

ДИНАМИКА ВАГОНА

Ташкент - 2009

ГАЖК «

»

**Ташкентский институт инженеров
железнодорожного транспорта**

ДИНАМИКА ВАГОНА

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
СБОРНИК ЗАДАЧ
С МЕТОДИЧЕСКИМИ УКАЗАНИЯМИ К ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

**для подготовки магистров
по специальности 5А521104 - «Вагоны»**

Ташкент – 2009

УДК 629.43/46(075)

Учебное пособие содержит: теоретический материал по курсу «Динамика вагона»; сборник задач; методические указания к выполнению практических работ. Учебное пособие предназначено для подготовки магистров по специальности 5А521104-«Вагоны».

В учебном пособии с методическими указаниями приведены теоретические сведения, цели выполнения работ, даны рекомендации по порядку проведения работ и их оформлению, приведены справочные данные о вагонах, находящихся в эксплуатации.

Методические указания могут быть полезны магистрантам обучающимся по специальности 5А521104 – «Вагоны», инженерам и специалистам в области проектирования и расчета вагонов, а также студентам, обучающимся по направлению 5521100 – “Наземные транспортные системы”.

Рекомендовано к изданию решением Учебно-методической комиссии Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта.

Составитель: к.т.н., доц. кафедры «Вагоны» С.А. Хромов.

Рецензенты: к.т.н., доц., декан ф-та “Автомобилестроение” ТАДИ
Д.И. Хашимов;
к.т.н., доц. зав.кафедрой «Локомотивы» ТашИИТ
Б.Т Файзиев.

©Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, 2009г.

Введение

При изучении дисциплины «Динамика вагона» для более полного и глубокого изучения основ теоретических и экспериментальных методов определения условий безопасного и плавного движения вагона по железнодорожным путям, величин динамических сил взаимодействия, необходимых для расчета вагонов и элементов пути на прочность и надежность, установления критериев оценки динамических качеств вагонов, современный специалист должен владеть методами таких расчетов.

Настоящее учебное пособие со сборником задач и методическими указаниями к выполнению практических работ, предназначено для более глубокого изучения курса «Динамика вагона», выработке навыков решения конкретных задач динамики при расчете и проектировании новых вагонов и их узлов, а также при модернизации существующих, содержит необходимые теоретические и практические сведения, необходимые для решения задач динамики.

1. Общие положения

Динамика вагона – это физический процесс возникновения сил (упругих, трения и инерционных), составных элементов вагона вследствие взаимодействия его ходовых частей и рельсового пути при его движении, а также при взаимодействии с локомотивом и другими вагонами.

Железнодорожный путь и подвижной состав, в частности вагон, представляют единую механическую систему, в которой они взаимодействуют, находясь в зависимости друг от друга. Назначение пути и ходовых частей — направлять движение подвижного состава, обеспечивать для него устойчивую непрерывную опору с минимальным сопротивлением движению.

В реальных условиях рельсы и колеса имеют неровности на поверхностях катания, а также некоторые другие технические особенности (кривизна пути, коничность поверхностей катания колес и др.), в результате чего в элементах пути и подвижного состава возникают различные колебания, а между ними — динамические силы взаимодействия. Энергия локомотива затрачивается не только на полезное поступательное перемещение вагонов, но и на преодоление сил трения, возбуждение колебаний, вызывающих

процесс износа и разрушения вагонов и пути. Снижение сил динамического взаимодействия может быть достигнуто совершенствованием конструкций пути и ходовых частей, а также улучшением технического содержания их в эксплуатации.

Основная задача исследования динамических процессов в системе «вагон—путь» заключается в том, чтобы определить оптимальные значения параметров этой системы (например, геометрических размеров, величины масс, жесткостей и т. п.), при которых сводятся к минимуму вредные колебания и динамические силы в конструкциях подвижного состава и пути.

Этому должны предшествовать решения задач по исследованию колебательных процессов вагона и его отдельных частей, установление критериев для оценки плавности его хода, устойчивости против схода с рельсов, опрокидывания и выжимания из состава поезда, анализ способов подавления извилистого движения вагонов и вибраций их элементов, возникающих вследствие взаимодействия ходовых частей вагона и пути, а также вагонов между собой и с локомотивами в составе поезда.

Совокупность методов решения перечисленных здесь задач и представляет собой содержание науки «Динамика вагона» на современном этапе ее развития.

1.1. Основные теоретические сведения

Дисциплина «Динамика вагона» базируется на технической теории колебаний. В основе ее лежат общие принципы аналитической механики, которые чаще всего используются в форме закона Ньютона, уравнения Даламбера или уравнения Лагранжа второго рода [3,4,7,9]. Приложение законов аналитической механики к изучению колебаний экипажей приводит к системам дифференциальных уравнений, порядок которых равен удвоенному числу степеней свободы исследуемой механической системы. Изучение динамических процессов в механических системах сводится к составлению и анализу дифференциальных уравнений, которыми описываются эти процессы.

Для решения и анализа дифференциальных уравнений используются: аналитические методы, методы физических аналогий, методы электронного моделирования и приближенные методы численного интегрирования [16,17]. Выбор метода решений зависит

от конечной цели исследования, от вида и структуры дифференциальных уравнений, которыми описывается изучаемый процесс. При использовании аналитических методов обычно получают конечные формулы для искомых функций в переходном или установившемся колебательном процессе. Эти формулы однозначно определяют динамические свойства изучаемой механической системы. Часто используют качественные аналитические методы изучения дифференциальных уравнений, позволяющие определить собственные значения и собственные векторы системы, что для случая колебаний экипажей означает определение собственных частот и собственных форм.

Особым разделом динамики является исследование устойчивости движения механических систем, основанное на теории А. М. Ляпунова [7]. При этом об устойчивости движения системы судят по значениям корней характеристических уравнений либо по форме фазовой траектории. С учетом специфики эксплуатации железнодорожных экипажей вводится понятие динамической устойчивости, обобщающее понятие и критерии устойчивости по А. М. Ляпунову, Лагранжу, технической устойчивости и дополнительно включающее в себя критерии оценки динамических ходовых качеств экипажа — плавности хода, устойчивости против схода колес с рельсов, уровня динамических сил, ускорений и прочее.

Применение указанных аналитических методов практически выполнимо только для линейных механических систем, колебания которых описываются линейными дифференциальными уравнениями.

В настоящее время при решении многих задач динамики железнодорожных экипажей с успехом используется аналитический аппарат нелинейной механики [7,9]. Сюда относятся метод малого параметра, различные методы линеаризации исходных систем и прямые методы исследования нелинейных уравнений типа Матье и Хилла.

В последние десятилетия в практике исследования динамики экипажей все чаще используются компьютеры.

Компьютеры применяют не только в вычислениях, связанных с аналитическими исследованиями динамических процессов (например, при определении собственных частот и собственных форм колебаний механических систем, при вычислениях корней характеристических уравнений, при исследовании устойчивости движения и пр.), но и широко используют в качестве средства автоматической обработки

цифровой информации, получаемой при динамических испытаниях вагонов. Особенно эффективно применение компьютеров при изучении динамики вагона методом численного интегрирования дифференциальных уравнений. Численное интегрирование является наиболее универсальным методом решения таких уравнений, как задача Коши (задачи с начальными условиями), так и при решении задач с граничными условиями.

Большое значение при изучении динамики вагона придается экспериментальным исследованиям натуральных образцов вагонов в условиях реального движения по магистральным путям.

1.1.1. Вывод дифференциальных уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа второго рода

Уравнение Лагранжа второго рода для систем с одной степенью свободы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \quad (1.1)$$

где T – кинетическая энергия системы;

Q – обобщенная сила или сумма сил;

q – обобщенная координата.

Для случая, когда обобщенная сила Q консервативна, т.е. может быть представлена в виде

$$Q = - \frac{\partial \dot{I}}{\partial q} \quad (1.2)$$

где $\dot{I}$ – потенциальная энергия системы, имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \dot{I}}{\partial q} \quad (1.3)$$

Часто потенциальная энергия системы равна энергии деформации упругих элементов. В этом случае, при линейной характеристике упругого элемента (деформация упругого элемента прямо пропорциональна приложенной силе), энергия растяжения (сжатия) определяется по формуле

$$\dot{I} = \frac{cq^2}{2} \quad (1.4)$$

где c – жесткость упругого элемента, H/m ;

q – деформация упругого элемента, m .

Сила, действующая со стороны упругого элемента на массу m , при линейной характеристике упругого элемента определяется по формуле Гука

$$Q = -cq \quad (1.5)$$

Знак минус показывает, что сила всегда направлена навстречу движению тела.

Если в системе имеется диссипативная сила, пропорциональная скорости перемещения массы относительно положения равновесия (функция Релея), то сила сопротивления от нее определяется по формуле

$$Q_1 = -\beta \dot{q} \quad (1.6)$$

1.1.2. Составление дифференциальных уравнений движения по методу Даламбера

Принцип Даламбера читается следующим образом: в каждый момент времени силы всех внешних сил F_e и силы реакций связей R_c уравниваются силой инерции F_u , приложенной к центру тяжести тела

$$\sum_{i=1}^n F_{\hat{a}} + \sum_{j=1}^k R_{\hat{n}} + F_e = 0 \quad (1.7)$$

Сила инерции тела массой m равна

$$F_e = -ma \quad (1.8)$$

где a – ускорение центра тяжести тела, m/c^2 .

При рассмотрении вращательного движения в уравнение Даламбера подставляются не силы, а моменты вращения, а момент силы инерции определяется по формуле

$$M_e = I\ddot{\varphi} \quad (1.9)$$

где I_0 – осевой момент инерции;

φ – угловая координата.

1.2. Решения дифференциальных уравнений

В зависимости от вида дифференциального уравнения, для получения его решения, выполняют подстановки известных функций вместо неизвестных, и используют теорию дифференциальных уравнений, ищут решения в том, или ином виде.

1.2.1. Свободные колебания

А) При свободных незатухающих колебаниях при отсутствии сил сопротивления уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q} + cq = 0 \quad (1.10)$$

где $p_0^2 = c/m$ - собственная (циклическая) частота колебаний.
Период таких колебаний равен $T = 2\pi/p_0, c$.

Решение ищут в виде

$$q = C_1 \cos p_0 t + C_2 \sin p_0 t \quad (1.11)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяют из начальных условий: при $t=0$

$$q = q_0 \quad ; \quad \dot{q} = \dot{q}_0$$

После определения произвольных постоянных (1.11) примет вид

$$q = q_0 \cos p_0 t + \frac{\dot{q}_0}{p_0} \sin p_0 t \quad (1.12)$$

Б) При наличии сил вязкого сопротивления (затухающие колебания) уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0 \quad (1.13)$$

где $p_0^2 = c/m$ - собственная (циклическая) частота колебаний, а $2n = \beta/m$ - парциальная частота колебаний.

Решение ищут в виде

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) \quad (1.14)$$

где $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 - n^2}$ - циклическая частота колебаний, рад/с.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 также находят из начальных условий.

1.2.2. Вынужденные колебания

В случае вынужденных колебаний в системе, кроме перечисленных ранее сил, действуют переменные во времени по заданному закону внешние силы $F(t)$. Они входят в правую часть уравнения Лагранжа второго рода (1.1).

При изучении динамики вагона в общем случае, эти силы обусловлены неровностями пути η (смотри п. 1.4).

Тогда дифференциальное уравнение малых свободных колебаний системы с одной степенью свободы при действии возмущающих сил имеет вид

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = \tilde{n}_{\partial r} \eta \quad (1.15)$$

где c_{po} - жесткость рельсового основания.

Разделив уравнение (1.15) почленно на m , и приняв, что $2n = \beta/m$ и $p_0^2 = c/m$, а также, что возмущающая сила от неровности пути изменяется по гармоническому закону $F(t) = A \sin \omega t$, перепишем его в виде

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + p_0^2 q = \frac{1}{m} A \sin \omega t \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения для случая, когда $n=0$ ищут в виде

$$q = q_0 \sin \omega t \quad (1.17)$$

где q_0 – амплитуда установившихся колебаний.

Подставив (1.16) и (1.17) в уравнение (1.16), получим

$$q_0 = \frac{1}{m} \frac{A}{(p_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (1.18)$$

Решение уравнения (1.16) для случая, когда $n \neq 0$ ищут в виде

$$q = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (1.19)$$

Подставив уравнение (1.19) и его производные в (1.16) получают два уравнения для определения постоянных A и B . Иногда, после несложных подстановок и математических преобразований уравнение (1.19) записывают в виде

$$q = A_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (1.20)$$

Угол φ характеризует сдвиг фаз между смещением системы при установившихся колебаниях и возмущающей силой.

Из анализа уравнения (1.18) видно, что при $\omega = p_0$ $q_0 = \infty$. Этот случай колебаний называют резонансным.

Характерно, что при близком совпадении (но не при полном равенстве) этих частот, возникают колебания, которые называют биениями.

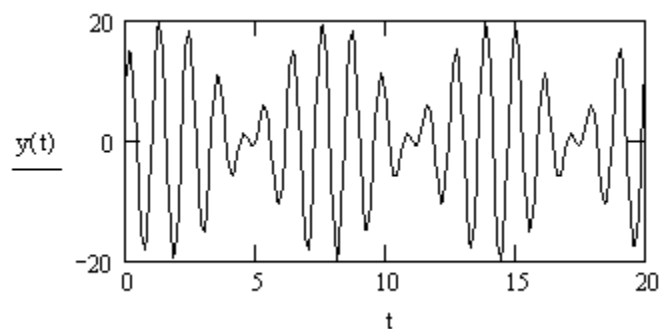


Рисунок 1.1. Биения.

