

**УЗБЕКСКОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ И ИНФОРМАТИЗАЦИИ
ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

На правах рукописи

ЭРЖАНОВ МАКСУД ОТАБАЕВИЧ

**РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ПОСТРОЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛОВ НА БАЗЕ R-ФУНКЦИИ**

Специальность: 5A521902 – Управление и обработка информации.

ДИССЕРТАЦИЯ

На соискание академической степени магистра

Работа рассмотрена
и допускается к защите
зав. кафедрой «ИТ»

Джайлавов А.А. _____

« ____ » _____ 2012г.

Научный руководитель
проф., д.ф.-м.н.
Назирова Ш.А.

ТАШКЕНТ – 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОБЗОР ПРОБЛЕМНОЙ ОБЛАСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	7
1.1 Обзор проблемной области	7
1.2 Понятие фракталы.....	26
1.3 Классификация фракталов и постановка задачи	37
1.4 Выводы по первой главе	46
2. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРАКТАЛОВ	47
2.1 Метод построение уравнение фракталов.....	47
2.2 Построение рекуррентно – аналитических уравнение классических фракталов	58
2.3 Построение рекуррентно – аналитических уравнение ковров	62
2.4 Выводы по второй главе	68
3. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОЙ ОБЕСПЕЧЕНИЯХ.....	69
3.1 Структура программного обеспечения	69
3.2 Описание модулей программного обеспечения	71
3.3 Инструкция по использования программного обеспечения.....	73
3.4 Выводы по третьей главе	80
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	81
ЛИТЕРАТУРА.....	82
ПРИЛОЖЕНИЕ	86

ВВЕДЕНИЕ

В нашей республике уделяется огромное внимание для эффективного использования информационных технологий в научной и производственной деятельности. В этой связи были приняты несколько государственных законов и указов, постановление Президента Республики[1-5]. К ним относятся:

- Указ Президента Республики Узбекистан «О дальнейшем развитии компьютеризации и внедрении информационно-коммуникационных технологий» (30 мая 2002 г.);
- Закон Республики Узбекистан «Об информатизации» (11 декабря 2003 г.);
- Постановление Президента Республики Узбекистан «О мерах по дальнейшему внедрению и развитию современных информационно-коммуникационных технологий» (21 марта 2012 г.) и другие.

Трудно описать окружающую нас формы и объекты природы с простыми геометрическими примитивами. К таким формам относятся: формы облаках, горы, деревья и тому подобные.

Природа демонстрирует не просто более высокую степень, но совершенно иной уровень сложности. Количество различных масштабов длины в естественных формах можно считать бесконечным для каких угодно практических задач.

Фракталы вокруг нас повсюду, и в очертаниях гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции. Человеку, не связанному с наукой, может показаться странным то, что такие привычные всем вещи с недавних пор оказались в фокусе интенсивных научных исследований. Но привычность

какого-либо явления совсем не означает, что ученые могут правильно его объяснить. Ребенку тоже привычны и его голубая колыбель, и голубое небо задолго до того, как он осознает, что голубой цвет есть общее качество совсем разных вещей. В его познавательном развитии наступит момент, когда он уже сможет воспринять понятие цвета; он слышит, что небо является голубым и вдруг «открывает», что и некоторые другие вещи тоже являются голубыми.

Математическое понятие фрактала выделяет объекты, обладающие структурами различных масштабов, как больших, так и малых, и, таким образом, отражает иерархический принцип организации. В основе этого понятия содержится одна важная идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т. е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их через микроскоп с любым увеличением. Хотя эта идеализация и может оказаться слишком большим упрощением действительности, она на порядок увеличивает глубину нашего математического описания природы.

Актуальность работы. В настоящее время предъявляются особые требования к текстильным продукциям, имеющим геометрические узоры(ковры, шторы, резьба и т.д.). С помощью обычной геометрии разработка узоров – это очень трудоемкая работа. Использование фрактальной геометрии позволит решить данную проблему. Можно привести много таких примеров в разных областях науки и промышленности.

Поэтому целью диссертационной работы является изучение разных геометрических фракталов и разработка алгоритмов и программного обеспечения построения геометрических фракталов на базе R-функции. Такое программное обеспечение найдет применение в развитии многих областей науки и промышленности.

Цель исследования. Разработка алгоритмов и программного обеспечения построения геометрических фракталов на базе R-функции.

Объект и предмет исследования. Объект исследования – геометрические фракталы.

Предмет исследования – R-функция и ее применения составлять разные геометрические фракталы.

Методы исследования. Создание растрового изображения с помощью современных программных средств и языков, математического моделирования, геометрических фракталов на базе R-функции.

Научная новизна. Разработка алгоритмов и программного обеспечения построения геометрических фракталов на базе R-функции.

Практическая ценность. Программное обеспечение может быть использовано в текстильной промышленности при рисовании узоров для штамповки на ковры, ткани и т.д.

Степень изучение. Исследованы отдельные фрактальные структуры - множество Кантора, ковер Серпиньского, снежинка и др. Вводится понятие фрактальной размерности и метод ее расчета. Описано построение множества Мандельброта, и проводится с помощью компьютера его анализ.

Пионером в этой новой области познания, которого многие называют отцом фракталов был Франко-Американский математик Профессор Бенуа Б. Мандельброт (Benoit B. Mandelbrot). В середине 1960х после десятилетий обучения и научной деятельности, Мандельброт разработал то, что он назвал фрактальная геометрия или геометрия природы. Целью фрактальной геометрии был анализ сломанных, морщинистых и нечетких форм. Мандельброт использовал слово фрактал, потому что это предполагало осколочность и фракционность этих форм.

Сегодня Мандельброт и другие ученые, такие как Клиффорд А. Пикковер (Clifford A. Pickover), Джеймс Глейк (James Gleick) или Г. О. Пейтген (H.O. Peitgen) пытаются расширить область фрактальной геометрии так, чтобы она могла быть применена практически ко всему в мире, от предсказания цен на рынке ценных бумаг до совершения новых открытий в теоретической физике.

Фракталы находят все большее и большее применение в науке. Основная причина этого заключается в том, что они описывают реальный мир иногда даже лучше, чем традиционная физика или математика. Вот несколько примеров: компьютерные системы; механика жидкостей; телекоммуникации; физика поверхностей; медицина; биология.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на: Республиканской научно-практической конференции «Фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясини ахборот коммуникация технологиялари асосида ривожлантириш муаммолари» («Применение метода R-функций во фрактальной геометрии», Ташкент, 2012г.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав с выводами, заключения, литературы и приложения.

Первая глава состоит из трех основных параграфов. В нем рассмотрен обзор исследования. В первой главе были приведены основные понятие о фрактале и фрактальной геометрии.

Вторая глава – эта основная часть диссертационной работы. В нем есть методы построения уравнения фракталов, различные алгоритмы построения уравнений фракталов, построение рекуррентно – аналитического уравнения классических фракталов и ковров.

В третий главе было приведено описание программного обеспечения, структура ПО, описание модулей программного обеспечения исследования фракталов и инструкция по использования программного обеспечения.

1. ОБЗОР ПРОБЛЕМНОЙ ОБЛАСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1 Обзор проблемной области

В работе [9] впервые численно–аналитический метод R–функций применен к решению краевых задач электродинамики во фрактальных областях типа «ковер Серпинского» и «остров Коха».

В 1988 году известные американские специалисты в теории динамических систем и эргодической теории Барнсли и Слоан предложили некоторые идеи, основанные на соображениях теории динамических систем, для сжатия и хранения графической информации. Они назвали свой метод методом фрактального сжатия информации. Происхождение названия связано с тем, что геометрические образы, возникающие в этом методе, обычно имеют фрактальную природу в смысле Мандельброта. На основании этих идей Барнсли и Слоан создали алгоритм, который, по их утверждению, позволит сжимать информацию в 500–1000 раз.

Одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие–либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные–несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

В машинной графике использование геометрических фракталов необходимо при получении изображений деревьев, кустов, береговой линии. Двухмерные геометрические фракталы используются для создания объемных текстур (рисунка на поверхности объекта).

Классическая книга основателя теории фракталов, известного американского математика [6], которая выдержала за рубежом несколько изданий и была переведена на многие языки. Перевод на русский язык

выходит с большим опозданием (первое английское издание вышло в 1977 г.). За прошедший период книга совсем не устарела и остается лучшим и основным введением в теорию фракталов и фрактальную геометрию. Написанная в живой и яркой манере, она содержит множество иллюстраций (в том числе и цветных), а также примеров из различных областей науки.

Ясное и простое изложено математических свойств фракталов. Описываются приложения теории фракталов в гидродинамике, океанологии, гидрологии, в исследовании перколяционных процессов и пр. в [8]

В работе проведена исследований развит фрактальный подход к математическому моделированию геометрических и электрических характеристик сред. Получены следующие результаты: дана математическая формулировка аксиомы самоподобия, предложен и разработан эффективный численный метод измерения фрактальной размерности D разветвленных структур. Доказано, что многомасштабное и самоподобное распределение электрических характеристик в неоднородных средах описывается канторовским множеством. Разработан математический метод фрактального решения задачи определения спектральной характеристики модуля функции ослабления земной волны для трасс фиксированной длины и модуля ослабления электромагнитных волн фрагментами растительности в СВЧ диапазоне.

В качестве примеров вычисляется фрактальная размерность Канторова множества, салфетки Серпинского и других множеств. Кроме того, вводятся понятия и находятся аттракторы конкретных систем дифференциальных уравнений. Приводятся фрактальные размерности этих аттракторов. Для системы уравнений Лоренца дается оценка сверху фрактальной размерности аттрактора этой системы.

Предложена система аксиом, определяющие фрактальное исчисление. Показано ее применение для иерархических структур. В качестве фрактальных разветвленных структур рассмотрены дельты рек и стримерные

каналы. Введены фрактальные интегралы и дифференциалы, вычислены их значения для элементарных функций.

