

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

MATEMATIKA

(Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika)

(uslubiy qo'llanma)

Samarqand – 2008

Matematika (Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika).

Uslubiy qoʻllanma. - Samarqan: SamDU nashri, 2008. 46 bet

Mazkur uslubiy qoʻllanma matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika boʻlimi boʻyicha reja asosida nazariy materiallarni oʻrganishga bagʻishlangan.

Qoʻllanma boshlangʻich taʼlim va sport, tarbiyaviy ish, pedagogika va psixologiya yoʻnalishlarida oʻqiydigan talabalarga moʻljallangan boʻlib, undan barcha gumanitar yoʻnalishda oʻqiydigan talabalar ham foydalanishlari mumkin.

Tuzuvchilar:

**prof. T.NURIMOV,
k.oʻqit. Sh.TOGʻAYEV
k.oʻqit. S.ERDONOVA**

Masʼul muharrir

prof. A.Jalilov

Taqrizchilar:

**f.m.f.n., dots. M.Ya. HUSAINOV
dots. Q.TURSUNOV**

© Alisher Navoiy nomidagi Samarqand davlat universiteti, 2008

SO‘ZBOSHI

Respublikamizda qabul qilingan «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» va «Ta’lim to‘g‘risida»gi Qonun talablarini bajarish izchillik bilan amalga oshirilayotgan davrda talabalar tafakkurini yuqori darajada rivojlantirish, ularning dunyoqarashini yuksaltirish, matematika fanini chuqur o‘rganish muhim ahamiyatga ega. Davlat ta’lim standartlarining bosqichma-bosqich amalga oshirilishida yo‘nalishi bakalavr: V5141600 – Boshlang‘ich ta’lim va sport, tarbiyaviy ish, V5141800 – pedagogika va psixologiya mutaxassisliklari bo‘yicha yuqori malakali kadrlar tayyorlashda matematikaning ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo‘limiga katta ahamiyat berilgan bo‘lib, uni oxirgi semestrda o‘rganish mo‘ljallangan.

Matematikaning ehtimollar nazariyasi va matematik statistika bo‘limi o‘ziga xosligi bilan uning boshqa bo‘limlaridan katta farq qiladi. Nazariy ehtimoliy tushunchalarning o‘ziga xos xarakteri uzoq vaqtlarga qadar bu tushunchalarga yaqinlashishni faqat intuitiv fikrlashlarga asoslanishga sabab bo‘lib keldi, chunki uning ko‘p tomonlari va holatlari tarqoq xarakteri bo‘lib shubhalar tug‘dirardi. Hozirgi kunda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika akademik A.N.Kolmogorovning o‘tgan asrning 30-yillarida qilgan katta xizmatlari tufayli qat’iy zamonaviy asoslandi va qarama-qarshiliklarsiz mustaqil fanga aylandi.

Bu fanni pedagogika fakulteti talabalari rejaga ko‘ra juda kam, ya’ni 16-20 soat hajmida o‘rganishlari talab qilingan.

Mazkur uslubiy qo‘llanma ehtimollar nazariyasi va matematik statistikaning asosiy tushunchalarini talabalarga iloji boricha sodda va qisqa qilib yetkazish, sodda misollar yordamida nazariyaning mohiyatini tez anglab olishga va kelajak faoliyatida ulardan foydalana olish qobiliyatlarini o‘stirishga mo‘ljallangan.

1-MA'RUZA

Mavzu: Tasodifiy hodisalar va ehtimol tushunchasi. Hodisalarning kombinatsiyasi

Reja:

1. *Tasodifiy hodisa tushunchasi. Chastota tushunchasi.*
2. *Ehtimolning statistik ta'rif.*
3. *Ehtimollik tushunchasi.*
4. *Ehtimollar nazariyasi predmeti.*
5. *Hodisaning yig'indisi va ko'paytmasi.*
6. *Hodisalarni qo'shish qoidasi.*

Tayanch iboralar: *Tasodifiy hodisa, tajribaga nisbatan tasodifiy hodisa, albatta yuz beradigan hodisa (muqarrar hodisa), yuz bermaydigan hodisa, «Ommaviy» yoki statistik hodisa, ko'proq ehtimolli hodisa, nisbiy chastota, hodisaning ehtimoli, birgalikda bo'lmagan hodisalar, qarama-qarshi hodisalar.*

Tasodifiy hodisa tushunchasi

Biz odattiy turmushda, amaliy faoliyatda hamda ilmiy tekshirishlarda natijasini to'la ishonch bilan oldindan aytish mumkin bo'lmagan tajribalar va sinovlarni tez-tez uchratib turamiz.

Masalan, tangani tashlaganda u yoki bu tomonining tushishini to'la ishonch bilan aytish mumkin emas, nishonga o'q uzganda tegish yoki tegmasligi aniq emas, o'yin soqqasi (kubik) tanlandi. Bunda 6 ochkning tushishi oldindan ma'lum emas, biror nomerli lotereya билетiga yutuq chiqishini ham oldindan aytib bo'lmaydi.

Shularga o'xshash barcha (hodisalarda) hollarda tajribaning natijasini tasodifiy hodisa sifatida qaraymiz.

1-ta'rif. Tayin biror tajribani o'tkazish natijasida yuz berishi ham, yuz bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa shu tajribaga nisbatan tasodifiy hodisa deyiladi.

Tanga tashlaganda gerbli tomonning tushishi, o'q uzilganda nishonga tegish, lotereya билетiga yutuq chiqishi, soqqa tashlaganda 6 ochkning tushishi va hokazolar tasodifiy hodisalarga misol bo'ladi. Tasodifiy hodisalar A, V, S va hokazolar bilan belgilanadi.

Tajriba natijasida albatta yuz beradigan hodisalar muqarrar hodisalar deyiladi. Masalan, o'yin soqqasi tashlanganda butun sondagi ochkning

tushishi, tavakkaliga tanlangan soʻzda 50 dan ortiq boʻlmagan harfning boʻlishi, kun ketidan tun kelishi va hokazolar muqarrar hodisalardir.

Xuddi shunga oʻxshash tajriba natijasida mutloqo yuz bermaydigan hodisa, mumkin boʻlmagan hodisa deyiladi. Masalan, bitta lotereyaga ikkita yutuq chiqishi, raketaning quyoshga qoʻnib qaytib kelishi va hokazolar mumkin boʻlmagan hodisalardir.

Tajribalarda yuz berishi mumkin boʻlgan hodisalar «ommaviy» yoki statistik hodisa deyiladi.

Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi tushunchasi

A – biror tajribaga nisbatan tasodifiy hodisa boʻlsin. Tajriba N marta oʻtkazilgan boʻlib, ulardan N_A tasida A hodisa yuz berdi deb faraz qilamiz. Ushbu

$$\mu = \frac{N_A}{N}$$

nisbatni tuzamiz. Bu nisbat qaralayotgan tajribalar seriyasidagi A hodisa yuz berishining chastotasi deb ataladi. Deyarli barcha tasodifiy hodisalar uchun chastota turgʻunlik xossasiga ega. Bu degan soʻz tajribalar soni oshirilganda A hodisaning roʻy berish nisbiy chastotalari odatda bir-biridan kam farq qiladi va bu farq seriyalardagi tajribalar soni qancha koʻp boʻlsa shuncha kam boʻladi, yaʼni turgʻunlashadi va biror $P(A)$ songa yaqinlashadi.

Shu oʻzgarmas $P(A)$ son A hodisaning ehtimoli deyiladi.

Taʼrif. Tasodifiy hodisaning ehtimoli – berilgan hodisaga bogʻliq oʻzgarmas son boʻlib, tajribalarning koʻp seriyasida bu hodisaning yuz berish nisbiy chastotasi shu son atrofida tebranadi.

Buni ehtimolning statistik taʼrifi deyiladi. μ nisbiy chastota doimo $0 \leq \mu \leq 1$ shartlarni qanoatlantirganligi uchun har qanday hodisaning ehtimoli ham shu oraliqda joylashadi:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Agar A hodisa muqarrar boʻlsa, $N_A = N$ va demak, $\mu = 1$ boʻladi; shu bilan muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng. Agar A mumkin boʻlmagan hodisa boʻlsa, $N_A = 0$ boʻlib $\mu = 0$ boʻladi; shunga koʻra mumkin boʻlmagan hodisaning ehtimoli nolga teng.

1-misol. Tanga tashlash tajribasini qaraymiz. A hodisa gerbli tomonning tushishi boʻlsin. $P(A)$ ni aniqlang.

Yechish. Tanga bir jinsli va deformasiyalanmagan boʻlsa tanga tashlashning koʻp seriyasida gerbli va raqamli tomonlarning tushishi

o'rtacha bir xil takrorlanadi. Bundan ko'rinadiki, A hodisa yuz berishining nisbiy chastotasi μ ning qiymatlari $\frac{1}{2}$ son atrofida tebranadi. Demak, $P(A) = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

2-misol. Yashikda 20 ta shar yotibdi: 8 ta oq, 12 ta qora. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar bo'lishi ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Tajriba juda ko'p marta takrorlansa sharlarning teng imkoniyatli yekanligini nazarga olsak qora sharning chiqish nisbiy chastotasi taqriban yashikdagi sharlar ichida qora sharlar tashkil qiladigan ulushga teng deb hisoblasa bo'ladi, ya'ni $\mu = \frac{12}{20}$. Demak, $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$.

3-misol. Kub formasidagi o'yin soqqasi yoqlari 1 dan 6 gacha nomerlangan. O'yin soqqasi tashlanganda 5 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Agar soqqa bir jinsli materialdan tayyorlangan bo'lsa, uning yoqlarining tushishi teng imkoniyatli bo'ladi va $P(A) = \frac{1}{6}$ deb hisoblash mumkin.

4-misol. 36 dastali kartadan bitta karta tortib olindi. Chillik turdagi kartaning kelib chiqish ehtimoli qanday?

Yechish. Bunda hammasi bo'lib 36 mavjud hol bo'lib, ulardan 9 tasida A hodisa (chillik chiqishi) ro'y beradi. Demak, nisbiy chastota $\mu = 9/36$, ya'ni $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

5-misol. Berilgan obektga qarab to'pdan bir xil sharoitda 5 ta o'q uzildi va 2 tasi mo'ljalga tegdi. A hodisa o'qning nishonga tegishi. O'qning nishonga tegishining nisbiy chastotasi qanday bo'ladi?

Yechish. $\mu = \frac{2}{5}$ bo'ladi. Chunki bunda 5 ta hol mavjud hol bo'lib, ulardan 2 tasida A hodisa ro'y bergan. Demak, $P(A) = \frac{2}{5}$ bo'lishi ravshan.

Ehtimollar nazariyasi predmeti

Ehtimollar nazariyasi ommaviy tasodifiy hodisalarga xos bo'lgan qonuniyatlarni o'rganish bilan shug'ullanadi.

Albatta fanni bunchalik umumiy xarakterlash u haqida kam ma'lumot beradi. Lekin tasodifiy hodisalarga xos qonuniyatlar mavjud va ularni bilish katta amaliy ahamiyatga ega.

