtiyoriy λ uchun n nomerni shunday tanlash mumkinki,

$$|\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(b - a)^n}{n!} < 1$$

tengsizlik bajariladi. U holda $B = A^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. $\triangle$

Shuning uchun, yuqoridagi tasdiqqa asosan (4.8) Volterra tenglamasi har qanday λ da yagona yechimga ega.

Mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar

1. Qisuvchi akslantirish prinsipining umumlashmasini ayting.
2. R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi $y = Ax + b$ akslantirishning qisuvchilik shartlarini toping.
3. $C[a, b]$ fazoda (4.9) tenglik bilan aniqlangan akslantirishning qisuvchilik shartlarini keltiring.

I-bobni takrorlash uchun test savollari

1. $R = (-\infty; +\infty)$ fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = |x - y|$ B) $\rho(x, y) = |x| - |y|$
 C) $\rho(x, y) = |x - y|^2$ D) $\rho(x, y) = |x| + |y|$
2. R^n fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$ B) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$
 C) $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ D) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2$
3. R_1^n fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$ B) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$
 C) $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ D) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2$
4. R_∞^n fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$ B) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$
 C) $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ D) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2$
5. $C[a, b]$ fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt}$ B) $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$
 C) $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$ D) $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt$
6. $C_1[a, b]$ fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt}$ B) $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$
 C) $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$ D) $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt$
7. $C_2[a, b]$ fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt}$ B) $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$
 C) $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$ D) $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt$
8. $\ell_p, p \geq 1$ fazo metrikasini ko'rsating.
 A) $\rho(x, y) = \sup_{1 \leq k < \infty} |x_k - y_k|$ B) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} |x_k - y_k|$
 C) $\rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$ D) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p$

9. ℓ_2 fazo metrikasini ko'rsating.
- A) $\rho(x, y) = \sup_{1 \leq k < \infty} |x_k - y_k|$ B) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} |x_k - y_k|$
 C) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}$ D) $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2$
10. Ratsional sonlar to'plami Q ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.
 A) R B) Q C) $\emptyset$ D) $R \setminus Q$
11. Ratsional sonlar to'plami Q ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.
 A) R B) Q C) $\emptyset$ D) $R \setminus Q$
12. Ratsional sonlar to'plami Q ning barcha yakkaalangan nuqtalari to'plamini toping.
 A) R B) Q C) $\emptyset$ D) $R \setminus Q$
13. Butun sonlar to'plami Z ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.
 A) R B) Q C) $\emptyset$ D) Z
14. Butun sonlar to'plami Z ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.
 A) R B) Q C) $\emptyset$ D) Z
15. Butun sonlar to'plami Z ning barcha yakkaalangan nuqtalari to'plamini toping.
 A) R B) Q C) $\emptyset$ D) Z
16. R dagi ochiq to'plamni toping.
 A) $(0, 2)$ B) $(0, 2]$ C) $[0, 2)$ D) $[0, 2]$
17. R dagi yopiq to'plamni toping.
 A) $(0, 1)$ B) $[0, 1)$ C) $(0, 2]$ D) $[0, 4]$
18. R dagi chegaralangan to'plamni toping.
 A) $[0, 1]$ B) $(-\infty, 0)$ C) Q D) $(0, +\infty)$
19. (X, ρ) metrik fazoda chegaralangan to'plam ta'rifini keltiring.
 A) $F \subset X$ to'plam X dagi birorta sharda saqlansa
 B) $F \subset X$ - yopiq to'plam bo'lsa
 C) $F \subset X$ - ochiq to'plam bo'lsa
 D) $F \subset X$ - chekli yoki sanoqli dona elementdan iborat bo'lsa.
20. Quyidagilar ichidan metrika shartlarini ajrating.
 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$.
 3) $\rho(\lambda x, y) = \lambda \rho(x, y)$, 4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
 A) 1, 2, 3 B) 1, 2, 4 C) 1, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