В работе [12] вводится новый фрактальный показатель—индекс вариации ν , который, как оказывается, связан с фрактальной размерностью D соотношением $\nu = D - 1$. Однако, для его расчета требуется на порядок меньше данных, чем для расчета D или H . Это позволяет, например, провести анализ ценовых рядов акций, который дает основание интерпретировать ν как показатель устойчивости цены по отношению к внешним воздействиям. Такой подход дает возможность на этом примере раскрыть механизм, определяющий характер поведения самых различных временных рядов.

В рассмотрены теоретические и практические вопросы разработки и построения эффективных методов фрактального сжатия изображений. Фрактальное сжатие изображений представляет собой новый подход к сжатию растровых изображений. Фрактальный кодировщик позволяет использовать свойства самоподобия изображения—повторяющиеся похожие друг на друга блоки изображения на различных уровнях разрешения. Реалистичные природные изображения не являются случайным набором точек, и, очевидно, что они в большей части состоят из повторяющихся одинаковых блоков, который могут в значительной степени варьироваться от изображения к изображению, и эту особенность можно использовать для эффективного сжатия изображения.

В работе [13] предложена принципиально новые математические модели динамики водного и солевого режимов в почвах, содержащих фрактальные коллоидные структуры, и алгоритмы их исследования.

Работа [14] посвящена основам теории фракталов и состоит из двух частей и приложения. В первой части рассматриваются конструктивные фракталы, во второй—динамические, а в приложении приводится вспомогательный материал.

В работе [15] фракталы как модели применяются в том случае, когда реальный объект нельзя представить в виде классических моделей. А это

значит, что можно иметь дело с нелинейными связями и недетерминированной природой данных. Нелинейность в мировоззренческом смысле означает многовариантность путей развития, наличие выбора из альтернатив путей и определенного темпа эволюции, а также необратимость эволюционных процессов. Нелинейность в математическом смысле означает, определенный вид математических уравнений (нелинейные дифференциальные уравнения), содержащих искомые величины в степенях, больше единицы или коэффициенты, зависящие от свойств среды. То есть, когда применяется классические модели (например, трендовые, регрессионные и т.д.), можно говорить, что будущее объекта однозначно детерминированное.

Работа [16] посвящена изложению гипотезы фрактального рынка, как альтернативы гипотезы эффективного рынка. Фракталы, как следствие геометрии Демиурга присутствуют повсеместно в нашем мире и играют существенную роль, в том числе, и в структуре финансовых рынков, которые локально случайны, но глобально детерминированы, по мнению автора. Рассмотрены методы фрактального анализа рынков акций, облигаций и валют, методы различения независимого процесса, нелинейного стохастического процесса и нелинейного детерминированного процесса и исследовано влияние этих различий на пользовательские инвестиционные стратегии и способности моделирования. Такие стратегии и способности моделирования тесно связаны с типом активов и инвестиционным горизонтом пользователя.

Работа [17] посвящено изложению основных идей фрактальной и мультифрактальной геометрии. Примеры различных фрактальных структур можно встретить во многих явлениях природы. Фрактальные образы с успехом используются при описании хаотического поведения нелинейных динамических и диссипативных систем, турбулентного течения жидкости, неоднородного распределения материи во Вселенной, при исследовании трещин и дислокационных скоплений в твердых телах, при изучении

электрического пробоя, диффузии и агрегации частиц, роста кристаллов и т. д. Много интересных идей фрактальной геометрии нашли свое применение в экономике при анализе колебаний курса валют, в биологии для объяснения морфологического строения различных биологических объектов, в физике твердого тела для описания перехода Андерсона металл–диэлектрик и других свойств неупорядоченных систем.

Данная работа [18], во–первых, представляет собой вводный курс теории фракталов и теории хаоса, а во–вторых, рассматривает вопрос о том, как некоторые фракталы (аттракторы систем итерированных функций) могут порождать хаос.

В [8] известного норвежского физика дается ясное и простое изложение математических свойств фракталов и описываются приложения теории фракталов в гидродинамике, океанологии, гидрологии, в исследовании перколяционных процессов и пр. Кроме того, приводятся методы компьютерной графики.

[20] Мидхат Газале описывает и объясняет свойства гномонов (самоповторяющихся форм), повествует об их долгой и живописной истории, исследует математические и геометрические чудеса, возможные с их помощью. Этот информативный, увлекательный и прекрасно выполненный труд будет, несомненно, интересен всем, кого привлекают геометрические и математические чудеса, а также любителям математических головоломок и развлечений.

Классическая работа [6] основателя теории фракталов, известного американского математика Б.Мандельброта, которая выдержала за рубежом несколько изданий и была переведена на многие языки. Перевод на русский язык выходит с большим опозданием (первое английское издание вышло в 1977 г.). За прошедший период книга совсем не устарела и остается лучшим и основным введением в теорию фракталов и фрактальную геометрию. Написанная в живой и яркой манере, она содержит множество иллюстраций (в том числе и цветных), а также примеров из различных областей науки.

Работа [14] посвящена основам теории фракталов и состоит из двух частей и приложения. В первой части рассматриваются конструктивные фракталы, во второй – динамические, а в приложении приводится вспомогательный материал. Конструктивные фракталы строятся с помощью достаточно простой рекурсивной процедуры, имеют «тонкую» структуру, т.е. содержат произвольно малые масштабы, и обладают самоподобием. Подобные фрактальные множества слишком нерегулярны, чтобы быть описанными на традиционном геометрическом языке. Рассматриваются многочисленные примеры конструктивных фракталов. Проводится их анализ на основе линейных преобразований и вычисления фрактальной размерности. Изложение сопровождается историческими справками.

Основная цель работы [20] помочь читателю глубже понять, что такое самоподобие возможно, наиболее важную из встречающихся в природе симметрий, а также продемонстрировать широчайший диапазон применений масштабной инвариантности в физике, химии, биологии, музыке и, в особенности, в изобразительном искусстве. Материал изложен на доступном уровне и снабжен множеством иллюстраций.

До сих пор «сухая» математика чаще всего оставляла совершенно равнодушным каждого непосвященного. Сейчас, с появлением компьютеров ситуация изменяется, наступает «золотой век» вычислительной математики. И не только как эффективного инструмента, помогающего справиться с многочисленными задачами, от простых до самых сложных, которыми так богата жизнь. Математика, воплощающая в себе труд многих поколений ученых, начинает непосредственно участвовать в создании истинных эстетических ценностей. Авторы настоящей работы [Арнольд В.И.] вложили немало труда, намечая будущие пути между математикой и искусством. Можно, конечно, при этом спорить, в какой степени создаваемые с помощью компьютеров картины можно считать произведением искусства. Во всяком случае, фотографии с дисплея

компьютера, которых немало в этой книге, это прекрасное сочетание порядка и хаоса, вряд ли кого–нибудь оставят равнодушными.

В работе [22, 23] представляется соблазнительным попытаться измерить длину кривой с помощью измерительного циркуля, последовательно уменьшая его раствор, или измерить площадь поверхности с помощью все более и более мелкой триангуляции. Для обычных кривых такая процедура дает хороший результат. В то же время известно, что уже для обычных поверхностей (например, для цилиндра) возникают аномалии; основная аномалия проявляется в так называемом парадоксе площадей Шварца, который заслуживает широкой известности и будет обсуждаться ниже. Для самоподобных кривых эта процедура снова приводит к фрактальной размерности.

Концепция фрактала игнорирует "защитный пояс" классических геометрических концепций (конкретные исчисления, связанные с евклидианской программой фрактальной концепцией даже не критикуются), заменяя "жесткое ядро"—тривиальные первые принципы—категории геометрии. Этим самым задается метафизика фрактала—влиятельная метафизика фрактальной концепции дано в работе [24].

В данной работе [25] излагается описание фрактальных форм материальных объектов и соответственно определение их фрактальных размерностей. Фрактальная природа материальных объектов является универсальным свойством и вызывается их электрической сущностью. Поэтому фрактальное изображение окружающего мира позволило связать различные разделы физики в единую конструкцию. Ведь фрактальная геометрия как математическая наука имеет ограничения на исследование объектов и изучает формы в таких разветвлённых системах, как береговые линии, горные цепи, турбулентность, формы облаков, молний, деревьев и т.д. Основой фрактальной геометрии является аффинная геометрия.

В работе [26] получены следующие основные теоретические и экспериментальные результаты.

Разработан метод сокращения сложности алгоритма фрактального анализа путем исключения трех операций умножения. Для этого рассмотрен математический аппарат перехода в многомерное ортогональное пространство и приведено доказательство применимости операции нормирования векторов для исключения двух операций умножения, указана возможность применения расчета метрики отклонения на базе взятия абсолютного значения для исключения третьей операции умножения.

Выполнен выбор оптимального ортогонального преобразования. Доказано условие подобия для коэффициентов ДКП. Исходя из рассмотренного доказательства представлено условие установления факта подобия.

В новом алгоритме при сравнении рангов и доменов используется только одна операция–вычитание, что по сравнению с базовым алгоритмом, в котором требуется по три операции умножения, две сложения и одна вычитания, является значительным сокращением сложности.

Упрощен алгоритм расчета масштабирующего коэффициента яркости, что позволило исключить операцию свертки ранга и домена, требующуюся при расчете квадратичного приближения.

Реализована схема установления оптимального аффинного преобразования на основе периодичного закона распределения знаков коэффициентов ДКП.

Экспериментальное исследование быстродействия нового алгоритма фрактального анализа в системах обработки изображений по сравнению с базовым алгоритмом показало, что применение нового алгоритма позволяет повысить скорость обработки от 30 до 40 раз.

Разработан новый алгоритм построения фрактального аттрактора. Время его выполнения на 30% меньше, чем время выполнения алгоритма классического построения аттрактора фрактального преобразования.

При работе нового алгоритма достигается качество закодированного изображения, близкое к качеству кодирования базовым алгоритмом Фишера.

