O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta maxsus
ta’lim vazirligi

Alisher Navoiy nomidagi Samarqant davlat unversiteti
Charxin ishtimoiy iqtisodiy kasb – hunar kolleji.

T.Nurimv, O.Normamatov, G.Eshqobilova.

MATEMATIKA

(Kombinatorika, ehtimollar nazariyasi va matematik
statistika elimentlari)
uslubiy qullanma

SamDU uslubiy kengashi
tomonidan chop etishga
tavsiya etilgan

Samarqand - 2008

Matematika (kombinatorika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari). Uslubiy qullanma – Samarqand
SamDU nashiri, 2008 – 59 bet

Mazkur uslubiy qullanma matematikaning kombinatorika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo'limlari bo'yicha kasb - hunar kollejlari dasturlariga mos holda tayyorlangan bo'lib, bunga nazariy va amaliy mashg'ulotlarni olib borish bo'ycha uslubiy ko'rsatmalar berilgan.

Tuzuvchilar: T. Nurimov O. Normamatov G.Eshqobilova

Ma'sul muxarir: Q.N.Tursunov. SamDU aniq, tabiiy
fanlar va ularni o'qitish metodikasi kafedrasining dotsenti.

Taqrizchlar: N.Juraev Charxin IIKH kolleji o'qituvchisi, X. Normurodov SamDU dotsenti.

Alisher Navoiy nomidagi Samardand davlat unversiteti, 2008

Kirish

O’zbekiston Respublikasi “Ta’lim to’g’risida” gi qonuni va “Kadrlar tayorlash milliy dasturi”da kasb - hunar kollejlarida fanlarni o’qitishda innavatsion texnalogiyalarini qo’llash orqali talabalarning fanlarga bo’lgan qiziqishlarini oshirish, olingan ilmiy bilimlar asosida dunyoqarashini, yuqori ma’naviy - ahloqiy fazilatlarini, estetik didni shakillantirib, ta’limning hayot bilan mustakam aloqalarini ta’minlashga etibor qaratilishi takitlangan.

Dars zamon talablariga mos bo’lishi uchun har bir pedagog dars mavzularini milliy g’oya, milliy mafkura mazmun va mohiyati bilan bog’lab o’tishi lozim.

Milliy mafkura bilan bog’liq bo’lgan muhim vazifalarni zamonaviy dars jarayonida amalga oshirish haqiqatdan ham pedagoglar faoliyatining asosiy mazmunini tashkil etadi.

Bu o’lkan vazifalarni amalga oshirish uchun fan o’qituvchilarining, xususan matematika fani o’qituvchilarining darsga ilmiy jixatdan mustaxkam tayorgarlik ko’rishlari bilan bir qatorda milliy g’oya va nazariyalar ustida ham masuliyat bilan izlanishlariga to’g’ri keladi.

Maskur uslubiy qo’llanma KH kollejlari matematika dasturiga moslab yozilgan bo’lib bunda kombinatorika, extimollar nazariyasi va matematik statistika elementlarini sodda va tushunarli tilda bayon etishga harakat qilingan.

Kombinatorik masalalariga bitta ma’ruza va bitta amalliy mashg’ulot o’tkazish mo’ljallangan bo’lib mustaqil ishlash uchun savol va topshiriqlar berilgan.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlariga uchta ma’ruza va uchta amalliy mashg’ulot o’kazish nazarda tutilgan bo’lib mustaqil ishlash uchun etarlicha misol va masalalar berilgan.

1 – Ma’ruza

Mavzu: Kombinatorika elementlari va Nyuton binomi

1. **Darsning maqsadi.** Talabalarga kombinatorika masalalari va kombinatorikaning bo’limi haqida tushinchalar berish va kombinatorik masalalarni yechishda zarur bo’lgan qoydalarning keltirish va ular yordamida kombinatorikaning asosiy masalalaridan o’rinlashtirishlar o’rin almashtirishlar, guruxlashlarga oid masalalarni yechishni nazariy jixatdan asoslashdan iborat.

2. Reja:

1 Kombinatorik masalalar
2. Yig’indi qoidasi.
3. Ko’paytma qoidasi.
4. Takrorlanadigan o’rinlashtirishlar
5. Takrorlanmaydigan o’rin almashtirishlar
6. Takrorlanmaydigan o’rinlashtirishlar
7. Takrorlanmaydigan guruhlashlar
8. Nyuton binomi

4. Tayanch iboralar: kombinatorika, kombinatorik masalalar, yig’indi qoidasi, ko’paytma qoidasi, tartiblangan to’plam o’rinlashtirishlar, o’rin almashtirishlar, guruhlashlar, Nyuton binomi.

3. Darsning jixozi. Doska, bo’r, ko’rgazmali qo’rollar.

1. Kombinatorik masalar.

Klassik kombinatorik masalalar turli xil qiziqarli boshqotirmalardan iborat bo’lib, bunda chekka to’plam elementlaridan tanlab olish va ularni xar xil usulda joylashtrish masalalarni qaraladi.

Bunday masalalardan biri qadim Sharqda paydo bo’lgan sihirli kvadrat haqidagi quyidagi masaladan iborat: n^2dona dastlabki natural sonlardan shunday n x n kvadrat jadval yasangki uning satrlari, ustunlari va dioganalida joylashgan sonlarning yig’indisi bir xil songa teng bo’lsin. Masalan, 9 ta ya’ni 1dan 9 gacha natural sonlardan 3 x 3 kvadrat jadval tuzinki uning satrlari, ustunlari va diognallarida turgan sonlarning yig’indisi 15 ga teng bo’lsin. Bu quyidagi ko’rinishdagi kvadrat jadval bo’ladi:

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Hozirgi kunda bu turdagi masalalarning $n > 4$ hol uchun echimlarini topish usullari topilgan.

Sihirli kvadrat satirlari (yoki ustunlari) sonini uning tartibi deb ataladi.

Ixtiyoriy tartibli sihirli kvadrat satrlari, ustunlari yoki deognallari bo’yicha xosil bo’lishi kerak bo’lgan yig’indini uning doimisi deb ataladi. Tartibi n bo’lgan sehirli kvadrat doimiysi Д quydagi formla bilan topiladi: $Д = (n^3+n)/2$

Masalan, 3 – tartibli sihirli kvadrat doyimisi

$$Д =(3^2+3)/2=15.$$

Xuddi shuningdek 4 tartibli sihirli kvadrat doyimisi

$$Д=(4^3+4)/2=34$$

bo'lib bu sihirli kvadratning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Bunda xar bir satr, ustun va deognallarda joylashgan sonlarning yig'indisi 34 ga teng.

Umuman elementlarning turli konbinatsiyalari va ularning sonni topish bilan bog'liq masalalar konbinatorika masalalari deyiladi. Bunday masalalar amaliyotda ko'plab uchraydi. Bunda ko'plab ob'ektlar to'plami elementlaridan uning qism to'plamlarini, qandaydir to'plam elementlarini u yoki bu ko'rinishda joylashtirish masalalari ko'zda tutiladi. Masalan, Fermer o'z ishchilari orasida turli ishlarni taqsimlashi, zobitning vizvotdagi askarlardalardan naryad tanlashi, shaxmatchining bir qancha yurishlar seriyasidan eng yaxshisini tanlashi va h.k. Bu masalalarda ishlarning turli xil kombinatsiyalarini tanlash, askarlarni tanlash, yurishni tanlash haqida so'z boradi.

Kombinatorik masalalar matematika fanining tarmog'i – kombinatorikada urganiladi. Kombinatorikada chekli to'plamlar, ularning qismi to'plamlari, akslantrishlar va chekli to'plamlardan tuzilgan kortejlar o'rganiladi. Shuning uchun kombinatorikani chekli to'plamlar nazariyasining qisimi deb qarash mumkin.

Ko'plab kombinatorik masalalarni echish ikkita asosiy qoidaga yani yig'indi va ko'paytma qoidalariga asoslanadi.

Yig'indi qoidasi ikki chekli to'plam birlashmasi elementlarining sonini topishga, ko'paytrish qoidasi esa ularning dekart ko'paytmasi elementlarining sonini topishga yordam beradi.

Biror A chekli to'plam berilgan bo'lsin. Uning elementlari sonini n (A) deb belgilaymiz.

Masalan, A = {a,b,c,d} bo'lsa, n (A) = 4 bo'ladi 4.

2. Yig'indi qoidasi. A va B chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

1) Agar $A\cap A=\phi$ bo'lsa,

$n(A\cup B)$ = n(A)+n(B) bo'ladi.

Masalan, A = {1,2,3}, B = {a, b, c, d} bo'lsa $n(A\cup B)$ = 3+4=7 bo'ladi.

2) Agar $A\cap B\neq\phi$ bo'lsa, $n(A\cup B)$ = n(A)+n(B) – $n(A\cap B)$ bo'ladi.

Masalan, A = {a, b, c, d, e}, B = {d, e, f, g} to'plamlar birlashmasi 7 ta elementdan tashkil topgan (9 ta elementdan emas). Buning sababi d, e elementlar ikkala to'plamda ham bor bo'lib $A\cup B$ to'plamda ular bir marta qatnashadi. Demak, 9 dan 2 ni ayirib tashlash kerak, y'ni

$n(A\cup B)$ = n(A)+n(B) – $n(A\cap B)$ = 5+4-2=7.

3. Ko'paytirish qoidasi. A = { $a_1, a_2, ..., a_n$ } va B = { $b_1, b_2, .., b_m$ } to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlar elementlaridan nechta (a_i, b_j) juftlik tuzish mumkinligini ko'rsatamiz. Barcha juftliklar quyidagicha joylashtrilishi mumkin:

$$(a_1;\ b_1),\ (a_{1,}\ b_2)\ ,\ldots,(a_1,\ b_m)$$
$$(a_2;\ b_m),(a_2,\ b_2)\ ,\ldots,(a_2,\ b_m)$$
$$(a_n;\ b_1),(a_n;\ b_2)\ ,\ldots,(a_n;\ b_m)$$

Bu jadvalda n ta satr va m ta ustun bo'lib, ulardagi barcha juftliklar soni nm ga teng. Bu yerda $n(\mathrm{A}) = n, \quad n(\mathrm{B}) = m$

Ko'paytma qoidasi $n(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = n(\mathrm{A})\cdot n(\mathrm{B})$ ko'rinishda yoziladi. Umuman isbotlash mumkinki

$$n(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times .... \times \mathrm{A}_n) = n(\mathrm{A}_1)\cdot n(\mathrm{A}_2)....n(\mathrm{A}_n).$$

Ko'paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko'rinishi quidagidan iborat: Agar x elementni m usul, y elementni n usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, $(x;y)$ tartiblangan juftlikni $m\cdot n$ usul bilan tanlash mumkin.

Masalan, 1dan 9gacha sonlardan nechta usul bilan turli raqamli ikki xonali son yozish mumkinligini topish talab qilingan bo'lsa, uni quyidagicha amalga oshirish mumkin. 1-raqamni 9 usul bilan, 2-raqamni ham 9 usul bilan tanlash mumkin. Demak, talab etilgan ikki xonali sonlar soni $9\cdot 9 = 81$ta bo'ladi.

Endi asosiy kombinatorik masalalar va ularni echish usullari bian tanishamiz.

4. Takrorlanadigan o'rinlashtrishlar. Masala m elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan k uzinlikdagi kortejlar sonini toping.

Bu masalani echish uchun $\underbrace{XxXx....xX}_{k-marta}$ dekarit ko'paytmadagi kortejlar sonini topish kerak. Bu dekarit ko'paytma k – uzunlikdagi kortejlardan tarkib topganligini hisobga olsak n (X)=m bo'lgani uchun ko'paytma qoidasiga ko'ra

$$n(XxXx\cdots xX) = n(X)\cdot n(X)\cdots n(X) = m\cdot m\cdots m = m^k$$

Demak, m elimintli X to'plam elementlaridan to'zilgan k o'zunlikdagi kortejlar soni m^k ga teng ekan. Kombinatorikda bo'nday kortejlarni m elementdan k tadan takhohlanadigan o'rinlashtirishlar deyiladi va $\overrightarrow{\overline{A}}{}_m^k = m^k$ deb belgilanadi Misol. 4 elimintli X={a,b,s,d} to'plamdan nechta uzunligi 2 ga teng kortejlar to'zish mumkin.

Echish. $\overline{A}{}_4^2 = 4^2 = 16$. Demak, 16 ta kortejlar to'zish mumkin. Bu kortejlar qo'yidagilardan iborat:

(a;a), (a;b), (a;c), (a;d)
(b;a), (b;b), (b;c), (b;d)
(c;a), (c;b), (c;c), (c;d)
(d;a), (d;b), (d;c), (d;d)

5. Takrorlanmaydigan o’rin almashtirishlar. Masala. m elemintli X to’plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin?

Masalani yechishdan oldin tartiblangan to’plam tushunchasini keltiramiz. m elemintli X to’plami berilgan bo’lsin. Uning elementlarini biror usul bilan nomerlab chiqilgan bo’lsa uni tartiblangan to’plam deymiz va X = $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ko’rinishda yozamiz. Bitta to’plamni turli xil usullar bilan tartiblash mumkin.

Masalan, autoriyadagi talabalarni yoshiga, bo’iga, og’irligiga, familyalarining bosh xarifiga qarab tartiblash mumkin. Masalani yechish uchun X to’plamining elementlarini tartiblashni (nomerlashni) quyidagicha amalga oshiramiz:

1 – nomerni m ta eiementning istalgan biriga berish mumkin. Shuning uchun 1- elementnin m usul bilan, 2 – elementni 1 – element tanlanib bo’lgandan so’ng m – 1 usul bilan tanlash mumkin va hokoza, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi, xolos. Tartiblashlarning umumiy soni ko’paytma qoidasiga ko’ra m (m – 1) (m - 2)…2.1 ga teng. Uni m! orqali belgilanadi va u dastlabki m ta natural sonning ko’paytmasi yoki m factorial deb o’qiladi. Uni P_m orqali belgilanadi. Demak, m elementli X to’plamni $P_m = m$!usul bilan tartiblash mumkin ekan. P_m - ni m elementdan takrorlanmaydigan o’rin almashtrishlar soni deb ataladi.

Misol. 12 ta mexmoni 12 ta stulga necha xil usul bilan o’tirg’izish mumkin.

Yechish. Bu 12 elementdan takrarlanmaydigan o’rin almashtrishlar sonini topish masalasi bolib

P_{12}=12! = $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12$ga teng.

Demak, 12! Usul bilan mexmonlarni o’tqazish mumkin.

6. Takrorlanmaydigan o’rinlashtirishlar. Masala. m elemintli X to’plamdan nechta tartiblangan k elementli to’plamlar to’zish mumkin?

Bu oldingi masaladan umumiyroq bo’lib, undan farqi shuki, tartiblash k-elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni

m(m-1)(m-2)….(m-k+1)

ko’pytmaga teng. U A_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan o’rinlashtirishlar soni deb ataladi:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)....(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

$A_m^m = P_m = m!,$ o!=1deb qabul qilinadi. Misol. Auditoriyadagi 30 talabadan 3ta faol talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = \frac{1\cdot2\cdots27\cdot28\cdot29\cdot30}{1\cdot2\cdots27} = 28\cdot29\cdot30 = 24360$usul bilan tanlash mumkin.

7.Takroelanmaydigan guruhlashlar. Masala. m elemintli X to’plamning nechta k elementli qism to’plamlari bor? m elementli X to’plamning k elementli qism to’plamlari soni $C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ formula bilan hisoblanadi va u m elementdan k tadan takrorlanmaydigan guruhlashlar soni diyladi.