Hodisalarning yig'indisi va ko'paytmasi. Ehtimollarni qo'shish qoidasi

Ta'rif. Ikkita A va B hodisalarning yig'indisi deb bu hodisalardan kamida bittasining ro'y berishidan iborat bo'lgan S hodisaga aytiladi:

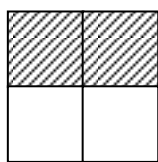
$$S = A + B$$

Misol. A hodisa sharchaning kvadrat sohasining yuqori yarim qismiga tushishi, V hodisa esa uning o'ng yarmiga tushishi bo'lsin. A+B sharcha ko'rsatilgan yarimlarning birlashmasi bo'lgan sohaga tushishini anglatadi.

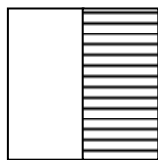
Ta'rif. Ikki A va B hodisalarning ko'paytmasi deb, A va B birgalikda yuz berishidan iborat bo'lgan S hodisaga aytiladi:

$$S = A \cdot B$$

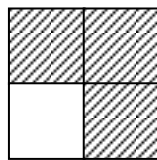
Misol. Yuqoridagi aytilgan misoldagi kvadrat ichidagi sharchani (nuqtani) tanlash A va B hodisalar bo'lsa, AB hodisa kvadratning yuqori o'ng choragiga tushishini bildiradi.



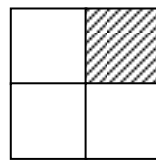
A



B



A+B



A·B

Ehtimollarni topishda statistik ta'rif ancha ko'p mehnat talab qiladi. Juda ko'p hodisalarning ehtimollarini eksprementga murojaat qilmasdan topish qonuniyatlarini aniqlash ehtimollar nazariyasining muhim masalalaridan biridir. Yuqorida kiritilgan ehtimol muhim qoidalarga bo'ysunadi. Bu qoidalardan eng asosiysi ehtimollarni qo'shish qoidasidir.

Qoida. Agar A va B lar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ularning yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Eslatma. Agar bitta tajribada A va V tasodifiy hodisalar birgalikda yuz bera olmasa, ular birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Qoida. Agar $A_1, A_2, \dots, A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ular uchun

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Natija. Qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Eslatma. A hodisaga qarama-qarshi hodisa $\bar{A}$ ko'rinishda belgilanadi. U A hodisaning yuz bermasligidan iborat. Misol uchun A hodisa o'qning nishonga tegishi bo'lsa $\bar{A}$ o'qning nishonga tegmaslik hodisasidir.

Misol. O'yin soqqasi tashlandi. Juft sondagi ochko tushish ehtimoli nimaga teng.

Yechish. A_i bilan i ochkoning tushishini belgilaymiz. ($i=1, 2, \dots, 6$) A hodisa A_2, A_4, A_6 larning hech bo'lmaganda birining yuz berishidan iborat, ya'ni, $A = A_2 + A_4 + A_6$

A_2, A_4, A_6 juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalardir. Qo'shish qoidasiga ko'ra

$$P(A)=P(A_2 + A_4 + A_6)= P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Tasodifiy hodisa deganda nimani tushunasiz?
2. Muqarrar va mumkin bo'lmagan hodisalarga misollar keltiring.
3. Ommaviy yoki statistik hodisa deb nimaga aytiladi?
4. Ehtimollar nazariyasi nimani o'rganadi?
5. A hodisa yuz berishining chastotasi deb nimaga aytiladi?
6. Tasodifiy hodisaning ehtimoliga ta'rif bering.
7. Nisbiy chastota $0 \leq \mu \leq 1$ shartni qanoatlantirganda $P(A)$ ehtimol qanday shartni qanoatlantiradi?
8. Ikkita A va B hodisalarining yig'indisi va ko'paytmasiga ta'rif bering.
9. A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb qanday hodisaga aytiladi?
10. $A + B, AB, \bar{A}$ hodisalarni nazariy to'plam ma'nosida tasvirlang.
11. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
12. Ehtimollarni qo'shish qoidasini ayting va formulasini isbotlang.
13. Qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi nimaga teng?
14. Yashikda 1 dan 20 gacha nomerlangan sharlar bor. Tavakkaliga bitta shar olindi. Uning nomeri 20 dan oshmaslik ehtimoli nimaga teng?

15. Yashikda 10 ta oq va 15 ta qora sharlar bor. Yashikdan ko‘k shar olinish ehtimoli nimaga teng?

16. Yashikda 3 ta oq, 4 ta qora va 5 ta qizil sharlar bor. Yashikdan tavakkaliga olingan shar qora rangli bo‘lish ehtimolini toping.

17. Tanga ikki marta tashlandi. Har ikkala holda ham gerb tushish ehtimoli nimaga teng?

18. Yashikda 20 ta oq, 18 ta qora, 12 ta ko‘k va 18 ta qizil sharlar bor. Tavakkaliga olingan shar oq, qora, ko‘k, oq yoki qora, ko‘k yoki qizil, oq, qora yoki ko‘k bo‘lib chiqish ehtimollarini toping.

19. Tanga 2 marta tashlangan. Hech bo‘lmaganda bir marta gerbli tomon tushish ehtimolini toping.

2-MA'RUZA

Mavzu: Ehtimollar nazariyasining aksiomalari. Ehtimollarni hisoblashning klassik usuli

Reja:

1. Aksiomatik metodning mohiyati.
2. Elementar hodisalar fazosi.
3. A.N.Kolmogorov aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan teoremlar.
4. Ehtimollarni hisoblashning klassik usuli.

Tayanch iboralar: Aksiomatik metod, elementar hodisalar, elementar hodisalar fazosi, barcha qism to'plamlar, aynan tenglashtirish, qism to'plamlarining birlashmasi, kesishmasi, to'ldiruvchi to'plam, birgalikda bo'lmagan hodisalar, qarama-qarshi hodisalar, mumkin bo'lmagan hodisalar, oddiy qo'shish aksiomasi, kengaytirilgan qo'shish aksiomasi, ehtimoliy model, tasodifiy miqdor.

Aksiomatik metodning mohiyati

Yuqorida tasodifiy hodisaning ehtimolini tajribalar soni oshganda shu hodisaning yuz berish chastotasi yaqinlashadigan miqdor kabi tasavvur qilingan edi. Bu esa qat'iy matematik nazariyaga asos bo'lmaydi. Ehtimollar nazariyasiga qat'iy matematik tus berish A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan aksiomalar yordamida amalga oshiriladi. Aksiomatik metodning mohiyati shundaki, eng avval muayyan nazariyaning ta'riflanmaydigan tushunchalari belgilab qo'yiladi va so'ngra nazariyaning barcha jumalari boshqa tushunchalarga asoslanmasdan shulardan keltirib chiqariladi.

Elementar hodisalar fazosi

Elementar hodisalar deb, birinchidan, tajribaning har bir o'tkazilishida ulardan faqat va faqat bittasining yuz berishi; ikkinchidan, aynan shu tajriba bilan bog'liq bo'lgan ixtiyoriy A hodisa elementar hodisalarga «ajralishi» zarurligi bilan xarakterlanuvchi hodisalarga aytiladi.

Masalan,

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \quad (1)$$

(bu yerda, A_i i ochkoning tushishi) elementar hodisalardir. Yana bir misol, aytaylik tajribamiz tekislikdagi Ω sohaga kichkina sharcha tashlashdan iborat bo'lsin. Sharchaning Ω sohaning birorta aniq nuqtasiga

tushishi elementar hodisadir. Lekin bu misolda elementar hodisalar to'plami cheksiz. Umuman olganda qaralayotgan tajriba uchun elementar hodisalar to'plamini Ω deb belgilab shu tajriba bilan bog'liq bo'lgan har bir hodisani Ω to'plamning qism to'plami deb qaraymiz. A.N.Kolmogorov aksiomalarida A hodisa unga mos keltirilgan qism to'plamga aynan tenglashtiriladi. Masalan, «o'yin soqqasida juft sondagi ochko tushdi» (A hodisa) hodisasi (1) to'plamning $\{A_2, A_4, A_6\}$ qism to'plamidan iborat, "Sharcha Ω sohaning chap yarim qismiga tushdi" (A hodisa) hodisasi esa, to'plamning shu aytilgan qism sohasidagi nuqtalar to'plamidir.

Hodisa tushunchasiga bunday yondoshish hodisalar yig'indisi va ko'paytmasini to'plam nazariyasidagi ma'nolariga aynan tenglashtirdi. Ya'ni A va V hodisalarning yig'indisi ularga mos qism to'plamlarning birlashmasiga, A va V hodisalarning ko'paytmasi esa shu qism to'plamlarning kesishmasiga, A hodisaga qarama-qarshi $\bar{A}$ hodisa esa A ni Ω to'plamga qadar to'ldiruvchi to'plamga aylanadi.

Biror Ω to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari yelementar hodisalardan iborat bo'lsin. Hodisalar nimani ifodalashining ahamiyati yo'q. Ω to'plamning qism to'plamlari tayin qilingan va ular hodisalardan iborat bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin.

- I. Ω to'plamning o'zi hodisa bo'lsin.
- II. Agar A – hodisa bo'lsa, u holda $\bar{A}$ ham hodisa.
- III. Agar $A_1, A_2, \dots$ lar hodisa bo'lsa, u holda $A_1 + A_2 + \dots$ ham, $A_1 A_2 \dots$ ham hodisa.

Eslatma. III shartda qatnashgan $A_1, A_2, \dots$ qism to'plamlar soni chekli ham, cheksiz ham bo'lishi mumkin.

Ω - to'plam elementar hodisalar fazosi deb ataladi.

A.N.Kolmogorov aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan teoremlar

1-aksioma. Har bir A hodisaga uning ehtimoli deb ataluvchi manfiy bo'lmagan $P(A)$ son mos keltirilgan.

2-aksioma. Agar $A_1, A_2, \dots$ juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (1)$$

Eslatma. A_i hodisalar soni cheksiz bo'lsa, o'ng tomonda qatorning yig'indisi qaraladi, chekli bo'lganda esa, unga nisbatan kuchsizroq shart qaraladi.

3`aksioma. Agar A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad (2)$$

(2) ni oddiy qo'shish aksiomasi, (1) yesa kengaytirilgan qo'shish aksiomasi deyiladi.

4-aksioma. $P(\Omega)=1$

1-3 aksiomalar A.N.Kolmogorov tomonidan kiritilgan bo'lib, ular ehtimollar nazariyasining asosini tashkil qiladi.

1-teorema. $P(A)+P(\bar{A})=1$ bo'ladi.

Isbot. Ma'lumki, $A+\bar{A}=\Omega$. Bundan $1=P(\Omega)=P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$.

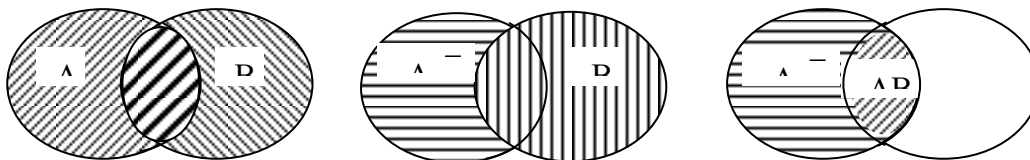
2-teorema. $P(A)\leq 1$.

Isbot. $P(\bar{A})\geq 0$ bo'lgani uchun $P(A)+P(\bar{A})=1$ dan $P(A)\leq 1$ kelib chiqadi.

3-teorema. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ tenglik o'rinli.