Визуально это мало заметно, но в числовых значениях разница существует. Для нового алгоритма максимальное значение PSNR достигает 35,1 дБ, в то время как для базового алгоритма это значение составляет 35,9 дБ.

Для изображений с большим количеством мелких структур эффективность фрактального алгоритма значительно хуже, чем у алгоритмов сжатия JPEG и JPEG2000, при этом качество изображения при сильном сжатии резко падает. Но для изображений с наличием больших одноцветных областей и резких границ между ними, фрактальный алгоритм показывает наибольшую степень сжатия при сохранении более высокого качества.

Работа [27, 29] посвящена созданию возможности для привлечения к управлению хирургическими операциями отдаленных консультантов за счет исследования, разработки и внедрения эффективного метода фрактального сжатия видеопотоков. Проанализированы условия и особенности управления медицинским воздействием на человека с использованием отдаленных консультантов с точки зрения преобразования, передачи и хранения медицинских видеопотоков. Выполнен сравнительный анализ методов кодирования отдельных изображений и видеопотоков, их характеристик и вычислительной сложности. Разработан метод комбинированного фрактального кодирования–декодирования видеопотоков. Разработан метод снижения асимметрии фрактального преобразования медицинских изображений. Разработана и внедрена автоматизированная система управления видеозндоскопической операцией с использованием отдаленных консультантов.

В работе [38] предложены критерии оценки эффективности разработанного метода сжатия графической информации при ее обработке в СОД. На основе проведенного системного анализа существующих методов обработки графической информации выявлены их достоинства и недостатки. Существующие модели обработки графической информации не учитывают фрактальный характер собственно изображения и мультифрактальный характер шума, возникающего при его формировании. Указанные выше

свойства графической информации позволяют реализовать формирование контейнера для реализации стегановложений и обеспечить наименьшие искажения графической информации при обработке. Разработан метод описания фрактальных и мультифрактальных свойств шумовой составляющей графической информации, основанный на применении конструкций консервативных каскадов и вэйвлет–преобразований, что позволяет сохранить их массу и стохастичность. Разработана модель описания и обработки графической информации, учитывающая фрактальный характер собственно изображения и мультифрактальный характер его шумовой составляющей, со стегановложением. Эта модель отличается адекватной оценкой шумовой составляющей, возникающей в результате несовершенства механизмов ее формирования различными источниками стегановложения, что является решением первой и второй частных задач исследований. Разработка данной модели позволяет определить подходы к разработке метода ее фрактального сжатия с возможностью реализации стеганографических функций, основанные на применении СИФ. Разработан метод фрактального сжатия графической информации и внедрения/извлечения файла–контейнера, использующий разработанную модель описания и обработки графической информации и математического аппарата систем итерируемых функций, что позволяет достичь показателей качества ее сжатия, отвечающие предъявляемым требованиям. При разработке метода фрактального сжатия графической информации с использованием вэйвлет–преобразования разработаны блок–схемы алгоритмов этапов ее сжатия/восстановления. Проведена разработка методики оценки эффективности метода фрактального сжатия графической информации. Она является адекватной и позволяет достоверно провести требуемую оценку, что является решением четвертой частной задачи исследований.

В работе [30] фрактальная геометрия как методологическая основа описания природных объектов продолжает триумфальное шествие в естественных науках. В исследовании показали перспективность и

обоснованность применения фрактальных моделей для описания **видовой** и пространственной структуры биологических сообществ. Математический аппарат мультифрактального анализа (моменты распределения особей по видам, обобщенные размерности Реньи, индексы сингулярности фрактальных подмножеств, функция мультифрактального спектра) естественным образом встраивается в инструментарий описания видового разнообразия в контексте видовой и пространственной структуры. Подробно разработали экологическую интерпретацию мультифрактального спектра как обобщенного геометрического образа видовой либо пространственной структуры и показали его связь с широко распространенными традиционными индексами видового разнообразия.

В работе [39] впервые предложены и исследованы фрактальные антенны нового типа, построенные на основе детерминированных нерегулярных структур — хаотических фрактальных кластеров. Последние сформированы с помощью двух численных агрегационных моделей в комбинации с хаотическим запаздывающим дискретным алгоритмом. Предложенная методика обеспечивает геометрическое многообразие формируемых фрактальных кластеров и их воспроизводимость по входным параметрам алгоритма агрегации. Программно реализованы агрегационные модели для построения двумерных и трехмерных хаотических фрактальных кластеров двух структурных подгрупп. Показано, что реконфигурация пространственно-частотных характеристик фрактальных антенн нового типа возможна без изменения геометрии антенны и введения дополнительных структурных элементов. Сдвиг частотных диапазонов и изменение формы диаграммы направленности осуществляется посредством изменения точки возбуждения антенны. Разработан и оптимизирован технологический маршрут изготовления экспериментальных образцов полуинтегрирующей ячейки. Методика изготовления электрической схемы с распределенными параметрами основана на современных методах микроэлектроники и включает циклы высоковакуумного напыления тонких пленок проводящих и

диэлектрических материалов, а также процедуру фотолитографии. Оптимизация топологии и применение прецизионной аппаратуры позволяют достичь определенной степени миниатюризации схемы и воспроизводимости ее параметров при изготовлении.

Настоящая работа посвящена отдельным вопросам разработки элементной базы фрактальных радиосистем — проектированию нерегулярных фрактальных антенн и физическому моделированию полуинтегрального оператора. Перечислим ее основные результаты. Впервые предложены и исследованы нерегулярные фрактальные антенны с детерминированной структурой. Детерминированные фрактальные структуры для антенного проектирования построены с помощью численных агрегационных моделей с использованием хаотического целочисленного алгоритма. Предложено несколько геометрических решений: плоские и пространственные хаотические фрактальные кластеры двух структурных подгрупп. Программно реализованы алгоритмы агрегации хаотических фрактальных кластеров, положенных в основу конструкций детерминированных нерегулярных фрактальных антенн. На основании численного моделирования выявлены характерные особенности нерегулярных фрактальных антенн нового типа: многодиапазонность, широкополосность, слабонаправленное излучение, частотно-зависимая форма диаграммы направленности, возрастание коэффициента усиления с частотой. Показана возможность управления пространственно-частотными характеристиками антенн посредством изменения точки возбуждения. Возможности сдвига частотных диапазонов и управления диаграммой направленности без изменения формы излучающей системы позволяют использовать предложенные конструкции при разработке реконфигурируемых антенных систем. Представлена аппаратная реализация аналоговой электрической модели полуинтегрального оператора. Полуинтегрирующая ячейка представляет собой пассивную электрическую схему на основе RC элементов с распределенными параметрами,

выполненную в виде микрополосковой структуры с использованием тонкопленочных технологий. Для изготовления экспериментальных образцов полуинтегрирующей ячейки применены современные методы микроэлектроники. Разработанный технологический маршрут включает циклы высоковакуумного напыления тонких пленок проводящих и диэлектрических материалов, а также процедуру фотолитографии. Использование прецизионной аппаратуры современных технологических методов позволяет достичь высокого качества экспериментальных образцов и воспроизводимости их параметров. На основании экспериментальных данных показано, что разработанная и реализованная полуинтегрирующая ячейка является широкополосным элементом радиотракта. Данная модель может быть использована в задачах фрактальной обработки сигналов, а также в качестве элементной базы вычислительной электроники. Преимуществом аналоговой модели является выполнение полуинтегрального преобразования сигнала в реальном масштабе времени.

В работе [40] впервые проведено применение фрактальной теории температурной зависимости ЭПФ для моделей ЭПФ разработанных Никоши и Пайкоши, Лиу, Ле Мео и Крепи, Халсеем, Боллом и Блантом; Найдены формулы для диффузии к двум фрактальным поверхностям с различной ФР; Найдено автоволновое решение для диффузии в фрактальной среде с нелинейным коэффициентом диффузии; Впервые найдено решение кинетического уравнения Климонтовича в фрактальной среде; Разработана, на основе идеи работы Гинзбурга-Ландау, модель описания фрактальной размерности поверхности твердого тела как параметра порядка; Впервые разработан метод учета в больших системах, описываемых кинетическими уравнениями, влияния фрактальных структур на поведение системы; Получены поправки к спектру элементарных возбуждений электронно-ионной плазмы от фрактальных структур; Впервые сформулирован общий метод описания кинетическими уравнениями статистической физики открытых систем экономических моделей.

В работе [41] показано, что ветвящаяся структура среды при определенных условиях может радикально изменить характер диффузионного процесса в главном канале. Показано, что для ветвящихся систем закон сохранения потока в главном канале также радикально меняется, "Сверхмедленное" уравнение переноса может быть получено различными способами. Проведено исследование группы геометрических факторов влияющих на характер замедления процесса диффузии в главном канале. Показано, что показатель временной дробной производной полностью определяется топологией ветвления и не зависит от длины канала, площади поперечного сечения, углов наклона ветвящихся каналов и их концентрации на единицу длины.