В случае, когда сила $F(t)$ является кусочно-непрерывной, для решения уравнения (1.16) применяют методы операционного исчисления. При некоторых значениях параметров системы (их

принято называть критическими), частота колебаний системы может равняться нулю.

1.2.3. Параметрические колебания

В некоторых случаях уравнение колебаний системы может быть линейным, но с переменными коэффициентами:

$$\ddot{q} + a_1(t)\dot{q} + a_2(t)q = 0 \quad (1.21)$$

При решении таких уравнений необходимо рассматривать частные случаи в отдельности. Чаще всего решения находят в специальных функциях (Бесселя различного рода) или по предварительно изученным методикам (уравнения Матье, Хилла и другие) [8,10,11].

Изучению параметрических колебаний посвящено большое количество работ, но так, как в курсе изучения динамики вагона в магистратуре эти задачи не рассматриваются, то при необходимости следует обратиться к специальной литературе [7,8,11,12].

1.2.4. Случайные колебания

Если на систему с одной степенью свободы действует случайная стационарная сила $F(t)$ с известной спектральной плотностью $S_F(\omega)$ то спектральная плотность решения при установившихся колебаниях равна

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_F(\omega) \quad (1.22)$$

где $|W(i\omega)|$ - модуль частотной функции системы.

Дифференциальные уравнения, описывающие случайные колебания решаются с помощью операционного исчисления. При этом определяются передаточные функции системы и дисперсия решения.

1.2.5. Нелинейные колебания систем с одной степенью свободы

Уравнение нелинейных колебаний системы с одной степенью свободы в общем случае имеет вид

$$\ddot{y} + \frac{1}{m} f(y, \dot{y}, t) = \frac{F(t)}{m} \quad (1.23)$$

Приближенно частоту колебаний можно определить методом Бубнова – Галеркина [7].

Решение ищут в виде

$$y_0 = A \cos pt \quad (1.24)$$

Этим же методом пользуются для получения зависимости амплитуды A вынужденных колебаний от амплитуды возмущающей силы P_0 .

При исследовании нелинейных колебаний также используется метод Ван-дер-Поля [7].

1.3. Динамические характеристики вагона

С точки зрения механики вагон состоит из физических тел и связей между ними. Части вагона, отделенные от ходовых частей рессорами (кузов, рамы тележек с надбуксовым подвешиванием, надрессорные балки), называют обрессоренными (или подрессоренными), а находящиеся ниже рессор (колесные пары, буксы) — необрессоренными (или неподдрессоренными).

Неподдрессоренные части вагона упругие, но ввиду, их относительно большой жесткости в расчетах они часто считаются абсолютно твердыми.

Как известно, свободное твердое тело, на которое не наложены связи, имеет шесть степеней свободы. Поэтому наряду с поступательным движением вагона вдоль пути, нужно рассматривать перемещение его кузова и тележек вследствие колебаний. Обычно, при изучении динамики вагона, принимается следующая система координат: ось x направлена вдоль оси пути; ось y — в горизонтальной плоскости перпендикулярно оси пути; ось z — вертикально вниз, и используется при составлении уравнений движения. Кроме линейных перемещений вдоль этих осей, также рассматриваются вращательные перемещения вокруг них.

Груз в вагоне может быть монолитным (твердым), перемещения которого за счет его собственных деформаций малы по сравнению с перемещением вследствие деформаций рессор, или упругим (сыпучим, или жидким). Твердые тела характеризуются массой, координатами центра инерции или центра тяжести (для монолитных тел эти понятия совпадают), осевыми и центробежными моментами инерции.

Осевые и центробежные моменты инерции сложного тела, например кузова вагона, относительно принятой системы координат с началом O в центре тяжести и осями Ox , Oy , Oz определяются по формулам:

$$I_x = \sum_{j=1}^n \left[\int_{V_j} (y^2 + z^2) dm + m_j (y_0^2 + z_0^2) \right]$$

$$I_{xy} = \sum_{j=1}^n \left[\int_{V_j} xy dm + m_j x_0 y_0 \right] \quad (1.25)$$

где m_j , V_j – соответственно масса и объем j -й части рассчитываемого тела;

x_0 , y_0 , z_0 – координаты центров тяжести составной массы m_j ;

n – число жестко связанных между собой составных частей в системе.

Формулы моментов инерции относительно остальных осей получаются круговой перестановкой букв x , y , z , а также x_0 , y_0 , z_0 . Если кузов получает значительные перемещения вследствие упругости, а груз подвижный или также упругий, изучение динамики вагона осложняется. В одних случаях вводят коэффициент уменьшения инертной массы, участвующей в движении, в других рассматривают дополнительные виды движения — колебания кузова и груза, колебания жидкого груза.

Конструктивные связи между отдельными частями вагона направляют их движение, ограничивают или исключают вообще их относительную подвижность. Жесткие связи подразделяют на геометрические (конечные) и кинематические (дифференциальные). Первые из них накладывают условия на координаты точек тела и в свою очередь делятся на стационарные (склерономные), не зависящие от времени, и нестационарные (реономные), зависящие от времени; вторые накладывают условия на скорости точек тела и делятся на интегрируемые (голономные) и неинтегрируемые (неголономные). Возможность интегрирования позволяет представить кинемати-ческую связь как геометрическую.

Число степеней свободы всей системы равно сумме степеней свободы отдельных составных частей за вычетом числа наложенных жестких связей.

Упругие, упруго-вязкие, упруго-фрикционные и подобные им связи, передавая силовые воздействия между отдельными массами, стесняют их относительные перемещения, не изменяя общего числа степеней свободы. В вагонах такими связями являются рессоры, амортизаторы, виброизолирующие прокладки и т.п.

По форме силовой характеристики «сила—перемещение» упругие связи бывают: линейные 2 (рисунок 1.2), кусочно-линейные

с уменьшающейся 1 и возрастающей 3 жесткостью и нелинейные «жесткие» 5 и «мягкие» 4. Жесткость упругой связи может быть выражена первой производной от воспринимаемой рессорной силы P по перемещению x :

$$c = \frac{dP}{dx} = P'$$

(1.26)

Принято производную по пути (перемещению) обозначать штрихом, а производную по времени точкой.

При линейной характеристике она постоянная, при «жесткой» — возрастающая, а при «мягкой» — убывающая.

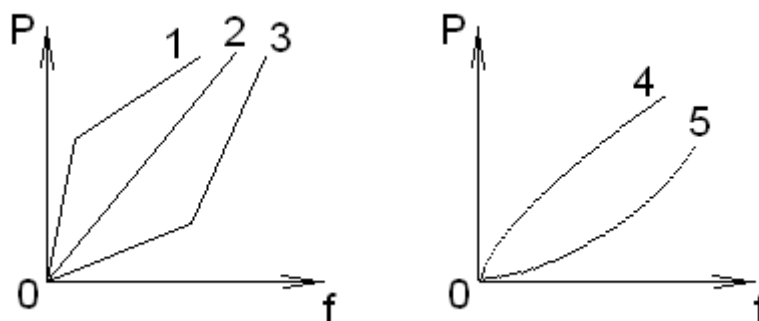


Рисунок 1.2. Силовые характеристики упругих связей.

Жесткость c связи, составленной из двух или более последовательно соединенных элементов, имеющих линейные характеристики жесткости c_1, c_2, c_n рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{\tilde{n}} = \frac{1}{\tilde{n}_1} + \frac{1}{\tilde{n}_2} + \dots + \frac{1}{\tilde{n}_n} \quad (1.27)$$

Статический прогиб ее f_{cm} от действия силы P_{cm} вычисляется по формуле

$$f_{\tilde{n}0} = \frac{P_{\tilde{n}0}}{c} \quad (1.28)$$

При параллельном соединении упругих элементов их жесткости суммируются.

Величина, обратная жесткости называется гибкостью λ

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{n}}$$

(1.29)

Часто в вагонах применяются рессоры с сухим трением. Это системы, в которых упругость обеспечивается винтовыми пружинами и упругой составляющей деформации листовых рессор,

а неупругое сопротивление создается за счет трения в специальной клиновой системе или листовых рессорах. Силовая характеристика такой упруго-фрикционной связи имеет вид

$$P(\xi) = c(f_{cn} + \xi)(1 + \varphi \cdot \operatorname{sgn} \xi) \quad (1.30)$$

где c – жесткость пружин рессорного комплекта;
 ξ – дополнительный прогиб, отсчитываемый от статического;
 φ – коэффициент относительного трения комплекта (здесь $\varphi = F_{\text{тр}} / P_{\text{ст}}$, $F_{\text{тр}}$ — сила трения; $P_{\text{ст}}$ — статическая нагрузка на комплект);

sgn – знак силы, соответствующий знаку скорости деформации комплекта.

1.4. Динамические характеристики железнодорожного пути

Железнодорожный путь как часть механической системы «вагон — путь» описывается совокупностью характеристик, которые можно разделить на две группы: характеристики, определяющие реакцию пути на динамическое воздействие колеса, и характеристики, определяемые остаточными деформациями, накопившимися в пути под воздействием подвижного состава [13].

В пути, в первую очередь в верхнем строении, под воздействием колес вагонов возникают силы упругости, силы инерции и силы трения. Упругая составляющая динамической реакции пути нелинейно зависит от просадки рельса. С увеличением просадки путь становится более жестким. Однако в большинстве случаев для приближенных расчетов принимается, что просадка рельса прямо пропорциональна динамическому давлению колеса. Путь является неравноупругим и по длине, особенно в зоне стыков.

Силы трения в конструкции пути подчиняются сложным закономерностям. Приближенно их можно расчленить на две составляющие:

- силу сухого трения, пропорциональную величине просадки рельса;
- силу вязкого трения, пропорциональную скорости изменения просадки.

Силы инерции, возникающие в верхнем строении пути при безударном движении и ударах колес о рельсы на стыках, из-за наличия ползунов на колесах и в других аналогичных случаях, связаны с волнами деформации, проходящими в верхнем строении пути. Поэтому при ударном и безударном взаимодействии колес и

рельсов силы инерции в верхнем строении пути будут весьма различны.

Все составляющие реакции пути на динамическое воздействие колес в значительной степени зависят от конструкции верхнего строения пути. Соответствующие характеристики будут приведены в главе II.

Под воздействием колес проходящих поездов в верхнем строении пути непрерывно накапливаются остаточные деформации. Интенсивность их накопления различна в разных точках пути. Поэтому постепенно головки рельсов отклоняются от нормального положения, возникают различного рода неровности на пути, двигаясь по которым колеса начинают колебаться. В результате и давление рессор на кузов вагона становится переменным, что в свою очередь вызывает колебания кузова.

Следовательно, неровности рельсов как следствие непостоянной по длине жесткости верхнего строения пути и неравномерного по длине накопления в нем остаточных деформаций — одна из основных причин колебаний вагона и связанного с ним в единую механическую систему верхнего строения пути.

В зависимости от природы и проявления различают следующие виды неровностей:

- по распределению на длине пути — *систематические* и *случайные*;
- по расположению в плоскости — *вертикальные* и *горизонтальные*;
- по зависимости от силы давления колеса — *геометрические* и *силовые*.

В ориентировочных расчетах колебаний подрессоренных масс вагона, движущегося со скоростью V по пути с рельсовыми звеньями длиной L_p и стыковыми неровностями, в качестве функций возмущения принимают:

$$\eta_1 = A(\cos \omega t - 1)$$

$$\eta_2 = A_1(\cos \omega t - 1) + A_2(\cos 2\omega t - 1) \quad (1.31)$$

где A , A_1 , A_2 — соответственно амплитуды гармоник одnogорбой и двугорбой неровностей;

$\omega = 2\pi V / L_\delta$ - частота воздействия стыков пути при скорости движения вагона V .

Для расчетов на компьютере стыковая неровность аппроксимируется более точно эмпирическими формулами

$$\eta_3 = -a \left| \sin \frac{1}{2} \omega t \right|$$

$$\eta_4 = - \left| a_1 \sin \frac{1}{2} \omega t + a_2 \sin \frac{3}{2} \omega t \right|$$

(1.32)

Значения входящих в формулы (1.31) и (1.32) амплитуд рекомендуется принимать в следующих пределах: $A=A_1=3\div 10$ мм; $A_2=2\div 8$ мм; $a=6\div 25$ мм; $a_1=8\div 20$ мм; $a_2=4\div 10$ мм. При этом первое значение принимается при хорошем состоянии пути, второе – при удовлетворительном.

Неровности рельсового пути по их повторяемости делят на две группы – *закономерные* и *незакономерные*.

К закономерным относят, например, неровность от просадки стыков. Период ее равен стандартной длине рельса 25 метров, а амплитуда $3\div 5$ мм для хорошего пути и $8\div 10$ мм – для удовлетворительного.

Незакономерные неровности объясняются просадкой группы смежных шпал, а также неровностями на головке рельса. Различают длинные – 1-3 метра, и короткие – 5-30 сантиметров, неровности. Длинные неровности имеют амплитуду $1\div 2$ мм, короткие – $0,1\div 0,5$ мм. Меньшим длинам неровностей соответствует их меньшая глубина.

2. Динамика неподрессоренных масс вагона

К неподрессоренным массам вагона относятся те элементы конструкции вагона, которые образуют вместе с рельсом непрерывную систему, не содержащую никаких упругих элементов (пружин, рессор, резиновых прокладок), снижающих силы ударного взаимодействия колес с рельсами. К таким массам относят колесные пары, буксы, боковые балки рам тележек.

Задачи динамики неподрессоренных масс вагона рассматривают следующие задачи: расчет удара колеса по рельсу; силы безударного взаимодействия колеса с рельсом при движении и от дисбаланса колеса; извилистое движение колесной пары; движение с проскальзыванием колес по рельсам и другие подобные задачи.