Misol. Guruhdagi 30 talabani ko'rikda ishtirok etish uchun 5 talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin?
Echish. Ko'rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 30 elementli to'plamning 5 elementli qism to'plamlar soni nechtaligini topamiz:

$$C_{30}^{5}=\frac{30!}{5!25!}=\frac{1\cdot 2\cdots 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 25}=\frac{26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{13\cdot 9\cdot 7\cdot 29\cdot 6}{1}=144306.$$

Demak, 5 talabani 144306. usul bilan tanlash mumkin.
Endi C_m^k ko'rinishdagi sonlarning ba'zi xossalarini qaraymiz.

$$1^0. C_m^k=C_m^{m-k}. 2^0\cdot C_m^k=C_{m-1}^{k-1}+C_{m-1}^{k}, 3^0. C_m^0=C_m^m=1$$

2^0 va 3^0 xossalaridan foydalanib C_m^k ko'rinishdagi sonlarning qiymatini ketma-ket hisoblash mumkin.

3^0 xossaga ko'ra $C_0^0=C_1^0=C_1^1=C_2^0=C_2^2=1$ Bundan 2^0 ga ko'ra $C_2^1=C_1^0+C_1^1=1+1=2$. C_m^k korinishdagi sonlarni Paskal uchburchgi ko'rinishida joylashtirish mumkin:

C^0_0	1
$C^0_1\ C^1_1$	1 1
$C^0_2\ C^1_2\ C^2_2$	1 2 1
$C^0_3\ C^1_3\ C^2_3\ C^3_3$	1 3 3 1
$C^0_4\ C^1_4\ C^2_4\ C_4^3\ C^4_4$	1 4 6 4 1

Ньютон биноми

Мактаб математика курсидан маълумки
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^2=a^3+3a^2b+3ab+b^3$

Биз бу ерда a+b йиғиндининг бутун мустбат n-чи даражасини топиш формуласини келтириб чиқарамиз, яъни қўйидаги теормени исботлаймиз:

Теорема: Ҳар қандай m натурал сон учун. Шундай Cm^0, Cm^1, Cm^2, …, Cm^m натурал сонлар мавжудки, ихтиёрий a ва b сонлар учун $(a+b)^m=C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+C_m^2a^{m-2}b^2....+C_m^{m-1}ab^{m-1}+C_m^mb^m$ тенглик ўринли, бу ерда $C_m^0=C_m^m=1$.

Исбот. Теоремани математик индукция методи ёрдамида исботлаймиз.

m=1 бўлса, $(a+b)^1=1\cdot a+1\cdot b=C_1^0a+C_1^1b$

m=2 бўлса, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$.

Фараз қилайлик m>2 ва бизнинг тасдиқ ҳар қандай натурал m сони учун тўғри бўлсин. Жумладан m-1 учун ҳам тўғри бўлсин, яъни

$$(a+b)^m = (a+b)^{m-1}(a+b) = (C_{m-1}^0 a^{m-1} + C_{m-1}^1 a^{m-2} b + C_{m-1}^2 a^{m-3} + \ldots + C_{m-1}^{m-1} b^{m-1})(a+b) = C_{m-1}^0 a^m + (C_{m-1}^1 + C_{m-1}^0) a^{m-1} b + \ldots + (C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}) a^{m-k} b^k + \ldots C_{m-1}^{m-1} b^m$$

Агар $C_m^0 = C_{m-1}^0$, $C_m^m = C_{m-1}^{m-1}$, $C_m^k = C_{m-1}^k + C_{m-1}^{k-1}$ $(k = \theta, 1, 2 \ldots, m-1$ эканлигини назарга олсак

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k$$

Колиб чиқади.

Теорема биномиал коэффициентлар деб аталади. Исботланган формула Ньютондан биноми дейигади. Лекин бу формула Ньютондан олдин Умар Хаёмга маълум бўлган.

Агар биномиал коэффициентларни

$$C_m^k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots m}$$

Кўринишда ёзилса бином формуласини амалда ишлатиш осон бўлади. Масалан,

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3 b + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}a^2 b^2 + \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Бу ерда қўйидаги қоидаги амал қилинган. Биринчи қушилувчи a^4 бўлиб унинг коэффициенти 1 га тенг. Иккинчи қушилувчини ёзиш учун коэффициентга 4нинг узини ёзиб ёнига даражасини қушилувчи қўйидагига топилади: 4ни а нинг даражаси 3га кқлайтирилиб қушилувчилар сони 2га бўлинади ва у коэффициент 6 бўлади. унинг ёнига а нинг даражаси битта камайтирилиб b нинг даражаси битта ошириб ёзилади: $6a^2b^2$. Шу қоида бўйича охирги ҳод ҳам топилади. Масалан, шу қоида бўйича

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

бўлади.

Ньютон биноми формуласи қўйидаги ҳоссаларга эга.

1. $(a+b)^m$ ёйилмасининг барча бином коэффициентлари йиғиндиси 2^{ma} га тенг, яъни

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^1 +,... + C_m^m$$

Ҳақиқатдан, $(a+b)^m$ нинг ёйилмасида a=b=1 десак

$$2^m = (1+1)^m = C_m^0 + C_m^1 + ... + C_m^m$$

тенглик келиб чиқади.

2. Ёилма ҳадларининг сони бином курсатган m дан битта ортиқ , яъни m+1га тенг.

3. Ёилманинг ҳамма ҳадлари бир хил m даражали, яъни ёилма бир жинсли кўпқад бўлиб, биринчи ҳадининг даражаси mдан 0 гача камаяди, иккинчи ҳадининг даражаси 0 дан m гача ўсади.

4. Ёйилманинг биринчи ва охирги ҳадларининг коэффициентлари 1га, қолганлари эса C_m^1, C_m^2, C_m^{m-1} Ларга тенг бўлиб, улар биномиал коэффициентлар дейилади.

5. Ёйилманинг умумий ҳадини T_{k+1} билан белгиласан, у

$$T_{k+1} = C_m^k a^k b^{m-k} = \frac{m(m-1)....(m-k+1)}{1\cdot 2....k} a^k b^{m-k}$$

формула бўйича ҳисобланади.

6. Ёйилманинг охирларидан тенг ўзоқликда турган ҳадларнинг коэффициентлари ўзаро тенг.

7. Агар биномнинг кўрсатгичи жуфт бўлса, ёйилманинг ўрта ҳоди битта бўлиб, бу ҳод энг катта коэффициентга эга бўлади; агар биномнинг кўрсатгичи тоқ бўлса, ёйилманинг ўрта ҳоди иккита бўлиб, бу ҳодлар ўзаро тенг энг катта коэффициентга эга бўлади.

8. Жуфт ўринда турган биномиал коэффициентлар йиғиндиси, тоқ уринда турган биномиал коэффициентлар йиғиндисига тенг.

9. Бином формуласида b ни – b га алмаштирсак,

$$(a+b)^m = a^m - C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + ... + (-1)^k C_m^k a^k b^{m-k4} + ... + (-1)^m a^m$$

формула ҳосил бўлади.

Мисоллар: $(\sqrt{x}+1)^4$ нинг ейилмасини топинг.

Ечиш. Бином формуласига кура қўйидагини ҳосил қиламиз:

$$(\sqrt{x}+1)^4=(\sqrt{x})^4+4(\sqrt{x})^3+6(\sqrt{x})^2+4\sqrt{x}+1=x^2+4\sqrt{x}^3+6x+4\sqrt{x}+1$$

2. Ҳар қандай m ва n>1 натурал сонлар учун $n^m>m$ эканини кўрсатинг.

Ечиш $n^m=[1+(n-1)]^m=1+m(n-1)+...+(n-m)^m\geq 1+m(n-1)\geq 1+m>m$

Чунки $n-1\geq 1, \quad m(n-1)\geq m,$

3. Агар $(a^3+b^2)^m$ ёйилмаси учунчи ҳадининг коэффициенти 28 га тенг бўлса ёйилманинг ўрта ҳадини топинг.

Ечиш. Шартга кўра C_m^2, яъни $\frac{m(m-1)}{2}=28$. Бундан $m^2-m-56=0$ тенгламага эга бўламиз. Унинг натурал ечими m=8. демак, бином ёйилмасида 9 та ҳад қатнашади. Бу ҳолда бешинчи ҳад ўрта ҳад бўлади ва у $C_8^4(a^3)^4(b^2)^4=70a^{12}b^8$ га тенг.

Tekshirish uchun savollar va topshiriqlar.

1. Kombinatorika nima?
2. Kombinatorik masalalarni izoqlab bering.
3. Sihirli kvadrat haqidagi masalani tushintirining va n>5 hollar uchun sihrli kvadrat tuzing.
4. Yig’indi va ko’paytma qoidalarini ayting va misollar yordamida tushintiring.
5. Takrorlanadigan o’rinlashtirishlar soni qanday topiladi.
6. Takrorlanmaydigan o’rin almshtirishlar soni qanday topiladi.
7. Takrorlanmaydigan o’rinlashtirishlar soni qanday topiladi.
8. Takrorlanmaydigan guruhlashlar soni qanday topiladi.
9. Paskal uchburchagi va Nyuton binomi orasidagi bog’lanishni tushuntirining.
10. 40 ta talabadan 35 tasi matematikadan 37 tasi ona tilidan oraliq nazoratini muvoffaqiyatli topshirdi. Ikki talaba har ikala nazoratdan qoniqarsiz ball oldi. Neshta talaba akademik qarizdor bo’lib qoldi.
11. Sinifdagi 35 ta o’qivchidan 28 tasi so’zish seksiyasiga, 14 tasi volebol seksiyasiga qatnashadi. Agar har bir o’qiuvch, hech bo’lmaganda, bitta seksiyasiga qtnashsa ikkala seksiyasiga qarnashadigan o’quvchilar necha foizni tashkil etadi?
12. Besh xil ko’rinishda konvert va turt xil ko’rinishda marka bor. Xat junatish uchun necha xil usul bilan konvert va markalarni tanlash mumkin?
13. A shahardan B shaharga 4 ta yo’l olib boradi,
B shahardan C shaharga 3 yo’l olib boradi
A shahardan C shaharga B shahar orqali necha xil usul bilan borish mumkin?
14. 8 ta turli narsani 4 kishiga necha xil usul bilan tarqatish mumkin?
15. Bitta skameykaga 8 kishini necha xil usul bilan o’tirg’izish mumkin?
16. Komolada 6 ta turli rangda shar bor. U necha xil usul bilan 3 xil rangdagi sharni tanlashi mumkin?

17. Uchburchak uchlarini lotin alifbosining katta harflar yordamida necha xil usul bilan belgilash mumkin?

18. Қуйидагиларни ҳисобланг:

$a) A_{11}^4 \quad b) P_7 \quad c) c_{11}^3 \quad d) C_{20}^{18}$

19. $A_x^3 = C_x^3$ тенгламани ечинг

20. $C_{x-1}^{x-2} = x^2 - 13$ тенгламани ечинг

21. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ ни исботланг

22. $(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^{15}$ нинг 6-ҳадини топинг.

23. $(x^2 + \frac{3}{x^3})^{15}$ бином ёйилмасининг х қатнашмаган ҳадини топинг.

24. $(1+\sqrt{3})^7$ ни ҳисобланг.

25. $(1+x)^{10}, (\frac{1}{x} + 2x)^7, (2a + \frac{1}{a})^{11}$ ларнинг ёйималарини топинг.

Asosiy adabiyotlar.

1. Vlenkin NYa va b. matematika izdi. Prosveshenie M. 1977
2. Abduxamidov A, Nasimov X, Xusanov M Matematika. Toshkent 2002
3. Xamidova N. va b. Matematika Toshkent 2007
4. Vlenkin N.Ya. Zadachnik praktikum po matematike M. 1977

1 – Amaliy mashg'ulot

Mavzu: Kombinatorika masalalari

1**. Darsning maqsadi** Kombinatorikaga oid soda masalalarni hal qilishda zarur bo'gan qoidalardan foydalanib kombinatorik masalalar echish.

2. **Reja**: 1 Yg'indi va ko'paytma qoidasi

2 O’rinlashtirishlar

3. O’rin almashtirishlar

4. Guruhlashlar

3. Darsning jixozi: Doska, bo’r, ko’gazmali qurollar

4. Topshiriqlar. Kombinatorika elementlariga oid nazariy mashg’ulotlarni puxta o’rganib qullanmada va darslikda berilgan misollarni echib kelish.

Kombinatorik masalalar.

1. Yig’ndi va ko’paytma qoidasi.

a) Agar A va B o’zaro kesishmaydigan to’plamlar bo’lib, A da m element, B da n element bo’lsa $A\bigcup B$ berlashmada m+n element bo’ladi. Agar A va B to’plamlar o’zaro kesishsa $A\bigcup B$ birlashmaning elemintlari soni m+n dan A va B lar uchun mumumiy bo’lgan elementler sonini ayrib tashlab topiladi.

b) Agar A va B to’plamlar chekli va Ada n element Bda m element bo’lsa, bu elementlardan tuzilgan k uzunlikdagi kortijlar soni $m\cdot n$ gat eng.

Endi bu qoidalarga xos misollar keltiramiz.

Yig’ndi qoidasi $(A\bigcup B)$ =n(A)+n(B) (1) n $(A\bigcup B)$=n (A)+n(B)-n $(A\bigcap B)$ (2) Formulalar orqali ifodalanishini bilamiz.

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quydagicha ifodalanadi: Agar X elementi m usul, Y elementi n usul bilan tanlash mumkin bo’lsa, “X yoki Y” elementini m+n usul bilan tanlash mumkin.

1-misol. Savatda 10 dona olma va 20 dona shoftoli bor, bo’lsa 1 dona mevani necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. 1 dona mevani 10+20=30 usul bilan tanlash mumkin

2-misol. X={1,2,3,4}, Y={a,b,c,d,e} to’plamlar berilgan $n(X\bigcup Y)$=?

Yechish. n (x)=4. n(Y)=5 bo’lgan uchun n(XxY)=4+5=9.

3-misol. X={2,4,6,8}, y={2,5,7,9} to’hlamlar berilgan. n (XxY)=? Yechish n(x)=4, n(y)=4

Lekin 2 sonni xar ikkala to’plamda ham qatnashadi, demak $n(X\bigcap Y)$=1 (2) formulaga ko’ra $n(X\bigcup Y)$=4+4-1=7.

4 – misol. 30 ta talabadan 25 tasi matematikadan yakuniy nazoratdan, 23 tasi iqtisod yakuniy nazariydan o’ta oldi. 3 ta talaba ikkala fan bo’yicha yakuniy nazariydano’ta olmadi. Nechta qarzdor talaba bor.

Yechish. A bilan matematika yakuniy nazariydan o’tmagan talabalar to’plamini, B bilan iqtisod fanidan yakuniy nazariydan o’tmagan talabalar to’plamini belgilaymiz. U holda n(A) = 30–25=5, n(B)=30-23=7 n($A\bigcap B$)=3, n($A\bigcup B$)=5+7-3=9. Demak, 9 ta qarzdor talaba bor.

Bizga ma’lumki ko’paytma qoidasi n(AXB)=n(A)$\cdot n$(B) (3) ko’rinishda yoziladi. Ko’payutma qoidasiga oid kombinatorika masalasi quyidagicha ko’rinishda bo’ladi.

“Agar X elementini m usul, Y elementini n usul bilan tanlash mumkin bo’lsa, (x;y) tartiblangan juftlikni $m\cdot n$ usul bilan tanlash mumkin”

5-misol. A qishloqdan B qishloqqa 5 ta yo’l olib boradi, B qishloqdan C qishloqqa esa 2 ta yo’l olib boradi. A qishloqdan C qishloqqa B qishloq orqali necha xil usul bilan borsa bo’ladi.

Yechish. A dan C ga (1,a)(_1,b), (2,a),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b),(5,a),(5,b) juftliklar orqali berilgan yo’nalishlarda borish mumkin. Bunda yo’lning birinchi qismi 5 xil usul bilan, 2 – qismi 2 hil usul bilan bosib o’tiladi.