В работе [42] впервые экспериментально исследованы геометрия доменной структуры и процесс перемангничивания феррогранатовых пленок, выращенных в условиях неустойчивого фронта кристаллизации. Обнаружено, что конфигурация доменной структуры в этих пленках при всех значениях внешнего магнитного поля вплоть до поля насыщения представляет собой плоские фрактальные агрегаты. Причем минимальный размер домена совпадает с размером кристаллического блока. Детально изучен процесс перемангничивания таких образцов и установлено, что этот процесс происходит как развитие фрактальных доменных кластеров. Экспериментально установлено и подтверждено теоретическими расчетами, что доменная стенка является комбинированной: участки стенки ограничивающие свободные концы нитевидных доменов, представляют собой простую стенку Ландау-Лифшица; боковые стенки нитевидных доменов являются жесткими, содержащими большое число вертикальных блоховских линий; Впервые в рамках концепции фрактала получено выражение для плотности энергии пленки с фрактальной доменной структурой. Минимизация энергии по размеру кластера позволила вычислить отношение подвижности простой стенки к подвижности жесткой стенки, а также плотность вертикальных блоховских линий (-450). Полученные

результаты качественно согласуются с экспериментом. Исходя из результатов экспериментальных исследований, предложена феноменологическая модель, в которой доменная структура представляется совокупностью жестких плотноупакованных 90 однодоменных блоков, связанных диполь-дипольным магнитостатическим взаимодействием. На основе предложенной модели сконструирована компьютерная программа, имитирующая процесс перемагничивания. Результаты компьютерного моделирования - кривая перемагничивания и спектр фрактальной размерности доменных агрегатов - совпадают с результатами эксперимента с точностью, ограниченной погрешностью эксперимента. Компьютерная апробация показывает, что предложенная модель позволяет описать петлю гистерезиса в исследуемых пленках и предсказать геометрию доменной структуры в зависимости от характеристик пленки и функции распределения магнитных полей дефектов в ее плоскости. Разработанный метод исследования может быть использован для анализа процессов перемагничивания поликристаллических ферромагнетиков, теоретического описания которых пока нет.

Специфика доменной структуры в исследуемых пленках и ее перестройки в магнитном поле позволили использовать материалы диссертации в учебном процессе - в частности для наблюдения и демонстрации скачков Баркгаузена и изучения процессов перемагничивания.

В [43] проанализированы алгоритмы и методы фрактального анализа аэрофотоизображений. Выявлены их достоинства и недостатки, с учётом которых проведена их доработка применительно к задачам дешифрирования аэрофотоизображений. Показано, что аэрофотоизображения местности являются фрактальными лишь в узком диапазоне масштабов рассмотрения. На получаемую величину фрактальной размерности оказывают существенное влияние дискретный характер изображений и их размер. Особенностью фрактальной размерности является её зависимость от используемого алгоритма вычисления и от пределов вычислений в каждом из алгоритмов.

Поэтому предложена система фрактальных признаков, состоящая из фрактальных размерностей вычисленных различными способами, общим числом семнадцать. Указанный вектор признаков позволяет проводить классификацию аэрофотоизображений с наименьшим количеством ошибок, что является важным моментом при создании автоматизированных систем распознавания. При проведении экспериментов по классификации однородных фрагментов аэрофотоизображений при использовании различных комбинаций фрактальных признаков распознаваемость (в процентах от общего объёма контрольной выборки) составляет более 90%. При этом наилучшей распознающей способностью для обработанных в эксперименте ландшафтов обладают параметры на основе фрактальной Броуновской функции. Установлено, что наиболее эффективной, при распознавании обработанных в эксперименте объектов, является комбинация признаков среднего, стандарта и усреднённых вдоль строк и столбцов параметров одномерной фрактальной Броуновской функции (всего шесть признаков). Фрактальная система признаков обладает наилучшей распознающей способностью по сравнению с другими статистическими, структурными и энтропийными признаками. Предложен фрактальный подход к обнаружению и выделению контуров. При его использовании возможно эффективное выделение контуров даже в случае слабоконтрастных изображений. В целом можно заключить, что фрактальный подход к дешифрированию аэрофотоизображений обладает большими потенциальными возможностями. Фрактальная размерность изображения может использоваться как самостоятельный или дополнительный дешифровочный признак. Кроме того, с помощью фрактального анализа возможна оценка стационарности аэрофотоизображений. Дальнейшими направлениями в исследованиях фрактального анализа в области дешифрирования аэрофотоизображений могут быть исследование зависимости величины фрактальной размерности аэрофотоизображения от условий проводимой аэрофотосъёмки, в частности от масштаба

аэрофотоизображения и разрешающей способности аэрофотоплёнки. Диссертация имеет практическую направленность - методы и алгоритмы, предложенные в работе, могут быть использованы при создании или совершенствовании автоматизированных распознающих систем.

В работе [44] Построена фрактальная модель нелинейных распределенных систем со случайно растущим потенциалом и с пороговым подавлением роста локальных градиентов потенциального рельефа. Для различных моделей роста найдены условия, при которых модельная динамика обладает скейлинговыми свойствами. Показано, что эффекты динамической перколяции определяют специфику отклика активной системы на внешнее поле и нетривиальный характер зависимости динамики от размеров системы. Продemonстрировано флуктуационное понижение порога динамической перколяции на броуновском потенциальном рельефе. Построена физическая картина предварительной стадии молниевоего разряда и показано, что динамическая перколяция лежит в основе механизма, осуществляющего фрактальную "металлизацию" грозового облака - лавинообразный рост самоподобного поля мелкомасштабных неоднородностей проводимости внутриоблачной среды. Взаимодействие возникающих проводящих структур с крупномасштабным полем грозы приводит к возникновению иерархической системы сбора объёмного внутриоблачного заряда в активной части облака, которая определяет появление лидерного канала молнии. Предложена фрактальная модель электромагнитного излучения грозового облака на предварительной стадии молниевоего разряда и в интервалах между обратными ударами, учитывающая разветвленность и конечную проводимость токовых каналов. Показано, что наряду с ускорением электронов до релятивистских энергий, случайно ориентированные мелкомасштабные электрические поля при наличии столкновений с молекулами воздуха приводят к резкому увеличению времени жизни релятивистских электронов в облаке благодаря диффузионному характеру их траекторий и объясняют значительную

продолжительность всплесков рентгеновского и гамма излучения и наблюдаемый характер их корреляции с молниевыми вспышками. Предложен перколяционный механизм формирования тонкой структуры спрайтов – электрических разрядов в средней атмосфере, инициированных крупномасштабным молниевым разрядом. На основе принципов, развитых в диссертации при описании внутриоблачного разряда, построена фрактальная модель, позволяющая описывать структуру и динамику развития спрайтов. Получена универсальная форма нелинейного закона фильтрации для широкого класса дисперсных сред. Экспериментально доказано, что фильтрационное течение в среде с переменной пористостью имеет скейлинговые особенности, обусловленные перколяцией внутрипорового пространства. Показано, что наряду с традиционными механизмами дифференциации вещества в гравитационном поле, например, конвекцией, существует и механизм, обусловленный неустойчивостью многофазной среды по отношению к перколяционному фазовому переходу. Этот механизм превращает литосферу в распределенный сейсмический генератор, источником энергии которого является потенциальная энергия недифференцированного материала литосферы в поле тяжести планеты. Предлагаемый перколяционный механизм обеспечивает прямое преобразование потенциальной гравитационной энергии в энергию разрушения и объясняет наблюдаемую в эксперименте вертикальную миграцию очагов землетрясений.

На основе использования методов фрактальной геометрии построена модель динамики электрических зарядов в грозовом облаке, которая качественно качественно а, в некоторых случаях, количественно позволяет описать все основные процессы, возникающие на предвспышечной стадии молниевых разрядов: К-процессы, понижение электрического заряда, характерную величину электрического тока, серию отдельных разрядов во вспышке, разветвленную структуру электрических разрядов внутри облака, обнаруживаемую по характеру радиоизлучения в разнесенных точках

приема. Предложен и исследован механизм перколяционной неустойчивости, насыщенного легким флюидом пористого субстрата в гравитационном поле. Получен критерий саморазрушения насыщенной пористой среды в гравитационном поле. Рассмотрен один из возможных механизмов сейсмической активности, обусловленный перколяционной неустойчивостью дегазирующего субстрата литосферы. Построена фрактальная модель сейсмогенеза. Получено экспериментальное подтверждение выводов континуальной теории протекания для фильтрационных течений в дисперсных средах с изменяющейся пористостью. Теоретически и экспериментально обнаружено значительное снижение порога протекания для полидисперсных ансамблей и ансамблей с ближним порядком. На основе сопоставлений обнаруженных экспериментально нелинейных эффектов с двухчленным законом фильтрации получено универсальное соотношение для фильтрационного числа Рейнольдса для широкого класса дисперсных сред в работе [42] .

В работе [45] получили развитие старые и разработаны новые методы исследования квантовой динамики частицы в одномерных детерминированных структурах с обычной и фрактальной геометрией. Здесь также представлена альтернативная модель одномерного законченного рассеяния, полностью основанная на линейном формализме квантовой механики. В отличие от стандартной модели этого процесса, новая модель представляет одномерное законченное рассеяние не как единый квантовый процесс, а как объединение двух когерентно протекающих, взаимосвязанных подпроцессов прохождения и отражения, и дает описание этих подпроцессов на всех этапах рассеяния. В случае узких в $\wedge$ -пространстве волновых пакетов эти (случайные) подпроцессы не совместимы в том смысле, что частица может участвовать только в одном из этих подпроцессов. На основе этой модели предложено решение проблемы времени туннелирования и дано объяснение парадокса Хартмана.

1.2 Понятие фракталы

Исследованы отдельные фрактальные структуры - множество Кантора, ковер Серпиньского, снежинка и др. Вводится понятие фрактальной размерности и метод ее расчета. Описано построение множества Мандельброта, и проводится с помощью компьютера его анализ.

При возникновении порядка в хаотических системах; сосуществовании хаоса и порядка, перехода от одного к другому; конкуренции или взаимодействия в сложных системах есть общий элемент - конкуренция нескольких центров за доминирование на плоскости или их взаимодействие. Обычно не встречается простой структуры границ, чаще имеет место филигранное переплетение и борьба за свои участки. В этой пограничной области происходит переход от одной формы существования к другой, от порядка к беспорядку и наоборот. Порой возникает третий конкурент, который пользуется разногласиями двух других и насаждает свою область влияния.