На упрощенных расчетных схемах решаются задачи с целью определения сил, возникающих в неподрессоренных деталях вагона и их воздействие на рельсовый путь. Достаточно точно можно

определить частоты колебаний и их амплитуду, а также понять характер процессов колебаний.

2.1. Расчет удара колеса по рельсу

Удар колеса по рельсу происходит в основном по двум причинам: при наличии ползуна на поверхности катания колеса; при прохождении стыков рельсов. Наиболее опасным является первый случай. В эксплуатации подвижного состава бывали случаи, когда при движении с большими скоростями, ползуны "рубят рельс" на равные куски, что, понятно, приводило к большим материальным затратам на ремонт и восстановление пути.

Известно, что ударные воздействия по своему характеру имеют большие ускорения при малом времени воздействия. При этом ускорение перемещения колеса существенно больше ускорений колебаний кузова и других поддрессоренных частей вагона, поэтому влиянием колебаний кузова на силу удара можно пренебречь. Тогда, используя принцип Даламбера, составим математическую модель движения деталей системы, используя расчетную схему рисунок 2.1 и следующие допущения:

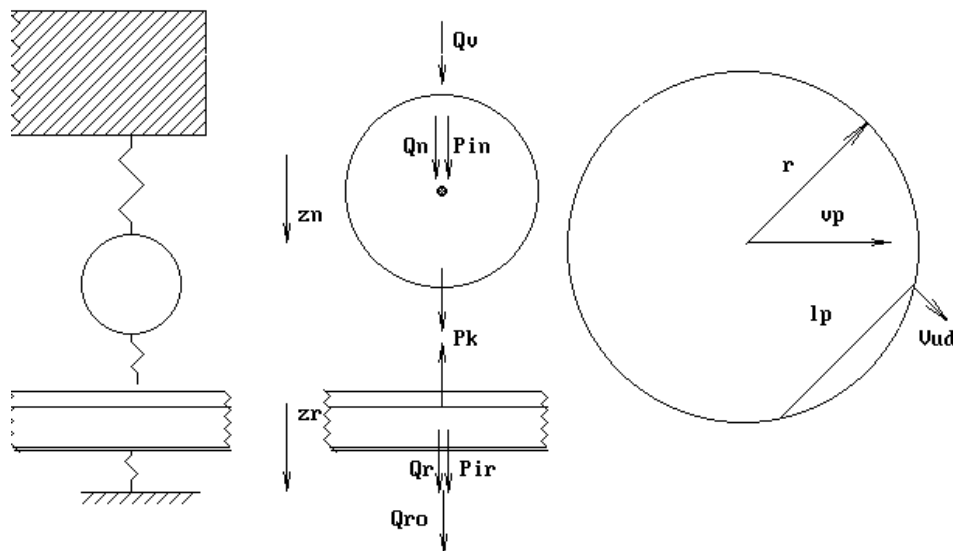


Рисунок 2.1. Расчетная схема удара колеса по рельсу.

- упругость колеса и рельса заменим фиктивной пружиной с жесткостью C ;
- за положительное перемещение масс примем направление вниз;
- давление кузова представим силой Q_v ;
- Q_n - вес неподрессоренных частей;

- P_{in} - силы инерции в неподрессоренных массах;
- P_k - давление колеса на рельс;
- Q_r - приведенный вес рельса;
- Q_{ro} - давление земляного полотна (основания);
- P_{ir} - сила инерции в рельсе.

Используя данные обозначения, составим математическую модель:

- для колеса

$$m\ddot{z}_n - P_k = Q_v + Q_n \quad ; \quad (2.1)$$

- для рельса

$$m\ddot{z}_r + P_k = Q_{ro} \quad , \quad (2.2)$$

где $P_k = C(z_r - z_n) \quad .$
(2.3)

Из теории решения дифференциальных уравнений известно решение системы в виде

$$P_k = A_1 \sin(\nu t) + A_2 \cos(\nu t) , \quad (2.4)$$

где A_1 и A_2 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, а циклическая частота колебаний

$$\nu = V_{ud} \sqrt{Cg \frac{Q_n + Q_r}{Q_n Q_r}} . \quad (2.5)$$

Начальные условия в момент времени $t=0$ будут: $z_n=0$, $z_r=0$.

Скорость удара колеса по рельсу

$$V_{ud} = V_p \frac{l_p}{r} , \quad (2.6)$$

где V_p - скорость поезда;

l_p - длина ползуна;

r - радиус колеса.

Используя эти начальные условия, получим силу удара колеса по рельсу

$$P_{k \max} = V_{ud} \sqrt{\frac{C}{g} \frac{Q_n Q_r}{Q_n + Q_r}} . \quad (2.7)$$

Для уменьшения силы удара колеса по рельсу целесообразно, как это следует из полученного решения, уменьшить массу колеса и контактную жесткость.

Уменьшить массу колеса можно использованием более прочных сталей или алюминиевых сплавов. Для уменьшения контактной жесткости, кроме утоньшения диска при изготовлении колес из более прочных сталей и изменения его конфигурации, можно использовать упругие диски с встроенными резиновыми вставками и т.п.

2.2. Извилистое движение одиночной колесной пары

При рассмотрении движения колесной пары по рельсовому пути нетрудно увидеть, что она движется не только поступательно вдоль оси пути, но и совершает поперечные перемещения и вращательные перемещения около своей вертикальной оси. Это происходит по нескольким причинам. Во-первых, за счет конической поверхности катания колес происходит попеременное опережение одного колеса другим. При этом геометрический центр оси колесной пары отклоняется от центральной оси пути в обе стороны на величину Y рисунок 2.2.

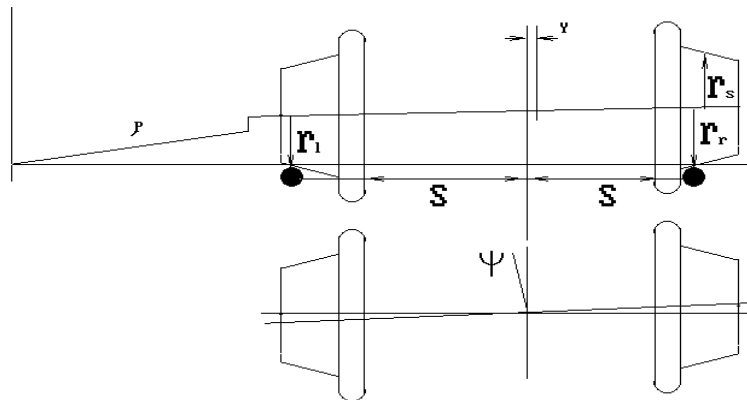


Рисунок 2.2. Схема качения колеса по рельсу без проскальзывания.

Во-вторых, при таком движении происходит поворот оси колесной пары от перпендикулярного к оси пути положения в обе стороны. На рисунке 2.2. он обозначен через ψ - угол между перпендикуляром к оси колесной пары и продольной осью рельсового пути.

Для первого приближения введем следующие допущения:

- движение колес происходит без проскальзывания и без набегания гребня на рельс;
- размеры колес считаем одинаковыми и идеальными;
- рельсовую колею считаем идеально ровной в плане.

Для составления уравнения извилистого движения одиночной колесной пары воспользуемся расчетной схемой (рисунок 2.2), для которой введем следующие обозначения:

$2a$ - расстояние между внутренними гранями колес, 1440 ± 3 мм;

$2S$ - ширина рельсовой колеи, $1520+4$ мм;

r_l, r_r - мгновенные радиусы колес по кругу катания левого и правого соответственно;

r_s - средний радиус колес по кругу катания;

n - коничность обода колеса, примем 0,05. Для стандартных колес их два - 1:3,5 и 1,10, а для рекомендуемых ВНИИЖТ их три - 1:3,5; 1,10 и 1:50;

ρ - мгновенный радиус кривизны траектории геометрического центра оси колесной пары

Приняв скорость движения вагона равной V , определим частоту вращения колес из соотношения

$$V = \frac{dx}{dt} = r_s \omega \quad . \quad (2.8)$$

Заметим, что

$$\frac{r_r + r_l}{2} = r_s \quad (2.9)$$

$$\frac{\Delta r}{2S} = \frac{r_s}{\rho} \quad (2.10)$$

и обозначим $r_r - r_l = \Delta r$.

Из геометрических соображений определим изменение угла поворота оси в плане

$$d\phi = \frac{r_r - r_l}{2S} \omega dt \quad (2.11)$$

Найдем изменение угла поворота ϕ от величины перемещения оси вдоль оси пути, для чего подставим ωdt из (2.8) в (2.11) и с учетом (2.10) запишем

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Delta r}{2Sr} = \frac{1}{\rho} \quad (2.12)$$

Так, как угол ϕ мал, его можно заменить смещением y , тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2.13)$$

с учетом последнего, запишем (2.12) в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\Delta r}{2Sr_s} = 0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) является уравнением извилистого движения одиночной колесной пары без учета неровности рельсового пути и при идеальной геометрии колес. Однако, на практике величина r_s зависит от величины смещения колес относительно головок рельсов, т.е. является функцией перемещения y . При строго конической поверхности колес зависимость $\Delta k = f(x)$ является прямо пропорциональной величине y : $\Delta r = 2ny$ и тогда (2.14) переписывается в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n}{Sr_s} y = 0 \quad (2.15)$$

Решением этого уравнения будет выражение

$$y = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x).$$

$$(2.16)$$

В начальный момент движения при $x=0$, $y=y_0$ и $\frac{dy}{dx}=0$ получим

$y=y_0 \cos(\omega x)$, где y_0 - максимальное отклонение центра колесной пары от оси пути. При этом циклическая частота определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{n}{Sr_s}}.$$

$$(2.17)$$

Понятно, что в процессе извилистого движения колесной пары возникают силы инерции, которые определяются по формуле

$$F_{in} = \frac{mV^2}{\rho} \quad \text{или с учетом (2.5)} \quad F_{in} = \frac{mV^2 ny}{Sr_s}.$$

$$(2.18)$$

Для приближения решения к фактическому, с учетом неровности оси пути, которая учитывается выражением

$$\eta_g = a \sin(\omega_n t),$$

$$(2.19)$$

уравнение (2.15) переписывается в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n}{Sr_s} y = \frac{n}{Sr_s} a \sin(\omega_n t) \quad (2.20)$$

и его решение будет складываться из собственных и вынужденных колебаний центра колесной пары от оси пути.

Если же вместо неровности оси пути в правой части уравнения (2.20) задать радиус кривой R , то получим уравнение извилистого движения колесной пары по криволинейному участку пути.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{n}{Sr_s} y = \frac{n}{Sr_s} \frac{x^2}{2R} \quad (2.21)$$

Решением этого уравнения будет

$$y = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x) + \frac{x^2}{2R} - \frac{Sr_s}{Rn} \quad (2.22)$$

анализируя которое можно определить меры для улучшения динамики вписывания колесной пары в кривую.

2.3. Движение несбалансированного колеса

Как правило, центр тяжести колесной пары не совпадает с ее геометрическим центром. Для упрощения задачи будем считать, что неуравновешенность колесной пары одинакова для обоих колес. Тогда геометрическая расчетная схема будет иметь вид, показанный на рисунке 2.3 с учетом сил. Здесь эффект несовпадения массы колеса с его геометрическим центром заменен действием приведенной к ободу несбалансированной массы - массы дисбаланса m_{db} , которая создает центробежную силу.

$$P_{idb} = m_{db} \frac{V^2}{r} = m_{db} \omega^2 r, \quad (2.23)$$

где $\omega = v/r$ - угловая скорость колеса.

Дифференциальное уравнение движения (колебания) системы неподрессоренных частей и рельса массой m_n в случае пренебрежения силами неупругого сопротивления (т.е. затуханием колебаний) будет иметь вид

$$m_n \ddot{z}_n + (C_0 + C_b) z_n = P_{idb} \cos(\omega t). \quad (2.24)$$

или

$$\ddot{z}_n + \nu^2 z_n = \frac{m_{db}}{m_n} r \omega^2 \cos(\omega t). \quad (2.25)$$

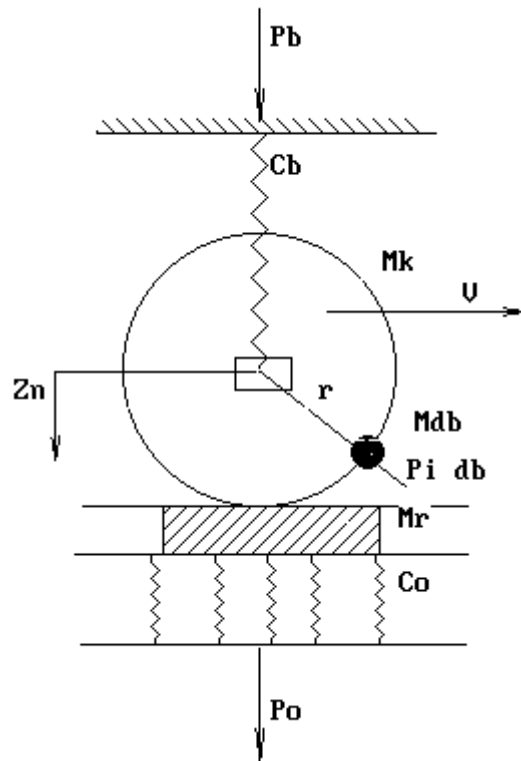


Рисунок 2.3. Расчетная схема движения несбалансированного колеса.