Isbot. A va B lar Ω ning qism to'plamlari bo'lganligidan

$A=AB+A\bar{B}$, $A+B=B+A\bar{B}$ tengliklar o'rinli ekanligi Eyler doiralari yordamida tushuntirilishi ravshan



Har ikkala tenglikka qo'shish aksiomasini tadbiq etamiz:

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}), P(A+B)=P(B)+P(A\bar{B})$$

Ikkinchi tenglikdan birinchi tenglikni ayirsak isbot talab etilgan tenglik kelib chiqadi.

A.N.Kolmogorov aksiomalari tasodifiy natijali tajribalarni tavsiflash uchun qulay matematik sxemani beradi. U quyidagidan iborat.

1. Elementar hodisalar fazosi deb ataluvchi Ω to'plam.
2. Ω to'plamning hodisalar deb ataluvchi va I, II, III shartni qanoatlantiruvchi qism to'plamlari sistemasi.
3. Hodisalar to'plamida aniqlangan va 1, 2, 3 aksiomalarni qanoatlantiruvchi $P(A)$ funksiya.

Bu uchta obektlar majmuasi muayyan tajribaning ehtimoliy modeli deb ataladi. Bunga ko'ra ehtimollar nazariyasi predmetini aniq ta'riflash imkoniyatiga ega bo'lamiz: Ehtimollar nazariyasi mumkin bo'lgan barcha ehtimoliy modellarni o'rganadi.

Ehtimollarni hisoblashning klassik usuli

Elementar hodisalar fazosi Ω chekli to'plam bo'lsin. Bu to'plamning elementlari (elementar hodisalar) $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bo'lsin.

Agar birorta A hodisa teng ehtimolli k ta elementar hodisalarning yig'indisi ko'rinishida ifoda qilinsa, u holda

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu formulani quyidagicha o'qish mumkin:

A hodisaning yuz berish ehtimoli uning yuz berishiga qulaylik to'g'iruvchi elementar natijalar sonining barcha elementar natijalar soniga nisbatiga teng.

Bu formula yordamida ehtimolni hisoblash klassik usul deyiladi.

1-Misol. O'yin soqqasi ikki marta tashlandi. Ikkala tashlanganda ham tushgan ochkolar yig'indisi 10 ga teng bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Birinchi tashlanganda i ochkoning, ikkala marta tashlanganda j ochkoning tushishini A_{ij} orqali belgilaymiz. U holda

$$A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{16}$$

$$A_{21} \ A_{22} \ \dots \ A_{26}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{61} \ A_{62} \ \dots \ A_{66}$$

ko'rinishdagi 36 ta hodisani o'yin soqqasini 2 marta tashlashdan iborat tajribaning elementar natijalari sifatida qarash mumkin.

Tajribaning har bir o'tkazilishida bu hodisalarning (A_{ij}) biri va faqat biri yuz beradi va ular teng huquqli. A hodisaning yuz berishiga A_{46}, A_{55}, A_{64} natijalar qulaylik tug'diradi, demak $k=3$. Bundan esa

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Bunga ko'ra, agar o'yin soqqasini ikki marta tashlash tajribasi ko'p marta takrorlansa A hodisaning yuz berish chastotasi $\frac{1}{12}$ songa yaqin bo'ladi, ya'ni 12 ta tajribadan bittasida A hodisa yuz beradi.

Endi quyidagi masalani qaraymiz:

2-misol. O'yin soqqasi ikki marta tashlangan. Ikkala tashlanganda ham tushgan ochkolar yig'indisi juft son, shu bilan birga ikkinchi tashlangan soqqada har doim 6 ochko tushishi ehtimolini toping.

Yechish. Xuddi yuqoridagidek tajribaning mumkin bo'lgan elementar natijalarining jami son 36 ga teng. A hodisaga (hech bo'lmaganda bitta yoqda 6 ochko chiqadi, tushgan ochkolar yig'indisi juft son) qulaylik to'g'iruvchi natijalar quyidagi beshta natija bo'ladi (birinchi o'rinda

birinchi tashlashdagi ochko, ikkinchi o'rinda ikkinchi tashlashdagi ochko, so'ngra ular yig'indisi yozilgan)

1) 2, 6; $6+2=8$, 2) 4, 6; $4+6=10$,

3) 6, 6; $6+6=12$, 4) 6, 2; $2+6=8$, 5) 6, 4; $6+4=10$

Izlanayotgan ehtimol hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar sonining barcha mumkin bo'lgan elementar natijalar soniga nisbatiga teng

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Aksiomatik metodning ahamiyati nima?
2. Elementar hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
3. A va V hodisaning yig'indisi, ko'paytmasi va qarama-qarshi hodisa tushunchalarining nazariy to'plam ma'nolari qanday tavsiflanadi?
4. Elementar hodisalar fazosi deb nimaga aytiladi va bunda qanday (I, II, III) shartlar bajariladi?
5. Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi?
6. A.N.Kolmogorov aksiomalarini ta'riflang.
7. $P(A)+P(\bar{A})=1$, $P(A)\leq 1$, $P(A+B)=P(A)+P(B)=P(AB)$ munosabatlarni isbotlang.
8. Ehtimoliy model nima?
9. Ehtimolni hisoblashning klassik usuli qanday formula bilan tavsiflanadi?
10. 20 ta kitob javonga tavakkaliga taxlandi. 20 ta kitobdan aniq 4 tasining yonma-yon turishi (A hodisa) ehtimoli nimaga teng?
11. Lotereyada 50 ta bilet o'ynaldi. 5 ta biletga yutuq chiqadi. Kimdir uchta bilet sotib oladi; bu biletlardan hech bo'lmaganda bittasiga yutuq chiqish ehtimoli nimaga teng?

3-MA'RUZA

Mavzu: *Shartli ehtimol. Erkli hodisalar va ko'paytirish qoidasi*

Reja:

1. *Shartli ehtimol tushunchasi.*
2. *Erkli hodisalar. Ehtimollarni ko'paytirish qoidasi.*

Tayanch iboralar: *Sababli bog'lanish, qandaydir bog'lanish, hodisalarning birining yuz berishi ikkinchisining imkoniyatlarini oshirishi, shartli ehtimol, bir-biriga bog'liq bo'lmagan hodisalar (Erkli hodisalar), ehtimollarni ko'paytirish qoidasi, to'la ehtimol.*

Shartli ehtimol tushunchasi

Agar ikkita A va V hodisalar birgalikda qaralayotgan bo'lsa, ulardan birining yuz berishi ikkinchisining yuz berishiga qanday ta'sir qilishini bilish katta ahamiyatga ega. Hodisalar orasidagi bunday bog'lanishlarning yeng soddasi sababli bog'lanishlardir. Bunda A hodisaning yuz berishi V hodisaning yuz berishiga va aksincha A hodisaning yuz bermasligi V hodisaning ham yuz bermasligiga olib keladi.

Misol. A hodisa biror korxona mahsulotlaridan tasodifan olingani yaroqsiz emasligidan iborat, B hodisa esa shu mahsulotning birinchi sortli bo'lishidan iborat bo'lsin. Bunda B hodisaning yuz berishi A hodisaning yuz berishiga olib keladi va aksincha $\bar{A}$ hodisa V hodisaning yuz berishini inkor qiladi. Lekin amalda hodisalar orasida sababli bog'lanishlar bo'lmasdan balki qandaydir bog'lanish bor bo'lishi mumkin.

Misol. O'yin soqqasi tashlanganda juft ochkoning tushishi A hodisa, 3 dan ko'p ochkoning tushish V hodisa bo'lsin. Bu yerda sababli bog'lanish yo'q. Lekin qandaydir bog'lanish bor. Haqiqatdan ham, B hodisaning keltirilgan uchta hollardan (4, 5, 6 ochkolarning tushishi) ikkitasi (4 va 6 tushishi) A hodisaning yuz berishiga imkoniyat yaratadi. Shuning uchun, agar B hodisani yuz berdi deb hisoblasak A hodisaning yuz berish imkoniyati $\frac{2}{3}$ bo'ladi. Ammo soqqani tashlashning natijasi haqida qo'shimcha axborot bo'lmagan holda A hodisaning yuz berish imkoniyati $\frac{3}{6}$ nisbat bilan baholanadi. $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$ bo'lganligi uchun B hodisaning yuz berishi A hodisaning imkoniyatini oshirishi ko'rinib turibdi.

Ta'rif. A va B lar qandaydir σ tajribaga nisbatan tasodifiy hodisalar bo'lib, $P(B) > 0$ bo'lsin.

$$\frac{P(AB)}{P(B)}$$

son B hodisa yuz berish sharti ostida A hodisaning ehtimoli yoki A hodisaning shartli ehtimoli deyiladi.

B hodisa sharti bilan A hodisaning ehtimoli $P(A/B)$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu tenglikdan

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (2)$$

kelib chiqadi. Bu tenglik ikkita hodisa ko'paytmasining ehtimoli ulardan birining ikkinchisi sharti ostidagi ehtimoli bilan ana shu shart ehtimoli ko'paytmasiga tengligini bildiradi.

Agar $P(A) \neq 0$ bo'lsa, u holda (2) tenglik bilan birga

$$P(BA) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (3)$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi. (2) va (3) lardan:

$$P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A) \quad (4)$$

Misollar.

1. O'yin soqqasining hamma tomonlariga yaltiroq bo'lmagan qog'oz yopishtirilgan. 1, 2, 3 yoqlarga qizil rangli, 4, 5, 6 yoqlariga yesa qora rangli qog'ozlar yopishtirilgan. Soqqani tashlaganda qora rangli yoq tushdi. Shu soqqada juft son bo'lish ehtimoli qanday?

Yechish. Biz $P(A/B)$ shartli ehtimolni topishimiz kerak. Bunda A juft sondagi ochkoning tushishidan, V hodisa esa 3 dan katta sondagi ochkoning tushishidan iborat. Bu yerda $P(AB) = \frac{2}{6}$ $P(B) = \frac{3}{6}$. Demak,

$$P(A/B) = \frac{2}{6} : \frac{3}{6} = \frac{2}{3} \quad (P(A) = \frac{1}{2} \text{ bo'lishini ko'rish mumkin}).$$

Erkli hodisalar va ko'paytirish qoidasi

Yuqorida $P(A)$ va $P(A/B)$ sonlar umumiy holda har xil bo'lishini bildik. Agar $P(A/B) = P(A)$ tenglik o'rinli bo'lsa, A hodisa V hodisaga bog'liq emas deyiladi. Shunday qilib, V hodisaning yuz berishi A hodisaning yuz berishiga hech qanday te'sir qilmasa, A hodisa B hodisaga nisbatan erkli deyiladi.

Agar A hodisa V hodisaga bog'liq bo'lmasa (A hodisa B hodisaga nisbatan yerkli bo'lsa), u holda

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (5)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni ko‘paytmaning ehtimoli ehtimollar ko‘paytmasiga teng. Bu ehtimollarni ko‘paytirish qoidasi deyiladi. Oxirgi (5) tenglikda

$$P(BA)=P(B)P(A) \quad (5')$$

tenglikning to‘g‘riligi kelib chiqadi. Chunki BA hodisa AB hodisa bilan bir xil. Demak, A hodisa B hodisaga bog‘liq bo‘lmasa, B hodisa ham A hodisaga bog‘liq bo‘lmaydi. Ular erkli hodisalar bo‘ladi.

Misol. Ikkita o‘yin soqqasi tashlandi. birinchi soqqada juft ochkoning tushishi A hodisa, ikkinchisida toq ochkoning tushishi B hodisa bo‘lsin. Ular erkli hodisalar ekanligi ravshan. Buni hisoblash yordamida tekshiramiz.