Математический подход к описанию таких процессов в природе дал в 1980 г. французский математик Бенуа Мандельброт, указавший на фрактальную геометрию природы. Фрактальные объекты самоподобны, т. е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их в микроскоп с любым увеличением. О множествах, имеющих такую структуру, говорят, что они обладают геометрической (масштабной) инвариантностью. Процессы, порождающие такие структуры - это процессы с обратной связью, в которых одна и та же операция выполняется снова и снова. Здесь результат одной итерации является начальным условием для следующей, причем требуется нелинейная зависимость между результатом и начальным значением, т. е. динамический закон $x_{n+1} = f(x_n, C)$ более сложный, чем линейный $x_{n+1} = kx_n$.

Неизбежность фракталов

Как следует из данной книги, синергетика целенаправленно пытается отыскать правила, по которым возникает порядок в хаотических системах; сосуществование хаоса и порядка, переход от одного к другому; конкуренция или взаимодействие в сложных системах. Эти процессы возникают в различных физических и математических задачах. В них есть общий элемент: конкуренция нескольких центров за доминирование на плоскости или их взаимодействие. Обычно не встречается простой структуры границ, чаще имеет место филигранное переплетение и борьба за свои участки. В этой пограничной области происходит переход от одной формы существования к другой, от порядка к беспорядку и наоборот. Порой возникает третий конкурент, который пользуется разногласиями двух других и насаждает свою область влияния.

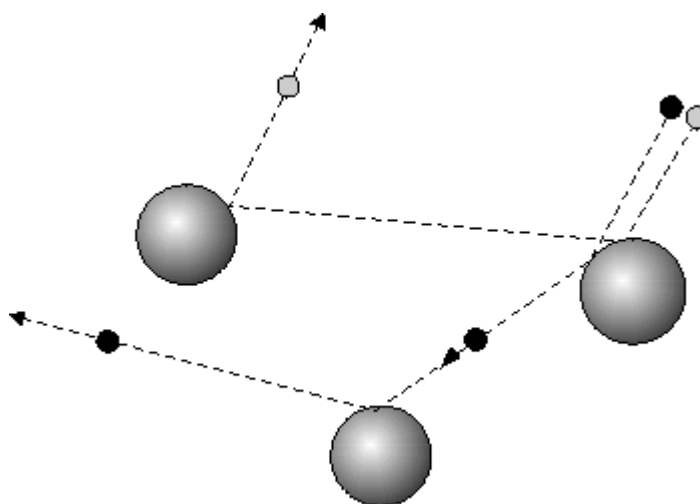


Рис. 1.1. Движение маленького шарика со случайно расположенными большими фиксированными шарами.

Выше отмечалось, что любой нелинейный процесс приводит к ветвлению, к развилке на пути, в которой система может выбрать ту или иную ветвь, но последствия решения невозможно предсказать. Самые незначительные неточности в начальном состоянии системы развиваются, в каждый конкретный момент причинная связь сохраняется, но после нескольких ветвлений она уже не видна. Пример такой системы дает движение с участием жестких шаров, где рассматривается движение

маленького шарика, сталкивающегося со случайно расположенными в пространстве большими фиксированными шарами (рис. 1.1). Если внести малейшую неопределенность в начальные условия, то она будет очень быстро возрасти и делает невозможным предсказание уже после нескольких первых столкновений о местоположении малых шаров. Увеличение точности задания начальных условий потребует бесконечного увеличения информации, иначе приходим к необратимости.

Эти трудности, как уже отмечалось, характерны не только для механических задач, они встречаются и в физике элементарных частиц, и в биологии, и в социологии. Требуются новые взгляды в науке, новые концепции [15], новый математический аппарат. Это не означает, что известные до сих пор законы природы неверны, просто мы недостаточно осознаем, что в них скрыто. Математический подход к более широкому взгляду на природу дал в 1980 г. французский математик Бенуа Мандельброт, указавший на фрактальную геометрию природы. Известная нам геометрия неспособна описать форму облака, горы, дерева или берега моря. На приведенном рисунке хорошо видна фрактальная структура кровеносных сосудов сердца. Сравнивая исходное изображение (сверху) и его увеличенный фрагмент (внизу) можно убедиться, что топология крупных и мелких сосудов статистически идентична (рис. 1.2).

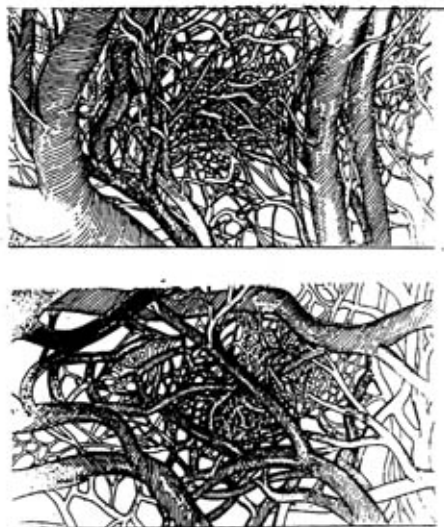


Рис. 1.2. Фрактальная структура кровеносных сосудов сердца.

Не правда ли, очень правдоподобно? Следующий пример - уже научно значимый результат: слева фотография диффузионных каналов в пористой среде, а справа - математическая фрактальная модель этого процесса (рис. 1.3).

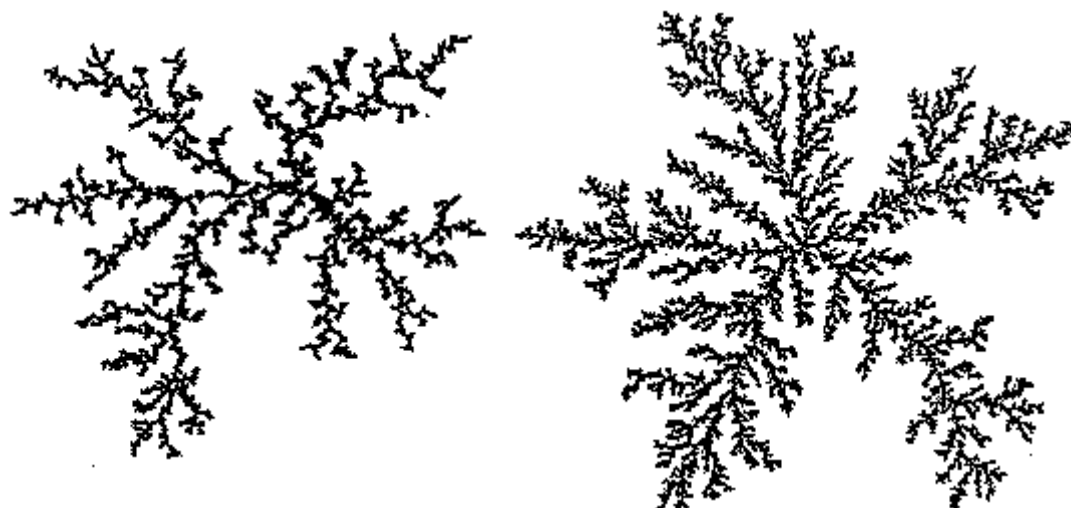


Рис. 1.3. Диффузионные каналы в пористой среде и ее фрактальная модель.

Фрактальные объекты самоподобны, т. е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их в микроскоп с любым увеличением. О множествах, имеющих такую структуру, говорят, что они обладают геометрической (масштабной) инвариантностью. Процессы, порождающие такие структуры - это процессы с обратной связью, в которых одна и та же операция выполняется снова и снова.

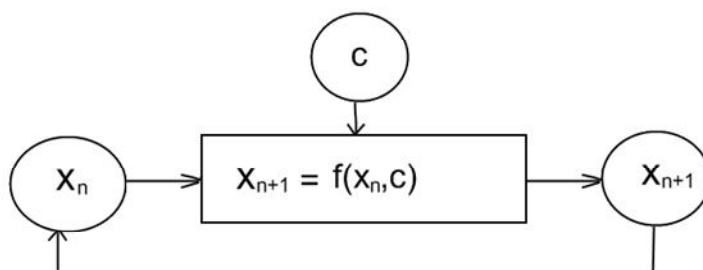


Рис. 1.4. Схематическая диаграмма динамического процесса $x_{n+1}=f(x_n, C)$

Здесь результат одной итерации является начальным условием для следующей (рис. 1.4), причем требуется нелинейная зависимость между результатом и начальным значением, т. е. динамический закон $x_{n+1} = f(x_n, C)$ более сложный, чем линейный $x_{n+1} = kx_n$. Как следует из рис. 2, зависимость x_{n+1} от x_n должна содержать параметр C . Если начать итерационный процесс с некоторого значения x_0 , то его результатом будет последовательность $x_1, x_2, \dots$. Если исследовать поведение такой последовательности, мы и получим (как правило) какой-либо фрактальный объект. Такие последовательности сильно отличаются от обычных последовательностей в математике. Очередной шаг зависит от предыдущего и случайностей, а не от начального значения. А в жизни чаще всего так и бывает: ваши действия в основном определяются событиями предыдущих дней и отчасти случаем и не зависят от вашего дня рождения (астрологию не трогаем, т.к. за начальное значение с полным правом можно взять любой другой день вашей жизни).

Большинство приведенных в этом параграфе примеры фракталов - "искусственного" происхождения: т.е. само подобие в них является правилом построения. Через параграф мы рассмотрим примеры фракталов, возникающих по механизму на рис 1.3, а далее - как строятся и исследуются фракталы.

Построение фракталов. Дробная размерность

Рассмотрим т.н. множество Кантора и ковер Серпиньского. Эти множества обладают геометрической инвариантностью и известны как "множества средних третей". Отрезок единичной длины $[0, 1]$ делится на три равные части, и средняя из них - интервал $(1/3, 2/3)$ - вырезается. С каждым из остальных отрезков поступают точно так же (рис. 1.5).