X={1,2,3,4,5,}, Y-{a,b}. deb olsak,

XxY={(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(5,a), (1;b),(2;b),(3;b),(4;b),(5;b)}-dekart ko’paytma hosil bo’ladi. Bunda n($XxY) = n(X)n(Y) = 5\cdot 2 = 10$ bo’lgani uchun A dan C ga 10 usul bilan boorish mumkinligi kelib chiqadi.

6 - misol. Nechta turli raqamlar bilan yozilgan ikki xonali sonlar bor?

Yechish. Birinchi raqamni 9 usul bilan ikkinchi raqamni ham 9 usul bilan tanlash mumkin. Qoidaga ko’ra hammasi bo’lib $9\cdot 9 = 81$ta ikki xonali son bor. Bunda 0 dan boshlab o’liklar raqamidan boshqa raqamlar nazarda tutiladi.

3.Takrorlanadigan o’rinlashtirishlar X={x_1,x_2,…,x_m} to’plam berilgan bo’lsin. Bu to’plam elementlaridan uzunligi k gat eng bo’lgan m^k kortejlar tuzish mumkin: $\vec{A}_m^k = m^k$

Buni m elementdan k tadan takrorlanadigan o’rinlashtirishlar diyiladi.

7 - misol. 3 elementli x={1,2,3} to’plam elementlaridan uzunligi ikkiga teng bo’lgan nechta kortish tuzish mumkin.

Yechish. $\vec{A}_3^2 = 3^2 = 9$ ta kortij tuzish mumkin. Mana ular.

(1;1) (1;2), (1;3)
(2;1) (2;2), (2;3)
(3;1) (3;2);(3;3)

8 - misol. 6 raqamli barcha telifon nomerlar sonini toping.

Yechish. Telifon nomerlar 0 dan 9 gacha bo’lgan o’nta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartiblangan uzunligi 6 ga teng bo’gan kortijlar sonini topamiz: $\vec{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$

4. Takrorlanmaydigan o’rin almashtirishlar. Malumki m elementli X to’plam elementlarini to’rli usullar bilan tartiblashlarning umumiy soni

$P_m = 1\cdot 2\cdots m = m!$ ga temg

9 - misol. 5 ta talabani 5 stulga necha xil usul bilan o’tqazish mumkin?

Yechish. Masala 5 elementdan 5 tadan takrorlanmaydigan o’rin almashtirishlar sonini topishga keltiradi. P_5=5!= $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

Demak, ularni 120 xil usul bilan o’tirg’zish mumkin

5. Takrorlanmaydigan o’rinlashtirishlar. m elementli X to’plamdan tuziladigan barcha tartiblangan n elementli to’plamlar soni

$$A_m^n = m(-1)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$ ga teng.

10 - misol. Guruhdagi 25 talabadan tanlovga qatnashish uchun 2 talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $A_{25}^2 = \frac{25!}{23!} = \frac{1\cdot 2\cdots 25\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdots 23} = 24\cdot 25 = 600$ usul bilan tanlash mumkin.

11- misol. 8 kishidan sardor, oshpaz, choyxonachi va navbachilardan iborat. 4 kishini tanlash kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Yechish. Bu masala 8 keshidan 4 tadan takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar sonini topishga keltiriladi. Demak, $A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$ usul bilan 4 kishini tanlash mumkin.

6. Takrorlanmaydigan guruhlashlar. M elementli X to'plamning k elementli qism to'plamlari soni

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_m} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

formula bo'yicha topiladi.

12 - misol. Kursdagi 20 talabadan ko'pirda ishtirok etish uchun 5 talabani necha xil usulda tanlah mumkin.

Yechish. Ko'rik ishtirikchilarning tartibga ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 20 elementli to'plamning 5 elementli qism to'plamlari soni nechtaligini topamiz:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15!5!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2\cdot 17\cdot 6\cdot 19\cdot 4 = 10704$$

Demak, 5 talabani 10704 usul bilan tanlash mumkin ekan.

13 - misol. 6 ta har xil rangli qalamdan 4 xil rangli qalamni necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5\cdot 3 = 15$ xil ucul bilan tanlash mumkin.

Endi chikli X to'plam qism to'plamlari sonini topish haqidagi masalani qaraymiz. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda x to'plamni tartiblaymiz. Sung har bir qism to'plamni m uzunligidagi kortej sifatida shifirlaymiz: qisim to'plamga kirgan element o'rniga 1, kirmagan element o'rniga 0 yozamiz. Masalan, agar X={x_1;x_2;x_3;x_4;x_5} bolsa, u holda (0;1;1;0;1) kortej {x_2,x_3,x_5} qism to'plamini shiflaydi, (0;0;0;0;0) kortej esa bo'sh tuplam, (1;1;1;1;1) kortej esa X tuplamning o'zini shifirlaydi. Shunda qisim tuplamlar soni ikkta {0;1} elementdan to'zilgan barcha m uzunlikdagi kortejlar soniga teng bo'ladi: $\overline{A}_2^m = 2^m$.

14-misol. X={a;b;c;} to'plamning barcha qism to'plamlarini yozing, ular nechta bo'ladi.

Yechish. ϕ, {a}, {b}, {c}, {a;b}, {a;c}, {b;c}, {a;b;c} lar X to'plamning barcha qisim to'plamlari bo'lib ularning soni 2^3=8ga teng.

Mustaqil yechish uchun savol va topshiriqlar.

1. Matematika ma'ruzasiga 20 ta Iqtisodoyot ma'ruzasiga 30 ta talaba qatnashadi. Matematika yoki iqtisodoyot ma'ruzalariga nechta talaba qatnashishini aniqlang, agar:

a) Maruzalari bir vaqtda o'tkazilsa

b) Turli vaqtlarda o'tkazilsa va 10 talaba har ikki maruzaga qatnashsa.

2. 100 kishidan 85 tasi ingliz 45 tasi esa nemis tilini o'rganadi. Ikkala tilni o'rganuvchlar soni nechta?

3. Uydan kollejga 3 yo'l bilan, kollejdan maktabgacha 4 yo'l bilan borish mumkin bo'lsa, uydan maktabgacha necha xil usul bilan borish mumkin?

4. Shaxmat doskasida ikkta oq va qora kvadratlarni necha xil usul bilan ko'rsatish mumkin?

5. 1,2,3,4,5,6 sonlardan nechta 4 xonali sonlar tuzish mumkin?

6. 4 talaba imtixon topshirmoqda. Agar hech bir talaba qoniqarsiz baho olmasa, ularga necha xil usul bilan baho qo'yish mumkin?

7. Fermadagi 20 ta ishchidan mollarga va daladagi ishlarga javob beruvchi 2 ta ishchini necha xil usul bilan tanlaish mumkin?

8. Auditoriyada 42 ta bo'sh joy bor ularga 8 talabani necha xil usulda o'tqazish mumkin?

9. Stol atrofidagi 6 kishini necha xil usulda o'tqazish mumkin?

10. 20 kishilik guruh ichidan necha xil usul bilan 7 kishilik delegat tanlash mumkin?

11. 12 ta stulga 12 ta mehmonni necha xil usulda bilan o'tqazish mumkin?

12. Bo'limda 12 ta askar bor. Ulardan 3 kishilik nariyadni necha xil usul bilan tuzish mumkin?

13. Bazimda 12 ta qiz 15 o'g'il bola qatnashmoqda ulardan bir qiz va bir o'g'l o'ynaydigan juftlikni necha xil usulda bilan tanlash mumkin?

14. 12 ta fizik va 15 ta matematik olimdan 4 tadan kishini konferitsiyaga necha xil usulda bilan yuborish mumkin?

Asosiy adabiyotlar

1. Abduxamidov A, Nasimov X, Xusanov M. Matematika

2. Xamidova N va b. Matematika T. 2007 yil

3. Velinkin N. Ya va b. zadashnik praktikum po matematiki M. 1977 yil

2-MA'RUZA

Mavzu: Tasodifiy hodisalar va ehtimol tushunchasi.

Hodisalarning kombinatsiyasi

Reja:

1. Tasodifiy hodisa tushunchasi. Chastota tushunchasi.
2. Ehtimolning statistik ta’rifi.
3. Ehtimollik tushunchasi.
4. Ehtimollar nazariyasi predmeti.
5. Hodisaning yig‘indisi va ko‘paytmasi.
6. Hodisalarni qo‘shish qoidasi.

Tayanch iboralar: Tasodifiy hodisa, tajribaga nisbatan tasodifiy hodisa, albatta yuz beradigan hodisa (muqarrar hodisa), yuz bermaydigan hodisa, «Ommaviy» yoki statistik hodisa, ko‘proq ehtimolli hodisa, nisbiy chastota, hodisaning ehtimoli, birgalikda bo‘lmagan hodisalar, qarama-qarshi hodisalar.

Tasodifiy hodisa tushunchasi

Biz odattiy turmushda, amaliy faoliyatda hamda ilmiy tekshirishlarda natijasini to‘la ishonch bilan oldindan aytish mumkin bo‘lmagan tajribalar va sinovlarni tez-tez uchratib turamiz.

Masalan, tangani tashlaganda u yoki bu tomonining tushishini to‘la ishonch bilan aytish mumkin emas, nishonga o‘q uzganda tegish yoki tegmasligi aniq emas, o‘yin soqqasi (kubik) tashlandi. Bunda 6 ochkoning tushishi oldindan ma’lum emas, biror nomerli lotereya biletiga yutuq chiqishini ham oldindan aytib bo‘lmaydi.

Shularga o‘xshash barcha (hodisalarda) hollarda tajribaning natijasini tasodifiy hodisa sifatida qaraymiz.

1-ta’rif. Tayin biror tajribani o‘tkazish natijasida yuz berishi ham, yuz bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisa shu tajribaga nisbatan tasodifiy hodisa deyiladi.

Tanga tashlaganda gerbli tomonning tushishi, o‘q uzilganda nishonga tegish, lotereya biletiga yutuq chiqishi, soqqa tashlaganda 6 ochkoning tushishi va hokazolar tasodifiy hodisalarga misol bo'ladi. Tasodifiy hodisalar A, B, S va hokazolar bilan belgilanadi.

Tajriba natijasida albatta yuz beradigan hodisalar muqarrar hodisalar deyiladi. Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda butun sondagi ochkoning tushishi, tavakkaliga tanlangan so'zda 50 dan ortiq bo'lmagan harfning bo'lishi, kun ketidan tun kelishi va hokazolar muqarrar hodisalardir.

Xuddi shunga o'xshash tajriba natijasida mutloqo yuz bermaydigan hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi. Masalan, bitta lotereyaga ikkita yutuq chiqishi, raketaning quyoshga qo'nib qaytib kelishi va hokazolar mumkin bo'lamagan hodisalardir.

Tajribalarda yuz berishi mumkin bo'lgan hodisalar «ommaviy» yoki statistik hodisa deyiladi.

Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi tushunchasi

A – biror tajribaga nisbatan tasodifiy hodisa bo'lsin. Tajriba N marta o'tkazilgan bo'lib, ulardan N_A tasida A hodisa yuz berdi deb faraz qilamiz. Ushbu

$$\mu = \frac{N_A}{N}$$

nisbatni tuzamiz. Bu nisbat qaralayotgan tajribalar seriyasidagi A hodisa yuz berishining chastotasi deb ataladi. Deyarli barcha tasodifiy hodisalar uchun chastota turg'unlik xossasiga ega. Bu degan so'z tajribalar soni oshirilganda A hodisaning ro'y berish nisbiy chatotalari odatda bir-biridan kam farq qiladi va bu farq seriyalardagi tajribalar soni qancha ko'p bo'lsa shuncha kam bo'ladi, ya'ni turg'unlashadi va biror P(A) songa yaqinlashadi.

Shu o'zgarmas P(A) son A hodisaning ehtimoli deyiladi.

Ta'rif. Tasodifiy hodisaning ehtimoli – berilgan hodisaga bog'liq o'zgarmas son bo'lib, tajribalarning ko'p seriyasida bu hodisaning yuz berish nisbiy chastotasi shu son atrofida tebranadi.

Buni ehtimolning statistik ta’rifi deyiladi. μ nisbiy chastota doimo $0 \le \mu \le 1$ shartlarni qanoatlantirganligi uchun har qanday hodisaning ehtimoli ham shu oraliqda joylashadi:

$$0 \le P(A) \le 1$$

Agar A hodisa muqarrar bo‘lsa, $N_A=N$ va demak, $\mu=1$ bo‘ladi; shu bilan muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng. Agar A mumkin bo‘lmagan hodisa bo‘lsa, $N_A=0$ bo‘lib $\mu=0$ bo‘ladi; shunga ko‘ra mumkin bo‘lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng.

1-misol. Tanga tashlash tajribasini qaraymiz. A hodisa gerbli tomonning tushishi bo‘lsin. P(A) ni aniqlang.

Yechish. Tanga bir jinsli va deformasiyalanmagan bo‘lsa tanga tashlashning ko‘p seriyasida gerbli va raqamli tomonlarning tushishi o‘rtacha bir xil takrorlanadi. Bundan ko‘rinadiki, A hodisa yuz berishining nisbiy chastotasi μ ning qiymatlari $\frac{1}{2}$ son atrofida tebranadi. Demak, P(A)= $=\frac{1}{2}$ bo‘ladi.

2-misol. Yashikda 20 ta shar yotibdi: 8 ta oq, 12 ta qora. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar bo‘lishi ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Tajriba juda ko‘p marta takrorlansa sharlarning teng imkoniyatli yekanligini nazarga olsak qora sharning chiqish nisbiy chastotasi taqriban yashikdagi sharlar ichida qora sharlar tashkil qiladigan ulushga teng deb hisoblasa bo‘ladi, ya’ni $\mu=\frac{12}{20}$. Demak, P(A)= $\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0{,}6$.

3-misol. Kub formasidagi o‘yin soqqasi yoqlari 1 dan 6 gacha nomerlangan. O’yin soqqasi tashlanganda 5 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Agar soqqa bir jinsli materialdan tayyorlangan bo‘lsa, uning yoqlarining tushishi teng imkoniyatli bo‘ladi va P(A)=$\frac{1}{6}$ deb hisoblash mumkin.

4-misol. 36 dastali kartadan bitta karta tortib olindi. Chillik turdagi kartaning kelib chiqish ehtimoli qanday?

***Yechish*.** Bunda hammasi bo'lib 36 mavjud hol bo'lib, ulardan 9 tasida A hodisa (chillik chiqishi) ro'y beradi. Demak, nisbiy chastota μ=9/36, ya'ni P(A)=$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

5-misol. Berilgan obektga qarab to'pdan bir xil sharoitda 5 ta o'q uzildi va 2 tasi mo'ljalga tegdi. A hodisa o'qning nishonga tegishi. O'qning nishonga tegishining nisbiy chastotasi qanday bo'ladi?

Yechish. $\mu=\frac{2}{5}$ bo'ladi. Chunki bunda 5 ta hol mavjud hol bo'lib, ulardan 2 tasida A hodisa ro'y bergan. Demak, P(A)=$\frac{2}{5}$ bo'lishi ravshan.

Ehtimollar nazariyasi predmeti

Ehtimollar nazariyasi ommaviy tasodifiy hodisalarga xos bo'lgan qonuniyatlarni o'rganish bilan shug'ullanadi.

Albatta fanni bunchalik umumiy xarakterlash u haqida kam ma'lumot beradi. Lekin tasodifiy hodisalarga xos qonuniyatlar mavjud va ularni bilish katta amaliy ahamiyatga yega.