O‘yin soqqasini ikki marta tashlashdan iborat tajriba 36 ta teng ehtimolli natijalarga ega ($A_{11}, A_{12}, \dots, A_{66}$) bo‘lib, ulardan A, B va AB hodisalarning yuz berishiga mos ravishda 18, 18 va 9 tasi imkon yaratadi. Bundan:

$$P(AB)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}, \quad P(A)=\frac{18}{36}, \quad P(B)=\frac{18}{36} \quad P(A) \cdot P(B)=\frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36}=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Demak, (5) tenglik bajariladi, ya’ni A va B hodisalar erkli. Umuman olganda erkli hodisalar uchun:

$$P(ABS)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(S)$$

formula o‘rinli.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar:

1. Birgalikda bo‘lmagan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi? Misollar keltiring.
2. Birgalikda bo‘lgan hodisalar deb qanday hodisalarga aytiladi? Misollar keltiring.
3. Shartli ehtimol tushunchasini bering.
4. Ikkita erkli hodisaning ro‘y berish ehtimoli nimaga teng (ko‘paytirish aksiomasi)?
5. Ikkita mergan nishonga qarata o‘q uzmoqda. Bitta o‘q uzishda nishonga tekizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga teng. Bir yo‘la o‘q uzishda merganlarnng faqat bittasining nishonga tekizish ehtimolini toping.
6. Ikkita birgalikda bo‘lmagan A_1 va A_2 hodisalarning har birining ro‘y berish ehtimoli mos ravishda P_1 va P_2 ga teng, ro‘y bermaslik ehtimollari q_1 va q_2 ga teng. Bu hodisalardan faqat bittasining ro‘y berish ehtimolini toping.
7. O‘yin soqqasi 4 marta tashlandi. Har bir safar 1 raqami tushish ehtimolini toping.

4-MA'RUZA

Mavzu: Gipotezalar. To'la ehtimol formulasi. Gipotezalar ehtimoli. Bayes formulasi

Reja:

1. Gipotezalar tushunchasi.
2. To'la ehtimol formulasi.
3. Gipotezalar ehtimoli. Bayes formulasi.

Tayanch iboralar: Gipoteza (faraz, taxmin), ehtimol, to'la ehtimol, birgalikda bo'lmagan hodisalar, qo'shish qoidasi, gipotezaning ehtimoli.

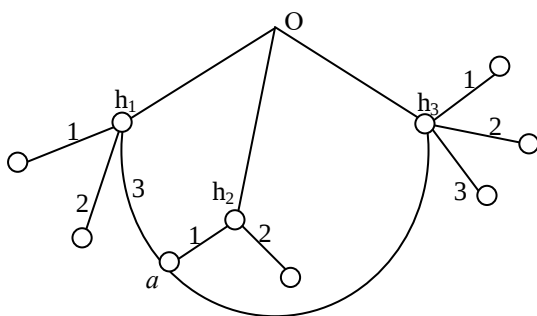
Darsning jihozi: Doska, bo'r, ko'rgazmali qurollar.

Darsning borishi: Ehtimollar nazariyasida muhim bo'lgan to'la ehtimol va Bayes formulalari keng ko'lamda masalalarni hal qilishda katta rol o'ynaydi. Bunda gipotezadan foydalanish ehtimollarni topishga yordam beradi.

Fan uchun gipotezaning ahamiyati katta, u obekt qonunlarini topishga qaratilgan fikrga ma'lum yo'nalish beradi.

Biror A tasodifiy hodisaning ehtimolini topishda ba'zi hodisalarni izohlab bergani uchun gipoteza to'g'ri deb hisoblanadi.

Misol. Biror O punktdan chiqqan turist yo'lining ajraladigan joyiga kelgach, tavakkaliga mumkin bo'lgan yo'llardan birini tanlaydi. Yo'llarning sxemasi rasmda tasvirlangan. Turistning a punktga tushish ehtimoli qanday?



Yechilishi.

Rasmdan ko'rinib turganidek, turistning yo'l oraliqlari h_1 , h_2 , h_3 punktlarning biridan albatta o'tadi. Aytaylik, H_i turist o'z harakati davomida h_i punktga tushishdan iborat hodisa bo'lsin. Shartga ko'ra H_1 ,

H_2, H_3 hodisalar birgalikda emas hamda ular teng ehtimolli hodisalar, chunki yo'l O nuqtadan tavakkaliga tanlanadi. Shuning uchun,

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

Agar turistning a punktga kelishidan iborat hodisani A orqali belgilasak, u holda $P(A/N_1)=\frac{1}{2}$, $P(A/N_2)=\frac{1}{3}$, $P(A/N_3)=\frac{1}{4}$ ga ega bo'lamiz. Demak,

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$$

To'la ehtimolga oid masalalarni ikki etapda o'tayapti deb qarash mumkin. $H_1, H_2, \dots H_n$ gipotezalar birinchi etapga oid hodisalar, A hodisa esa ikkinchi etapning bajarilishi mumkin bo'lgan natijalardan biri bo'ladi.

To'la ehtimol formulasi

Faraz qilaylik A tasodifiy hodisa bir nechta juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalarning biri bilangina yuz bersin.

Bu hodisalarni A hodisaga nisbatan gipotezalar deb ataladi.

Ushbu

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+\dots+P(H_n)P(A/H_n) \quad (1)$$

formula o'rinli. Bu formula to'la ehtimol formulasi deyiladi va u ehtimollarni hisoblashda muhim ahamiyatga ega.

U formula quyidagicha o'qiladi: A hodisaning ehtimoli shu hodisa gipotezalaridan har biriga nisbatan shartli ehtimoli bilan gipotezalar ehtimollari ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Shartga ko'ra A hodisa $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalarning biri bilangina yuz beradi, demak, $A=AN_1+AN_2+\dots+AN_n$ bo'ladi. Biroq, $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagani uchun $AN_1+AN_2+\dots+AN_n$ ham birgalikda emas. Shuning uchun, qo'shish qoidasini tadbiq qilib:

$$P(A)=P(AN_1)+P(AN_2)+\dots+P(AN_n)$$

ni topamiz. Bu tenglikning o'ng tomonidagi har bir $P(H_i)$ qo'shiluvchini $P(A/H_i)P(H_i)$ ko'paytma bilan almashtirib talab etilgan (1) formula hosil qilamiz.

Bayes formulasi

Faraz qilaylik, biror tajriba o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa yuz bergan bo'lsin. Bu fakt juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalarning biri bilan birgalikda sodir bo'lgan deb hisoblanadi. Lekin o'tkazilgan tajribada $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalardan qaysi biri yuz berganligini bilib bo'lmaydi. Biroq, quyidagi masalani qo'yish mumkin: A hodisa yuz berdi deb faraz qilib, gipotezalardan har birining

$$P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$$

ehtimollarini toping.

Bayes formulasi ana shu masalani hal qiladi.

Bizga ma'lumki:

$$P(AN_i)=P(A/N_i)P(N_i)$$

$$P(N_iA)=P(N_i/A)P(A)$$

tenglik o'rinli. Bu tenglamalarning o'ng tomonlarini tenglashtirib

$$P(A/N_i)P(A/N_i)=P(N_i/A)P(A)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$P(N_i/A)=\frac{P(A/N_i)P(H_i)}{P(A)}$$

tenglik hosil bo'ladi. Bundan esa

$$P(A)=P(A/N_1)P(A/N_1)+\dots+P(A/N_n)P(N_n)$$

Bu Bayes formulasidir.

Misol. Uchta bir xil ko'rinishda bo'lgan yashik bor. Birinchi yashikda 20 ta oq sharlar, ikkinchisida 10 oq va 10 qora sharlar, uchinchisida esa 20 ta qora sharlar joylashtirilgan. Tavakkaliga yashikdan biri tanlandi va undan olingan shar oq rangli bo'lib chiqdi. Olingan sharning birinchi yashikdan chiqqanligi ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi yashikning tanlanishi H_1 gipoteza, ikkinchi yashikning tanlanishi N_2 gipoteza, uchinchi yashikning tanlanishi N_3 gipoteza. A esa oq sharning chiqishi.

Ixtiyoriy yashikning tanlanishi teng huquqli. Shuning uchun

$$P(N_1)=P(N_2)=P(N_3)=\frac{1}{3}.$$

Birinchi yashikdan oq sharning olinishi ehtimoli $P(A/N_1)=1$, ikkinchi yashikdan oq sharning olinish ehtimoli $P(A/N_2)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, uchinchi yashikdan oq sharning olinish ehtimoli $P(A/N_3)=0$.

Birinchi yashikdan oq shar olinish ehtimoli Bayes formulasiga ko'ra topiladi:

$$P(N_1/A)=\frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar:

1. Gipoteza deganda nimani tushunasiz?
2. Gipotezalardan biri ro'y berganda ro'y berishi mumkin bo'lgan A hodisaning ehtimoli deganda nimani tushunasiz?

3. To'la ehtimol formulasining ko'rinishi qanday bo'ladi?
4. Agar A hodisa ro'y bergan bo'lsa, u holda gipotezalarning ehtimoli qanday topiladi?
5. Bayes formulalarining ko'rinishi qanday bo'ladi?
6. Piramidada beshta miltiq bo'lib, ularning uchasi optik nishon bilan ta'minlangan. Merganning optik nishonli miltiqdan o'q uzganda nishonga tekizish ehtimoli 0,95 ga teng; optik nishon o'rnatilmagan miltiq uchun bu ehtimol 0,7 ga teng. Agar mergan tavakkaliga olingan miltiqdan o'q uzsa, o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.
7. Zavodda mahsulotning 25% ini birinchi mashina, 35% ini ikkinchi mashina, qolgan qismini uchinchi mashina ishlab chiqaradi. Birinchi mashina ishlab chiqargan hamma mahsulotlaridan 3%i, ikkinchi mashina uchun 2%i, uchinchi mashina uchun esa 1% yaroqsiz bo'ladi. Tavakkaliga tanlangan mahsulot birligi yaroqsiz bo'lib chiqdi. Uning ikkinchi mashinada ishlab chiqarilgan bo'lish ehtimolini toping.
8. Ikkita zavod bir xil mahsulotlar ishlab chiqaradi, bu mahsulotlar keyin umumiy konveyerga o'tadi. Birinchi zavodning unumdorligi ikkinchi zavoddan 2 marta ko'p. Birinchi zavod o'rta hisobda mahsulotning 65% ini, ikkinchi zavod esa 80% ini a'lo sifat bilan ishlab chiqdi. Bu mahsulotni birinchi zavod ishlab chiqarganligi ehtimolini toping.

5-MA'RUZA

Mavzu: Tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalar

Reja:

1. *Tasodifiy miqdor tushunchasi.*
2. *Diskret tasodifiy miqdorlar va diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni.*
3. *Binomial taqsimot.*
4. *Diskret tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati (matematik kutilma).*
5. *Dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.*

Tayanch iboralar: *Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, taqsimot qonuni, Bernulli formulasi, binomial ehtimollar, binomial taqsimot qonuni, matematik kutilish (o'rtacha qiymat), dispersiya, o'rtacha kvadratik chetlanish.*

Tasodifiy miqdor tushunchasi

Bizga ma'lumki ehtimollar nazariyasida qaralgan tasodifiy hodisalar qandaydir son bilan xarakterlanadi, ya'ni tajribaning natijasi biror X son orqali xarakterlanadi. Shu bilan birga tajriba natijasining tasodifiyligi X sonning ham tasodifiyligini ta'minlaydi.