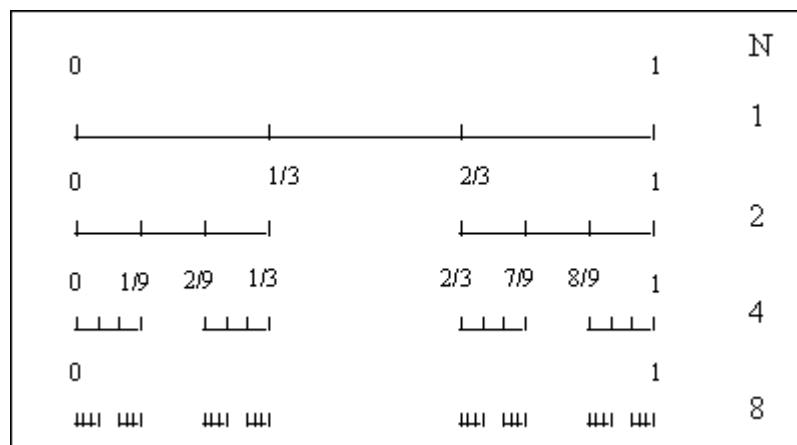


Рис. 1.5. Построение множества Кантора.

Получаем последовательность отрезков все убывающей длины. На первом этапе имеем один отрезок, на втором - два, на третьем - четыре, на k -ом - 2^k отрезков, длиной 3^{-k} каждый. При $k \rightarrow \infty$ получим множество точек, которое называется множеством Кантора. Суммарная длина всех вырезанных отрезков при этом равна единице.

$$\ell = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1$$

Обобщение канторова множества средних третей на случай плоских фигур приводит к ковру Серпиньского.

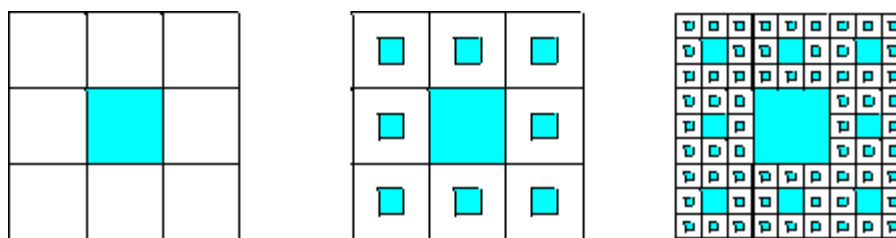


Рис. 1.6. Построение ковра Серпиньского.

Возьмем квадрат со стороной, равной единице, и разделим его на девять равных квадратов; при первой итерации ($k=1$) удаляем центральный квадрат; аналогично поступим с каждым из оставшихся восьми квадратов ($k=2$) и т. д. (рис. 1.6). Пересечение полученных при $k \rightarrow \infty$ множеств - это ковер Серпиньского. Канторово множество, грубо говоря, является как бы "всюду дырявым".

Существует важная количественная характеристика канторова множества - дробная размерность. Рассмотрим некоторое множество A и попытаемся полностью покрыть его отрезками, квадратиками или гиперкубами со стороной ε (рис. 1.7). Пусть N - минимальное число кубиков или квадратиков, необходимых для покрытия A . Рассмотрим предел

$$d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1)$$

Величина $d(A)=d_F$ является метрической размерностью и называется фрактальной размерностью.

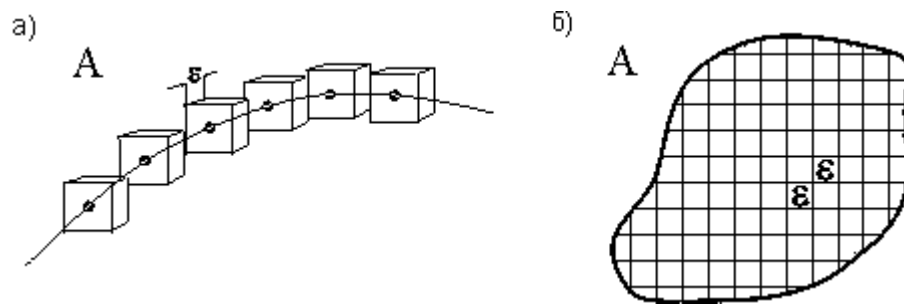


Рис. 1.7. Покрытие объекта (множества точек) кубами с длиной ребра ε :
а) одномерный объект, б) двумерное пространство.

Найдем фрактальную размерность квадрата со стороной 1. Для того чтобы закрыть этот квадрат необходимо иметь $(1/\varepsilon)^2$ квадратов со стороной ε . Следовательно, d равно

$$d = \frac{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = 2 \cdot \left[\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \right] = 2,$$

как это и ожидалось для плоскости.

Найдем d для множества Кантора (рис. 1). При первом разбиении для покрытия необходимо иметь два отрезка длиной $1/3$; при втором разбиении потребуется четыре отрезка длиной $1/9$ и вообще при n -ом разбиении нужно иметь 2^n отрезков длиной $(1/3)^n$. Итак, множество Кантора состоит из $N=2^n$ разделенных интервалов длиной $(1/3)^n$ каждый. Используя определение (1), получим

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} \right) = \frac{n \ln 2}{n \ln 3} \approx 0,63$$

Таким образом, множество Кантора - промежуточное между точкой ($d=0$) и линией ($d=1$), т. е. оно является фракталом.

Определим фрактальную размерность ковра Серпиньского. Имеем при первом ($k=1$) и последующих разбиениях

$k=1$	$N=8=8^1$	$\varepsilon=(1/3)^1$
$k=2$	$N=8*8=8^2$	$\varepsilon=(1/3)^2$
$k=3$	$N=8*8*8=8^3$	$\varepsilon=(1/3)^3$
$k=n$	$N=8^n$	$\varepsilon=(1/3)^n$

отсюда

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} \right) = \frac{n \ln 2}{n \ln 3} \approx 0,63$$

Следовательно, ковер Серпиньского - это уже не линия с размерностью 1, но еще и не поверхность, размерность которой 2. Это что-то между линией и поверхностью. Самым неожиданным является то, что в природе существуют объекты, представляющие аналог ковра Серпиньского с размерностью $1 < d < 2$. Это фрактальные агрегаты коллоидных частиц.

Рассмотрим теперь другой классический фрактальный объект - снежинку. Снежинка имеет бесконечный периметр, хотя ограничивает конечную область плоскости. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую из его сторон на три части и по каждой из трех центральных третей построим по равностороннему треугольнику меньших размеров. Итерируя это построение бесконечно много раз, получим фрактальный объект, называемый иногда кривой Коха, размерность которого $d = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,26$ (рис. 1.8).

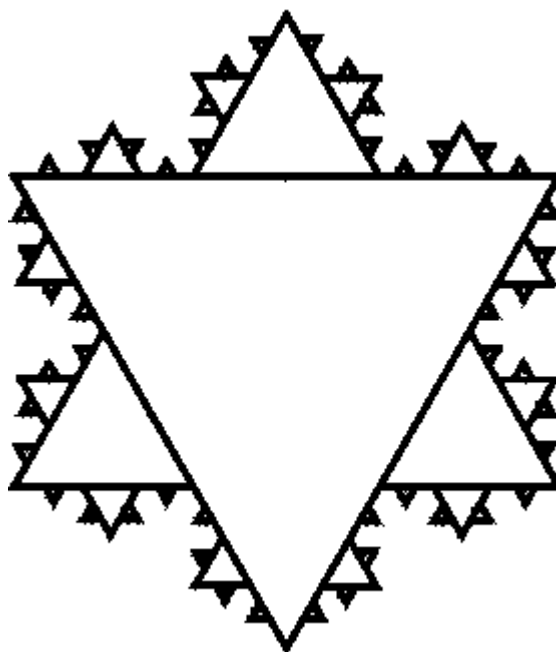


Рис 1.8. Фрактальный объект в форме снежинки (кривая Коха).

Множество Мандельброта

Выше был рассмотрен один из путей построения фракталов - последовательные операции построения подобных элементов (рис.1.4).

В 1980 г. Бенуа Мандельброт обнаружил универсальное множество, теперь носящее его имя. Мандельброт вместо действительных чисел рассмотрел комплексные и наблюдал процесс $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ не на прямой, а в плоскости. Процесс Мандельброта осуществляется по формуле

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 + C, \quad C = a + bi,$$

т. е. выбираем произвольное число x_0 , возводим его в квадрат, прибавляем константу C и получаем x_1 ; затем повторяем для x_2 , x_3 и т. д.

Положим $C = 0$, тогда $x_0 \rightarrow x_{02} \rightarrow x_{04} \rightarrow x_{08}$ и эта последовательность имеет три возможности:

- числа становятся все меньше и их последовательность стремится к нулю, т.е. нуль становится аттрактором для процесса $x \rightarrow x^2$. Все точки, лежащие на расстоянии меньше 1 от аттрактора движутся к нему.

- числа становятся все больше и стремятся к бесконечности, которая является аттрактором для этого процесса. Все точки, лежащие на расстоянии больше 1 от нуля, идут к бесконечности.
- точки находятся на расстоянии 1 от нуля, их последовательности образуют окружность единичного радиуса.

Плоскость делится на две зоны влияния, а граница - окружность.

Сюрпризы начинаются, когда выберем ненулевое значение $C = a + bi$. Ниже изображено множество Мандельброта (ММ) для процесса $x \rightarrow x^2 + C$, где показана часть комплексной C -области: $-2,25 < \text{Re } C < 0,75$, $-1,5 < \text{Im } C < 1,5$. Фигура отражает соответствие различным значениям параметра C различных типов границ на комплексной C -плоскости. Обозначим черным цветом область значений C , где последовательность ограничена, а белым - экспоненциальное расхождение.