Hodisalarning yig'indisi va ko'paytmasi.
Ehtimollarni qo'shish qoidasi

Ta'rif. Ikkita A va B hodisalarning yig'indisi deb bu hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat bo'lgan S hodisaga aytiladi:

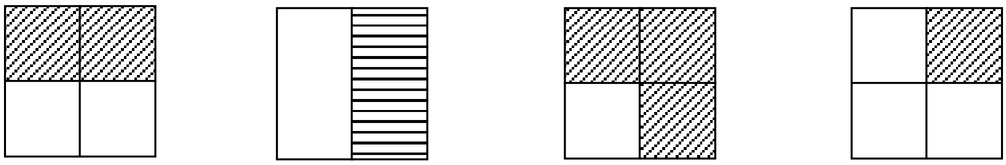
$$S = A + B$$

Misol. A hodisa sharchaning kvadrat sohasining yuqori yarim qismiga tushishi, B hodisa esa uning o'ng yarmiga tushishi bo'lsin. A+B sharcha ko'rsatilgan yarimlarning birlashmasi bo'lgan sohaga tushishini anglatadi.

Ta'rif. Ikki A va B hodisalarning ko'paytmasi deb, A va B birgalikda yuz berishidan iborat bo'lgan S hodisaga aytiladi:

$$S= A \cdot B$$

Misol. Yuqoridagi aytilgan misoldagi kvadrat ichidagi sharchani (nuqtani) tanlash A va B hodisalar bo'lsa, AB hodisa kvadratning yuqori o'ng choragiga tushishini bildiradi.



A B A+B A·B

Ehtimollarni topishda statistik ta'rif ancha ko'p mehnat talab qiladi. Juda ko'p hodisalarning ehtimollarini ekspremenтga murojaat qilmasdan topish qonuniyatlarini aniqlash ehtimollar nazariyasining muhim masalalaridan biridir. Yuqorida kiritilgan ehtimol muhim qoidalarga bo'ysunadi. Bu qoidalardan eng asosiysi ehtimollarni qo'shish qoidasidir.

Qoida. Agar A va B lar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ularning yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Eslatma. Agar bitta tajribada A va B tasodifiy hodisalar birgalikda yuz bera olmasa, ular birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Qoida. Agar A_1, A_2, ... A_n juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ular uchun

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Natija. Qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Eslatma. A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\overline{A}$ ko'rinishda belgilanadi. U A hodisaning yuz bermasligidan iborat. Misol uchun A hodisa o'qning nishonga tegishi bo'lsa $\overline{A}$ o'qning nishonga tegmaslik hodisasidir.

Misol. O'yin soqqasi tashlandi. Juft sondagi ochko tushish ehtimoli nimaga teng.

Yechish. A_i bilan i ochkoning tushishini belgilaymiz. (i=1, 2, ... 6) A hodisa A_2, A_4, A_6 larning hech bo'lmaganda birining yuz berishidan iborat, ya'ni, $A= A_2 + A_4 + A_6$

A_2, A_4, A_6 juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalardir. Qo'shish qoidasiga ko'ra

$$P(A)=P(A_2 + A_4 + A_6)= P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Tasodifiy hodisa deganda nimani tushunasiz?
2. Muqarrar va mumkin bo'lmagan hodisalarga misollar keltiring.
3. Ommaviy yoki statistik hodisa deb nimaga aytiladi?
4. Ehtimollar nazariyasi nimani o'rganadi?
5. A hodisa yuz berishining chastotasi deb nimaga aytiladi?
6. Tasodifiy hodisaning ehtimoliga ta'rif bering.
7. Nisbiy chastota $0\le\mu\le1$ shartni qanoatlantirganda P(A) ehtimol qanday shartni qanoatlantiradi?
8. Ikkita A va V hodisalarning yig'indisi va ko'paytmasiga ta'rif bering.
9. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb qanday hodisaga aytiladi?
10. A + B, AB, $\bar{A}$ hodisalarni nazariy to'plam ma'nosida tasvirlang.
11. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
12. Ehtimollarni qo'shish qoidasini ayting va formulasini isbotlang.
13. Qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi nimaga teng?
14. Yashikda 1 dan 20 gacha nomerlangan sharlar bor. Tavakkaliga bitta shar olindi. Uning nomeri 20 dan oshmaslik ehtimoli nimaga teng?
15. Yashikda 10 ta oq va 15 ta qora sharlar bor. Yashikdan ko'k shar olinish ehtimoli nimaga teng?
16. Yashikda 3 ta oq, 4 ta qora va 5 ta qizil sharlar bor. Yashikdan tavakkaliga olingan shar qora rangli bo'lish ehtimolini toping.

17. Tanga ikki marta tashlandi. Har ikkala holda ham gerb tushish ehtimoli nimaga teng?
18. Yashikda 20 ta oq, 18 ta qora, 12 ta ko‘k va 18 ta qizil sharlar bor. Tavakkaliga olingan shar oq, qora, ko‘k, oq yoki qora, ko‘k yoki qizil, oq, qora yoki ko‘k bo‘lib chiqish ehtimollarini toping.
19. Tanga 2 marta tashlangan. Hech bo‘lmaganda bir marta gerbli tomon tushish ehtimolini toping.

1-amaliy mashg’ulot

Mavzu**: Tasodifiy hodisa, uning chastotasi va ehtimoli. Hodisalarning kombinatsiyasi**

Mashg’ulotning maqsadi: Talabalarga tajriba, tasodifiy miqdor va uning ommaviyligi haqida tushunchalar berish hamda hodisaning yuz berish chastotasi va ehtimoli haqida ma’lumotlar berib ularni misol va masalalar yechish jarayonida mustahkamlashdan iborat. Bundan tashqari hodisalar kombinatsiyasi haqida tushunchalar berish va ularga doir misollar yechish.

Reja:

1. Tasodifiy hodisa.
2. Albatta yuz beradigan hodisalar.
3. Mutlaqo yuz bermaydigan hodisalar.

4. Ommaviy hodisalar.
5. Hodisa yuz berishining chastotasi.
6. Tasodifiy hodisaning ehtimoli.
7. Hodisalarning yig'indisi va ko'paytmasi.

Jihozlar: Doska, bo'r, ko'rgazmali qurollar.

Qaralayotgan hodisa ro'y berishi mumkin bo'lgan sharoitlar majmuasi ehtimolar nazariyasida sinov (tajriba) deyiladi. Biror tajriba natijasida sodir bo'lishi yoki bo'lmasligi mumkin bo'lgan hodisa tasodifiy hodisa deyiladi.

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisalar muqarrar hodisalar deyiladi. Tajriba natijasida mutloqo yuz bermaydigan hodisalar mumkin bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Ehtimollar nazariyasida faqatgina cheksiz takrorlash mumkin bo'lgan tajribalar qaraladi. Bunday tajribalarda ro'y beradigan hodisa ommaviy hodisa deb ataladi. Har bir tasodifiy hodisalar A, B, C, D . . . harflar bilan belgilanadi.

A hodisaning nisbiy chastotasi deb, A hodisa ro'y bergan tajribalar soni m ning, o'tkazilgan sinovlarning jami soni n ga nisbatiga aytiladi:

$$\mu(A)=\frac{m}{n}$$

Tasodifiy hodisaning ehtimoli – berilgan hodisaga bog'liq o'zgarmas R(A) son bo'lib, tajribalarning ko'p seriyasida bu hodisaning ro'y berish chastotasi shu son atrofida tebranadi.

Klassik ta'rifda A hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

tenglik bilan aniqlanadi, bu erda m – tajribaning A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni, n – sinovning muhim bo'lgan elementar natijalari jami soni.

1-misol. Yashikda 20 ta shar bo'lib, ular 1 dan 20 gacha nomerlangan. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Bu sharning nomeri 20 dan katta bo'lmaslik (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Yashikdagi sharlarning istalganining nomeri 20 dan oshmaydi. Shuning uchun bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni va barcha mumkin bo'lgan hollar soni o'zaro teng: m=n=20 va $P(A)=\frac{m}{n}=1$. Bu holda A hodisa muqarrar hodisadir.

2-misol. Yashikda 10 ta shar yotibdi: 4 ta oq, 6 ta qora. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qizil shar bo'lish (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Yashikda qizil shar yo'q, ya'ni m=0, lekin, n=10. Demak, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$. Bu holda A hodisa mutlaqo yuz bermaydigan hodisadan iborat.

3-misol. Tanga tashlash tajribasini qaraymiz. A hodisa gerbli tomonning tushishi. Tanga deformatsiyalanmagan va bir jinsli materialdan tayyorlangan. Tanga tashlashning ko'p seriyada gerbli va raqamli tomonlarining tushishi o'rtacha bir xil takrorlanadi deb kutish mumkin. Buni tanganing ikkala tomoni «Teng huquqli» (teng imkoniyatli) deb ifodalash mumkin. A hodisa yuz berishining μ nisbiy chastotasi $\frac{1}{2}$ son atrofida tebranadi. Shunday qilib, $\mu=\frac{N_A}{N}$ va demak, $P(A)=\frac{1}{2}$ bo'ladi.

4-misol. Yashikda 15 ta shar bor: 10 ta oq ,5 ta qora. Ushlab ko'rish bilan ularni farqlab bo'lmaydi. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Tajriba juda ko'p marta takrorlansa sharlarning «teng huquqli»ligidan qora sharning chiqish (ehtimoli) chastotasi taqriban yashikdagi sharlar ichida qora sharlar tashkil qiladigan «ulush» ga teng bo'ladi deb hisoblash mumkin, ya'ni $\frac{5}{15}$. Demak, $P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

5-misol. 36 ta kartali dastadan bitta karta tortib olindi. Chillik turdagi kartaning kelib chiqish ehtimoli qanday?

Yechish. Bunda hammasi bo’lib 36 ta mavjud hol bo’lib, ulardan 9 tasida A hodisa (chillik chiqishi) ro’y beradi. Demak, nisbiy chastota $\mu = \frac{9}{36}$ bo’lib, $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

6-misol. Berilgan ob’ektga qarab miltiqdan bir sharoitda 5 ta o’q uzildi va 2 tasi mo’ljalga tegdi. A hodisa o’qning nishonga tegishi. O’qning nishonga tegishining nisbiy chastotasi qanday bo’ladi?

Yechish. Nisbiy chastota $\mu = \frac{2}{5}$ bo’ladi. Chunki, bunda 5 ta hol mavjud bo’lib, ulardan 2 tasida A hodisa ro’y bergan. Bu holda $P(A) = \frac{2}{5}$ bo’lishi ravshan.

7-misol. Kub formasidagi o’yin soqqasi yoqlari 1 dan 6 gacha nomerlangan. O’yin soqqasi tashlanganda 5 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Soqqa bir jinsli materialdan tayyorlangan deb faraz qilsak, uning yoqlarining tushishi «teng huquqli» bo’ladi va $P(A) = \frac{1}{6}$ deb hisoblash mumkin.

8-misol. 21 ta standart va 10 ta nostandart detal solingan Yashikni tashish vaqtida bitta detal yo’qolgan, biroq qanday detal yo’qolgani ma’lum emas. Yashikni tashishdan keyin tavakkaliga olingan detal standart detal bo’lib chiqdi. Standart detal yo’qolgan bo’lishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Olingan standart detal yo’qolmaganligi ravshan. Qolgan 21+10-1=30 ta detalning istalgan biri yo’qolgan bo’lishi mumkin, shu bilan birga ularning orasida 21-1=20 ta detal standartdir. Standart detal yo’qolgan bo’lish ehtimoli $P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ ga teng.

9-misol. Raqamlari har xil ikki xonali son o’ylangan. O’ylangan son tasodifan aytilgan raqamlari har xil ikki xonali son bo’lishi ehtimolini toping.

Yechish. 10 dan 99 gacha sonlar ikki xonali. Raqamlari bir xil ikki xonali sonlar 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 lar bo’lib, ular 9 ta. 10 dan 99 gacha 90 ta son bor. Raqamlari har xil ikki xonali sonlar 90-9=81 ta. Demak, $P(A)=\frac{1}{81}$ bo’ladi.

10-misol. Texnik nazorat bo’limi tasodifan ajratib olingan 100 ta kitobdan iborat partiyada 5 ta yaroqsiz kitob topdi. Yaroqsiz kitoblar chiqishi nisbiy chastotasini toping.

Yechish. Yaroqsiz kitoblar chiqishi A hodisa bo’lsin. A hodisa nisbiy chastotasi A hodisa ro’y bergan sinovlar sonining o’tkazilgan sinovlar jami soniga nisbatiga teng: $\mu(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$.

11-misol. Ikkita o’yin soqqasi tashlangan. Soqqalarning yoqlarida tushgan ochkolar yig’indisi 7 ga teng bo’lish ehtimolini toping.

Yechish. A- hodisa ochkolar soni yig’indisi 7 ga teng hollar soni 6 ta bo’ladi:

1	6,	6	1,	2	5,	5	2,	3	4,	4	3

Demak, $P(A)=\frac{1}{6}$.

12-misol. Tanga ikki marta tashlangan. Hech bo’lmaganda bir marta «gerbli» tomon tushishining ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi tashlaganda «gerb» tushish ehtimoli A_1 bo’lsin. Bunda quyidagi hollar kuzatiladi:

1) Г Р 2) Р Г, 3) Г Г, 4) Р Р,

Ko’rinib turibdiki, to’rtta tajribada «gerb» ning hech bo’lmaganda tushishi uchta holatda kuzatiladi. Demak, hech bo’lmaganda bir marta «gerbli» tomon tushish (A hodisa) ehtimoli $P(A)=\frac{3}{4}$.

13-misol. Yashikda 12 ta shar yotibdi: 3 ta oq, 4 ta qora va 5 ta qizil sharlar. Tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar chiqishi (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Bu yerda m=4, n=12, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

14-misol. Yashikda 10 ta shar bor: 6 ta oq va 4 ta qora. Tavakkaliga 2 ta shar olindi. Ikkala shar ham oq bo'lishi (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Bu masalada mumkin bo'lgan barcha hollar soni $n=C_{10}^{2}=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45$ta. A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hollar soni esa $m=C_{6}^{3}=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15$. Demak, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

15-misol. Karton kartochkalarda A, O, L, M harflar yozilgan. Kartochkalar aralashtirilib, qator qilib terildi. OLMA so'zining kelib chiqishi (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. To'rtta kartochkani har xil joylashtirish bir-biridan ularning tartibi bilan farq qiladi. Mumkin bo'lgan barcha hollar soni n 4 elementdan o'rin almashtirishlar soniga teng: n=p_4=4!=24. Bu hollar «teng huquqli», birgalikda bo'lmagan va bir xil imkoniyatli. OLMA so'zining kelib chiqishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni m birga teng. Demak, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}$.

16-misol. 2000 loteriya bileti sotilgan. Bunda 1 ta biletga 100000 so'm, 4 ta biletga 50000 so'm, 10 ta biletga 20000 so'm, 20 ta biletga 10000 so'm, 165 ta biletga 5000 so'm, 400 ta biletga 1000 so'mdan yutuq chiqishi belgilangan qolgan biletlar yutuqsiz. Bitta biletga 10000 so'mdan kam bo'lmagan yutuq chiqish ehtimoli qanday?

Yechish. Bu yerda m=1+4+10+20=35, n=2000 chunki, 35 ta biletga 10000 so'mdan yuqori yutuqlar belgilangan.

Shuning uchun, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{35}{2000}=0{,}0175$.

17-misol. Yashikda 6 ta oq va 4 ta qora shar yotibdi. A hodisa yashikdan tavakkaliga olingan 5 ta sharning 3 tasi oq va 2 tasi qora shar bo'lishidan iborat. Bu hodisaning ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Sharlarning umumiy soni 10 ga teng. Shuning uchun barcha mumkin bo'lgan hollar soni $n = C_{10}^{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$; 3 ta oq sharni $m_1 = C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ usul bilan; 2 ta qora sharni $m_2 = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ usul bilan olish mumkin. Sharlarni tanlashning bu ikkala usulini birlashtirib 3 ta oq va 2 ta qora shar tanlash uchun qulaylik tug'diruvchi hollar soni $m=m_1 \cdot m_2=120$ tengligini topamiz. Demak, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{120}{252} = \frac{10}{21}$.