21. Quyidagilarning qaysilari (X, ρ) metrik fazodagi yopiq to'plam ta'rifi bo'ladi.
1. Agar F to'plam barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlasa.
 2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa.
 3. Agar $F = [F]$ bo'lsa.
 4. Agar F ning to'ldiruvchisi ochiq to'plam bo'lsa.
- A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4
22. Quyidagilarning qaysilari (X, ρ) metrik fazodagi ochiq to'plam ta'rifi bo'ladi.
1. Agar F to'plam barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlasa.
 2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa.
 3. Agar $F = [F]$ bo'lsa.
 4. Agar F ning to'ldiruvchisi yopiq to'plam bo'lsa.
- A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 2, 4
23. $R = (-\infty, \infty)$ metrik fazoning hamma yerida zich to'plamni toping.
- A) Q - ratsional sonlar to'plami
 - B) tub sonlar to'plami
 - C) Z - butun sonlar to'plami
 - D) N - natural sonlar to'plami
24. $R = (-\infty, \infty)$ metrik fazoning hamma yerida zich to'plamni toping.
- A) murakkab sonlar to'plami
 - B) $R \setminus Q$ - irratsional sonlar to'plami
 - C) Z - butun sonlar to'plami
 - D) N - natural sonlar to'plami
25. $R = (-\infty, \infty)$ metrik fazoning hech yerida zich bo'lmagan to'plamni toping.
- A) Q - ratsional sonlar to'plami
 - B) $R \setminus Q$ - irratsional sonlar to'plami
 - C) Z - butun sonlar to'plami.
 - D) $[0, \infty)$
26. Kantor to'plamining xossalari keltirilgan javobni toping.
- A) $[0, 1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, sanoqli to'plam.
 - B) $[0, 1]$ ning hamma yerida zich, nol o'lchovli, kontinuum quvvatli to'plam.
 - C) $[0, 1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, ochiq to'plam.
 - D) $[0, 1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, kontinuum quvvatli to'plam.
27. Quyidagi tasdiqlardan to'g'riklarini ajrating.
- 1) Ochiq to'plamning to'ldiruvchisi yopiq to'plamdir.
 - 2) Ochiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq to'plamdir.
 - 3) Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plamdir.

- 4) Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plamdir.
 A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3
28. Quyidagi tasdiqlardan to'g'rilarini ajrating.
 1) Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq to'plamdir.
 2) Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi yopiq to'plamdir.
 3) Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plamdir.
 4) Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning kesishmasi yopiq to'plamdir.
 A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3
29. Quyida keltirilganlardan qaysilari to'la metrik fazo bo'ladi.
 1) $R = (-\infty, \infty)$ 2) R^n 3) $C[a, b]$ 4) ℓ_2 5) $C_2[a, b]$.
 A) 1, 2, 3, 4 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 2, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5
30. $C_1[-1, 1]$ fazoda quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari nolga yaqinlashadi.
 1) $f_n(x) = x^n$ 2) $f_n(x) = 1 - x^n$ 3) $f_n(x) = (\sin x)^n$ 4) $f_n(x) = (\cos x)^n$
 A) 1, 3, 4 B) 1, 2 C) 2, 4 D) 1, 2, 3
31. $C_2[0, 1]$ fazoda $x_n(t) = t^n + t^{n+1}$ ketma-ketlikning limitini toping.
 A) $x(t) = 0$ B) $x(t) = 2t$ C) $x(t) = 1$ D) $x(t) = 2$
32. R^n fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.
 A) $\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$
 B) $\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 C) $(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$
 D) $|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$
33. R^n fazoda Minkovskiy tengsizligini tozing.
 A) $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$
 B) $(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$
 C) $|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$
 D) $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
34. R^n fazoda Gyolder tengsizligini ko'rsating.
 A) $|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$
 B) $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2$