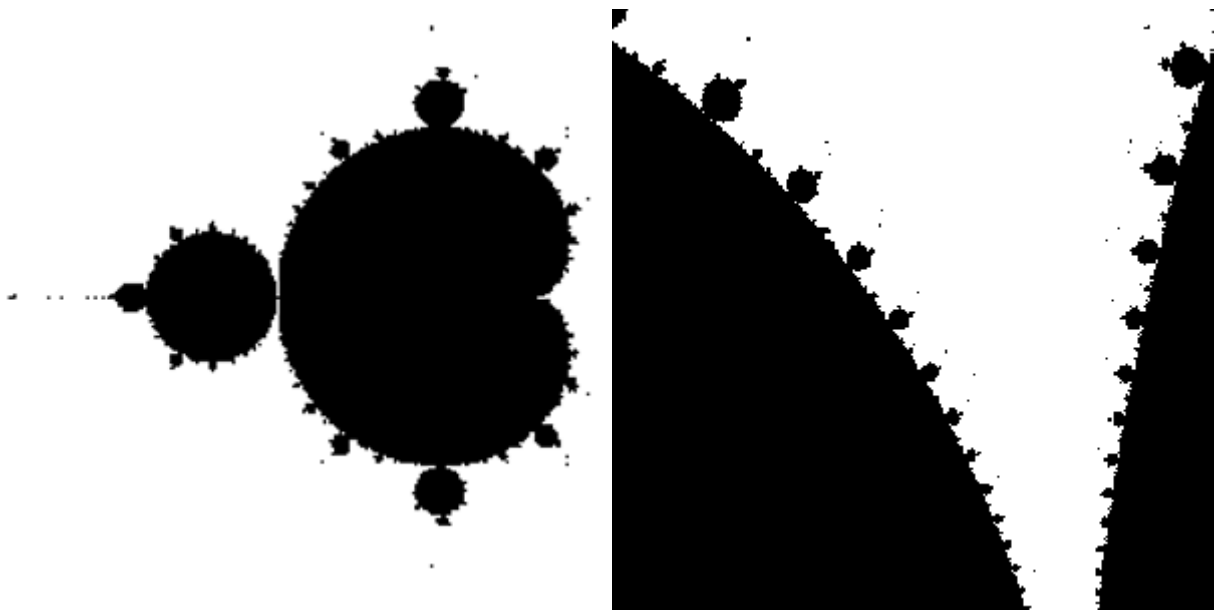


Рис. 1.9. Множество Мандельброта и его увеличенный фрагмент "в чистом виде".

Видно, что с выходом на комплексную плоскость получаем более полную картину по сравнению с анализом на действительной оси. Различный выбор комплексного числа C приводит к разнообразным конфигурациям. На простом черно-белом изображении не видно такого богатства форм. Сложную динамическую структуру можно отразить только в цвете.

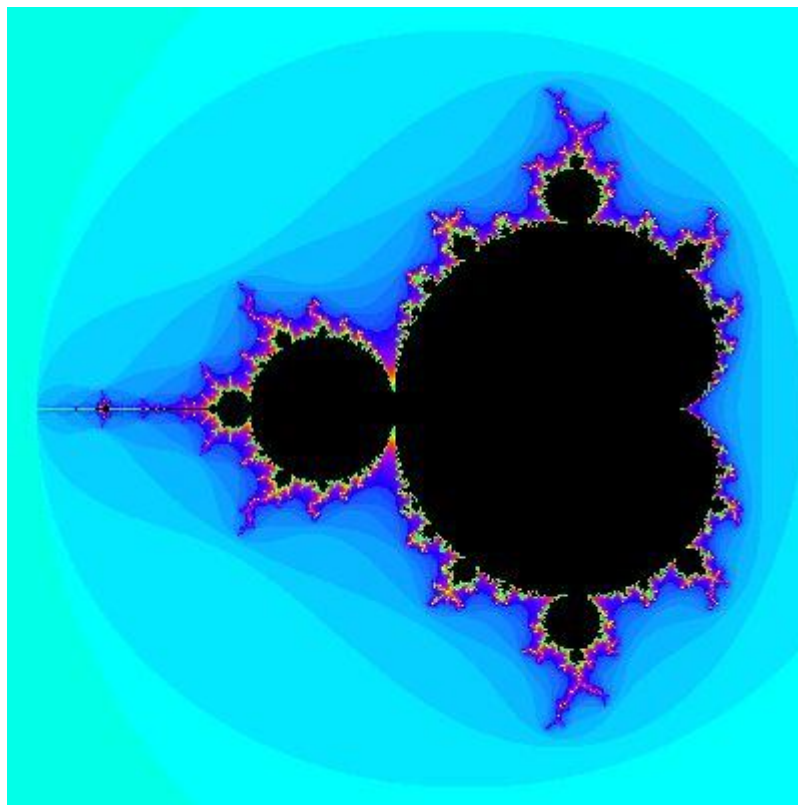


Рис. 1.10. Эквипотенциальные поверхности вокруг множества Мандельброта.

Опишем, как происходит раскрашивание окрестности ММ. Пусть множество изготовлено из металла и несет на себе электрический заряд, тогда поверхность имеет постоянный электрический потенциал, например, 1000 В. В области, окружающей проводник, потенциал падает до нуля. Можно построить эквипотенциальные линии, окружающие ММ. Например, линия, отвечающая потенциалу 1 В, настолько далека от ММ, что выглядит почти как окружность, а линия 900 В напоминает форму ММ и т. д. Раскраска рисунков соответствует этим линиям: разные цвета дают контурную карту электростатического потенциала между ММ и бесконечностью. С ММ тесно связан еще один фрактал - множество Жюлиа.

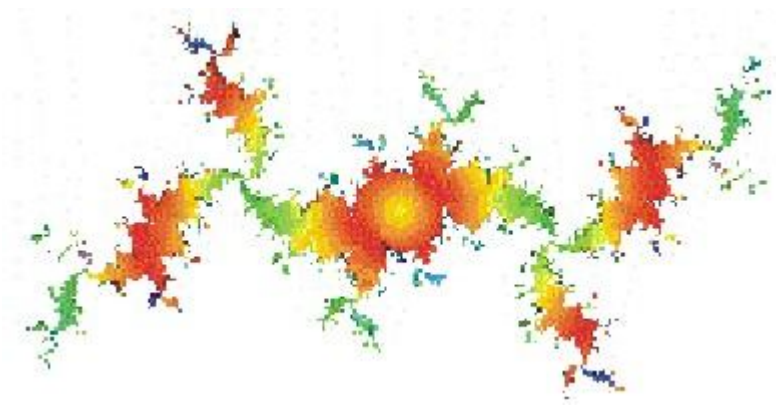


Рис. 1.11. Множество Жюлиа.

Если в ММ $X_0 = \text{const} = 0$, а параметр C - комплексная координата точки, на которой выполняется построение; то в множестве Жюлиа $C = \text{const}$, задаваемая заранее, а плоскость построения - плоскость возможных начальных значений X_0 . Существует много программ, которые строят рассматриваемые фракталы, подробнее об этом можно узнать на домашней страничке авторов, а здесь мы предлагаем "небольшую" (520Кб) подборку картинок. Трудно поверить, но формула $x \rightarrow x^2 + C$ содержит в себе массу структур. Само множество ММ проявляется снова и снова, различных размеров, но всегда одной и той же формы. Это напоминает генетическую организацию высших организмов: каждая клетка содержит полный геном, совокупность всех форм проявления, но в любой точке организма проявляется только некоторая малая часть этих форм.

1.3 Классификация фракталов и постановка задачи

Из обзора и следований следует, что первые примеры самоподобных множеств с необычными свойствами появились в XIX веке (например, множество Кантора). Термин «фрактал» был введен Бенуа Мандельбротом в 1975 году и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги «Фрактальная геометрия природы». Слово «Фрактал» не является математическим термином и не имеет общепринятого строгого

математического определения. Оно может употребляться, когда рассматриваемая фигура обладает какими-либо из перечисленных ниже свойств:

- Обладает нетривиальной структурой на всех масштабах. В этом отличие от регулярных фигур (таких, как окружность, эллипс, график гладкой функции): если мы рассмотрим небольшой фрагмент регулярной фигуры в очень крупном масштабе, он будет похож на фрагмент прямой. Для фрактала увеличение масштаба не ведёт к упрощению структуры, на всех шкалах мы увидим одинаково сложную картину.
- Является самоподобной или приближённо самоподобной.
- Обладает дробной метрической размерностью или метрической размерностью, превосходящей топологическую.

Многие объекты в природе обладают фрактальными свойствами, например, побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система и система альвеол человека или животных.

Фракталы, особенно на плоскости, популярны благодаря сочетанию красоты с простотой построения при помощи компьютера.

Можно классифицировать фракталы, которые состоят из следующих:

- Алгебраические фракталы
 - Множество Мандельброта
 - Множество Жюлиа
 - Бассейны (фракталы) Ньютона
 - Биоморфы
 - Треугольники Серпинского
- Геометрические фракталы
 - Кривая Коха (снежинка Коха)
 - Кривая Леви
 - Кривая Гильберта
 - Ломаная (кривая) дракона (Фрактал Хартера-Хейтуэя)
 - Множество Кантора

- Треугольник Серпинского
- Ковёр Серпинского
- Дерево Пифагора
- Круговой фрактал
- Стохастические фракталы
- Рукотворные фракталы
- Природные фракталы
- Детерминированные фракталы
- Недетерминированные фракталы

Остановимся на самоподобные множества с необычными свойствами в математике.

Начиная с конца XIX века, в математике появляются примеры самоподобных объектов с патологическими с точки зрения классического анализа свойствами. К ним можно отнести следующие:

- множество Кантора — нигде не плотное несчётное совершенное множество. Модифицировав процедуру, можно также получить нигде не плотное множество положительной длины.
- треугольник Серпинского и ковёр Серпинского — аналоги множества Кантора на плоскости.
- губка Менгера — аналог множества Кантора в трёхмерном пространстве;
- примеры Вейерштрасса и Ван дер Вардена нигде не дифференцируемой непрерывной функции.
- кривая Коха — несамопересекающаяся непрерывная кривая бесконечной длины, не имеющая касательной ни в одной точке;
- кривая Пеано — непрерывная кривая, проходящая через все точки квадрата.
- траектория броуновской частицы также с вероятностью 1 нигде не дифференцируема. Её хаусдорфова размерность равна двум.