Установившиеся вынужденные колебания колеса (с использованием операционного преобразования Лапласа) будут

$$z_n = \frac{m_{db}}{m_n} r \frac{\omega^2}{v^2 - \omega^2} \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

или

$$z_n = \frac{m_{db}}{m_n} r \Delta \cos(\omega t), \quad (2.27)$$

где

$$\Delta = \frac{\omega^2}{v^2 - \omega^2}. \quad (2.28)$$

Максимальное давление рельса на шпалы (давление колеса на рельс) составляет

$$P_{db \max} = \frac{m_{db}}{m_n} r C \Delta. \quad (2.29)$$

Фактическая неуравновешенность (дисбаланс) вагонных колес достигает $m_{db}=1 \div 6$ кг. Развиваемые ею силы взаимодействия при обычных скоростях движения невелики по сравнению с силами, возникающими при проходе колес по коротким неровностям пути. Но при высоких скоростях из-за неуравновешенности создается

разгрузка колес, которая уменьшает запас устойчивости. Поэтому размер предельно допустимого дисбаланса нормируют.

Так:

- на дорогах стран Европы принято $m_{db} < 0.25$ кг;
- на дорогах США принято $m_{db} = 0.4 - 0.8$ кг (соответственно для пассажирских и грузовых поездов);
- на дорогах России и стран СНГ - $m_{db} = 0.25 - 0.3$ кг (соответственно для скоростей 250 - 200 км/ч).

3. Колебания вагона с одинарным рессорным подвешиванием

3.1. Общая характеристика систем одинарного рессорного подвешивания

Плавное движение вагонов по пути с реальными неровностями обеспечивается благодаря системе рессорного подвешивания, состоящей из упругих элементов и гасителей колебаний. Рессоры обычно размещают между кузовом и колесными парами, причем в многоосных экипажах, где колесные пары с помощью рам объединены в отдельные группы (поворотные тележки), одинарную рессорную систему составляют одна группа параллельно работающих рессор одного яруса.

Одинарное рессорное подвешивание применяется главным образом в тележках грузовых вагонов.

Имеются две основные разновидности рессорных систем одинарного подвешивания: буксовое и центральное (последнее наиболее распространено). Буксовым называют подвешивание, в котором рессоры размещены между буксами колесной пары и рамой тележки; рессоры центрального подвешивания расположены между надрессорной балкой и рамой тележки, обычно в середине между колесными парами.

Конструктивно тележки современных отечественных грузовых вагонов выполнены из стальных литых боковых рам, соединяющих посредством концевых частей буксы смежных колесных пар, надрессорных балок, входящих своими концами в средние проемы боковых рам и имеющих свободу вертикальных и горизонтальных перемещений между направляющими поверхностями колонок рам, и рессорных комплектов. Рессорные комплекты, которые состоят из цилиндрических пружин и фрикционных гасителей колебаний, размещены в центральных проемах боковых рам и, кроме

вертикальных прогибов, испытывают горизонтальные поперечные к оси пути деформации сдвига. Сила трения фрикционных гасителей, предназначенных для гашения вертикальных и горизонтальных поперечных колебаний кузова, зависит от величины прогиба рессор. Статический прогиб рессор под полностью загруженным грузовым вагоном составляет 40—50 мм, под рефрижераторным — 75—90 мм, а величина силы трения соответственно 8—10% и 5—6% полной нагрузки на рессорные комплекты. По своим динамическим характеристикам тележки современных грузовых вагонов предназначены для эксплуатации при скоростях движения до 120 км/ч, рефрижераторных вагонов — до 140 км/ч.

3.2. Цель и методы исследования колебаний вагона

Возникающие при движении вагона в составе поезда динамические силы, отклонения от положения равновесия, инерционные перегрузки, которые действуют на пассажиров и грузы, являются следствием колебательных процессов и других видов неравномерного движения инерционных масс, составляющих рассматриваемую механическую систему. Величины и частоты колебаний в первую очередь определяют динамические качества вагона: габаритную безопасность, плавность хода, устойчивость в движении, а также величины сил, от которых зависит прочность элементов вагона и железнодорожного пути.

Целью изучения колебаний вагона являются выяснение физической природы и причин, их вызывающих, установление допустимого уровня порождаемых ими динамических воздействий, а также разработка рекомендаций по выбору конструктивных параметров вагона, которые обеспечивают высокие динамические качества его при эксплуатации.

Обычно колебания изучаются в трехмерной Декартовой системе координат, а основным видам колебаний каждого узла вагона (кузов, тележка и др.) присваиваются наименования:

А) для поступательных колебаний:

вдоль оси x — подергивание;

вдоль оси y — боковой относ;

вдоль оси z — подпрыгивание;

Б) для вращательных колебаний:

вокруг оси Ox — боковая (поперечная) качка;

вокруг оси Oy — галопирование (продольная качка);

вокруг оси Oz — вилание.

Колебания каждого из указанных видов в определенных условиях могут возникнуть независимо от других или совместно с ними.

Аналогично обозначаются основные виды колебаний неподдрессоренных частей вагона и элементов верхнего строения пути, однако им указанные выше наименования не присваивают.

Колебания упругих тел, сопровождающиеся их деформацией под действием сил инерции непрерывно распределенных в них масс, называются упругими вибрациями.

Как принято в теоретической механике, различают колебания вагона собственные и вынужденные. Первые возникают в системе, выведенной из состояния равновесия какой-либо причиной и мгновенно освобожденной или выведенной из состояния покоя толчком. Такие колебания постепенно затухают. Вторые возникают и непрерывно поддерживаются под действием какого-либо источника возмущения в течение рассматриваемого промежутка времени.

Для изучения колебаний вагона принимают теоретико-экспериментальный метод: составляют расчетную схему, теоретически устанавливают общие зависимости между колебаниями, силами и напряжениями, возникающими в системе «вагон—путь» с учетом конструктивных параметров и условий движения, а экспериментально определяют конкретные значения этих параметров, устанавливают законы статистической повторяемости результатов, имеющих вероятностную природу, а также уточняют методику расчета.

Для выбранной расчетной схемы и принятой системы координат дифференциальные уравнения колебаний по методу Даламбера рекомендуется составлять в соответствии с геометро-физико-статическим правилом, рекомендованным проф. А. А. Поповым [1, стр. 66].

Обычно расчетная схема «вагон—путь» даже после упрощений имеет много (10-40) степеней свободы и при сложных характеристиках связей система дифференциальных уравнений оказывается нелинейной. Интегрирование таких сложных систем возможно только с применением вычислительных машин.

3.3. Колебания симметрично загруженного вагона

При проведении оценочных расчетов для упрощения применяют более простые расчетные схемы и допущения. При условии

симметричной загрузки кузова вагона можно принять его как опирающуюся через рессоры на тележку, одномассовую систему (рисунок 3.1)

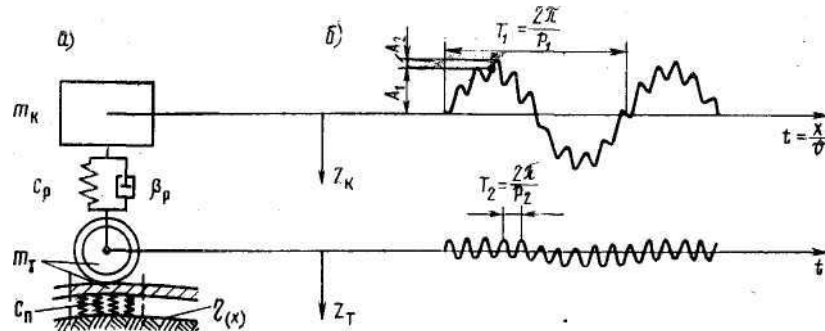


Рисунок 3.1. Схема для расчета симметричных колебаний вагона (а) и графики собственных колебаний масс кузова и тележек (б).

Для сокращения записей пренебрежем влиянием сопротивления демпферов, полагая, что $\beta_z = \beta_{iz} = 0$. Соответствующие дифференциальные уравнения запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_e + v_1^2 z_r - v_1^2 z_o &= 0 \\ \ddot{z}_o + v_2^2 z_o - v_3^2 z_e &= u \eta_c \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_1^2 &= \frac{4c_z}{m_e}; v_2^2 = \frac{2(c_z + 2c_{iz})}{m_o}; \\ v_3^2 &= \frac{2c_z}{m_o}; u = \frac{4c_{iz}}{m_o}; \end{aligned} \right\}$$

(3.2)

Величины v_1 и v_2 называют в механике парциальными частотами системы.

Выделив из общего процесса симметричные колебания, для которых получена система дифференциальных уравнений (3.1), мы тем самым заменяем сложную расчетную схему вагона более простой (см. рисунок 3.1, а), по которой можно без больших погрешностей составить представление о колебаниях вагона.

Рассмотрим собственные колебания этой системы, для чего обратим дифференциальные уравнения (3.1) в однородные, приравняв правые части нулю.

Решение однородной системы будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} z_e &= A \cos(pt + \alpha); \\ z_o &= B \cos(pt + \alpha); \end{aligned} \right\}$$

(3.3)

Здесь A , B , p и α пока неизвестные величины. Подставив (3.3) и их производные в (3.1), получим

$$\begin{cases} A(p^2 - \nu_1^2) + B\nu_1^2 = 0; \\ A\nu_3^2 + B(p^2 - \nu_2^2) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Поскольку A и B не равны нулю, должен быть равен нулю составленный из коэффициентов этих уравнений определитель

$$D(p^2) = \begin{vmatrix} p^2 - \nu_1^2 & \nu_1^2 \\ \nu_3^2 & p^2 - \nu_2^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

откуда $(p^2 - \nu_1^2)(p^2 - \nu_2^2) - \nu_1^2 \nu_3^2 = 0$ или

$$p^4 - (\nu_1^2 + \nu_2^2)p^2 + \nu_1^2 \nu_2^2 - \nu_1^3 \nu_3^2 = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) называют частотным уравнением, а его корни

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\nu_1^2 + \nu_2^2 \mp \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \nu_3^2} \right] \quad (3.7)$$

называют частотами собственных колебаний рассматриваемой системы.

Следовательно, рассматриваемая механическая система имеет две зависящие только от ее параметров собственные частоты, а однородные уравнения (3.1) допускают два частных, линейно независимых решения для каждой функции:

$$\begin{aligned} z'_e &= A_1 \cos(p_1 t + \alpha_1); z''_e = A_2 \cos(p_2 t + \alpha_2); \\ z'_o &= B_1 \cos(p_1 t + \alpha_1); z''_o = B_2 \cos(p_2 t + \alpha_2); \end{aligned} \quad (3.8)$$

Колебания, совершаемые системой с одной из собственных частот p_1 или p_2 , в теоретической механике принято называть главными колебаниями, а соответствующие им формы (виды) колебаний — нормальными формами (видами). Следовательно, полученные частные решения являются составляющими главных колебаний.

В общем случае собственные колебания кузова и тележек вагона определяются зависимостями

$$\begin{cases} z_e = A_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(p_2 t + \alpha_2); \\ z_o = A_1 \gamma_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \gamma_2 \cos(p_2 t + \alpha_2); \end{cases} \quad (3.9)$$

где амплитуды A_1 , A_2 и начальные фазы α_1 и α_2 определяются из начальных условий, а $\gamma_1 = 1 - \frac{p_1^2}{\nu_1^2}$; $\gamma_2 = 1 - \frac{p_2^2}{\nu_1^2}$; . Периоды (в секундах)

колебаний основного (с наименьшей частотой p_1) тона T_1 и наложенного T_2 определяются из выражений

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}; T_2 = \frac{2\pi}{p_2}; \quad (3.10)$$

Частоты колебаний n выражены числом колебаний в секунду (Гц) в отличие от круговых частот p (рад/с):

$$n_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{p_1}{2\pi}; \quad n_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{p_2}{2\pi}; \quad (3.11)$$

Для современного груженого четырехосного вагона и пути с деревянными шпалами имеем: $m_k = 80\,000$ кг; $2m_r = 14\,000$ кг; $4c_z = 16$ МН/м; $8c_{pz} = 400$ МН/м. Парциальные частоты $\nu_1 = 14,1$ 1/с, $\nu_2 = 172$ 1/с; главные частоты $p_1 = 13,8$ 1/с (2,2 Гц), $p_2 = 172$ 1/с (27 Гц). Следовательно, частота p_2 второго вида колебаний более чем на порядок выше частоты p_1 первого вида, о чем указывалось выше.

Собственные колебания масс кузова и тележки (см. рисунок 3.1, б), представляющие собой сумму двух гармонических колебаний, являются незатухающими, так как при решении задачи мы пренебрегли действием неупругих сил сопротивления демпферов, которые служат для гашения собственных колебаний.

Вынужденные колебания масс рассматриваемой системы характеризует система дифференциальных уравнений (3.1) при условии, что $\eta \neq 0$.

Для упрощения вычислений положим, что неровность рельсовых нитей может быть выражена как

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \quad (3.12)$$

где $\omega = 2\pi V/L$ — частота чередования неровностей пути с длиной волны L при движении вагона со скоростью V .