- C) $\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
- D) $\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$
35. Yopiq birlik shar qaysi fazoda kompakt to'plam bo'ladi.
 A) R^n da B) $C[a, b]$ da C) ℓ_2 da D) m da
36. R^n fazoda kompaktlik kriteriysini keltiring.
 A) Toplamning chegaralangan va ochiq bo'lishi
 B) To'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi
 C) To'plamning chegaralangan va sanoqlo bo'lishi
 D) To'plamning chegaralangan bo'lishi
37. R^n fazoda nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.
 A) To'plamning chegaralangan va ochiq bo'lishi
 B) To'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi
 C) To'plamning chegaralangan va sanoqlo bo'lishi
 D) Toplamning chegaralangan bo'lishi
38. $C_2[a, b]$ fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.
 A) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$
 B) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 C) $\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$
 D) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$
39. Minkovskiy tengsizligini integral formada yozing.
 A) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$
 B) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 C) $\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$
 D) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$
40. Gyolder tengsizligini integral formada yozing.
 A) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$
 B) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 C) $\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$
 D) $\left| \int_a^b x(t)y(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |x(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2 dt$

41. To'la metrik fazoni ko'rsating.
 A) $C[a, b]$ B) $C_1[a, b]$ C) $C_2[a, b]$ D) $C_3[a, b]$
42. Separabel metrik fazolar keltirilgan javobni toping.
 A) $R^n, C[a, b], \ell_2, m$ B) $R_1^n, C_2[a, b], \ell_2, c_0$
 C) $R_\infty^n, C_1[a, b], \ell_2, m$ D) $C^n, R_p^n, C_2[a, b], m$
43. Separabel bo'lmagan metrik fazoni ko'rsating.
 A) R^n B) $C[a, b]$ C) m D) ℓ_2
44. Birlik shar qaysi fazoda nisbiy kompakt to'plam bo'ladi?
 A) R^n da B) $L_2[0, 1]$ da C) ℓ_2 da D) m da
45. Metrik fazoda M to'plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.
 A) Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun M to'plamning chekli ε to'ri mavjud bo'lishi
 B) M ning chegaralangan va yopiq bo'lishi
 C) M ning chegaralangan va ochiq bo'lishi
 D) M ning chegaralangan va sanoqli bo'lishi
46. Ber teoremasini bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan.
 A) To'la metrik fazo, hech yerda zich bo'lmagan to'plam, birlashma
 B) Nisbiy kompakt to'plam, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz
 C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, qo'zg'almas nuqta
 D) Metrik fazo, to'ldirilgan metrik fazo, izometriya aniqligida yagona
47. Artsela teoremasini bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan.
 A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma
 B) Nisbiy kompakt to'plam, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz
 C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta
 D) Metrik fazo, to'ldirilgan metrik fazo, izometriya aniqligida yagona
48. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi haqidagi teoremani bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan.
 A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma
 B) Nisbiy kompakt to'plam, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz
 C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta
 D) Metrik fazo, to'ldirilgan metrik fazo, izometriya aniqligida yagona
49. Metrik fazolarni to'ldirish haqidagi teoremani bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan.
 A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

- B) Nisbiy kompakt to'plam, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz
 C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta
 D) Metrik fazo, to'ldirilgan metrik fazo, izometriya aniqligida yagona
50. ℓ_p , $p \geq 1$ fazoda nisbiy kompakt to'plam kriteriysini quyidagi tasdiqlardan qaysilarini birlashtirish bilan hosil qilish mumkin.
- 1) $K \subset \ell_p$ chegaralangan to'plam
 - 2) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, barcha $n \geq n_0$ va barcha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in K$ uchun
 - 3) $\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p < \varepsilon^p$ tengsizlikning bajarilishi
 - 4) $\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \leq 1$ tengsizlikning bajarilishi
- A) 2+3+4 B) 1+2+3 C) 1+2+4 D) 1+3+4