1-ta'rif. Sinov natijasida aynan qaysi birini qabul qilishi oldindan noma'lum u yoki bu qiymatni qabul qiluvchi miqdor tasodifiy miqdor deyiladi.

Har bir X tasodifiy miqdorga sonlarning biror to'plami mos keladi.

Masalan, o'yin soqqasi tashlandi. Tushgan ochkolar soni X tasodifiy miqdor bo'lib u qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlardan iborat. Yana bir misolni qaraymiz: Biror davr ishlatilgandan keyin silindrning yemirilish miqdori o'lchangan. Bu miqdor silindr diametrining kattalashish qiymati bilan aniqlanadi. Uni X bilan belgilaymiz. Bu yerda X ning qabul qiladigan qiymatlari to'plami biror (a, v) intervalni tashkil etadi. Tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari bilan shu qiymatlarning ehtimollari orasidagi bog'lanishni ko'rsatuvchi har qanday qoida uning taqsimot qonuni deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorlar

Diskret tasodifiy miqdorlar deb ataluvchi miqdorlar o'rganish uchun eng qulay bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $x_1, x_2, \dots$ sonlarning chekli yoki sanoqli to'plami berilgan bo'lib, har bir x_i ga biror musbat P_i son mos keltirilgan va shu bilan birga barcha P_i larning yig'indisi 1 ga teng bo'lsa, X diskret tasodifiy miqdor berilgan deyiladi. $x_1, x_2, \dots$ sonlar X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, $P_1, P_2 \dots$ sonlar esa shu qiymatlarning ehtimollari deb ataladi.

X diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot qonuni ushbu

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$

jadval orqali beriladi.

1-misol. O'zgaruvchi X miqdor soqqani bir marta tashlaganda uning yuqori yog'ida paydo bo'ladigan ochkolar soni. X tasodifiy miqdor 1, 2, 3, 4, 5, 6 qiymatlardan bittasini qabul qilishi mumkin va ularning har birining paydo bo'lish ehtimoli $1/6$ ga teng. Demak, bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi jadvaldan iborat:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-misol. Nishonga birinchi tekkuncha otish bajarildi. Har bir otishda o'qning tegish ehtimoli r ga teng. Tasodifiy miqdor X – o'q birinchi tekkuncha otish nomeri. Bu tasodifiy miqdorning taqsimotining jadvali tuzilsin.

Yechish. Ravshanki X faqat ikkitagina 1 va 0 qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Bu qiymatlarning ehtimollari mos ravishda p va $1-p=q$ bo'ladi. $p+q=1$. Jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

X	1	0
p	p	$p-1$

Binomial taqsimot

Har birida biror A hodisa bir xil r ehtimol bilan yuz beradigan n ta erkli tajriba o'tkazilgan bo'lsin. Berilgan k son uchun n ta tajribada A hodisaning rosa k marta yuz berishidan iborat bo'lgan A_{nk} hodisaning ehtimolini topish talab qilinadi. A hodisaning har bir yuz berishini muvaffaqiyat, A ning yuz bermasligini muvaffaqiyatsizlik deb qaraymiz.

Bizning maqsadimiz n ta tajribaning rosa k tasi muvaffaqiyatli bo'lish ehtimolini topishdir.

$A_{n,k}$ hodisa bir qancha elementar hodisalarning - $A_{n,k}$ hodisa variantlarining yig'indisidan iborat. Ma'lum bir variantni tayinlash uchun muvaffaqiyatli bo'lib tugaydigan tajribalarning nomerlarini ko'rsatish kerak. Masalan, mumkin bo'lgan variantlardan biri

$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k \text{ ta}}, \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdots \bar{A}}_{n-k \text{ ta}}$$

bo'ladi.

Umuman har bir variant uzunligi n ga teng bo'lgan kortej ko'rinishida yoziladi. Bu kortejning k ta komponentasi A qolgan $n-k$ ta komponentasi esa $\bar{A}$ dan iborat. Hamma variantlarning soni S_n^k ga teng bo'lib, tajribalar erkli bo'lgani uchun variantlardan har birining ehtimoli $p^k q^{n-k}$ ga teng. $A_{n,k}$ hodisaning ehtimolini $P_{n,k}$ bilan belgilasak

$$P_{n,k} = S_n^k p^k q^{n-k}$$

ga ega bo'lamiz ($1-p=q$).

Bu formula Bernulli formulasi, $P_{n,k}$ esa binomial ehtimollar deyiladi.

A hodisaning yuz berish sonidan iborat X tasodifiy miqdorga mos jadval

X	0	1	2		$n-1$	n
$P_{n,k}$	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$		$P_{n,n-1}$	$P_{n,n}$

ko'rinishda bo'ladi. Bu jadval bilan harakatlanadigan taqsimot qonuni binomial taqsimot qonuni deyiladi.

1-misol. Tanga 5 marta tashlandi gerb tomonining tushishi soni X tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5 sonlardan iborat bo'ladi. Bu qiymatlarning ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi. Masalan, $n=5$ marta tashlandi $k=3$ marta gerb tushish ehtimollarini topaylik

$$P(x=3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32}$$

$x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5$ hollar uchun shunday hisoblashlarni bajarsak, taqsimot jadvali quyidagicha bo'ladi:

X	0	1	2	3	4	5
R	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Deskret tasodifiy miqdorlarning o'rta qiymati (matematik kutilma)

Diskret tasodifiy miqdor X o'zining mos taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
$P(x=x_k)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k		p_n

Ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning o'rta qiymati (matematik kutilma) deb shunday $M[x]$ songa aytamizki, u tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari bilan bu qiymatlar ehtimollari ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$M[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \quad (1)$$

bunda, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ bo'ladi.

Agar tasodifiy miqdorning qiymatlari cheksiz ketma-ketlikni tashkil qilsa,

$$M[x] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \dots \quad (2)$$

bo'ladi.

1-misol. O'yin soqqasi tashlanganda tushadigan ochkolar sonining matematik kutilmasini toping.

Yechish. X – tasodifiy miqdor o'yin soqqasining yuqori tomonida tushadigan ochkolar soni bo'lib, uning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Demak,

$$M[x] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

2-misol. Obyektga qarata o'q uzildi. O'qning tegish ehtimoli r ga teng. O'qning tegish soni tasodifiy miqdor x ning o'rta qiymatini toping.

Yechish. $M[x] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

x	0	1
p	$1-p$	p

Matematik kutilish quyidagi xossalarga ega.

1^o. O'zgarmas miqdorning matematik kutilmasini uning o'ziga teng.

2^o. $M[cX] = cM[x]$

3^o. $M[x+y] = M[x] + M[y]$

$$4^0. M[x \cdot y] = M[x] \cdot M[y]$$

Tasodifiy miqdorlar dispersiyasi

Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalaridan yana biri dispersiya bo'ladi.

Uni $D[x]$ bilan belgilanadi va u tarqoqlikni bildiradi. Dispersiya tasodifiy miqdorning o'rta qiymatiga nisbatan uning qiymatlari tarqoqligining, sochilganligining sonli xarakteristikasidir.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, tasodifiy miqdor bilan uning o'rta qiymati orasidagi ayirma kvadratining o'rta qiymatiga aytiladi:

$$D[x] = M[(x - m_x)^2] \quad (m_x = M[x])$$

$$\text{yoki} \quad D[x] = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 P_k \quad (1)$$

2-ta'rif. Tasodifiy miqdorning o'rta kvadratik chetlanishi deb uning dispersiyasidan olingan kvadrat ildiziga aytiladi:

$$\sigma[x] = \sqrt{D[x]}$$

$$\text{yoki} \quad \sigma[x] = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 P_k} \quad (2)$$

Eslatma: Hisoblashda (1) va (2) formulalarda quyidagicha o'zgartirish qulay bo'ladi.

$$D[x] = M[x^2] - m_x^2$$

1-misol. Obektga qarata o'q uzilgan. O'qning obektga tegish ehtimoli p . Dispersiyani, o'rtacha kvadratik chetlanishni toping.

Yechish. O'qning tegish sonlarining qiymatlari jadvalini tuzamiz:

x	1	0
p	p	q=1-p

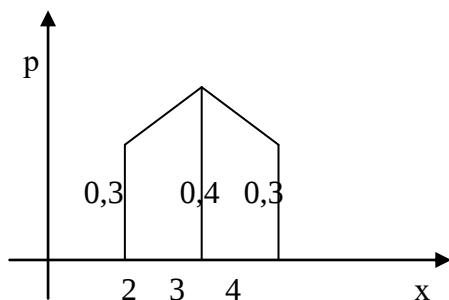
$$\text{Demak, } M[x] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$D[x] = \sum_{k=0}^1 (x_k - m_x)^2 p_k = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 q^2 + q^2 p + p^2 q = pq$$

$$\sigma[x] = \sqrt{pq}$$

2-misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni yoki taqsimot ko'pburchagi bilan berilgan 1) o'rta qiymatni, 2) dispersiyani, 3) o'rta kvadratik chetlanishni aniqlang.

x	2	3	4
r	0,3	0,4	0,3



Yechish. 1. $M[x] = 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 = 3$

2. $D[x] = (2-3)^2 \cdot 0,3 + (3-3)^2 \cdot 0,4 + (4-3)^2 \cdot 0,3 = 0,63$

3. $\sigma[x] = \sqrt{0,63} = 0,77$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Tasodifiy miqdor deb nimaga aytiladi?
2. Taqsimot qonuni nima?
3. Diskret tasodifiy miqdorga ta'rif bering.
4. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni qanday beriladi?
5. Binomial ehtimol qanday formula bilan topiladi?
6. Binomial taqsimot qonuni qanday bo'ladi?
7. Diskret tasodifiy miqdorning o'rta qiymati (matematik kutilishi) deb nimaga aytiladi? Uning qanday xossalari bor?
8. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb nimaga aytiladi?
9. Tasodifiy miqdorning o'rta kvadratik chetlanishi deb nimaga aytiladi?
10. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni (jadvali) bilan berilgan

x	1	2	4	8
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Taqsimot ko'p burchagini yasang.

11. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.
12. Ikkita o'yin soqqasi bir vaqtda ikki marta tashlandi. x diskret tasodifiy miqdor – ikkita o'yin soqqasida juft ochkolar tushish sonining binomial taqsimot qonunini yozing.

13. Quyida taqsimot qonuni bilan berilgan x diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

x	0,21	0,45	0,69
p	0,2	0,5	0,3

14. Agar x va u ning matematik kutilishi ma'lum bo'lsa, $z=3x+4y$, ($M[x]=2$, $M[y]=6$) tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

15. Ushbu

x	-4	1	3	4
p	0,3	0,4	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan x diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasini va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

16. x va u tasodifiy miqdorlar erkli. Agar $D[x]=5$, $D[y]=6$ ekanligi ma'lum bo'lsa, $z=3x+2y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

6-MA'RUZA

Mavzu: Tajribaviy ma'lumotlarni qayta ishlash. Taqsimot qonunlari. Gistogramma

Reja:

1. Matematik statistika masalalari.
2. Statistik materiallar.
3. Statistik qator (yoki empirik qator).
4. Taqsimotning empirik qonuni.
5. Taqsimotning empirik funksiyasi.
6. Gistogramma.