18-misol. O'yin soqqasi ikki marta tashlandi. Ikkala tashlanganda ham tushgan ochkolar yig'indisi 8 teng bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi tashlanganda i ochkoning, ikkinchi tashlanganda esa j ochkoning tushishini A_{ij} orqali belgilaymiz. U holda

$$
\begin{array}{c}
A_{11} A_{12} \ldots A_{16} \\
A_{21} A_{22} \ldots A_{26} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{61} A_{62} \ldots A_{66}
\end{array}
$$

Ko'rinishdagi 36 ta hodisani o'yin soqqasini ikki marta tashlashdan iborat tajribaning elementar natijalari sifatida qarash mumkin. Tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng (A hodisa) bo'lishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar A_{17}, A_{26}, A_{35}, A_{44} dan iborat. Demak, m=4, n=36 bo'lib, $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar

1. Yashikda 20 ta №1, №2 . . . , №20 deb nomerlangan sharlar yotibdi. Tavakkaliga bitta shar olindi. Uning №30 nomerli bo'lish ehtimoli nimaga teng? (***J:*** P(A)=0).

2. Loteriyada 1000 ta bilet bor. Ulardan 500 tasi yutuqli, 500 tasi yutuqsiz. Ikkita bilet sotib olindi. Ikkala biletning ham yutuqli bo'lish ehtimoli qanday? (***J***: $\frac{499}{1998}$).
3. Tanga ikki marta tashlandi. Ikki marta ham gerb tushish ehtimoli qanday? (***J***: $\frac{1}{4}$).
4. 20 ta kitob javonlarga tavakkaliga taxlandi. 20 ta kitobdan aniq 5 tasining yonma-yon turishi (A hodisa) ehtimorli nimaga teng? ***(J***: $\frac{1}{969}$).
5. Ikkita o'yin soqqasi tashlangan. Soqqalarning yoqlarida chiqqan ochkolar yig'indisi juft son. Shu bilan birga ikkinchi tashlangan soqqada har doim 6 ochko tushish ehtimolini toping. (***J***: $\frac{5}{36}$).
6. Ikkita o'yin soqqasi tashlangan. Soqqalarning yoqlarida chiqqan ochkolar yig'indisi 5 ga, ko'paytmasi esa 4 ga teng bo'lish ehtimolini toping. (***J***: $\frac{1}{18}$).
7. Ikkita o'yin soqqasi tashlangan. Soqqalarning yoqlarida chiqqan ochkolar yig'indisi 7 ga teng bo'lish ehtimolini toping.
8. Raqamlari har xil ikki xonali son o'ylangan . O'ylangan son tasodifan aytilgan ikki xonali son bo'lish ehtimolini toping. (***J***: $\frac{1}{90}$).
9. Yashikda 1, 2 . . . 10 lar bilan nomerlangan 10 ta bir xil detal bor. Tavakkaliga 6 ta detal olingan. Olingan detallarning orasida №1 detal bo'lishi ehtimoli nimaga teng? (***J***:0,6).

Asosiy adabiyotlar:

1. Solodolnikov A.S. Ehtimollar nazariyasi. – Toshkent: O'qituvchi, 1983. 5-15 b.
2. Gumurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma. – Toshkent: O'qituvchi, 1980. 3-9 b.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Piskunov N.S. Differehsial va integral hisob. – Toshkent: O'qituvchi, 1974. 471-480 b.

3-MA'RUZA

Mavzu*: Ehtimollar nazariyasining aksiomalari.*

Ehtimollarni hisoblashning klassik usuli

Reja:

1. Aksiomatik metodning mohiyati.
2. Elementar hodisalar fazosi.
3. A.N.Kolmogorov aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan teoremalar.
4. Ehtimollarni hisoblashning klassik usuli.

Tayanch iboralar: Aksiomatik metod, elementar hodisalar, elementar hodisalar fazosi, barcha qism toʻplamlar, aynan tenglashtirish, qism toʻplamlarining birlashmasi, kesishmasi, toʻldiruvchi toʻplam, birgalikda boʻlmagan hodisalar, qarama-qarshi hodisalar, mumkin boʻlmagan hodisalar, oddiy qoʻshish aksiomasi, kengaytirilgan qoʻshish aksiomasi, ehtimoliy model, tasodifiy miqdor.

Aksiomatik metodning mohiyati

Yuqorida tasodifiy hodisaning ehtimolini tajribalar soni oshganda shu hodisaning yuz berish chastotasi yaqinlashadigan miqdor kabi tasavvur qilingan edi. Bu esa qat’iy matematik nazariyaga asos boʻlmaydi. Ehtimollar nazariyasiga qat’iy matematik tus berish A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan aksiomalar yordamida amalga oshiriladi. Aksiomatik metodning mohiyati shundaki, eng avval muayyan nazariyaning ta’riflanmaydigan tushunchalari belgilab qoʻyiladi va soʻngra nazariyaning barcha jumlalari boshqa tushunchalarga asoslanmasdan shulardan keltirib chiqariladi.

Elementar hodisalar fazosi

Elementar hodisalar deb, birinchidan, tajribaning har bir oʻtkazilishida ulardan faqat va faqat bittasining yuz berishi; ikkinchidan, aynan shu tajriba bilan bogʻliq boʻlgan ixtiyoriy A hodisa elementar hodisalarga «ajralishi» zarurligi bilan xarakterlanuvchi hodisalarga aytiladi.

Masalan,

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \qquad (1)$$

(bu yerda, A_i i ochkoning tushishi) elementar hodisalardir. Yana bir misol, aytaylik tajribamiz tekislikdagi Ω sohaga kichkina sharcha tashlashdan iborat bo'lsin. Sharchaning Ω sohaning birorta aniq nuqtasiga tushishi elementar hodisadir. Lekin bu misolda elementar hodisalar to'plami cheksiz. Umuman olganda qaralayotgan tajriba uchun elementar hodisalar to'plamini Ω deb belgilab shu tajriba bilan bog'liq bo'lgan har bir hodisani Ω to'plamning qism to'plami deb qaraymiz. A.N.Kolmogorov aksiomalarida A hodisa unga mos keltirilgan qism to'plamga aynan tenglashtiriladi. Masalan, «o'yin soqqasida juft sondagi ochko tushdi» (A hodisa) hodisasi (1) to'plamning $\{A_2, A_4, A_6\}$ qism to'plamidan iborat, "Sharcha Ω sohaning chap yarim qismiga tushdi" (A hodisa) hodisasi esa, to'plamning shu aytilgan qism sohasidagi nuqtalar to'plamidir.

Hodisa tushunchasiga bunday yondoshish hodisalar yig'indisi va ko'paytmasini to'plam nazariyasidagi ma'nolariga aynan tenglashtirdi. Ya'ni A va B hodisalarning yig'indisi ularga mos qism to'plamlarning birlashmasiga, A va B hodisalarning ko'paytmasi esa shu qism to'plamlarning kesishmasiga, A hodisaga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisa esa A ni Ω to'plamga qadar to'ldiruvchi to'plamga aylanadi.

Biror Ω to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari yelementar hodisalardan iborat bo'lsin. Hodisalar nimani ifodalashining ahamiyati yo'q. Ω to'plamning qism to'plamlari tayin qilingan va ular hodisalardan iborat bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin.

I. Ω to'plamning o'zi hodisa bo'lsin.

II. Agar A – hodisa bo'lsa, u holda $\overline{A}$ ham hodisa.

III.Agar A_1, A_2 . . . lar hodisa bo'lsa, u holda A_1+A_2+ . . . ham, A_1A_2 . . . ham hodisa.

Eslatma. III shartda qatnashgan A_1, A_2 . . . qism to'plamlar soni chekli ham, cheksiz ham bo'lishi mumkin.

Ω - to'plam elementar hodisalar fazosi deb ataladi.

A.N.Kolmogorov aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan teoremalar

1-aksioma. Har bir A hodisaga uning ehtimoli deb ataluvchi manfiy bo'lmagan P(A) son mos keltirilgan.

2-aksioma. Agar A_1, A_2, . . . juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A_1+A_2+...)=P(A_1)+P(A_2)+... \qquad (1)$$

Eslatma. A_i hodisalar soni cheksiz bo'lsa, o'ng tomonda qatorning yig'indisi qaraladi, chekli bo'lganda esa, unga nisbatan kuchsizroq shart qaraladi.

3`-aksioma. Agar A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A+B)= P(A)+P(B) \qquad (2)$$

(2) ni <u>oddiy qo'shish aksiomasi</u>, (1) yesa <u>kengaytirilgan qo'shish aksiomasi</u> deyiladi.

4-aksioma. $P(\Omega)=1$

1-3 aksiomalar A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan bo'lib, ular ehtimollar nazariyasining asosini tashkil qiladi.

1-teorema. $P(A)+P(\bar{A})=1$ bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, $A+\bar{A}=\Omega$. Bundan $1=P(\Omega)=P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$.

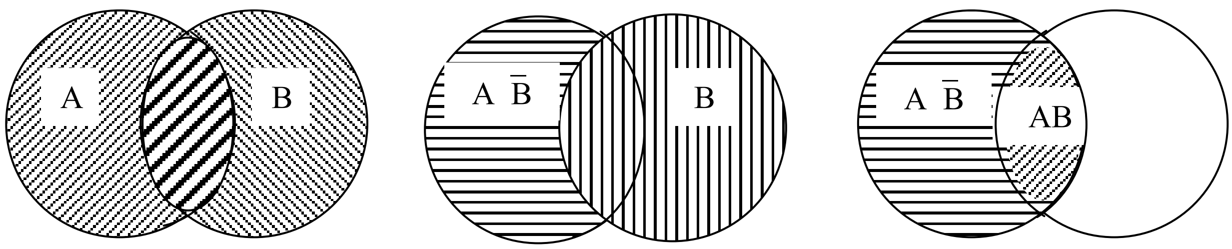
2-teorema. $P(A)\le 1$.

Isbot. $P(\bar{A})\ge 0$ bo'lgani uchun $P(A)+P(\bar{A})=1$ dan $P(A)\le 1$ kelib chiqadi.

3-teorema. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ tenglik o'rinli.

Isbot. A va B lar Ω ning qism to'plamlari bo'lganligidan

$A=AB+A\bar{B}$, $A+B=B+A\bar{B}$ tengliklar o'rinli ekanligi Eyler doiralari yordamida tushuntirilishi ravshan



Har ikkala tenglikka qo‘shish aksiomasini tadbiq etamiz:

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}), P(A+B)=P(B)+P(A\bar{B})$$

Ikkinchi tenglikdan birinchi tenglikni ayirsak isbot talab etilgan tenglik kelib chiqadi.

A.N.Kolmogorov aksiomalari tasodifiy natijali tajribalarni tavsiflash uchun qulay matematik sxemani beradi. U quyidagidan iborat.

1. Elementar hodisalar fazosi deb ataluvchi Ω to‘plam.
2. Ω to‘plamning hodisalar deb ataluvchi va I, II, III shartni qanoatlantiruvchi qism to‘plamlari sistemasi.
3. Hodisalar to‘plamida aniqlangan va 1, 2, 3 aksiomalarni qanoatlantiruvchi P(A) funksiya.

Bu uchta obektlar majmuasi muayyan tajribaning ehtimoliy modeli deb ataladi. Bunga ko‘ra ehtimollar nazariyasi predmetini aniq ta’riflash imkoniyatiga ega bo‘lamiz: Ehtimollar nazariyasi mumkin bo‘lgan barcha ehtimoliy modellarni o‘rganadi.

Ehtimollarni hisoblashning klassik usuli

Elementar hodisalar fazosi Ω chekli to‘plam bo‘lsin. Bu to‘plamning elementlari (elementar hodisalar) $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ bo‘lsin.

Agar birorta A hodisa teng ehtimolli k ta elementar hodisalarning yig‘indisi ko‘rinishida ifoda qilinsa, u holda

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

formula o‘rinli bo‘ladi. Bu formulani quyidagicha o‘qish mumkin:

A hodisaning yuz berish ehtimoli uning yuz berishiga qulaylik to‘g‘diruvchi elementar natijalar sonining barcha elementar natijalar soniga nisbatiga teng.

Bu formula yordamida ehtimolni hisoblash klassik usul deyiladi.

1-Misol. O’yin soqqasi ikki marta tashlandi. Ikkala tashlanganda ham tushgan ochkolar yig‘indisi 10 ga teng bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Birinchi tashlanganda i ochkoning, ikkala marta tashlanganda j ochkoning tushishini A_{ij} orqali belgilaymiz. U holda

$$A_{11}\ A_{12}\ .\ .\ .\ A_{16}$$

$$A_{21}\ A_{22}\ .\ .\ .\ A_{26}$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$A_{61}\ A_{62}\ .\ .\ .\ A_{66}$$

ko'rinishdagi 36 ta hodisani o'yin soqqasini 2 marta tashlashdan iborat tajribaning elementar natijalari sifatida qarash mumkin.

Tajribaning har bir o'tkazilishida bu hodisalarning (A_{ij}) biri va faqat biri yuz beradi va ular teng huquqli. A hodisaning yuz berishiga A_{46}, A_{55}, A_{64} natijalar qulaylik tug'diradi, demak k=3. Bundan esa

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Bunga ko'ra, agar o'yin soqqasini ikki marta tashlash tajribasi ko'p marta takrorlansa A hodisaning yuz berish chastotasi $\frac{1}{12}$ songa yaqin bo'ladi, ya'ni 12 ta tajribadan bittasida A hodisa yuz beradi.

Endi quyidagi masalani qaraymiz:

2-misol. O'yin soqqasi ikki marta tashlangan. Ikkala tashlanganda ham tushgan ochkolar yig'indisi juft son, shu bilan birga ikkinchi tashlangan soqqada har doim 6 ochko tushishi ehtimolini toping.

Yechish. Xuddi yuqoridagidek tajribaning mumkin bo'lgan elementar natijalarining jami son 36 ga teng. A hodisaga (hech bo'lmaganda bitta yoqda 6 ochko chiqadi, tushgan ochkolar yig'indisi juft son) qulaylik to'g'diruvchi natijalar quyidagi beshta natija bo'ladi (birinchi o'rinda birinchi tashlashdagi ochko, ikkinchi o'rinda ikkinchi tashlashdagi ochko, so'ngra ular yig'indisi yozilgan)

1) 2, 6; 6+2=8, 2) 4, 6; 4+6=10,

3) 6, 6; 6+6=12, 4) 6, 2; 2+6=8, 5) 6, 4; 6+4=10

Izlanayotgan ehtimol hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar sonining barcha mumkin bo'lgan elementar natijalar soniga nisbatiga teng

$$P(A)=\frac{5}{36}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Aksiomatik metodning ahamiyati nima?
2. Elementar hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
3. A va B hodisaning yig'indisi, ko'paytmasi va qarama-qarshi hodisa tushunchalarining nazariy to'plam ma'nolari qanday tavsiflanadi?
4. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi va bunda qanday (I, II, III) shartlar bajariladi?
5. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
6. A.N.Kolmogorov aksiomalarini ta'riflang.
7. $P(A)+P(\overline{A})=1$, $P(A)\leq 1$, $P(A+B)=P(A)+P(B)=P(AB)$ munosabatlarni isbotlang.
8. Ehtimoliy model nima?
9. Ehtimolni hisoblashning klassik usuli qanday formula bilan tavsiflanadi?
10. 20 ta kitob javonga tavakkaliga taxlandi. 20 ta kitobdan aniq 4 tasining yonma-yon turishi (A hodisa) ehtimoli nimaga teng?
11. Lotereyada 50 ta bilet o'ynaldi. 5 ta biletga yutuq chiqadi. Kimdir uchta bilet sotib oladi; bu biletlardan hech bo'lmaganda bittasiga yutuq chiqish ehtimoli nimaga teng?