Такое допущение, целесообразно хотя бы потому, что любая сложная непрерывная неровность пути, о которой шла речь в главе 1.4, может быть представлена рядом, состоящим из суммы гармонических функций с различными амплитудами и периодами. Поскольку исследование системы часто сводится к линейным дифференциальным уравнениям, решение их для сложной функции возмущения (неровности) можно получить как сумму решений для ее гармонических составляющих. Частное решение системы дифференциальных уравнений (3.1) следует искать в виде

гармонических функций, сходных с функциями возмущения того же периода:

$$\left. \begin{aligned} z_{\varepsilon} &= C \sin \omega t; \\ z_{\delta} &= D \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Подставив (3.13) в (3.1) и сократив все члены на $\sin(\omega t)$, получим

$$\left. \begin{aligned} C(\omega^2 - \nu_1^2) + D\nu_1^2 &= 0; \\ C\nu_3^2 + D(\omega^2 - \nu_2^2) &= -u\eta_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Решив (3.14) относительно C и D , найдем, что

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{u\eta_0\nu_1^2}{(\omega^2 - \nu_1^2)(\omega^2 - \nu_2^2) - \nu_1^2\nu_3^2}; \\ D &= \frac{u\eta_0(\nu_1^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \nu_1^2)(\omega^2 - \nu_2^2) - \nu_1^2\nu_3^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Следовательно, частные решения (3.13) получают вид:

$$\left. \begin{aligned} z_{\varepsilon} &= \frac{u\eta_0\nu_1^2}{(\omega^2 - \nu_1^2)(\omega^2 - \nu_2^2) - \nu_1^2\nu_3^2} \sin \omega t = \eta_0\Delta_{\varepsilon} \sin \omega t; \\ z_{\delta} &= \frac{u\eta_0(\nu_1^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \nu_1^2)(\omega^2 - \nu_2^2) - \nu_1^2\nu_3^2} \sin \omega t = \eta_0\Delta_{\delta} \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

где Δ_{κ} , Δ_{τ} — коэффициенты нарастания амплитуд или динамичности системы.

Полное решение системы уравнений (3.1) с правой частью получим суммированием общих решений (3.9) для однородной системы с полученным частным решением (3.16) для неоднородной системы.

Учитывая, что собственные колебания исследуемой системы затухнут при условии, когда движение по пути с непрерывной неровностью будет длительным, практический интерес представляет изучение только вынужденных колебаний системы, характеризуемых выражениями (3.16).

4. Колебания вагона с двойным рессорным подвешиванием

4.1. Особенности системы двойного рессорного подвешивания

Системы двойного рессорного подвешивания применяются в пассажирских вагонах. Такие системы обычно состоят из

центральной и буксовой ступеней. Центральная ступень подвешивания обеспечивает вертикальное и поперечное (боковое) подрессоривание пассажирского вагона.

Для вертикального подрессоривания используют упругие элементы, в основном цилиндрические пружины, а в тележках скоростных вагонов — пневмобаллоны диафрагменного типа. Для бокового подрессоривания применяются люлечное подвешивание с маятниковыми подвесками и безлюлечное подвешивание с упругими элементами. В системе демпфирования колебаний широко применяются телескопические гидравлические гасители колебаний.

Буксовая ступень подвешивания имеет для вертикального подрессоривания упругие элементы (цилиндрические пружины или резиновые блоки), для демпфирования колебаний — фрикционные или гидравлические гасители. В этой ступени обычно применяются поводковые или телескопические направляющие связи колесной пары с рамой тележки.

Чаще всего под пассажирские вагоны ставят двухосные тележки, база которых находится в пределах 2300—2700 мм. Наиболее распространенные тележки скоростных пассажирских вагонов имеют следующие параметры рессорного подвешивания:

- суммарный статический прогиб в пределах 160—300 мм с основной долей (60—75%) в центральной ступени;
- гидравлические гасители колебаний с силами сопротивления, пропорциональными скорости перемещений подрессоренных частей вагона, и $\beta = (0,2 \div 0,3) \beta_{кр}$ как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении;
- приведенная длина эквивалентной маятниковой подвески 500—700 мм.

4.2. Собственные колебания подрессоренных частей вагона

Двойное рессорное подвешивание, применяемое в современных пассажирских вагонах, обладает значительно меньшей жесткостью упругих элементов по сравнению с рессорным подвешиванием грузовых вагонов. Поэтому при исследовании собственных колебаний вагонов с таким подвешиванием допустимо пренебрегать упругостью пути (погрешность не превышает 3%). Принимаем также, что конструкция кузова исследуемого вагона и расположение груза в нем симметричны относительно главных центральных осей инерции.

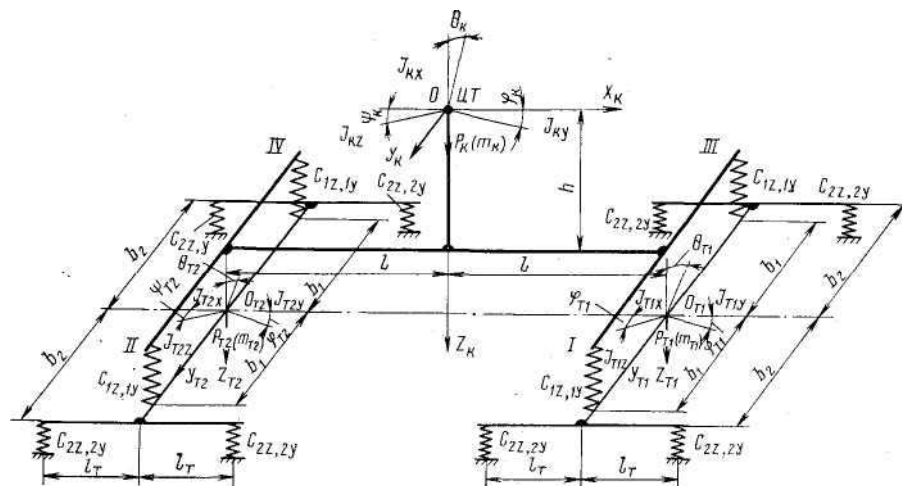


Рисунок 4.1. Расчетная схема вагона с двойным рессорным подвешиванием

Для исследования собственных колебаний вагонов с двойным рессорным подвешиванием принимаем расчетную схему (рисунок 4.1), согласно которой без учета подергивания кузов имеет пять степеней свободы, определяемых следующими независимыми координатами:

Θ_k , φ_k , ψ_k — угловые перемещения кузова соответственно относительно осей Ox_k , Oy_k и Oz_k , проходящих через его центр тяжести (ЦТ);

Z_k , y_k — соответственно вертикальное и горизонтальное перемещение центра тяжести кузова относительно его статического равновесного положения.

При учете только колебаний подпрыгивания и галопирования подрессоренные части тележек имеют по две степени свободы:

Z_{T1} , Z_{T2} — вертикальные перемещения центра тяжести подрессоренных частей соответственно первой и второй тележек относительно их статического равновесного положения;

φ_{T1} , φ_{T2} — угловые перемещения подрессоренных частей соответственно первой и второй тележек относительно центральных осей;

h — расстояние от центра тяжести кузова до верхних опорных поверхностей рессорных комплектов центрального подвешивания.

Жесткость в горизонтальном направлении одного комплекта упругого подвешивания кузова вагона c_y эквивалентна жесткости люлечных подвесок c_{1yl} одного комплекта центральных пружин c_{1yn} и двух комплектов надбуксовых пружин $2c_{2y}$.

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания вагона с двойным рессорным подвешиванием содержит 9 уравнений.

Шесть из них попарно связаны между собой

$$\begin{aligned}\ddot{z}_{\dot{e}} + a_{11}z_{\dot{e}} + a_{16}z_{\dot{o}1} + a_{17}z_{n2} &= 0 \\ \ddot{\phi}_{\dot{e}} + a_{22} + a_{26}z_{\dot{o}1} + a_{27}z_{\dot{o}2} &= 0 \\ \ddot{z}_{\dot{o}1} + a_{66}z_{\dot{o}1} + a_{61}z_{\dot{e}} + a_{62}\phi_{\dot{e}} &= 0 \\ \ddot{z}_{\dot{o}2} + a_{77}z_{\dot{o}2} + a_{71}z_{\dot{e}} + a_{72}\phi_{\dot{e}2} &= 0 \\ \ddot{y}_{\dot{e}} + a_{33}y_{\dot{e}} + a_{34}\theta_{\dot{e}} &= 0 \\ \ddot{\theta}_{\dot{e}} + a_{44}\theta_{\dot{e}} + a_{43}y_{\dot{e}} &= 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

А три уравнения описывают главные колебания:

$$\text{- вилание кузова} \quad \ddot{\phi}_{\dot{e}} + a_{55}\phi_{\dot{e}} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{- галопирование тележек} \quad \ddot{\phi}_{\dot{o}1} + a_{88}\phi_{\dot{o}1} = 0 \quad (4.3)$$

$$\ddot{\phi}_{\dot{o}2} + a_{89}\phi_{\dot{o}2} = 0 \quad (4.4)$$

В этих уравнениях коэффициенты $a_{i,j}$ представляют собой отношение жесткостей упругих элементов c к массам m соответствующих тел, или их моментам инерции I [1, страница 125 - 133].

Для определения собственных частот решение системы ищут в виде

$$z_{\dot{e}} = A \sin \lambda t; \quad \phi_{\dot{e}} = B \sin \lambda t; \quad z_{\dot{o}1} = \tilde{N} \sin \lambda t; \quad z_{\dot{o}2} = D \sin \lambda t.$$

Подставив эти функции и их производные в систему, и разделив их на общий множитель $\sin \lambda t$, получают систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda^2)A + a_{16}C + a_{17}E &= 0; \\ (a_{22} - \lambda^2)B + a_{26}C + a_{27}E &= 0; \\ a_{61}A + a_{62}B + (a_{66} - \lambda^2)C &= 0; \\ a_{71}A + a_{72}B + (a_{77} - \lambda^2)E &= 0.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Для Нахождения значений частот λ собственных колебаний необходимо определитель этой системы уравнений относительно λ^2 приравнять нулю:

$$D(\lambda^2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & \dots & 0 & \dots & a_{16} & \dots & a_{17} \\ 0 & \dots & a_{22} - \lambda^2 & \dots & a_{26} & \dots & a_{27} \\ a_{61} & \dots & a_{62} & \dots & a_{66} - \lambda^2 & \dots & 0 \\ a_{71} & \dots & a_{72} & \dots & 0 & \dots & a_{77} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Раскрыв определитель, получаем уравнение частот

$$\lambda^8 + k_1\lambda^6 + k_2\lambda^4 + k_3\lambda^2 + k_4 = 0. \quad (4.7)$$

Коэффициенты k_i представляют собой свертки сочетаний коэффициентов a_{ij} .

Используя известные методы [14], решаем уравнение (4.7) относительно λ . Вещественные корни этого уравнения дают значения частот собственных колебаний системы.

Для определения частот галопирования и подпрыгивания подрессоренных частей тележек можно использовать приближенный метод. Тогда частоты собственных колебаний подпрыгивания и галопирования вычисляют по формулам:

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{4c_z}{m_{\hat{e}}}}; \lambda_2 \approx \sqrt{\frac{4c_z}{I_{\hat{e}y}}}. \quad (4.8)$$

где c_z - эквивалентная жесткость упругих элементов центральной и буксовой ступеней подвешивания вагона

$$c_z = \frac{2c_{2z}c_{1z}}{2c_{2z} + c_{1z}}. \quad (4.9)$$

Частоты собственных колебаний подрессоренных частей тележки определяются по формуле

$$\lambda_6 = \lambda_7 \approx \sqrt{\frac{2(c_{1z} - 2c_{2z})}{m_o}}. \quad (4.10)$$

Погрешность такого приближенного метода определения частот собственных колебаний вагона не превышает 2%.

5. Оценка динамических качеств вагона

5.1. Оценка динамических качеств грузового вагона

Безопасность движения, плавность хода, габаритная безопасность, прочность, надежность и другие эксплуатационные качества вагона в значительной мере определяются величинами динамических сил, действующих на вагон вследствие возникающих колебательных процессов и ударного взаимодействия между составляющими вагон массами, а также между ходовыми частями и рельсовым путем.

Правильно сконструированный грузовой вагон должен обладать высокими динамическими качествами, которые оцениваются по следующим трем показателям:

1. $k_{дв}$, $k_{дг}$ — по коэффициентам вертикальной и горизонтальной динамики

$$k_{\ddot{a}\ddot{a}} = \frac{P_{ld}}{P_{\ddot{n}\ddot{o}}}; k_{\ddot{a}\ddot{a}} = \frac{P_{l\ddot{a}}}{P_{\ddot{n}\ddot{o}}}.$$

(5.1)

где $P_{дв}$, $P_{дг}$ — динамические вертикальные и горизонтальные боковые силы, передающиеся от кузова на ходовые части;

$P_{ст}$ — статическая нагрузка, передаваемая от кузова к ходовым частям.

2. $(z_0\omega_z^2)$, $(y_0\omega_y^2)$ — по амплитудам ускорений колебательного процесса кузова.

3. W_z , W_y — по показателям плавности хода, вычисленным по величинам ускорений и частот колебаний, обычно применяемым при оценке пассажирских вагонов (смотри главу 5.2).

Величины средних из наибольших значений коэффициентов динамики, ускорений, а также показатели плавности хода для кузова грузового вагона приведены в [1, страница 123].

Значения коэффициентов динамики могут быть вычислены как по величинам динамических сил $P_{д}$, найденным по теоретическим формулам или замеренным в связях при опытах, так и по величинам прогибов (деформаций) $f_{д}$ связи. В последнем случае величина $P_{д}$ будет зависеть от силовой характеристики связи и значения $k_{д}$ определяются по следующим формулам:

для упругой линейной связи

$$k_{\ddot{a}} = \frac{f_{\ddot{a}}}{f_{\ddot{n}\ddot{o}}}; k_{\ddot{a}\ddot{a}} = \frac{y_0 c_y}{f_{\ddot{n}\ddot{o}} c_z}.$$

(5.2)

для упруго-фрикционной связи (типа рессор с клиновыми демпферами)

$$k_{\ddot{a}} = \frac{f_{\ddot{a}}}{f_{\ddot{n}\ddot{o}}} (1 + \varphi) + \varphi; k_{\ddot{a}\ddot{a}} = \frac{y_0 c_y}{f_{\ddot{n}\ddot{o}} c_z} + \varphi.$$

(5.3)

для линейной связи с вязкостными демпферами

$$k_{\ddot{a}} = \frac{f_{\ddot{a}}}{f_{\ddot{n}\ddot{o}}} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_z \omega_z}{c_z} \right)^2}; k_{\ddot{a}\ddot{a}} = \frac{y_0 c_y}{f_{\ddot{n}\ddot{o}} c_z} \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_y \omega_y}{c_y} \right)^2} \quad (5.4)$$

где c_y , c_z , β_z , β_y — коэффициенты жесткости, и неупругого сопротивления связей в случаях вертикального и бокового деформирования;

φ — коэффициент относительного трения;
 ω_z, ω_y — круговые частоты вертикальных и горизонтальных вынужденных колебаний.