Tayanch iboralar: Statistik metod, belgi, vaklni tanlash, tanlanma, bosh to'plam, statistik material, o'lchash xatolari, matematik ishlov berish, empirik qator, varianta, empirik qonun, variasion qator, chastotalar jadvali, tanlanmaning statistik taqsimoti, taqsimotning empirik funksiyasi, gistogramma.

Matematik statistika masalalari

Iqtisodiyotda, qishloq xo'jaligida, biologiyada, tibbiyotda tasodifiy voqealarni o'rganishda statistik metodlar muhim ahamiyatga ega. Odatda statistik metodga biror belgiga ko'ra predmetlarning (voqealarning, individlarning) juda katta to'plamlarining taqsimotlarini o'rganish talab qilinganda murojaat qilinadi. Masalan, odamlar to'plamining yoshlari bo'yicha taqsimoti, biror turkumdagi hayvonlarning og'irliklari bo'yicha taqsimoti va hokazolar.

Har qanday belgi amaliyotda miqdoriy bahoga ega bo'lganligi uchun narsalarning belgiga ko'ra taqsimoti haqida gapirish o'rniga qandaydir X tasodifiy miqdor haqida gapirish mumkin.

X miqdor bog'langan tajriba muayyan to'plamdan tavakkaliga bitta vakilni tanlashdan iborat bo'lib, X ning qabul qiladigan qiymati belgining shu vakil uchun qabul qiladigan qiymati bo'ladi.

Bunday taqsimotning to'la tavsifini muayyan to'plamning istisnosiz barcha vakili uchun belgining qiymatini aniqlash bilan olish mumkinligi tushunarli. Lekin to'plamning hajmi juda katta bo'lsa, buni qilib bo'lmaydi. Bu holatdan chiqish yo'li butun to'plamni tekshirish o'rniga undan tavakkaliga tanlangan qismi tekshiriladi. Bunday qism odatda tanlanma deyiladi. Butun to'plam esa bosh to'plam deyiladi. Masalan,

Samarqand shahrida yashovchilarning kiyadigan kiyimlarining razmeri bo'yicha taqsimoti haqida gapirilganda bitta uyda yashovchi kishilarga oid ma'lumotlarni olish mumkin.

Statistik material

Ommaviy tasodifiy hodisalarni ro'yxatga olish va kuzatish natijasida statistik material hosil bo'ladi. Xususan, turli o'lchashdagi xatolar statistik material bo'lib xizmat qiladi.

Tajriba natijasida kuzatilgan qiymatlarga asoslanib qaralayotgan miqdorlarning taqsimot qonunlarini aniqlash hamda taqsimot parametrlarining qiymatlarini baholash – matematik statistikaning vazifasi hisoblanadi.

Matematik statistikaning yana bir vazifasi qaralayotgan miqdorlar qatnashadigan jarayonni optimal tashkil qilish uchun kerak bo'lgan aniq xulosalarni hosil qilish maqsadida tajribaviy (statistik) materialni qayta ishlab chiqish hamda analiz qilish usullarini yaratishdan iborat.

Misol. O'lchov asbobi yordami bilan biror obektni ko'p marta o'lchanganda, xususan, biror obektgacha bo'lgan uzoqlikni aniqlash paytida, kuzatilayotgan miqdorning turli qiymatlari hosil bo'ladi.

Shu yo'l bilan tajribada olingan qiymatlarga asoslanib biror natijaga kelishdan avval ularni sistemalashtirishni ya'ni qayta ishlashni talab qiladi.

Kuzatilgan X qiymat bilan kuzatilayotgan α miqdorning haqiqiy qiymati orasidagi δ ayirma, ya'ni $X - \alpha = \delta$ o'lchash xatosi deb aytiladi. O'lchash xatosi aniq xulosalar olish maqsadida matematik ishlov berishni talab qiladi. Masalan, mahsulotni ko'plab (ommaviy) ishlab chiqarishda hosil qilingan mahsulotning biror o'lchamini olingan mahsulotlar uchun oldindan berilgan o'lchamdan chetlanish miqdorini qarash kerak bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash otish paytida o'qning tegish nuqtasi koordinata bilan mo'ljalga olish nuqtasi koordinatasi orasidagi ayirma otish xatosidir.

Shunday qilib matematik statistikada asosan tanlanmani tekshirish natijasiga asoslangan holda to'plam bo'yicha alomatning taqsimoti haqida xulosa chiqarish amalga oshiriladi. Bunda tajribaviy ma'lumotlar qayta ishlanib maqsadga erishiladi.

Statistik qator (empirik qator)

Biror X tasodifiy miqdor o'rganilayotgan bo'lsin. Ana shu maqsadda har birida X miqdor u yoki bu qiymatni qabul qiladigan bir qancha erkli tajribalar o'tkaziladi. X tasodifiy miqdorning hosil qilgan

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlari biz o'tkazayotgan tanlanma bo'ladi. Bu to'plamni ko'p hollarda empirik qator deb ataladi. Empirik qator keyinroq qayta ishlanadigan va analiz qilinadigan dastlabki statistik material bo'ladi. Statistik (empirik) qator ikki satrli (yoki ikki ustunli) jadval ko'rinishida tasvirlanadi. Birinchi satrda tajribalarning raqamlari, ikkinchi satrda esa tasodifiy miqdorning hosil qilgan qiymatlari ko'rsatiladi.

Tajribalar raqami	1	2	3	
X ning qiymatlari	x_1	x_2	x_3	

Taqsimotning empirik qonuni

Empirik qatorga asoslangan holda taqsimotning empirik qonuni tuziladi. Bu qonunning yozilish formasi o'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning xarakteriga bog'liq bo'ladi. Agar X tasodifiy miqdor diskret bo'lsa, bu qonun jadval ko'rinishida yoziladi. Bu jadval u yoki bu qiymatning qanday chastota bilan kuzatilayotganligini ko'rsatadi. Bunday jadvalni tuzish uchun $x_1, x_2, \dots$ sonlar orasidan har xillarining barchasini tanlash zarur. Bu yo'l bilan

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (1)$$

lar hosil qilinadi. Odatda bu sonlarni o'sib borish tartibida ($\alpha_1 < \alpha_2 \dots$) yoziladi va uni variatsion qator deb aytiladi. (1) qator tuzilgandan so'ng α_i sonlarning har biri uchun uning tajribalarning muayyan seriyasidagi takrorlanish chastotasini tuzish mumkin

$$p_i^* = \frac{k_i}{n} \quad (2)$$

bu yerda n – barcha tajribalar soni, k_i esa $x = \alpha_i$ hodisa yuz bergan tajribalar soni. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

α_i	α_1	α_2	...	α_n
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_n^*

Bu jadvalni chasatotalar jadvali (yoki tanlanmaning statistik taqsimoti) deb ataladi.

Kuzatishlar soni n o'sishi bilan chasatotalar jadvali X tasodifiy miqdorining haqiqiy taqsimot qonuniga tobora yaqinlashib borishini kutish mumkin.

Misol. 10 ta tajriba natijalarida X tasodifiy miqdor uchun quyidagi qiymatlar olingan bo'lsin:

Tajriba nomeri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X ning qiymatlari	0,4	0,1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,4	0,3	0,1	0,2

Bunga ko'ra variatsion qator tuzamiz:

0,1; 0,2; 0,3; 0,4

Bularga mos chastotalarni (chastotalar zichligi) topamiz:

$\frac{4}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}$

Natijada quyidagi chastotalar jadvaliga ega bo'lamiz:

X ning qiymatlari (α_i)	0,1	0,2	0,3	0,4
Chastotalar (p_i)	0,4	0,2	0,2	0,2

Taqsimotning empirik funksiyasi

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir x qiymat uchun $X \leq x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Bu yerda n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Empirik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Empirik funksiyaning qiymatlari $[0,1]$ kesmaga tegishli.

2⁰. $F^*(x)$ kamaymaydigan funksiya.

3⁰. Agar x_1 eng kichik varianta, x_2 eng katta varianta bo'lsa, u holda $x_1 \leq x_2$ bo'lganda $F^*(x)=0$, $x_1 > x_2$ bo'lganda $F^*(x)=1$.

Gistogramma

O'lchashlar soni juda katta bo'lganda yuqoridagi chastotalar jadvalini tuzish qiyin, chunki jadvalga joylashtirilgan statistik materiallarni ko'zdan kechirish murakkab bo'lib qoladi. Shuning uchun oddiy statistik qatorda guruhlash (gruppalariga ajratish) bajariladi. Buning uchun $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \dots, \alpha_n$ qatorni (X – ning qiymatlarini) $(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ intervallarga ajratamiz va X miqdorning (α_{k-1}, α_k) intervalga to'g'ri keladigan qiymatlari sonini m_k bilan belgilaymiz. Intervalning uchlariga to'g'ri keladigan sonlarni yo chap yoki o'ng intervalga kiritiladi.

Ushbu

$$\frac{m_k}{n} = \tilde{p}_k$$

son (α_{k-1}, α_k) intervalga mos bo'lgan nisbiy chastota bo'ladi. Bunda $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 + \dots + \tilde{p}_n = 1$

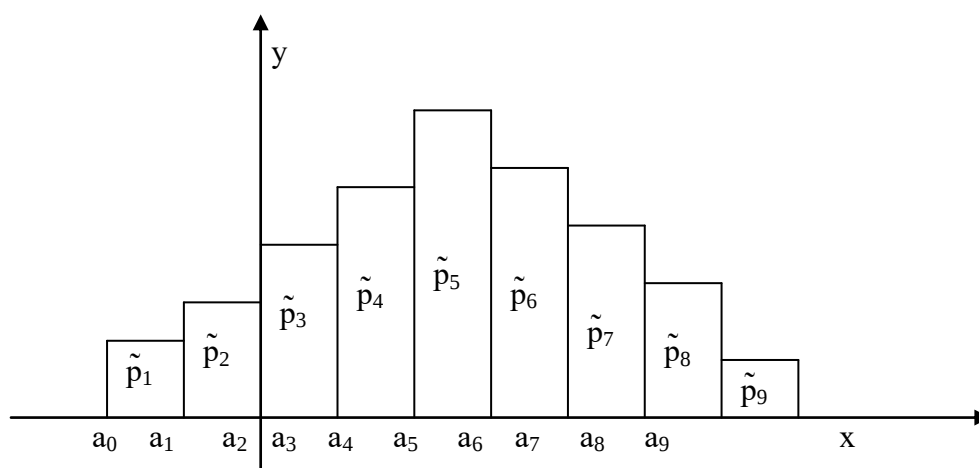
Bu holda empirik qonun quyidagicha jadval ko'rinishida bo'ladi:

intervallar	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)		(a_{k-1}, a_k)		(a_{n-1}, a_n)
m_k	m_1	m_2		m_k		m_n
$\tilde{p}_k$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$		$\tilde{p}_k$		$\tilde{p}_n$

Ana shuning o'zi guruhlashdir (gruppalariga ajratishdir). Kesmalari (x_i, p_i^*) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziq chastotalar poligoni deyiladi.

Kesmalar $(\tilde{x}_i, \tilde{p}_i)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziq nisbiy chastotalar poligoni deyiladi.

Yuqorida aytilgan gruppalariga ajratishni geometrik tasvirlash ham mumkin. Bu quyidagicha bajariladi. Ox o'qida $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$ nuqtalarni belgilaymiz. $[a_{k-1}, a_k]$ kesmani asos qilib yuzi $\tilde{p}_k$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz. Hosil qilingan shakl gistogramma deb ataladi.