3-amaliy mashg’ulot

Mavzu: **Ehtimollar nazariyasining aksiomalari va ulardan foydalani*b* ehtimollarni hisoblash**

Mashg’ulotning maqsadi: Ehtimollar nazariyasining aksiomalari mazmuni va mohiyatini talabalarga yetkazish. Qo’shish va ko’paytirish aksiomalari: birgalikda bo’lmagan hodisalar ehtimollarini qo’shish, birgalikda bo’lgan hodisalar ehtimollarini qo’shish, erkli hodisalar ehtimollarini ko’paytirish – bunda shartli ehtimol tushunchalarini oydinlashtirish va ularga oid masalalar yechish.

Reja:

1. Hodisalarni qo’shish va ko’paytirish.
2. Birgalikda bo’lmagan hodisalar ehtimollarini qo’shish.
3. Erkli hodisalar ehtimollarini ko’paytirish.
4. Bog’liq hodisalar ehtimollarini ko’paytirish.
5. Qarama-qarshi hodisalar.

1. Agar A va B lar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ular yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Buni oddiy qo'shish aksiomasi deyiladi.

2. Ikkita birgalikda bo'lgan A va B hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli bu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirish natijasiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

3. Ikkita erkli hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

4. Ikkita bog'liq hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining shartli ehtimoliga ko'paytirilganiga teng:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$

$$P(AB)=P(B)P(A/B)$$

5. A hodisaning ro'y bermasligidan iborat hodisa A ga qarama-qarshi hodisa deyiladi va $\overline{A}$ bilan belgilanadi. Bunda:

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \qquad P(\overline{A})=1-P(A)$$

6. Biror tajribada $A_1, A_2, \ldots, A_n$ birgalikda bo'lmagan hodisalardan bittasi ro'y berishi mumkin bo'lsa, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lar hodisalarning to'liq guruhini tashkil etadi deyiladi.

1-masala. Yashikda 10 ta oq, 15 ta qora, 20 ta ko'k va 25 ta yashil sharlar bor. Tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning 1) oq, 2) qora, 3) ko'k, 4) yashil, 5) oq yoki qora, 6) ko'k yoki yashil, 7) oq, qora yoki yashil bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Barcha sharlarning soni n=10+15+20+25=70.

1) Olingan sharning oq bo'lish ehtimoli $P(O)=\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$;

2) $P(Q)=\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$;

3) P(K)=$\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$;

4) P(Ya)=$\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$;

5) P(O+Q)=P(O)+P(Q)=$\frac{1}{7}+\frac{3}{14}=\frac{5}{14}$;

6) P(K+Ya)=P(K)+P(Ya)=$\frac{2}{7}+\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$;

7) P(O+Q+K)=$1-\frac{5}{14}=\frac{9}{14}$.

2-masala. A hodisa o'yin soqqasini tashlash tajribasida 2 ga karrali sonning tushishi, B hodisa 3 ga karrali sonning tushishi. A+B hodisa nimani anglatadi. AB hodisa-chi?

Yechish. A+B (hodisa) yig'indisi A va B hodisalardan hech bo'lmaganda birining yuz berishidan iborat bo'lgani uchun A+B hodisa 2, 3, 4, 6 sonlardan birortasining tushishidan iborat bo'ladi.

AB hodisa deb A va B hodislarning birgalikda yuz berishidan iborat hodisa bo'lgani uchun bizning holda AB hodisa 6 ochko tushishini anglatadi.

3-masala. O'yin soqqasi tashlandi.Bunda juft sondagi ochko tushish ehtimoli nimaga teng?

Yechish. A_i bilan i-ochkoning tushishini belgilaymiz (i=1, . . . 6). A hodisa A_2, A_4, A_6 hodisalardan hech bo'lmaganda birining yuz berishidan iborat: A= $A_2+A_4+A_6$.

A_2, A_4, A_6 hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalardir, u holda qo'shish aksiomasiga ko'ra

$$P(A)=P(A_2+A_4+A_6)=P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

4-masala. Yashikda 15 ta shar bo'lib, ulardan 5 tasi qizil. Yashikdan tavakkaliga 3 ta shar olindi. Olingan sharlardan hech bo'lmaganda bittasi qizil bo'lishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Olingan uchta sharlardan hech bo'lmaganda bittasi qizil bo'lish talabi quyidagi uchta birgalikda bo'lmagan hodisadan istalgan biri ro'y berganda bajariladi: B – bitta shar qizil, ikkitasi boshqa rangda, C – ikkita shar qizil, bittasi boshqa rangda, D – uchala shar ham qizil. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa bu hodisalarning yig'indisi ko'rinishida yozilishi mumkin:

$$A=B+C+D$$

Qo'shish aksiomasiga ko'ra:

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D) \qquad (1)$$

B, C, D hodisalarning ehtimollarini topamiz:

1) 15 ta shardan 5 tasi qizil. Tavakkaliga 3 ta shar olingan. Olingan sharlar ichida ikkitasi qizil bo'lish ehtimolini topamiz. Sinovning mumkin bo'lgan elementar natijalari 15 shardan 3 ta sharni ajratib olish usullari soniga, ya'ni 15 ta elementdan 3 tadan tuzish mumkin bo'lgan guruhlashlar soni C^3_{15} ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (3 ta shar orasida 1 ta qizil shar bor) qulaylik tug'diruvchi natijalar sonini hisoblaymiz: 5 ta qizil shar orasida 1 ta qizil sharni C^1_5 usul bilan olish mumkin; bunda qolgan 5-3=2 shar boshqa rangda bo'lishi lozim: 2 ta boshqa rangli sharni esa 15-5=10 ta boshqa rangli sharlar orasidan C^2_{10} usul bilan olish mumkin. Demak, B hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni $C^1_5 \cdot C^2_{10}$ bo'ladi.

Izlanayotgan ehtimol hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar sonining barcha elementar natijalar soniga nisbatiga teng:

$$P(B)=\frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{5\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}:\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 15}=\frac{45}{91}$$

2) Xuddi yuqoridagidek P(C) ni topamiz:

$$P(C)=\frac{C_5^2 C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91}$$

3) P(D) ham xuddi shunday topiladi:

$$P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}$$

Bularni (1) ga qo'yib topamiz:

$$P(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}$$

5-masala. Ikkita birgalikda bo'lmagan A_1 va A_2 hodisalarning har birining ro'y berish ehtimoli R_1 va R_2 ga teng.

Bu hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini toping:

Yechish. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz: B_1 – faqat A_1 hodisa ro'y berdi; B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berdi.

B_1 hodisaning ro'y berishi $A_1\overline{A}_2$ hodisaning ro'y berishiga teng kuchli (birinchi hodisa ro'y berdi va ikkinchi hodisa ro'y hodisa ro'y bermadi), ya'ni $B_1=\overline{A}_1A_2$ B_2 hodisaning ro'y berishi $\overline{A}_1A_2$ hodisaning ro'y berishiga teng kuchli (ikkinchi hodisa ro'y berdi va birinchi hodisa ro'y bermadi), ya'ni $B_2=\overline{A}_1A_2$. Shunday qilib, A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini topish uchun B_1 va B_2 hodisalardan qaysi biri bo'lsa ham birining ro'y berish ehtimolini topish kifoya. B_1 va B_2 hodisalar birgalikda emas, shuning uchun qo'shish aksiomalarini qo'llash mumkin:

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2) \qquad (2)$$

Endi B_1 va B_2 hodisalarning har birining ehtimolini topish kerak. A_1 va A_2 hodisalar erkli, demak, A_1 va A_2 hodisalar, shuningdek, $\overline{A}_1$ va A_2 hodisalar ham erkli, shu sababli qo'shish (teoremasini) aksiomasini qo'llash mumkin:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)=p_1q_1$$

$$P(B_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=q_1p_2$$

(2) formulaga ko'ra A_1 va A_2 hodisalardan faqat birining ro'y berish ehtimoli $P(B_1+B_2)=p_1q_1+q_1p_2$

6-masala. Birinchi yashikda 2 ta oq va 10 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 8 ta oq va 4 ta qora shar bor. Har bir yashikdan bittadan shar olindi. Bu ikkala shar ham oq bo'lish ehtimoli qanday?

Yechish. A bilan oq sharning birinchi yashikdan, B bilan oq sharning ikkinchi yashikdan chiqish hodisalarini belgilaymiz. Bunda A va B lar birgalikda bo'lmagan, ya'ni erkli hodisalardir. Bu yerda A va B hodisalarning birgalikda yuz berish hodisasi AB ning ehtimolini topishimiz kerak.

Shartga ko'ra $P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Ko'paytirish aksiomasiga ko'ra:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$

7-masala. O'yin soqqasi 4 marta tashlandi. Har safar 1 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning ehtimollarini ko'paytirish aksiomasiga asosan Yechish qulay. 1 raqamining har safar tushish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng. Bu hodisalar o'zaro erkli bo'lgani uchun

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_2\cdot A_4)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{1296}$$

8-masala. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda. Bitta o'q uzganda nishonga tegish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga teng. Bir yo'la o'q uzishda merganlardan faqat bittasining nishonga tekizish ehtimolini toping.

Yechish. B_1 – faqat A_1 hodisa ro'y berdi, B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berdi deb belgilab olamiz. Bunda $B_1=A_1\overline{A}_2$, $B_2=\overline{A}_1A_2$ bo'lib, $A_1\overline{A}_2$ – birinchi mergan o'qi nishonga tegdi, ikkinchisiniki tegmadi, $\overline{A}_1A_2$ – birinchi merganning o'qi nishonga tegmadi, ikkinchisiniki tegdi demakdir. B_1 va B_2 hodisalarning har birining ehtimolini topish kerak. A_1 va A_2 hodisalar erkli, demak, A_1 va $\overline{A}_2$, shuningdek $\overline{A}_1$ va A_2 hodisalar ham erkli. Shu sababli qo'shish aksiomasini qo'llash mumkin:

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)=0,7\cdot(1-0,8)=0,14$$

$$P(B_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2)=(1-0,7)\cdot 0,8=0,24$$

Demak, A_1 va A_2 hodisalarning faqat bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=0,14+0,24=0,38$$

ga teng.

9-masala. Avariya ro'y berganligi haqida signal berish uchun ikkita erkli ishlaydigan signalizator o'rnatilgan. Avariya yuz berganda signalizatorlar ishlay boshlash ehtimoli birinchisi uchun 0,95 ga, ikkinchisi uchun 0,9 ga teng. Avariya yuz berganda faqat bitta signalizator ishlay boshlash ehtimolini toping.

Yechish. Avariya yuz berganda birinchi signalizator ishlay boshlash ehtimoli A_1, ikkinchi signalizator ishlay boshlashi A_2 hodisa bo'lsin.

B_1 – faqat A_1 hodisa ro'y berdi, B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berdi deb belgilab olamiz. Bunda $B_1=A_1\bar{A}_2$, $B_2=\bar{A}_1A_2$ bo'lib, $A_1\bar{A}_2$ – birinchi signalizator ishladi, $\bar{A}_1A_2$ – ikkinchi signalizator ishladi demakdir. $P(B_1)$ va $P(B_2)$ larni topishimiz kerak. A_1 va A_2 hodisalar erkli, shuningdek, $\bar{A}_1$ va A_2 hamda A_1 va $\bar{A}_2$ hodisalar ham erkli.

$$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2)=P(A_1)P(\bar{A}_2)=0{,}95\cdot(1-0{,}9)=0{,}95\cdot 0{,}1=0{,}095$$

$$P(B_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=(1-0{,}95)\cdot 0{,}9=0{,}05\cdot 0{,}9=0{,}045$$

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=0{,}095+0{,}045=0{,}14$$

Bu esa A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolidir.

10-masala. O'yin soqqasi 4 marta tashlandi. Har safar 1 raqami tushish ehtimolini toping.

Yechish. Masalani ehtimolining klassik ta'rifi bo'yicha yechish mumkin. Biz bu yerda ehtimolarni ko'paytirish aksiomasidan foydalanamiz.

1 raqamining har safar tushish ehtimoli 1 ga teng. 4 ta erkli hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimolini topishimiz kerak. Soqqani 4 marta tashlaganda 1 raqami tushish hodisalari A_1 A_2 A_3 A_4 bo'lsin.

U holda

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{1296}$$

11-masala. A va B lar qandaydir hodisalar bo'lsin. $\overline{AB}$ hodisasini soddaroq yozing.

Yechish. $\overline{A}\overline{B}$ hodisa $\bar{A}$ va $\bar{B}$ hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat, ya'ni A hodisa ham B hodisa ham ro'y bermasligini anglatadi. $\bar{A}$ $\bar{B}$ hodisaga qarama-qarshi hodisa $\overline{\overline{A}\overline{B}}$ esa A va B hodisalarinng hech bo'lmaganda birining ro'y berishidan iborat. Shuning uchun $\overline{\overline{A}\overline{B}}$ ni A+B ko'rinishda yozish mumkin.

12-masala. Uchta mergan nishonga bittadan o'q uzdi. Birinchi merganning nishonga urishi A_1, ikkinchi merganning nishonga urishi A_2 va uchinchi merganning nishonga urishi A_3 bo'lsin. Uchala mergan nishonga urdi hodisasini formula ko'rinishida yozing.

Yechishi. Shartga ko'ra A_1 hodisa ham, A_2 hodisa ham, A_3 hodisa ham ro'y bergan. Demak, bu hodisalar o'zaro erkli va birgalikda ro'y bergan. Shuning uchun $A_1A_2A_3$ hodisa ro'y bergan.

13-masala. Kutubxona stelajida tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qo'yilgan bo'lib, ulardan 5 tasi muqovalangan. Kutubxonachi ayol tavakkaliga uchta darslik oldi. Olingan darsliklarning hech bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lish (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa (olingan uchta darslikdan hech bo'lmaganda bittasi muqovali) va $\overline{A}$ hodisa (olingan uchta darslikdan hech bo'lmaganda bittasi muqovali emas) qarama-qarshi hodisalardir. Shuning uchun:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

(qarama-qarshi hodisalarning ehtimolari yig'indisi 1 ga teng). Bundan:

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$\overline{A}$ hodisaning ro'y berish ehtimoli

$$P(\overline{A})=\frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!}:\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{15\cdot 14\cdot 13}=\frac{24}{91}$$

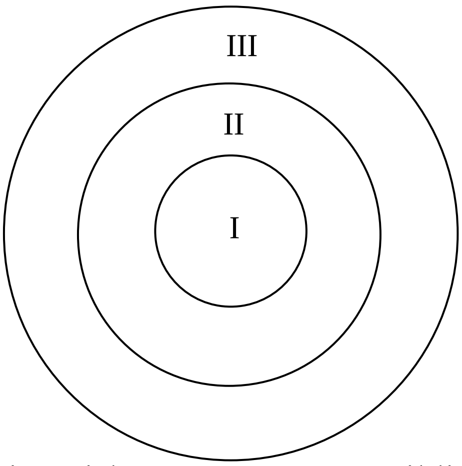
Endi P(A) ni hisoblaymiz:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$$

Mustaqil yechish uchun mashqlar

1. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda. Birinchi merganning nishonga urish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchisiniki esa 0,8 ga teng. Agar merganlar bittadan o'q uzishsa, ulardan hech bo'lmaganda birining nishonga urish ehtimolini toping. (***J***: 0,06).
2. Bitta yashikda 1 ta oq va 4 ta qora shar, ikkinchi yashikda 2 ta oq va 3 ta qora shar, uchinchisida esa 3 ta oq va 2 ta qora shar bor. Har bir yashikdan bittadan shar olindi. Olingan sharlarning 1 tasi oq va 2 tasi qora shar bo'lish ehtimolini toping. (***J***: $\frac{58}{125}$).

3. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ulardan 4 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta detal oldi. Olingan detallarning hech bo'lmaganda bittasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping. (***J***: $\frac{5}{6}$).
4. Bir-biri bilan kesishmaydigan 3 ta zonadan tashkil topgan biror sohaga qarata o'q uzildi. O'qning I- zonaga tushish ehtimoli $P(A_1)=\frac{5}{100}$, II- zonaga tushish ehtimoli $P(A_2)=\frac{10}{100}$, III-zonaga tushish ehtimoli $P(A_3)=\frac{17}{100}$. A hodisa D sohaga tushish hodisasi bo'lsin. P(A) nimaga teng? (***J***: $\frac{32}{100}$).
5. Nishonga qarata bitta o'q uzilgan. O'qning nishonga tegishi – A hodisa. Tegish ehtimoli P:P(A)=P. O'qning nishonga tegmaslik ehtimolini toping. (***J***: P-1).



6. Ikkita tankdan bitta nishonga qarata o'q uzildi. Birinchi tankdan otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli $\frac{9}{10}$, ikkinchisinikidan esa $-\frac{5}{6}$. Ikkala tankdan bir vaqtda bittadan o'q uzilgan. Nishonga ikkata o'q tegishi ehtimolini toping. (***J***: $\frac{3}{4}$).
7. Berilgan stanokda yaroqli mahsulot tayyorlash ehtimoli 0,9 ga teng. Yaroqli mahsulotlar orasida birinchi navli mahsulotning paydo bo'lish ehtimoli 0,8 ga

teng. Berilgan stanokda birinchi navli mahsulot tayyorlash ehtimolini toping. (***J***: 0,72).

8. Yashikda 10 ta detal bo'lib, ular orasida 6 ta bo'yalgani bor. Yig'uvchi tavakkaliga 4 ta detal oldi. Olingan detallardan hammasi bo'yalgan bo'lish ehtimolini toping. (**J**: $\frac{1}{4}$).
9. Talaba rejadagi 25 ta savoldan 20 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolni bilish ehtimolini toping. (***J***: $\frac{57}{115}$).

Asosiy adabiyotlar:

1. Solodolnikov A.S. Ehtimollar nazariyasi. – Toshkent: O'qituvchi, 1983. 10-20, 51-59 b.
2. Gumurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma. – Toshkent: O'qituvchi, 1980. 18-35 b.

4-MA'RUZA

Mavzu: Tajribaviy ma'lumotlarni qayta ishlash. Taqsimot qonunlari. Gistogramma

Reja:

1. Matematik statistika masalalari.
2. Statistik materiallar.
3. Statistik qator (yoki emprik qator).
4. Taqsimotning emprik qonuni.
5. Taqsimotning emprik funksiyasi.
6. Gistogramma.

Tayanch iboralar: Statistik metod, belgi, vaklni tanlash, tanlanma, bosh to'plam, statistik material, o'lchash xatolari, matematik ishlov berish, emprik qator, varianta, emprik qonun, variasion qator, chastotalar jadvali, tanlanmaning statistik taqsimoti, taqsimotning emprik funksiyasi, gistogramma.

Matematik statistika masalalari

Iqtisodiyotda, qishloq xo'jaligida, biologiyada, tibbiyotda tasodifiy voqealarni o'rganishda statistik metodlar muhim ahamiyatga ega. Odatda statistik metodga biror belgiga ko'ra predmetlarning (voqealarning, individlarning) juda katta to'plamlarining taqsimotlarini o'rganish talab qilinganda murojaat qilinadi. Masalan, odamlar to'plamining yoshlari bo'yicha taqsimoti, biror turkumdagi hayvonlarning og'irliklari bo'yicha taqsimoti va hokazolar.

Har qanday belgi amaliyotda miqdoriy bahoga ega bo'lganligi uchun narsalarning belgiga ko'ra taqsimoti haqida gapirish o'rniga qandaydir X tasodifiy miqdor haqida gapirish mumkin.

X miqdor bog'langan tajriba muayyan to'plamdan tavakkaliga bitta vakilni tanlashdan iborat bo'lib, X ning qabul qiladigan qiymati belgining shu vakil uchun qabul qiladigan qiymati bo'ladi.

Bunday taqsimotning to'la tavsifini muayyan to'plamning istisnosiz barcha vakili uchun belgining qiymatini aniqlash bilan olish mumkinligi tushunarli. Lekin to'plamning hajmi juda katta bo'lsa, buni qilib bo'lmaydi. Bu holatdan chiqish yo'li butun to'plamni tekshirish o'rniga undan tavakkaliga tanlangan qismi tekshiriladi. Bunday qism odatda tanlanma deyiladi. Butun to'plam esa bosh to'plam deyiladi. Masalan, Samarqand shahrida yashovchilarning kiyadigan kiyimlarining razmeri bo'yicha taqsimoti haqida gapirilganda bitta uyda yashovchi kishilarga oid ma'lumotlarni olish mumkin.

Statistik material

Ommaviy tasodifiy hodisalarni ro‘yxatga olish va kuzatish natijasida statistik material hosil bo‘ladi. Xususan, turli o‘lchashdagi xatolar statistik material bo‘lib xizmat qiladi.

Tajriba natijasida kuzatilgan qiymatlarga asoslanib qaralayotgan miqdorlarning taqsimot qonunlarini aniqlash hamda taqsimot parametrlarining qiymatlarini baholash – matematik statistikaning vazifasi hisoblanadi.

Matematik statistikaning yana bir vazifasi qaralayotgan miqdorlar qatnashadigan jarayonni optimal tashkil qilish uchun kerak bo‘lgan aniq xulosalarni hosil qilish maqsadida tajribaviy (statistik) materialni qayta ishlab chiqish hamda analiz qilish usullarini yaratishdan iborat.

Misol. O’lchov asbobi yordami bilan biror obektni ko‘p marta o‘lchanganda, xususan, biror obektgacha bo‘lgan uzoqlikni aniqlash paytida, kuzatilayotgan miqdorning turli qiymatlari hosil bo‘ladi.

Shu yo‘l bilan tajribada olingan qiymatlarga asoslanib biror natijaga kelishdan avval ularni sistemalashtirishni ya’ni qayta ishlashni talab qiladi.

Kuzatilgan X qiymat bilan kuzatilayotgan α miqdorning haqiqiy qiymati orasidagi δ ayirma, ya’ni $X-\alpha=\delta$ o‘lchash xatosi deb aytiladi. O’lchash xatosi aniq xulosalar olish maqsadida matematik ishlov berishni talab qiladi. Masalan, mahsulotni ko‘plab (ommaviy) ishlab chiqarishda hosil qilingan mahsulotning biror o‘lchamini olingan mahsulotlar uchun oldindan berilgan o‘lchamdan chetlanish miqdorini qarash kerak bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash otish paytida o‘qning tegish nuqtasi koordinata bilan mo‘ljalga olish nuqtasi koordinatasi orasidagi ayirma otish xatosidir.

Shunday qilib matematik statistikada asosan tanlanmani tekshirish natijasiga asoslangan holda to‘plam bo‘yicha alomatning taqsimoti haqida xulosa chiqarish amalga oshiriladi. Bunda tajribaviy ma’lumotlar qayta ishlanib maqsadga erishiladi.

Statistik qator (yemprik qator)

Biror X tasodifiy miqdor o‘rganilayotgan bo‘lsin. Ana shu maqsadda har birida X miqdor u yoki bu qiymatni qabul qiladigan bir qancha erkli tajribalar o‘tkaziladi. X tasodifiy miqdorning hosil qilgan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

qiymatlari biz o‘tkazayotgan tanlanma bo‘ladi. Bu to‘plamni ko‘p hollarda emprik qator deb ataladi. Emprik qator keyinroq qayta ishlanadigan va analiz qilinadigan dastlabki statistik material bo‘ladi. Statistik (emprik) qator ikki satrli (yoki ikki ustunli) jadval ko‘rinishida tasvirlanadi. Birinchi satrda tajribalarning raqamlari, ikkinchi satrda esa tasodifiy miqdorning hosil qilgan qiymatlari ko‘rsatiladi.

Tajribalar raqami	1	2	3	. . . .
X ning qiymatlari	x_1	x_2	x_3	. . . .

Taqsimotning emprik qonuni

Emprik qatorga asoslangan holda taqsimotning emprik qonuni tuziladi. Bu qonunning yozilish formasi o‘rganilayotgan X tasodifiy miqdorning xarakteriga bog‘liq bo‘ladi. Agar X tasodifiy miqdor diskret bo‘lsa, bu qonun jadval ko‘rinishida yoziladi. Bu jadval u yoki bu qiymatning qanday chastota bilan kuzatilayotganligini ko‘rsatadi. Bunday jadvalni tuzish uchun x_1, x_2, ... sonlar orasidan har xillarining barchasini tanlash zarur. Bu yo‘l bilan

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \qquad (1)$$

lar hosil qilinadi. Odatda bu sonlarni o‘sib borish tartibida ($\alpha_1<\alpha_2$...) yoziladi va uni variatsion qator deb aytiladi. (1) qator tuzilgandan so‘ng α_i sonlarning har biri uchun uning tajribalarning muayyan seriyasidagi takrorlanish chastotasini tuzish mumkin

$$p_i^* = \frac{k_i}{n} \qquad (2)$$

bu yerda n – barcha tajribalar soni, k_i esa $x=\alpha_i$ hodisa yuz bergan tajribalar soni. Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi:

α_i	α_1	α_2	...	α_n
p_i*	p_1*	p_2*	...	p_n*

Bu jadvalni chasatotalar jadvali (yoki tanlanmaning statistik taqsimoti) deb ataladi.

Kuzatishlar soni n o'sishi bilan chastotalar jadvali X tasodifiy miqdorining haqiqiy taqsimot qonuniga tobora yaqinlashib borishini kutish mumkin.

Misol. 10 ta tajriba natijalarida X tasodifiy miqdor uchun quyidagi qiymatlar olingan bo'lsin:

Tajriba nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X ning qiymatlari	0,4	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3	0,1	0,2

Bunga ko'ra variatsion qator tuzamiz:

0,1; 0,2; 0,3; 0,4

Bularga mos chastotalarni (chastotalar zichligi) topamiz:

$$\frac{4}{10}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{2}{10}, \quad \frac{2}{10}$$

Natijada quyidagi chastotalar jadvaliga ega bo'lamiz:

X ning qiymatlari (α_i)	0,1	0,2	0,3	0,4
Chastotalar (p_i^*)	0,4	0,2	0,2	0,2

Taqsimotning emprik funkisyasi

Taqsimotning emprik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymat uchun X<x hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}$$

Bu yerda n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Emprik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1^o. Emprik funksiyaning qiymatlari [0,1] kesmaga tegishli.

2^o. $F^*(x)$ kamaymaydigan funksiya.

3^o. Agar x_1 eng kichik varianta, x_2 eng katta varianta bo‘lsa, u holda $x_1 \le x_2$ bo‘lganda $F^*(x)=0$, $x_1 > x_2$ bo‘lganda $F^*(x)=1$.

Gistogramma

O’lchashlar soni juda katta bo‘lganda yuqoridagi chastotalar jadvalini tuzish qiyin, chunki jadvalga joylashtirilgan statistik materiallarni ko‘zdan kechirish murakkab bo‘lib qoladi. Shuning uchun oddiy statistik qatorda guruhlash (gruppalarga ajratish) bajariladi. Buning uchun $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}, \alpha_k, \ldots \alpha_n$ qatorni (X – ning qiymatlarini) (α_0, α_1), (α_1, α_2), (α_2, α_3), . . . (α_{n-1}, α_n) intervallarga ajratamiz va X miqdorning (α_{k-1}, α_k) intervalga to‘g‘ri keladigan qiymatlari sonini m_k bilan belgilaymiz. Intervalning uchlariga to‘g‘ri keladigan sonlarni yo chap yoki o‘ng intervalga kiritiladi.

Ushbu

$$\frac{m_k}{n} = \tilde{p}_k$$

son (α_{k-1}, α_k) intervalga mos bo‘lgan nisbiy chastota bo‘ladi. Bunda $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 + \ldots + \tilde{P}_n = 1$

Bu holda emprik qonun quyidagicha jadval ko‘rinishida bo‘ladi:

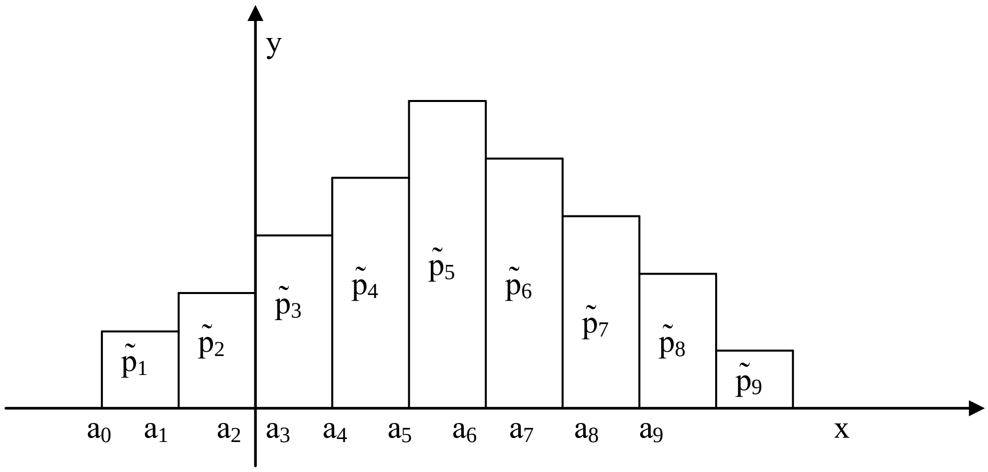
intervallar	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	. . . .	(a_{k-1}, a_k)	. . . .	(a_{n-1}, a_n)
m_k	m_1	m_2	. . . .	m_k	. . . .	m_n
$\tilde{p}_k$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$	. . . .	$\tilde{p}_k$	. . . .	$\tilde{p}_n$

Ana shuning o‘zi guruhlashdir (gruppalarga ajratishdir). Kesmalari (x_i, p_i^*) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziq chastotalar poligoni deyiladi.

Kesmalar $(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziq nisbiy chastotalar poligoni deyiladi.

Yuqorida aytilgan gruppalarga ajratishni geometrik tasvirlash ham mumkin. Bu quyidagicha bajariladi. Ox o‘qida a_0, a_1, a_2, . . ., a_k . . ., a_n nuqtalarni belgilaymiz. [a_{k-1}, a_k] kesmani asos qilib yuzi $\tilde{p}_k$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz. Hosil qilingan shakl gistogramma deb ataladi.

Statistik materialning bundan keyingi qayta ishlanishi quyidagicha amalga oshiriladi. (a_{k-1}, a_k) intervallar o'rtalarini $\tilde{x}_i$ bilan belgilanadi hamda bu qiymatni o'lchash natijasining qiymati deb hisoblanadi va u m_k marta takrorlanadi. U holda emprik qonunni ifodalovchi jadval quyidagicha bo'ladi:



$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	....	$\tilde{x}_k$	....	$\tilde{x}_n$
m_k	m_1	m_2	....	m_k	....	m_n
$\tilde{p}_k$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$	....	$\tilde{p}_k$	....	$\tilde{p}_n$

Takrorlash uchun savollar va mashqlar

1. Statistik metod nima?
2. Narsalarning belgisiga ko'ra taqsimotini qanday miqdorning taqsimoti deb qarash mumkin?

3. Vakil tanlash nima?
4. Tanlanma deb nimaga aytiladi? Bosh to‘plam nima?
5. Statistik material qanday hosil qilinadi?
6. Matematik statistikaning vazifasi nimadan iborat?
7. Sistemalashtirish yoki qayta ishlash nima degani? Matematik ishlov berishchi?
8. Statistik yoki emprik qator va variantalar nima?
9. Emprik qonun nima?
10. Tajribaning muayyan seriyasida takrorlanish chastotasi qanday topiladi? Chastotalar jadvali qanday tuziladi?
11. Taqsimotning emprik funksiyasi nima? Gistogramma deb nimaga aytiladi?
12. Chastotalar poligoni deb nimaga aytiladi?
13. Nisbiy chastota qanday topiladi va bu holda emprik qonun qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
14. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
m_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko‘rinishida berilgan nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

15. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning emprik funksiyasini toping.

x_i	1	5	7
m_i	10	25	35

16. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar poligonini toping.

x_i	2	5	7	8
m_i	10	20	6	14

17. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval	Qismiy	Intervaldagi variantalar	Chastota zichligi

nomeri	interval	chastotalarining yig'indisi	
i	x_i-x_{i+1}	m_i	$k_i/h=p_i^*$
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	
4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

18. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval nomeri	Qiymiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	x_i-x_{i+1}	k_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$n=\Sigma m_i=20$

4-amaliy mashg'ulot

Mavzu: Tajribaviy materiallarni qayta ishlash. Tanlanmaning statistik taqsimoti. Gistogramma

Darsning maqsadi*:* Matematik statistikaning asosiy vazifalari bilan tanishtirish, bosh to'plam, tanlanma, emprik qator, taqsimotning emprik qonuni, variatsion qator, tanlanmaning statistik taqsimoti (chastotalar jadvali) ni tuzish usullarini o'rganish. Gistogrammalar yasash.