5.2. Оценка динамических качеств пассажирского вагона

Вагон при движении по рельсовому пути совершает сложные вертикальные и горизонтальные колебания с различными амплитудами и частотами. Интенсивность этих колебаний обуславливается взаимодействием пути и движущегося по нему вагона. Показателями динамических качеств пассажирского вагона являются коэффициенты вертикальной и горизонтальной динамики, величины вертикальных и горизонтальных ускорений кузова вагона, показатель плавности хода.

Величины средних из наибольших значений коэффициентов динамики, ускорений, а также показатели плавности хода, по которым на железных дорогах оцениваются динамические качества вагона, приведены в [1, страница 149].

Для пассажирских вагонов особенно большое значение имеет показатель плавности хода, которым оцениваются динамические качества вагона, исходя из условий физиологического воздействия ускорений и частот колебаний на организм человека.

На основании экспериментальных работ, проведенных рядом исследовательских лабораторий, установлено, что организм человека по разному воспринимает колебания с различными частотами и реакции на эти колебания проявляются в виде утомления нервной системы и различных болевых ощущений. Особенно неблагоприятны для человека колебания с частотами в пределах 4-6 Гц, которые оказываются резонансными для человека как механической системы. Организм человека чувствителен и к ускорениям, и к скорости их изменения, поскольку она характеризует изменение сил инерции во времени, т. е. является показателем меры интенсивности толчка.

Известны три метода оценки плавности хода вагона:

- по частотам и ускорениям колебаний кузова;
- по времени утомляемости пассажиров;
- по преобладающим и максимальным ускорениям.

Согласно закону Вебера—Фехнера об интенсивности раздражителя ощущений органов чувств человека и результатам опытов Шперлинга (Грюнвальдская лаборатория) для оценки

плавности хода вагона в ряде стран Европы и, в частности, в странах, входящих в Организацию сотрудничества железных дорог (ОСЖД), принята величина $z_0(2\pi n)^5$, представляющая собой произведение наибольшего значения показателя меры интенсивности толчка на величину энергии процесса колебаний.

Показатель плавности хода в горизонтальном направлении определяется аналогично по ускорениям и частотам, возникающим при горизонтальных колебаниях.

Связь между интенсивностью раздражителя $z_0(2\pi n)^5$ и силой вызванного им ощущения оценивается величиной параметра W

$$W = 2,7k^{10}\sqrt[3]{z_0^3 n^5}, \quad W = 0,9k\sqrt{\frac{\ddot{z}^3 m}{n}}. \quad (5.5)$$

где k —коэффициент, учитывающий влияние частоты и направления (вертикальные и горизонтальные) колебаний на утомляемость пассажиров; он определяется по графику на рисунке 5.1.

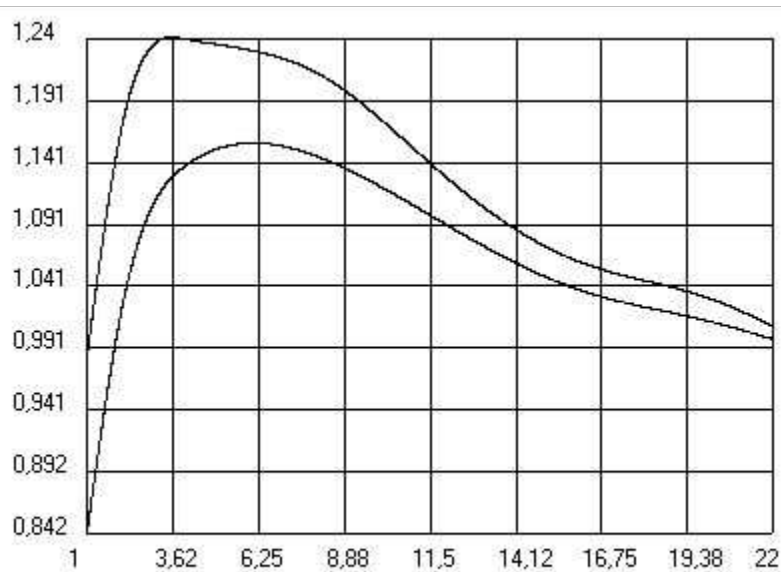


Рисунок 5.1. График значений коэффициента влияния частоты на утомляемость.

Параметр W , зависящий от частоты и ускорений колебания, называют показателем плавности хода вагона.

Плавность хода вагона тем лучше, чем меньше величина показателя W . Допустимый предел величины параметра плавности хода пассажирских вагонов установлен $W = 3 \div 3,25$.

Как показывают экспериментальные исследования, утомляемость пассажиров зависит не только от режима колебания вагона (ускорения, частоты), но и от времени пребывания в пути. Учет этого фактора позволяет наиболее правильно оценить плавность хода вагона для поездов дальнего, местного и пригородного пассажирского сообщения.

Ходовые качества вагона в первом приближении могут быть оценены по значениям ускорения колебаний вагона, а также по величине коэффициентов динамики.

Из формул (5.5) следует, что для улучшения плавности хода вагона необходимо в первую очередь уменьшать частоты и ограничивать амплитуды колебаний вагона; частота основного тона вынужденных колебаний кузова пассажирского вагона не должна превышать 1—1,1 Гц, так как в этом случае коэффициент k согласно графику рис. 5.1 имеет меньшие значения.

6. Сборник задач для самостоятельной работы

6.1. Динамика неподрессоренных масс

6.1.1. Вывести формулу для расчета силы удара колеса по рельсу и рассчитать эту силу, если заданы длина ползуна L и скорость движения вагона V . Остальные данные принять для любого существующего вагона по своему выбору. Построить графики изменения силы удара в зависимости от скорости движения и в зависимости от длины ползуна. Исходные данные приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

Варианты исходных данных

№ варианта	L , мм	V , км/ч
1	25	50
2	50	24
3	32	48
4	40	27
5	43	31

6.1.2. Вывести формулу для расчета движения несбалансированного колеса и рассчитать величину дисбаланса, если

скорость движения вагона V (значения принять из предыдущей задачи).

6.1.3. Написать дифференциальное уравнение извилистого движения одиночной колесной пары, получить его решение и построить график для колеса диаметром $D=0,95$ м с коничностью $n=0,05$ при движении колесной пары по кривой радиуса $R=500$ м.

6.1.4. Рассчитать силу удара колеса о рельсовый стык при движении вагона со скоростью $V=30$ м/с если известно, что угол удара $\varphi_{уд}=0,03$. Принять приведенный вес рельса $Q_p=1500$ Н, вес неподрессоренных частей $Q_n=48000$ Н, а жесткость колеса $c=120$ МН/м.

6.1.5. Рассчитать эквивалентную жесткость соединенных параллельно трех пружин, если заданы их гибкости $\lambda_1=0,0002$ м/Н, $\lambda_2=0,00025$ м/Н, $\lambda_3=0,0004$ м/Н.

6.1.6. Пружина с жесткостью c_1 под действием груза массой m прогнулась на 4 мм. Пружина с жесткостью c_2 под действием того же груза массой m прогнулась на 6 мм.

На сколько мм суммарно прогнутся эти пружины, если их соединить: 1) параллельно; 2) последовательно?

6.1.7. Определить жесткость каждой из трех соединенных последовательно пружин, если известно, что эквивалентная гибкость $\lambda_1=0,0002$ м/Н, а жесткости этих пружин относятся друг к другу следующим образом, $c_1=2c_2$, $c_3=3c_1$.

6.1.8. Определить эквивалентную гибкость пружин, соединенных комбинированным способом (рисунок 6.1), если $c_1=5$ кН/м, $c_2=8$ кН/м, $c_3=6$ кН/м.

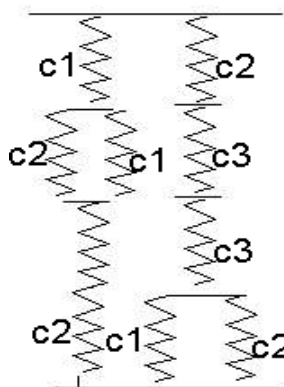


Рисунок 6.1. Комбинированное соединение пружин.

6.2. Динамические характеристики рельсового пути

6.2.1. Рассчитать предельно допустимую скорость V движения вагона по кривому участку пути с возвышением наружного рельса h , если задана величина непогашенного ускорения a_{ny} . (Непогашенное ускорение характеризует величину центробежной силы и определяется по формуле $a_{ny} = V^2/g - hg$. В качестве предельно допустимого значения для пассажирских вагонов принято $a_{ny}=0,07$ м/с²). Исходные данные приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

Варианты исходных данных к задаче 6.2.1

№ варианта	a_{ny} , м/с ²	H, мм
1	0,04	75
2	0,045	90
3	0,05	140
4	0,06	120
5	0,07	150

6.2.2. Построить график неровности рельсового пути по одной из четырех формул гармонических неровностей, если задана скорость движения вагона V и амплитуды неровностей. Исходные данные приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3

Варианты исходных данных к задаче 6.2.2

№ варианта	№ формулы	Скорость V , км/ч	Значения амплитуд, мм			
			A	A ₁ , A ₂	A	a ₁ , a ₂
1	1	50	10			
2	2	70		8, 7		
3	3	90			23	
4	4	110				18, 7
5	2	120		10, 6		

6.3. Динамические характеристики вагона

6.3.1. Пассажирский вагон для межобластного сообщения имеет массу подрессоренных частей кузова $m_k=43,4$ т, тележек $m_m=3,65$ т и моменты инерции кузова относительно центра тяжести $I_{kx}=89$ тм², $I_{ky}\approx I_{kz} = 2200$ тм². Рессорное подвешивание этого вагона имеет статические прогибы в центральной ступени $f_{1cm} = 145$ мм, в надбуксовой $f_{2cm}=47$ мм, жесткости в поперечном направлении комплекта пружин центрального подвешивания $c_{1yn}=770$ кН/м, надбуксового подвешивания $c_{2y} = 1720$ кН/м, длину люлочной подвески $l_n= 252$ мм. Значения остальных параметров следующие: $2l=17$ м; $h=1,43$ м; $2b=2,036$ м; $2s=1,58$ м; $r=0,475$ м; $n=0,05$.

Необходимо определить жесткости эквивалентного одноступенчатого подвешивания, частоты и формы собственных колебаний, критические скорости движения, а также параметры демпфирования и угол наклона гидравлического гасителя колебаний.

6.4. Задачи на свободные колебания

6.4.1. Для систем, изображенных на рисунке 6.2, определить частоты собственных колебаний, если $m=1$ Н, $c_1=10$ Н/м, $c_2=5$ Н/м.

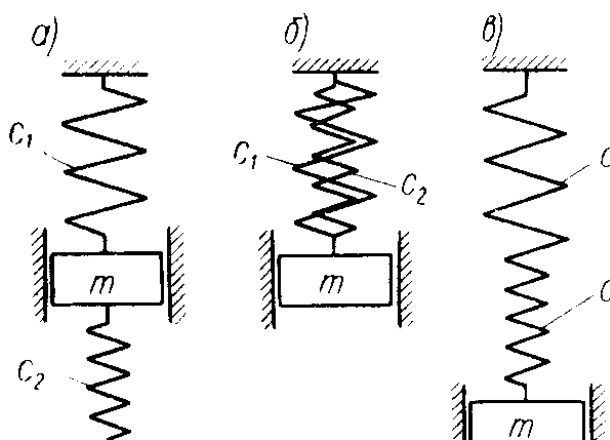


Рисунок 6.2. Динамические системы к задаче 6.4.1.

6.4.2. Зубчатое колесо 1 (рисунок 6.3) с жестко скрепленным с ним водилом 2 лежит на зубчатой рейке 3. К свободному концу водила прикреплены без натяга пружины 4 жесткостью c каждая.

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний системы используя уравнение Лагранжа II рода; определить собственную частоту колебаний.

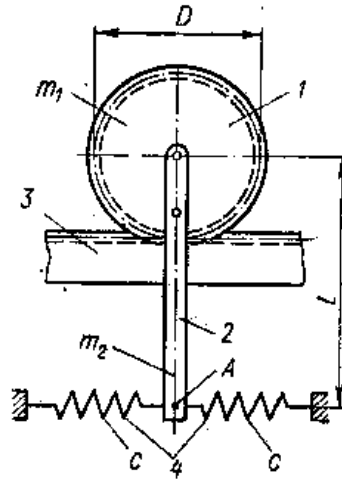


Рисунок 6.3. Зубчатое колесо на рейке.

6.4.3. Тяжелый цилиндр весом Q , радиусом r (рисунок 6.4) лежит на вогнутой поверхности, имеющей радиус кривизны R . К верхней точке цилиндра прикреплены две пружины – растяжки жесткостью c каждая.

Составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний цилиндра, считая, что проскальзывание цилиндра по поверхности отсутствует.

1) Исследовать влияние радиуса кривизны поверхности R на собственную частоту колебаний цилиндра.