Statistik materialning bundan keyingi qayta ishlanishi quyidagicha amalga oshiriladi. (a_{k-1}, a_k) intervallar o'rtalarini $\tilde{x}_i$ bilan belgilanadi hamda bu qiymatni o'lchash natijasining qiymati deb hisoblanadi va u m_k marta takrorlanadi. U holda empirik qonunni ifodalovchi jadval quyidagicha bo'ladi:

$\tilde{x}_k$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$		$\tilde{x}_k$		$\tilde{x}_n$
m_k	m_1	m_2		m_k		m_n
$\tilde{p}_k$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$		$\tilde{p}_k$		$\tilde{p}_n$

Takrorlash uchun savollar va mashqlar

1. Statistik metod nima?
2. Narsalarning belgisiga ko'ra taqsimotini qanday miqdorning taqsimoti deb qarash mumkin?

3. Vakil tanlash nima?
4. Tanlanma deb nimaga aytiladi? Bosh to'plam nima?
5. Statistik material qanday hosil qilinadi?
6. Matematik statistikaning vazifasi nimadan iborat?
7. Sistemalashtirish yoki qayta ishlash nima degani? Matematik ishlov berish-chi?
8. Statistik yoki empirik qator va variantalar nima?
9. Empirik qonun nima?
10. Tajribaning muayyan seriyasida takrorlanish chastotasi qanday topiladi? Chastotalar jadvali qanday tuziladi?
11. Taqsimotning empirik funksiyasi nima? Gistogramma deb nimaga aytiladi?
12. Chastotalar poligoni deb nimaga aytiladi?
13. Nisbiy chastota qanday topiladi va bu holda empirik qonun qanday ko'rinishda bo'ladi?
14. Tanlanma

x_i	4	7	8	12
m_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

15. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping.

x_i	1	5	7
m_i	10	25	35

16. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar poligonini toping.

x_i	2	5	7	8
m_i	10	20	6	14

17. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval nomeri	Qismaniy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	m_i	$k_i/h = p_i^*$
1	3-5	4	
2	5-7	6	
3	7-9	20	
4	9-11	40	
5	11-13	20	
6	13-15	4	
7	15-17	6	

18. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval nomeri	Qiymiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi
i	$x_i - x_{i+1}$	k_i
1	10-15	2
2	15-20	4
3	20-25	8
4	25-30	4
5	30-35	2
		$n = \sum m_i = 20$

7-MA'RUZA

Mavzu: O'lchash xatoliklari. Miqdorlar va tajribalar orqali o'lchanadigan miqdorning to'g'ri keladigan qiymatini aniqlash

Reja:

1. *O'lchash xatoliklari.*
2. *Tasodifiy miqdorning taqsimoti haqida.*
3. *O'lchanadigan miqdorning to'g'ri keladigan qiymatini aniqlash.*

O'lchash xatoliklari haqida

Faraz qilaylik o'lchov asbobi yordami bilan biror obektni ko'p marta o'lchash tajribasi qaralayotgan bo'lsin. Bu tajriba xususan biror obektgacha uzoqlikni aniqlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada kuzatilayotgan miqdorning turli qiymatlari hosil bo'ladi. Bunday qiymatlarni kuzatilayotgan qiymatlar deb ataymiz.

Shu yo'l bilan olingan qiymatlarga asoslanib biror natijaga kelishdan avval ular sistemalashtirishni hamda ishlab chiqishni talab qiladi.

Ta'rif. Kuzatilgan x qiymat bilan kuzatilayotgan a miqdorning haqiqiy qiymati orasidagi δ ayirma, ya'ni:

$$x-a=\delta$$

o'lchash xatosi deb ataladi.

Agar bizni o'lchash asbobi qiladigan xatolikning taqsimoti qiziqтира, u holda o'rganilayotgan to'plam muayyan asbob bilan o'tkazila olinadigan barcha fikrlash mumkin bo'lgan o'lchashlar to'plamidan iborat bo'ladi. Bunday holda to'plamning barcha elementlarini tekshirib chiqish mumkin emas. Bunday holda tanlanma va uning empirik taqsimot qonuniga murojaat qilinadi.

Otish paytida o'qning tegish nuqtasi koordinatasi bilan mo'ljalga olish nuqtasi koordinata orasidagi ayirma otish xatosidir.

Bu misollardan ko'rinadiki qaralayotgan miqdorlar tasodifiy miqdorlar bo'lib, har bir kuzatilgan qiymatni esa tasodifiy miqdorning xususiy qiymati deb qarash kerak.

Masalan, otishda uzunlik bo'yicha qilinadigan xato (tarqoqlik) zaryadning tarmoqlanishdagi xato bilan, snaryadni tayyorlashda og'irlikdagi xato bilan, nishonga olishda xato bilan, metereologik

sharoitning o'zgarishi bilan va hokazolar bilan aniqlanadi. Bularning barchasi esa tasodifiy miqdordir.

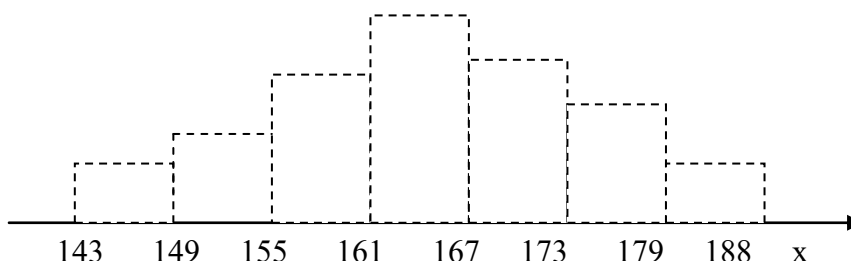
Tasodifiy miqdorning taqsimoti

Chastotalar jadvali yoki gistogrammaga qarab X tasodifiy miqdor taqsimotining haqiqiy xarakteri haqida gipotezalar tuzish mumkin. Bunga misollar qaraymiz.

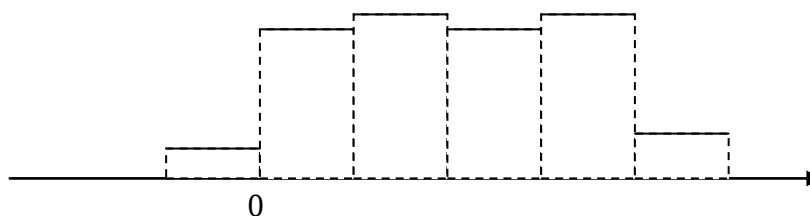
1-misol. 100 ta talabaning bo'ylarini o'lchash natijalarini ifodalovchi jadval tuzilgan bo'lsin:

Intervallar (bo'y razryadlari)	143-149	149-155	155-161	161-167	167-173	173-179	179-188
$\tilde{x}_k$	146	152	158	164	170	176	174
m_k	5	7	18	30	20	16	4
$\tilde{p}_k$	0,02	0,07	0,18	0,30	0,20	0,16	0,04

Bu holda gistogramma quyidagicha bo'ladi:



Bu gistogrammaga ko'ra x miqdorning taqsimoti normal taqsimot deyish mumkin. Quyidagi gistogrammaga qarab x miqdorning $[0, 1]$ kesmadagi taqsimotini normal taqsimot desa bo'ladi.



O'lchanadigan miqdorning to'g'ri keladigan qiymatini aniqlash

Biror miqdorni o'lchash paytida $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'lchash natijalari hosil qilingan bo'lsin. Bu qiymatlarni tasodifiy miqdor X ning xususiy qiymatlari deb qarash mumkin. Aniqlanadigan miqdorning mos keladigan qiymati uchun hosil qilingan qiymatlarning o'rta arifmetigi qabul qilinadi:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

m_x^* - empirik o'rta yoki statik o'rta deb ataladi.

Agar o'lchashlar soni n katta bo'lsa, u holda oldingi punktdan qaralgan empirik qonun jadval materiallaridan foydalaniladi va m_x^* uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$m_x^* = \frac{\tilde{x}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{m}_2 + \dots + \tilde{x}_n \tilde{m}_n}{n} = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k P_k^* \quad (2)$$

Bu qiymat vaznlari hisobga olingan qiymat deb ataladi.

Kuzatilayotgan miqdor qiymatlarining tarqoqligini xarakterlovchi

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2}{n} \quad (3)$$

miqdor empirik dispersiya yoki statistik dispersiya deb ataladi.

Agar empirik taqsimot jadvalidan foydalanilsa bu formula quyidagicha yoziladi.

$$D^* = \sum_{k=1}^n (\tilde{x}_k - m_x^*)^2 p_k^*$$

Misol. Yuqorida ko'rilgan 100 ta talabaning bo'ylarini o'lchashda hosil qilingan jadvalga asoslanib empirik o'rta va empirik dispersiyani aniqlang.

Yechish.

$$\begin{aligned} m_x^* &= \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i p_i^* = 146 \cdot 0,02 + 152 \cdot 0,07 + 158 \cdot 0,18 + \\ &+ 164 \cdot 0,30 + 170 \cdot 0,20 + 176 \cdot 0,16 + 174 \cdot 0,04 = 160,32 \\ D^* &= \sum_{k=1}^n (\tilde{x}_k - m_x^*)^2 p_k^* = 146^2 \cdot 0,02 + 152^2 \cdot 0,07 + 158^2 \cdot 0,18 + \\ &+ 164^2 \cdot 0,30 + 170^2 \cdot 0,20 + 176^2 \cdot 0,16 + 174^2 \cdot 0,04 = 41449,12 \end{aligned}$$

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. Kuzatilayotgan qiymatlar deb nimaga aytiladi?
2. Qanday xatolar tasodifiy miqdorlar bo'ladi?
3. Tasodifiy miqdorlarning haqiqiy xarakterini nimalarga asoslanib aniqlanadi?
4. O'lchanadigan miqdorning to'g'ri keladigan qiymati qanday aniqlanadi? Empirik yoki statistik o'rta deb nimaga aytiladi?
5. O'lchanadigan miqdorning vaznlari hisobga olingan qiymati qanday topiladi?
6. Empirik yoki statistik dispersiya deb nimaga aytiladi?
7. 1000 ta talabaning og'irliklarini o'lchash natijalarini ifodalovchi jadval berilgan:

Intervallar	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-80	80-90
$\tilde{x}_k$							
m_k	50	100	200	300	260	50	40
$\tilde{p}_k$							

Jadvalning bo'sh joylrini to'ldiring. Statistik o'rta va statistik dispersiyani aniqlang.

8-MA'RUZA

Mavzu: Bevosita o'lchash natijasida hosil bo'ladigan miqdorlar xatoliklarini baholash. Taqsimot parametrlarining statistik baholari

Reja:

1. *Bevosita o'lchash natijasida hosil bo'ladigan miqdorlar xatoliklarini baholash.*
2. *Taqsimot qonuni parametrlarini aniqlash va ularni baholash.*
3. *Parametrlarni aniqlashga qo'yiladigan talablar.*
4. *Matematik kutilish va dispersiya uchun baholar.*

Tayanch iboralar: O'lchanayotgan miqdor, o'lchash natijasi, sistematik xato, normal taqsimot qonuni, chetlanish, taqsimot parametrlari, nuqtaviy baho, siljimagan baho, siljigan baho, asosli baho yoki o'rtacha qiymatning siljimagan bahosi, dispersiyaning siljimagan va siljigan bahosi.