Reja:

1. Statistik material.
2. Taqsimotning emprik qonuni (tanlanmaning statistik taqsimoti).
3. Taqsimotning emprik funktsiyasi.

4. X tasodifiy miqdorning diskret uzluksiz taqsimoti (chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasi).

Jihozlar: doska, bo'r, jadvallar.

Darsning borishi: 1. Ommaviy tasodifiy hodisalarni ro'yxatga olish va kuzatish natijasida statistik material hosil bo'ladi, xususan turli o'lchamdagi xatolar statistik material bo'ladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variatsion qatorning x_i variantalari va ularga mos k_i chastotalar (barcha chastotalar yig'indisi tanlanmaning hajmi n ga teng) yoki μ_i nisbiy chastotalar ro'yxatiga (barcha nisbiy chastotalar yig'indisi 1 ga teng) aytiladi.

2. X (diskret yoki uzluksiz) tasodifiy miqdorning (belgining) miqdoriy xususiyatini o'rganish uchun bosh to'plamdan n hajmli x_1, x_2, ..., x_n tanlanma olingan bo'lsin. X ning kuzatilgan x_i qiymatlari variantalar, ortib borish tartibida yozilgan variantlar ketma-ketligi *variatsion qator* deyiladi.

3. Taqsimotning emprik funktsiyasi. Taqsimotning emprik funktsiyasi (tanlanmaning taqsimot funktsiyasi) deb har bir x qiymat uchun X<x hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan F*(x) funktsiyaga aytiladi:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu yerda n_x - x dan kichik variantalar soni, n - tanlanma hajmi.

Emprik funktsiya quyidagi xossalarga ega:

1^0. $F^*(x)$ ning qiymatlari [0, 1] kesmaga tegishli.

2^0. $F^*(x)$ kamaymaydigan funktsiya.

3^0. Agar x_1 eng kichik varianta, X_k esa eng katta varianta bo'lsa, u holda $x \leq x_1$ bo'lganda $F^*(x)=0$, $x>x_k$ bo'lganda $F^*(x)=1$.

4. X tasodifiy miqdorning diskret va uzluksiz taqsimoti. Gistogramma.

a) chastotalar poligoni deb, kesmalari (x_1, k_1), (x_2, k_2), ..., (x_n, k_n) nuqtalarni tutushtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu erda x_i - tanlanmaning variantalari, k_i - ularga mos chastotalar. Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari (x_1, μ_1), (x_2, μ_2), ..., (x_n, μ_n) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi.

b) X tasodifiy miqdor (belgi) uzluksiz taqsimlangan holda belgining barcha kuzatilgan qiymatlari yotgan intervalni uzunligi h bo’lgan qator qismiy intervallarga bo’linadi va i-nchi intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig’indisi k_i topiladi. *Chastotalar gistogrammasi* deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{k_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) ga teng bo’lgan to’g’ri to’rtburchaklardan iborat pog’onaviy figuraga aytiladi.

i-nchi qismiy to’g’ri to’rtburchakning yuzi $h\cdot\frac{K_i}{h}=k_i$. i-intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig’indisiga teng. Gistogrammaning yuzi barcha chastotalar yig’indisiga, ya’ni tanlanma hajmi n ga teng.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa μ_i/h nisbat (nisbiy chastota zichligi) ga teng bo’lgan to’g’ri to’rtburchaklardan iborat pog’onaviy figuruga aytiladi. i-nchi qismiy to’g’ri to’rtburchakning yuzi $h*\mu_i/h=\mu_i$ ga, ya’ni i-intervalga tushgan variantalarning nisbiy chastotalari yig’indisiga teng.

Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yig’indisiga, ya’ni 1 ga teng.

1-masala. Tanlanma

x_i	2	5	7	9
k_i	1	2	3	4

chastotalar taqsimoti (jadvali) ko’rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Yechilishi. Bizning holda tanlanmaning hajmi n=1+2+3+4=10. Nisbiy chastotalarni topamiz: $P_i^*=\frac{k_i}{h}$ (n-o’tkazilgan tajribalar soni, k_i esa $X=\alpha_i$ hodisa yuz bergan tajribalar soni) formulaga asosan:

$P_1^* = \frac{k_i}{h} = \frac{1}{10} = 0{,}1$, $P_2^* = \frac{2}{10} = 0{,}2$, $P_3^* = \frac{3}{10} = 0{,}3$, $P_4^* = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Bularga ko'ra izlanayotgan nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz:

x_i	2	5	7	9
k_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Tekshirish: 0,1+0,2+0,3+0,4=1.

2-masala. 8 ta tajriba natijasida X uchun quyidagi qiymatlar olingan bo'lsin

Tajriba nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8
X ning qiymatlari	0.1	0,3	0,1	0,3	0,2	0,3	0,3	0,2

Variatsion qator: 0,1; 0,2; 0,3 sonlardan tuziladi, ularga mos nisbiy chastotalar quyidagicha tuziladi:

$$\frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}$$

natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

x_i	0,1	0,2	0,3
P_i^*	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Tekshirish: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+2}{4} = 1$

3-masala. Tanlanmaning quyida berilgan ushbu

x_i	2	5	7	8
k_i	1	3	2	4

taqsimoti bo'yicha uning emprik funktsiyasini tuzing.

Yechilishi: Avvalo tanlanmaning hajmini topamiz: 1+3+2+4=10
eng kichik varianta 2 ga teng, demak,

$$F^*(x)=0,\ x\le 2 \text{ bo'lsa.}$$

X<5 qiymat, chunonchi $x_1=2$ qiymat 1 marta kuzatilgan, demak, $2<x\le 5$ bo'lganda

$$F^*(x)=\frac{1}{10}=0{,}1$$

X<7 qiymatlar, chunonchi $x_1=2$ va $x_2=5$ qiymatlar 1+3=4 marta kuzatilgan, demak, $5<x\le 7$ bo'lganda

$$F^*(x)=\frac{4}{10}=0{,}4$$

X<8 qiymatlar, chunonchi $x_1=2$, $x_2=5$, $x_3=7$ qiymatlar 1+3+2=6 marta kuzatilgan, demak, $7<x\le 8$ bo'lganda

$$F^*(x)=\frac{6}{10}=0{,}6$$

x>8 bo'lganda esa

$$F^*(x)=1$$

Bularga asoslanib emprik funktsiyani yozamiz:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \quad bo'lganda \\ 0{,}1 & 2<x\le 5 \quad bo'lganda \\ 0{,}4 & 5<x\le 7 \quad bo'lganda \\ 0{,}6 & 7<x\le 8 \quad bo'lganda \\ 1, & x>8 \quad bo'lganda \end{cases}$$

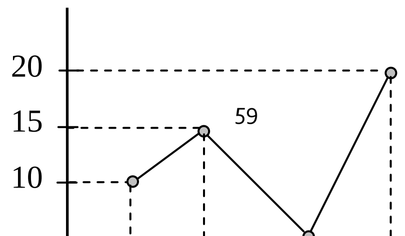
4-masala. Tanlanmaning ushbu

x_i	2	3	5	6
k_i	10	15	5	20

jadvalda berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang.

Yechilishi: Abstsissalar o'qida 2, 3, 5, 6 nuqtalarni topib tekislikda (2, 10), (3, 15), (5, 5), (6, 20) nuqtalarni topamiz va ularni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtiramiz.

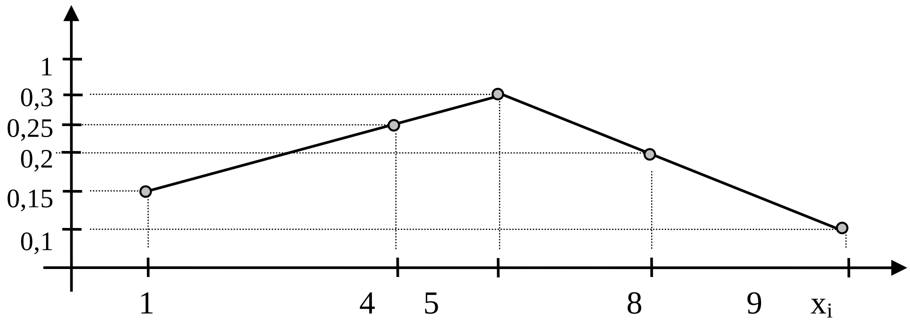
Izlangan chastotalar poligoni 1-chizmadagidek tasvirlanadi.



5-masala. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	1	4	5	8	9
$\tilde{P}_i$	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

Yechilishi: Abtsissalar o'qida 1, 4, 5, 8, 9 nuqtalarni aniqlab ordinatalar o'qida ularga mos keluvchi nisbiy chastotalarni qo'yamiz. (x_i, $\tilde{P}_i$) nuqtalarni yasaymiz va ularni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtiramiz:



2-chizma

Izlangan poligon 2-chizmada tasvirlangan.

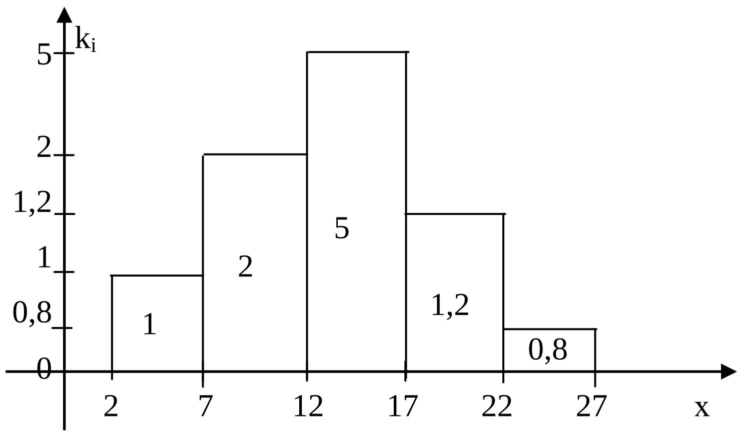
6-masala. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval nomi	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
i	x_i-x_{i+1}	k_i	k_i/h
1	2-7	5	1
2	7-12	10	2
3	12-17	25	5

4	17-22	6	1,1
5	22-27	4	0,8

Yechilishi: Masala shartida birinchi 3 ta ustundagi ma'lumotlar berilgan. Avvalo oxirgi ustunni to'ldiramiz. Bizning holda h=5 ga teng. $k_i/5$ larni topamiz.

Abtsissalar o'qida h=5 uzunlikdagi berilgan intervallarni yasaymiz. Bu intervallarning ustida abstsissalar o'qiga parallel va undan tegishli chastota zichliklari $\frac{k_i}{n}$ ga teng masofada bo'lgan kesmalar o'tkazamiz (3-chizma). Natijada chastotalar gistogrammasi hosil bo'ladi.



3-chizma

Bu yerda birinchi zinaning yuzi 1 ga, ikkinchi zinaning yuzi 2 ga, uchinchi zinaning yuzi 5 ga, oltinchi zinaning yuzi 1,2 ga va oxirgi zinaning yuzi 0,8 ga teng.

7-masala. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

Interval nomeri	Qismiy interval	Qismiy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	x_i-x_{i+1}	k_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4

4	11-14	5
		$K=\Sigma k_i=25$

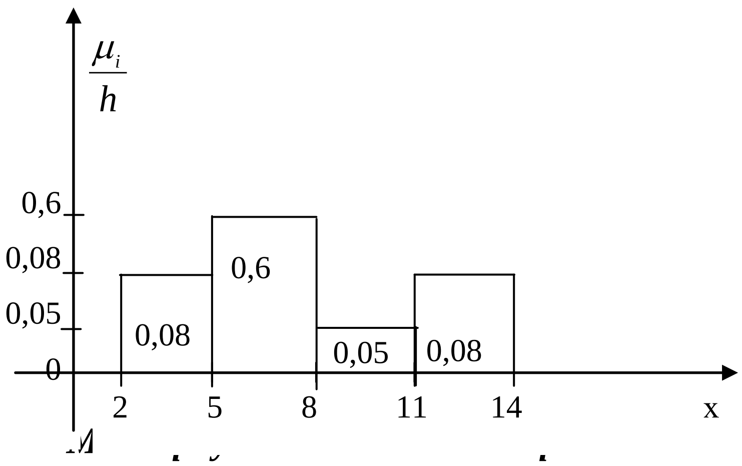
Yechilishi: Avvalo nisbiy chastotalarni topamiz:

$\mu_1=\frac{6}{25}=0{,}24$, $\mu_2=\frac{10}{25}=0{,}4$, $\mu_3=\frac{4}{25}=0{,}16$, $\mu_4=\frac{5}{25}=0{,}2$

Intervalning uzunligi h=3 ga teng bo’lganini hisobga olib nisbiy chastotalar zichligini topamiz:

$\frac{\mu_1}{h}=\frac{0{,}24}{3}=0{,}08$; $\frac{\mu_2}{h}=\frac{0{,}4}{3}=0{,}6$; $\frac{\mu_3}{h}=\frac{0{,}16}{3}=0{,}05$; $\frac{\mu_4}{h}=\frac{0{,}2}{3}=0{,}08$;

Abstsissalar o’qida berilgan qismiy intervallarni belgilaymiz. Bu intervallarning ustida abstsissalar o’qiga parallel va undan tegishli nisbiy chastota zichliklariga teng masofada kesmalar o’tkazamiz (4-chizma).



4-chizma

Musraqil yechish uchun mashiqlar

1. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
k_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko’rinishda berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Javob:

x_i	4	7	8	12
μ_i	0.25	0,10	0,15	0,50

2. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha uning emprik funktsiyasini toping.

x_i	4	7	8
k_i	5	2	3

Javob:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 4 \quad bo'lganda, \\ 0{,}4; & 4\le x\le 7 \quad bo'lganda, \\ 0{,}7; & 7< x\le 8 \quad bo'lganda, \\ 1, & x>8 \quad bo'lganda. \end{cases}$$

3. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini yasang:

x_i	15	20	25	30	10
k_i	10	15	30	20	25

4. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligoni yasang:

x_i	2	4	5	7	10
k_i	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

5.Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

Interval nometri	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	chastota zichligi
i	x_i-x_{i+1}	k_i	k_i/n
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	

4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

6. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval nometri	Qismiy interval	Qismiy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	x_i-x_{i+1}	k_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$K=\Sigma k_i=20$

Asosiy adabiyotlar:

1. Solodolnikov A.S. Ehtimollar nazariyasi. – Toshkent: O'qituvchi, 1983. 180-184 b.
2. Gumurman V.Ye. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechishga doir qo'llanma. – Toshkent: O'qituvchi, 1980. 209-211 b.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. Piskunov N.S. Differehsial va integral hisob. – Toshkent: O’qituvchi, 1974. 542-546 b.