2) Определить собственную частоту колебаний цилиндра, когда поверхность является плоскостью ($R=\infty$).

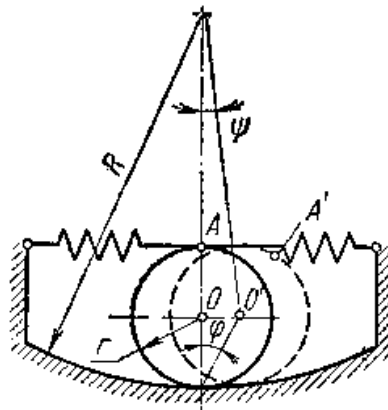


Рисунок 6.4. Цилиндр.

6.4.4. Стержень AB жесткостью на кручение c на одном конце имеет цилиндрический шарнир A , а на другом – диск радиусом R и весом Q (рисунок 6.5.). Система укреплена на плоскости, наклоненной к горизонту на угол α .

Считая, что диск может совершать колебательные движения качения без проскальзывания, составить дифференциальные уравнения его малых свободных колебаний.

Исследовать зависимость собственной частоты колебаний и их устойчивость от угла наклона плоскости α .

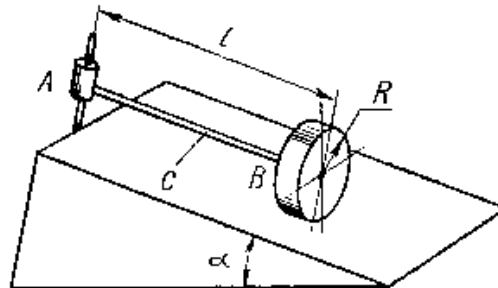


Рисунок 6.5. Динамическая система к задаче 6.4.4.

6.4.5. Диск массой m с моментом инерции I_0 насажен на ступицу радиуса r (рисунок 6.6.). Ступица диска опирается на криволинейную круговую направляющую радиусом R .

Составить дифференциальные уравнения малых свободных колебаний диска, считая, что при его движении проскальзывание между ступицей и направляющей отсутствует.

Дифференциальное уравнение движения получить двумя способами: по принципу Даламбера и используя уравнение Лагранжа II рода.

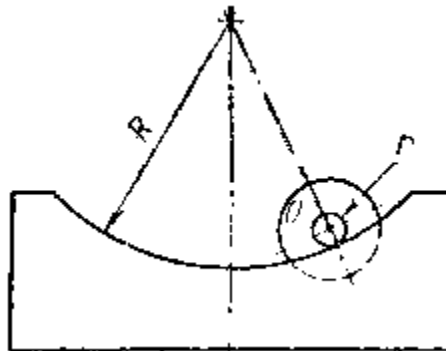


Рисунок 6.6. Динамическая система к задаче 6.4.5.

6.4.6. На наклонном рельсовом пути (рисунок 6.7.) установлена тележка массой m , удерживаемая пружиной жесткостью c . Считая, что каждая из двух колесных пар тележки имеет момент инерции массы J , радиус колес равен r , а движение происходит без проскальзывания колес по рельсам, составить дифференциальное уравнение малых свободных колебаний тележки.

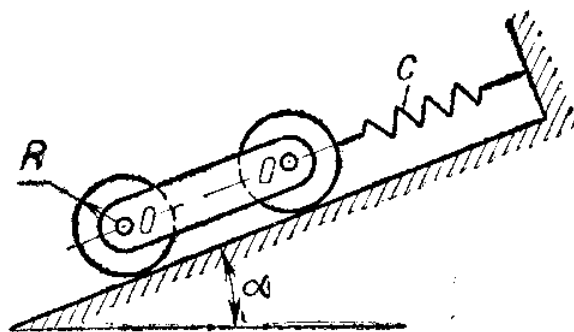


Рисунок 6.7. Тележка.

6.4.7. Определить зависимость собственной частоты крутильных колебаний вала смесителя от вязкости перемешиваемых жидкостей, а также время, в течение которого амплитуда колебаний вала смесителя уменьшится в 10 раз после мгновенной остановки мотора, если скорость равномерного вращения перед остановкой равна Ω (рисунок 6.8.).

При решении задачи принять, что масса вала мала по сравнению с массой лопастей. Момент инерции массы лопастей $J=0,05 \text{ Нм}^2$. Диаметр вала $d=5 \text{ мм}$, длина вала $l=0,5 \text{ м}$. Коэффициент вязкого сопротивления движению лопастей $\beta=0,012 \text{ Нс/м}$.

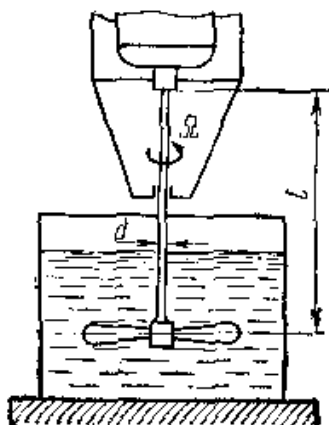


Рисунок 6.8. Динамические системы.

6.4.8. Для определения коэффициента вязкости масла ν можно использовать установку, показанную на рисунке 6.9. Массивный стальной цилиндр высотой $H=0,2 \text{ м}$ и диаметром $D_1=0,1 \text{ м}$ подвешивается на тонкой проволоке диаметром $d=0,001 \text{ м}$ длиной $L=0,5 \text{ м}$ в стакане диаметром $D_2=0,12 \text{ м}$. В стакан заливается масло и цилиндр приводится в колебательное вращательное движение.

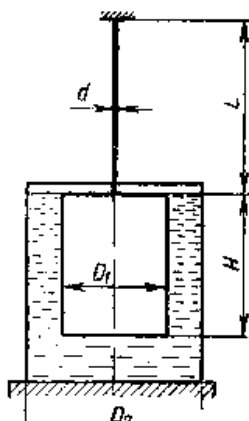


Рисунок 6.9. Динамическая система к задаче 6.4.8.

Считая, что момент сопротивления движению вычисляется по формуле $M = \frac{\pi H}{4} \frac{D_1 \omega}{D_2 - D_1}$, где ω - угловая скорость вращения, ρ - плотность масла, определить вязкость ν масла, имеющего плотность $\gamma = 900 \text{ кг/м}^3$, если при проведении испытаний период свободных колебаний равнялся $\tau = 6,5$ секунд. Жидкость считать безынерционной.

6.5. Задачи на вынужденные колебания

6.5.1. Определить амплитуду и собственную частоту установившихся колебаний подпрыгивания кузова груженого грузового вагона массой брутто $m_{бр} = 70 \text{ т}$, при его движении по гармонической неровности $\eta = A \sin \omega t$, если он движется со скоростью $V = 50 \text{ км/ч}$. Считать, что вагон симметрично загружен, амплитуда неровности $A = 11 \text{ мм}$, длина рельса равна $L = 25 \text{ м}$, масса одной тележки $m = 4,8 \text{ т}$. Сопротивлением демпфера β пренебречь. Расчетная схема представлена на рисунке 6.10.

Построить графики колебательного процесса, используя компьютер.

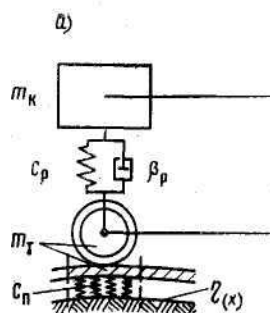


Рисунок 6.10. Расчетная схема к задаче 6.5.1.

6.5.2. На рисунке 6.11 приведена схема вибрографа – прибора для регистрации колебаний. На жесткой станине 1 прибора закреплена катушка 2, сердечником которой является магнит 3, подвешенный на пружине 4. При движении магнита внутри катушки в ней возникает электрический ток, который подается на регистрирующий прибор.

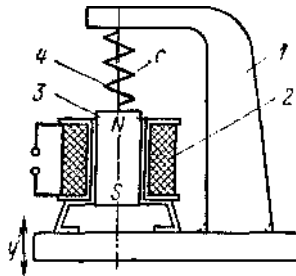


Рисунок 6.11. Схема вибрографа.

Считая, что магнит 3 имеет массу m , а пружина 4 – жесткость c , составить дифференциальное уравнение движения магнита и определить, при каком условии искажения записи колебаний будут минимальными (прибор записывает вертикальные колебания основания, происходящие по закону $z = z_0 \sin \omega t$).

6.5.3. Безрычажный датчик контроля биения поверхности (рисунок 6.12) состоит из измерительного стержня 1 весом P , укрепленного на двух плоских пружинах 2. Винтовая цилиндрическая пружина 3 служит для прижатия измерительного стержня к контролируемой детали. Если контролируемая деталь 4 имеет биение поверхности относительно линии центров (величина биения определяется эксцентриситетом e), то при вращении детали угловая скорость которой ω , измерительный стержень получает вертикальные перемещения.

Считая, что при отсутствии эксцентриситета ($e=0$) усилие прижатия измерительного стержня к детали равно R_0 , и пренебрегая массой упругих элементов, определить предельную угловую скорость вращения детали ω из условия непрерывности контакта при контроле детали, имеющей эксцентриситет e .

Чему равно измерительное усилие прибора (усилие, с которым измерительный стержень прижимается к детали) при $\omega=0, 1\omega_0$?

При расчете принять: $P=0,05 \text{ кГ}$, $R_0=0,5 \text{ кГ}$, $d_1 = 5 \text{ см}$, $e=0,01 \text{ см}$. Плоские пружины имеют длину $l=3,0 \text{ см}$ и поперечное сечение $b \times h = (5 \times 0,5) \times 10^{-2} \text{ см}^2$. Диаметр винтовой пружины $D=0,5 \text{ см}$,

проволоки $d=0,1$ см, число витков $i = 20$. Материал пружин — сталь, $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см².

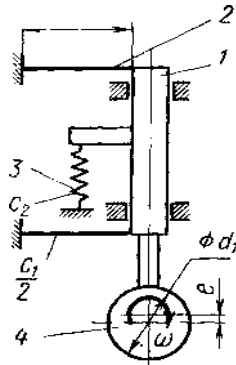


Рисунок 6.12. Схема датчика биений.

6.5.4. При работе однофазного электродвигателя развивается переменный крутящий момент $M=M_0+M_1\sin\alpha t$. В этом случае в качестве виброизоляции применяется специальная подвеска (рисунок 6.13), выполненная таким образом, что наклонные участки стальных полос пересекаются в центре подшипника. Такая опора оказывается весьма жесткой в вертикальном и горизонтальном направлениях, что необходимо для обеспечения нормальной работы зубчатого колеса, закрепленного на валу двигателя, и достаточно податливой в угловом направлении.

Определить необходимые размеры поперечного сечения полос опор ($b \times 2b$) из условия, что динамический коэффициент передачи момента на основание не должен превышать 1/15; $l_3=10$, $l_2=16$, $l_1=5$ см, момент инерции массы двигателя $J = 2$ кг·м².

Определить коэффициент запаса усталостной прочности при $M_0=20$ кг·м, $M_1=12$ кг·м, $\sigma_B=100$ МПа, а $\sigma_{-1} = 40$ МПа.

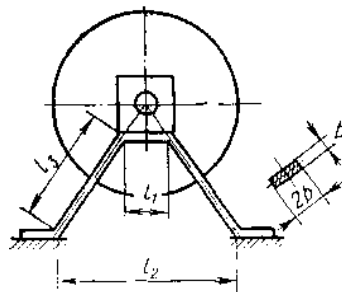


Рисунок 6.13. Схема к задаче 6.5.4.

6.5.5. Для уменьшения воздействия сил инерции, развиваемых в машине неуравновешенными частями, на основание (фундамент)

применяется виброизоляция двигателя — подвеска (или его установка) на податливых упругих опорах.

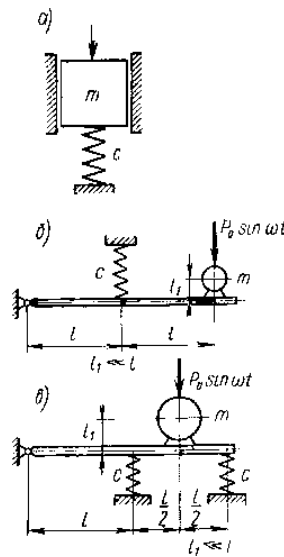


Рисунок 6.14. Схемы к задаче 6.5.5.

Для схем, изображенных на рисунке 6.14, определить динамический коэффициент передачи силы на основание в местах прикрепления упругих опор жесткостью c . Балки, на которых установлены двигатели, считать абсолютно жесткими.

6.5.6. Масса m (рисунок 6.15) подвешена на пружине жесткостью $c=7200 \text{ Н/м}$. Верхний конец пружины связан с кривошипно-шатунным механизмом и может совершать возвратно-поступательное движение, описываемое уравнением $x=x_0 \sin \omega t$, где амплитуда $x_0=1,55 \text{ см}$, а угловая скорость вращения кривошипа ω равна собственной частоте свободных незатухающих колебаний массы m .

Считая, что коэффициент вязкого сопротивления демпфера $\beta=270 \text{ Нсек/м}$, а масса груза $m = 0,91 \text{ кг}$, определить:

- 1) максимальную силу, растягивающую пружину;
- 2) коэффициент запаса усталостной прочности пружины, считая, что ее диаметр $D=5 \text{ см}$, диаметр проволоки $d=0,5 \text{ см}$. Пружина изготовлена из стали, имеющей следующие механические характеристики: $\tau_s=850 \text{ МПа}$, $\tau_m=600 \text{ МПа}$, $\tau_{-1}=300 \text{ МПа}$.