Bevosita o'lchash natijasida hosil bo'ladigan miqdorlar xatolarini baholash

Faraz qilaylik a o'lchanayotgan miqdor, x o'lchash natijasi – tasodifiy miqdor, δ esa o'lchash xatosi bo'lsin. U holda bu miqdorlar

$$\delta = x - a \quad x = a + \delta$$

munosabatlar bilan bog'langan bo'ladi.

Ko'p sondagi tajriba va kuzatishlarning ko'rsatishicha, o'lchash xatolari, sistematik xatoni, ya'ni hamma o'lchashlarda o'zgarmaydigan xatolarni (masalan, asbob xatosi) yoki o'lchashdan o'lchashgacha ma'lum qonun bo'yicha o'zgaradigan xatolarni chiqarib yuborgandan keyin hamda qo'pol xatolarni chiqarib tashlagandan keyin, taqsimot markazi koordinatalar boshida bo'lgan normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Bu nazariy asoslar bilan ham tasdiqlanadi.

Agar tasodifiy miqdor katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda ba'zi bir sharoitlarda bu yig'indi normal taqsimot qonuniga bo'ysunadi, ya'ni A.M.Lyapunov (1857-1918) teoremasi o'rinli bo'ladi.

Teorema. Agar bog'liq bo'lmagan tasodifiy $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ miqdorlar o'rta qiymati a (umumiyligni buzmasdan $a=0$ deb faraz qilish mumkin) va

dispersiya σ^2 bo'lgan bir xil taqsimot qonuniga ega bo'lsa, u holda n chegarasiz o'sib borganda

yig'indining taqsimot qonuni normal taqsimotdan har qancha kichik farq qiladi.

$$\bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i}{\sigma\sqrt{n}}$$

Bunda $M[\bar{y}_n]=0$ $D[\bar{y}_n]=1$ bo'ladi. Bu teoremaning ahamiyati quyidagidan iborat: X tasodifiy miqdor sifatida biror miqdorning berilgan miqdordan chetlanishi bo'lsin. Bu chetlanish ko'p faktorlarning ta'siri natijasida kelib chiqqan bo'lib, ularning har biri biror tashkil qiluvchi chetlanishni beradi. Masalan, otish xatosi (chetlanishi) ko'p faktorlarga bog'liq bo'lishini bilamiz. Lyapunov teoremasidan X tasodifiy miqdorning umumiy chetlanishining – normal qonunga bo'ysunishi kelib chiqadi.

Lyapunov teoremasidan agar $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ lar biror miqdorni o'lchash natijalari bo'lsa (har bir $\bar{x}_i$ tasodifiy miqdor) va tasodifiy x_i miqdorlar bir xil taqsimot qonuniga bo'ysunsa, u holda tasodifiy miqdor o'rta arifmetik qiymatining n yetarli katta bo'lganda normal qonunga har qancha yaqin bo'lgan taqsimot qonuniga bo'ysunishi kelib chiqadi.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}$$

Tajribaning ko'rsatishicha qo'shiluvchilar soni 10 tartibda bo'lgandayoq ularning yig'indisi normal taqsimotga bo'ysunadi deb hisoblanadi.

Taqsimot parametrlarini aniqlash va ularni baholash

Agar tasodifiy miqdor taqsimotining qonuni normal qonun ekanligi oldindan ma'lum bo'lsa, u holda masala ikkita a va σ parametrlarning qiymatlarini topishga keltiriladi. Hatto ba'zi masalalarda taqsimot qonunining ko'rinishi ham ahamiyatga ega bo'lmasdan, faqat uning sonli xarakteristikalarinigina topish talab qilinadi.

Shunday qilib, tasodifiy miqdorning taqsimot qonunida qandaydir θ parametr bor bo'lsin. Uning qiymati ko'rsatilmagan. Quyidagi masala qaraladi: n ta erkli tajriba natijasida X miqdor uchun olingan

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlar to'plamidan kelib chiqib θ parametrning qiymatini baholang. θ uchun bahoni $\hat{\theta}$ deb belgilaymiz va u ham tasodifiy miqdor

bo'ladi. Uning taqsimot qonuni X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniga va tajribalar soni n ga bog'liq bo'ladi va unga qator talablar qo'yiladi.

1. θ noma'lum parametrni bittagina $\tilde{\theta}$ son bilan baholansa u nuqtaviy baho deyiladi.

2. θ ning o'rniga $\tilde{\theta}$ miqdordan foydalanganda bizning kamaytirish tomoniga ham orttirish tomoniga ham xato qilmasligimiz maqsadga muvofiqdir, ya'ni

$$M[\tilde{\theta}] = \theta$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Tanlanmaning hajmi istalgancha bo'lganda ham matematik kutilish baholanayotgan parametr ga teng bo'lgan bunday nuqtaviy bahoga siljimagan baho deyiladi.

3. Matematik kutilishi baholanayotgan parametr ga teng bo'lmagan nuqtaviy bahoni siljigan baho deyiladi.

4. Tajribalar soni n ning o'sishi bilan $\tilde{\theta}$ tasodifiy miqdorning qiymatlari θ ning atrofida tobora jipslasha borgani maqsadga muvofiqdir, ya'ni

$$D[\tilde{\theta}] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty \text{ da})$$

munosabat bajarilsin. Bunday xossaga ega bo'lgan baho asosli baho deyiladi.

Matematik kutilma va dispersiya uchun baholar

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad M[m_x^*] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{1}{n} \cdot nM[x] = m$$

Matematik kutilma m uchun baho tanlash masalasini qaraymiz. Bunday baho sifatida empirik o'rtachani olamiz. m_x^* ning tasodifiylik xarakterini ta'kidlash uchun bu tenglikni

$$\mathcal{D}^{**} = \frac{n}{n-1} \mathcal{D}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 \quad M[\mathcal{D}^{**}] = \frac{n}{n-1} M[\mathcal{D}^*] = \mathcal{D} \text{ ko'rinishda yozib olamiz,}$$

bu yerda x_i orqali X tasodifiy miqdorning i -tajribada hosil qilingan qiymat belgilangan. $x_1, x_2, \dots, x_n$ tasodifiy miqdorlarning barchasi bir xil taqsimot qonuniga ega bo'ladi (U X miqdorning taqsimot qonuni bilan bir xil bo'ladi). Shuning uchun $\mathcal{D}[m_x^*] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathcal{D}[x_i] = \frac{1}{n^2} n\mathcal{D}[x] = \frac{\mathcal{D}}{n}$ bo'lib m_x^* siljimagan baho bo'ladi. Bu bahoning dispersiyasi esa: bo'ladi.

Yendi dispersiya D uchun baho tanlaymiz. Bunday baho sifatida empirik dispersiya $D^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i^*)^2$ xizmat qiladi.

D^* ning asosli baho ekanligini ko'rsatamiz. Biroq D^* baho D ga nisbatan siljigan baho bo'ladi. Ko'rsatish mumkinki $D^* M[D^*] = \frac{n-1}{n} D$ miqdorning matematik kutilmasi D son bilan bir xil bo'lmaydi, balki oxirgisidan bir oz kichik bo'ladi.

Bu yerdan ko'rinadiki, dispersiyaning siljimagan bahosi ushbu ko'rinishda bo'ladi.

Haqiqatdan ham, tenglik o'rinlidir.

D^{**} bahoni siljimagan empirik dispersiya deb ataladi.

Tekshirish uchun savollar va mashqlar

1. O'lchash xatosi deb nimaga aytiladi?
2. Sistematik xato deb nimaga aytiladi?
3. A.M.Lyapunov teoremasi va uning ma'nosini ayting.
4. Taqsimot parametrlari deb nimaga aytiladi va ular qanday aniqlanadi?
5. Nuqtaviy baho deb nimaga aytiladi?
6. Siljimagan va siljigan baholarni ta'riflang.
7. Asosli baho deganda nimani tushunasiz?
8. Matematik kutilish uchun baho qanday tanlanadi?
9. Dispersiya uchun baho qanday tanlanadi?
10. Bosh to'plamda $n=60$ hajmli tanlanma olingan

Variant	x_i	1	3	5	7	9	10
Chastota	p_i^*	13	15	12	10	2	8

Bosh o'rtacha qiymatning siljimagan bahosini toping.

11. $n=20$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma qiymatini toping.

x_i	1260	1270	1280
p_i^*	7	10	3

12. $n=50$ hajmli tanlanma bo'yicha bosh dispersiyaning $D^*=5$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

13. $n=15$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	216	220	224
p_i^*	5	6	4

14. $n=20$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	0,02	0,04	0,09
p_i^*	10	6	4

15. $n=50$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
p_i^*	5	15	20	10

16. $n=10$ hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha kuzatilgan tanlanma dispersiyani toping (siljimagan empirik dispersiya).

x_i	202	204	208
p_i^*	2	3	5

ADABIYOTLAR

1. А.С.Солодовников. Эҳтимоллар назарияси. – Тошкент, 1983.
2. Н.С.Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. – Тошкент, 1974.
3. В.Е.Гимурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. – Тошкент, 1980.
4. Ю.Г.Грост. Задачник практикум по теории вероятностей. – Москва, 1969.
5. Р.С.Гутер, Б.В.Овчинский. Основы теории вероятностей. – Москва, 1967.

MUNDARIJA

<i>So ‘zboshi.....</i>	3
<i>1-ma’ruza. Tasodifiy hodisalar va ehtimol tushunchasi.</i>	
<i>hodisalarning kombinatsiyasi.....</i>	4
<i>2-ma’ruza. Ehtimollar nazariyasining aksiomalari. ehtimollarni</i>	
<i>hisoblashning klassik usuli.....</i>	10
<i>3-ma’ruza. Shartli ehtimol. Erkli hodisalar va ko ‘paytirish qoidasi..</i>	15
<i>4-ma’ruza. Gipotezalar. To ‘la ehtimol formulasi. Gipotezalar</i>	
<i>ehtimoli. Bayes formulasi.....</i>	18
<i>5-ma’ruza. Tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalar.</i>	22
<i>6-ma’ruza. Tajribaviy ma ‘lumotlarni qayta ishlash. Taqsimot</i>	
<i>qonunlari. Gistogramma.....</i>	28
<i>7-ma’ruza. O ‘lchash xatoliklari. miqdorlar va tajribalar orqali</i>	
<i>o ‘lchanadigan miqdorning to ‘g ‘ri keladigan qiymatini aniqlash....</i>	35
<i>8-ma’ruza. Bevosita o ‘lchash natijasida hosil bo ‘ladigan miqdorlar</i>	
<i>xatoliklarini baholash. taqsimot parametrlarining statistik</i>	
<i>baholari.</i>	38
<i>Adabiyotlar.....</i>	42

MATEMATIKA
(ehtimollar nazariyasi va matematik statistika)
uslibiy qo‘llanma

Tuzuvchilar: **prof. T.NURIMOV,**
k.o‘qit. Sh.TOG‘AYEV
k.o‘qit. S.ERDONOVA

Muharrir *Sh.G‘afforov*

Musahhih *M.Ro‘ziboyev*

Tex.muharrir *O.Arnst*

*_05.06.2008 yilda bosishga ruxsat etildi.
№ 353 buyurtma, 3,0 bosma taboq,
hajmi 60x84 1,16. Adadi 50 nusxa*

***SamDU bosmaxonasida chop etildi.**
703004, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15.*