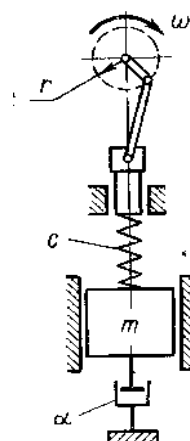


Рисунок 6.15. Схема к задаче 6.5.6.

7. Методические указания к выполнению практических работ

В данном разделе приведены темы рекомендуемых практических работ, указаны их цели, даны краткие рекомендации по их выполнению и оформлению.

Общим при оформлении отчетов по работам является:

- все численные вычисления должны быть представлены полностью с указанием размерности получаемых величин.
- весь отчет может быть оформлен с отдельной обложкой установленного для института образца, или же может быть сложен вместе с другими практическими работами с одной общей обложкой (по указанию преподавателя).
- оформленный отчет по работе должен быть защищен во внеурочное время и быть оценен преподавателем.

7.1. Практическая работа № 1

Тема: Расчет жесткости при комбинированном соединении упругих элементов.

Цель работы: Научиться рассчитывать эквивалентную жесткость упругих элементов при различных их соединениях.

Задание: Рассчитать эквивалентную жесткость соединенных комбинированным способом упругих элементов, представленную преподавателем при выдаче задания. Определить гибкость всей системы.

Указания к выполнению:

1. Выучить определения жесткости и гибкости упругих элементов. Знать в каких единицах они измеряются.
2. Проанализировать полученную схему соединений упругих элементов.
3. Разбить ее на более простые составляющие элементы (участки), сгруппировав однотипное их включение.

4. Рассчитать для таких участков эквивалентные промежуточные жесткости.

5. Составить новую свернутую схему соединений.

6. В случае необходимости повторить эти действия (2 –5) для вновь полученной схемы соединений.

7. Повторять пункты 2 – 6 до тех пор, пока исходная схема не будет представлена одним эквивалентным упругим элементом.

8. Определить гибкость эквивалентного упругого элемента.

9. Оформить отчет по работе.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- окончательные результаты с выводами.

7.2. Практическая работа № 2

Тема: Неровности рельсового пути.

Цель работы: Изучить классификацию и виды неровностей, а также их математическое описание в задачах динамики вагона.

Задание: Согласно варианту выданного преподавателем задания построить график неровности пути с использованием компьютера.

Указания к выполнению:

1. Изучить классификацию и виды неровностей. Знать их характеристики и в каких единицах они измеряются (смотри п. 1.4) и [1,15].

2. Кратко описать виды и классификацию неровностей.

3. Используя компьютер, построить график неровности рельсового пути в соответствии с исходными данными, согласно индивидуальному заданию.

Примечание: Допускается использовать любые языки программирования, пакеты прикладных программ для построения графиков по табличным данным (например Plot_M [16]), или по функциональным зависимостям (рекомендуется MathCad).

4. Получить распечатки с компьютера для представления в отчете.

5. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- описание видов и классификацию неровностей;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- примеры распечаток с компьютера;
- окончательные результаты с выводами.

7.3. Практическая работа № 3

Тема: Расчет удара колеса по рельсу.

Цель работы: Научиться определять величину силы удара колеса по рельсовому стыку и от действия ползуна на поверхности катания.

Задание: Вывести формулу для расчета удара колеса по рельсу. Определить величину силы удара при заданных преподавателем скорости движения вагона V и величины ползуна длиной l . Построить графики изменения силы удара колеса по рельсу в зависимости от изменения скорости от 10 до 120 км/ч.

Указания к выполнению:

1. Изучить теоретический материал (смотри п. 2.1) и [1,15].
2. Кратко описать опасность таких возникающих ударов.
3. Составить расчетную схему взаимодействия колеса с ползуном и рельсом с указанием всех действующих в системе сил.
4. Составить дифференциальные уравнения и вывести формулу для расчета силы удара колеса по рельсу от действия ползуна.
5. Получить численные результаты для индивидуальных исходных данных.
6. Сделать выводы по результатам расчетов.
7. Составить расчетную схему для вывода формулы по определению силы удара колеса о рельс при прохождении рельсовых стыков.
8. Получить численные результаты для индивидуальных исходных данных.
9. Сделать выводы по результатам расчетов.

10. Используя компьютер, построить график зависимости величины силы удара при наличии ползуна от скорости движения вагона в соответствии с исходными данными, согласно индивидуальному заданию. *Примечание: Смотри примечание к практической работе №2.*

11. Получить распечатки с компьютера для представления в отчете.

12. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- описание видов ударов и их опасность для вагона и пути;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- примеры распечаток с компьютера;
- окончательные результаты с выводами.

7.4. Практическая работа № 4

Тема: Извилистое движение одиночной колесной пары.

Цель работы: Изучить природу явления извилистого движения одиночной колесной пары и научиться определять характеристики такого движения.

Задание: Вывести уравнение, описывающее извилистое движение одиночной колесной пары. Для заданных преподавателем значений скорости движения вагона V , радиуса кривизны рельсового пути ρ , величины коничности поверхности катания колеса n , определить период и амплитуду колебаний геометрического центра колесной пары от центрального положения. Построить график такого движения с использованием компьютера.

Указания к выполнению:

1. Изучить теоретический материал (смотри п. 2.2) и [1,15].
2. Составить расчетную схему.
3. Записать дифференциальные уравнения извилистого движения одиночной колесной пары.
4. Получить их решение.

5. Используя начальные условия при $x=0$, $y=y_0$ и $\frac{dy}{dx}=0$, определить неизвестные постоянные интегрирования A и B .

6. Записать функциональную окончательную зависимость, описывающую извилистое движение колесной пары.

7. Используя компьютер, построить график извилистого движения одиночной колесной пары. **Примечание:** Так как соотношение амплитуды колебаний извилистого движения колесной пары к периоду такого колебания очень велико ($T/A \rightarrow \infty$), то на графике эти колебания будут незаметны. Поэтому, после получения численных результатов, которые будут приведены в отчете, при построении графика, амплитуду колебаний рекомендуется увеличить (примерно на два порядка) для наглядности.

8. Получить распечатку с компьютера.

9. Сделать выводы по работе.

10. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- теоретические сведения;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- примеры распечаток с компьютера;
- окончательные результаты с выводами.

7.5. Практическая работа № 5

Тема: Движение несбалансированного колеса.

Цель работы: Научиться определять величину дисбаланса колеса и оценивать ее влияние на динамические характеристики вагона и железнодорожного пути.

Задание: Вывести дифференциальное уравнение движения несбалансированного колеса. Определить максимальное давление колеса на рельс при наличии дисбаланса, если известны масса колеса m_k , приведенная масса рельса m_r , жесткость рельсового основания c_r (задаются преподавателем).

Указания к выполнению:

1. Изучить теоретический материал (смотри п. 2.3) и [1,15].
2. Кратко описать опасность такого явления.
3. Составить расчетную схему взаимодействия колеса с рельсом с указанием всех действующих в системе сил.
4. Составить дифференциальные уравнения и вывести формулу для расчета силы воздействия колеса на земляное полотно.
5. Получить численные результаты для индивидуальных исходных данных.
6. Сделать выводы по результатам расчетов.
7. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- теоретические сведения;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- окончательные результаты с выводами.

7.6. Практическая работа № 6

Тема: Колебания симметрично загруженного грузового вагона.

Цель работы: Научиться составлять расчетную схему, дифференциальные уравнения движения для свободных, затухающих и вынужденных колебаний кузова вагона, определять частоту и амплитуду колебаний кузова вагона и тележки.

Задание: Определить амплитуду и собственную частоту установившихся колебаний подпрыгивания кузова груженого грузового вагона массой брутто $m_{бр}=65$ т, при его движении по гармонической двугорбой неровности, если он движется со скоростью $V=35$ км/ч. Считать, что вагон симметрично загружен, амплитуда неровности $A=9$ мм, длина рельса равна $L=25$ м, масса одной тележки $m=4,8$ т. Сопротивление одного демпфера $\beta=150$ кНм/с.

Построить графики колебательного процесса, используя численные методы решения дифференциальных уравнений на компьютере.

Указания к выполнению:

1. Изучить и кратко описать теоретический материал (смотри п. 3) и [1,15].

2. Составить расчетную схему с указанием всех действующих в системе сил.

4. Составить дифференциальные уравнения.

5. Применяя метод Рунге-Кутты [17, 18], получить численные результаты для индивидуальных исходных данных.

6. По результатам расчетов построить график колебательного процесса.

7. Сделать выводы по результатам расчетов.

8. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- теоретические сведения;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- график колебаний, полученный с компьютера;
- окончательные результаты с выводами.

7.7. Практическая работа № 7

Тема: Колебания пассажирского вагона.

Цель работы: Изучить методику исследования колебаний узлов пассажирского вагона.

Задание: Составить дифференциальное уравнение колебаний подпрыгивания пассажирского вагона имеющего тару $T=54,4$ т, грузоподъемность $Q=10$ т,двигающемуся со скоростью $V=130$ км/ч по одnogорбой неровности с амплитудой $a=13$ мм. Параметр сопротивления одного гидравлического гасителя колебаний $\beta=130$ кНс/м. Задачи решить численным методом.

Указания к выполнению:

1. Изучить и кратко описать теоретический материал (смотри п. 4) и [1,15].

2. Составить расчетную схему с указанием всех действующих в системе сил.

4. Составить дифференциальное уравнение.

5. Применяя метод Рунге-Кутты [17, 18], получить численные результаты для индивидуальных исходных данных.

6. По результатам расчетов построить график колебательного процесса.

6. Сделать выводы по результатам расчетов.

7. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;
- цель работы;
- теоретические сведения;
- описание задачи с исходными данными;
- расчетную схему;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- график колебаний, полученный с компьютера;
- окончательные результаты с выводами.

7.8. Практическая работа № 8

Тема: Оценка динамических качеств вагона.

Цель работы: Изучить основные показатели оценки динамических качеств вагона. Научиться получать численные значения основных показателей и сравнивать их с допустимыми.

Задание: Изучить основные показатели динамических качеств для заданного преподавателем типа вагона. Для этого вагона рассчитать основные показатели и дать общую оценку своему вагону.

Указания к выполнению:

1. Изучить и кратко описать теоретический материал (смотри п. 5) и [1,15].
2. По известным формулам с учетом своего типа вагона численно определить основные динамические показатели вагона.
3. Сравнить полученные результаты с допускаемыми значениями.
4. Сделать заключение о динамических качествах своего вагона.
5. Оформить отчет.

Оформление отчета: Отчет по работе должен содержать следующие разделы:

- название работы;

- цель работы;
- теоретические сведения;
- порядок выполнения работы с подробными объяснениями каждого шага;
- заключение о динамических качествах своего вагона.

Список литературы

1. Динамика вагона. Вершинский С.В., Данилов В.Н., Челноков И.И. Учебник для вузов ж.-д. транспорта. Изд. 2-е, перераб. и доп. -М.: Транспорт, 1978, -352с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. -М.: Наука, 1965,-856 с.
3. Магнус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. –М.: Мир, 1982, -304 с.
4. Нагруженность элементов конструкции вагона / Под ред. В.Н.Котуранова. – М.: Транспорт, 1991, -238 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. 8-е изд., -М.: Транспорт, 1979. –560 с.
6. Писаренко Г.С.,Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975.-704 с.
7. Бабаков И.М. Теория колебаний.- М.: Наука, 1968.-560 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М.: Наука, 1978.-456 с.
9. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций.-М.: Наука, 1976.-704 с.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. - М.: Наука, 1965.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Физматгиз, 1961.
12. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. В 2-х томах. Изд. 2-е. -М.: Наука, 1977, -480 с.
13. Шахунянц Г.М. Железнодорожный путь. -М.: Транспорт, 1969, -536 с.
14. Лазарян В.А. Динамика вагонов – устойчивость движения и колебания. -М.: Трансжелдориздат, 1964. 255 с.
15. С.А. Хромов. Динамика вагона. Конспект лекций. ТашИИТ, 2005.
16. С.А. Хромов. Plot_M. Методические указания по работе с программой для построения графиков. ТашИИТ. 2005.
17. Е. Макаров. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс.-СПб.: Питер, 2003. –448 с.

18. В.П. Дьяконов. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ. –М.: Наука, гл. ред. физ. мат. лит., 1987. –240 с.

Содержание

Введение	3
1. Общие положения	3
1.1. Основные теоретические сведения	4
1.2. Решения дифференциальных уравнений	7
1.3. Динамические характеристики вагона	11
1.4. Динамические характеристики железнодорожного пути	14
2. Динамика неподрессоренных масс вагона	16
2.1. Расчет удара колеса по рельсу	17
2.2. Извилистое движение одиночной колесной пары	19
2.3. Движение несбалансированного колеса	21
3. Колебания вагона с одинарным рессорным подвешиванием	23
3.1. Общая характеристика систем одинарного рессорного подвешивания	23
3.2. Цель и методы исследований колебаний вагона	24
3.3. Колебания симметрично загруженного вагона	26
4. Колебания вагона с двойным рессорным подвешиванием	29
4.1. Особенности систем двойного рессорного подвешивания	29
4.2. Собственные колебания подрессоренных частей вагона	30
5. Оценка динамических качеств вагона	33
5.1. Оценка динамических качеств грузового вагона	33
5.2. Оценка динамических качеств пассажирского вагона	34
6. Сборник задач для самостоятельной работы	37
7. Методические указания к выполнению практических работ	47
Список литературы	56

Редактор: Мулламухамедов С.А.

Подписано в печать
Формат бумаги 60x84 1/16

Объем 3,375 п.л.
Тираж экз. Заказ №

Типография ТашИИТ

Ташкент, ул. Адылходжаева, 1