Дадим понятие рекурсивной процедура получения фрактальных кривых.

Построение кривой Коха

Существует простая рекурсивная процедура получения фрактальных кривых на плоскости. Зададим произвольную ломаную с конечным числом звеньев, называемую генератором. Далее, заменим в ней каждый отрезок генератором (точнее, ломаной, подобной генератору). В получившейся ломаной вновь заменим каждый отрезок генератором. Продолжая до бесконечности, в пределе получим фрактальную кривую. На рисунке справа приведены три первых шага этой процедуры для кривой Коха.

Примерами таких кривых служат:

- кривая дракона;
- кривая Коха;
- кривая Леви;
- кривая Минковского;
- кривая Пеано.
- с помощью похожей процедуры получается дерево Пифагора.

Фракталы как неподвижные точки сжимающих отображений.

Свойство самоподобия можно математически строго выразить следующим образом. Пусть Ψ — сжимающие отображения плоскости. Рассмотрим следующее отображение на множестве всех компактных (замкнутых и ограниченных) подмножеств плоскости:

Можно показать, что отображение Ψ является сжимающим отображением на множестве компактов с метрикой Хаусдорфа. Следовательно, по теореме Банаха, это отображение имеет единственную неподвижную точку. Эта неподвижная точка и будет нашим фракталом.

Рекурсивная процедура получения фрактальных кривых, описанная выше, является частным случаем данной конструкции. В ней все отображения ψ_i — отображения подобия, а n — число звеньев генератора.

Для треугольника Серпинского $n = 3$ и отображения ψ_1, ψ_2, ψ_3 — гомотетии с центрами в вершинах правильного треугольника и

коэффициентом $1/2$. Легко видеть, что треугольник Серпинского переходит в себя при отображении Ψ .

В случае, когда отображения ψ_i — преобразования подобия с коэффициентами $r_i > 0$, размерность s фрактала (при некоторых дополнительных технических условиях) может быть вычислена как решение уравнения $r_1^s + r_2^s + \dots + r_n^s = 1$. Так, для треугольника Серпинского получаем $s = \ln 3 / \ln 2$.

По той же теореме Банаха, начав с любого компактного множества и применяя к нему итерации отображения Ψ , мы получим последовательность компактов, сходящихся (в смысле метрики Хаусдорфа) к нашему фракталу.

Фракталы в комплексной динамике. Множество Жюлиа

Фракталы естественным образом возникают при изучении нелинейных динамических систем. Наиболее изучен случай, когда динамическая система задаётся итерациями многочлена или голоморфной функции комплексной переменной на плоскости. Первые исследования в этой области относятся к началу XX века и связаны с именами Фату и Жюлиа.

Нас интересует поведение этой последовательности при стремлении n к бесконечности. Эта последовательность может:

- стремиться к бесконечности,
- стремиться к конечному пределу,
- демонстрировать в пределе циклическое поведение, например: $z_1, z_2, z_3, z_1, z_2, z_3, \dots$
- вести себя хаотично, то есть не демонстрировать ни один из трёх упомянутых типов поведения.

Множества значений z_0 , для которых последовательность демонстрирует один конкретный тип поведения, а также множества точек бифуркации между различными типами, часто обладают фрактальными свойствами.

Так, множество Жюлиа на картинке справа — множество точек бифуркации для многочлена $F(z) = z^2 + c$, то есть тех значений z_0 , для

которых поведение последовательности z_n может резко меняться при сколь угодно малых изменениях z_0 .

Другой вариант получения фрактальных множеств — введение параметра в многочлен $F(z)$ и рассмотрение множества тех значений параметра, при которых последовательность z_n демонстрирует определённое поведение при фиксированном z_0 . Так, множество Мандельброта — это множество всех $c \in \mathbb{C}$, при которых z_n для $F(z) = z^2 + c$ и $z_0 = 0$ не стремится к бесконечности.

Ещё один известный пример такого рода — бассейны Ньютона.

Популярно создание красивых графических образов на основе комплексной динамики путём раскрашивания точек плоскости в зависимости от поведения соответствующих динамических систем. Например, для дополнения множества Мандельброта можно раскрасить точки в зависимости от скорости стремления z_n к бесконечности (определяемой, скажем, как наименьший номер n , при котором $|z_n|$ превысит фиксированную большую величину A).

Биоморфы — фракталы, построенные на основе комплексной динамики и напоминающие живые организмы.

Стохастические фракталы.

Рандомизированный фрактал на основе множества Жюлиа

Природные объекты часто имеют фрактальную форму. Для их моделирования могут применяться стохастические (случайные) фракталы.

Примеры стохастических фракталов:

- траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве;
- граница траектории броуновского движения на плоскости. В 2001 году Лоулер, Шрамм и Вернер доказали предположение Мандельброта о том, что её размерность равна $4/3$.
- эволюции Шрамма-Лёвнера — конформно-инвариантные фрактальные кривые, возникающие в критических двумерных

моделях статистической механики, например, в модели Изинга и перколяции.

- различные виды рандомизированных фракталов, то есть фракталов, полученных с помощью рекурсивной процедуры, в которую на каждом шаге введён случайный параметр. Плазма — пример использования такого фрактала в компьютерной графике.

Фрактальная монотипия, или стохатипия — направления в изобразительном искусстве, заключающиеся в получении изображения случайного фрактала.

В природе встречаются следующие фракталы.

- Бронхиальное дерево
- Сеть кровеносных сосудов
- Деревья

Применение фракталов.

Среди литературных произведений находят такие, которые обладают текстуальной, структурной или семантической фрактальной природой. В текстуальных фракталах потенциально бесконечно повторяются элементы текста:

- неразветвляющееся бесконечное дерево, тождественное само себе с любой итерации («У попа была собака...», «Притча о философе, которому снится, что он бабочка, которой снится, что она философ, которому снится...», «Ложно утверждение, что истинно утверждение, что ложно утверждение...»)
- неразветвляющиеся бесконечные тексты с вариациями («У Пегги был весёлый гусь...») и тексты с наращиваниями («Дом, который построил Джек»).
- В структурных фракталах схема текста потенциально фрактальна:
- венок сонетов (15 стихотворений), венок венков сонетов (225 стихотворений), венок венков венков сонетов (2455 стихотворений)

- «рассказы в рассказе» («Книга тысячи и одной ночи», Я. Потоцкий «Рукопись, найденная в Сарагосе»)
- предисловия, скрывающие авторство (У. Эко «Имя розы»)
- Т. Стоппард «Розенкранц и Гильденстерн мертвы» (сцена с представлением перед королём).
- К. Прист «Лотерея» (иногда встречается под названием «Подтверждение»): молодой писатель сочиняет роман о своем двойнике из параллельного мира, который в свою очередь пишет книгу о своем двойнике из параллельной Вселенной, сочиняющем...
- Б. Олдисс «Доклад о вероятности А»
- В семантических и нарративных фракталах автор рассказывает о бесконечном подобии части целому:
- Х. Л. Борхес «В кругу развалин»
- Х. Кортасар «Жёлтый цветок»
- Ж. Перек «Кунсткамера»

Радиотехника. Фрактальные антенны

Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств было впервые применено американским инженером Натаном Коэном, который тогда жил в центре Бостона, где была запрещена установка внешних антенн на здания. Натан вырезал из алюминиевой фольги фигуру в форме кривой Коха и наклеил её на лист бумаги, затем присоединил к приёмнику. Коэн основал собственную компанию и наладил их серийный выпуск.

Информатика. Сжатие изображений

Алгоритм фрактального сжатия. Существуют алгоритмы сжатия изображений с помощью фракталов. Они основаны на идее о том, что вместо самого изображения можно хранить сжимающее отображение, для которого

это изображение (или некоторое близкое к нему) является неподвижной точкой. Один из вариантов данного алгоритма был использован фирмой Microsoft при издании своей энциклопедии, но большого распространения эти алгоритмы не получили.

Компьютерная графика

Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее. Существует множество программ, служащих для генерации фрактальных изображений.

Децентрализованные сети.

Система назначения IP-адресов в сети Netsukuku использует принцип фрактального сжатия информации для компактного сохранения информации об узлах сети. Каждый узел сети Netsukuku хранит всего 4 Кб информации о состоянии соседних узлов, при этом любой новый узел подключается к общей сети без необходимости в центральном регулировании раздачи IP-адресов, что, например, характерно для сети Интернет. Таким образом, принцип фрактального сжатия информации гарантирует полностью децентрализованную, а следовательно, максимально устойчивую работу всей сети.

Таким образом в настоящее время фракталы применяются везде, что подтверждает их востребованности.

Исходя из вышеизложенного в данной работе ставится задача:

- Разработать алгоритмы для построения уравнений фракталов.
- Разработать программное обеспечения позволяющих построить рисунков фракталов на базе их уравнений.

1.4 Выводы по первой главе

Основные результаты данной главы заключаются в следующем:

1. Обзор проблемной области.
2. Изучены исследование размерности фракталов.
3. Изучена классификация фракталов.
4. Применение фракталов :
 - Радиотехника - Использование фрактальной геометрии при проектировании антенных устройств;
 - Информатика - Существуют алгоритмы сжатия изображения с помощью фракталов;
 - Компьютерная графика - Фракталы широко применяются для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее.
5. Основные цели задачи исследованы.

2. РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФРАКТАЛОВ

2.1 Метод построение уравнение фракталов

При построения уравнений фракталов будем применять метод R – функций В.Л. Рвачева. Поэтому ниже дадим понятие метод R –функций.

Среди функций вида $y = f(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in (-\infty, \infty)$, встречаются такие, знак которых вполне определяется заданием знаков аргументов. Примерами таких функций являются

$$\begin{aligned} u_1 &= xyz, \\ u_2 &= 1 + x^2 + y^2 + z^2, \\ u_3 &= x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2}}, \\ u_4 &= xy + z - |z - yx| \end{aligned} \quad (2.1)$$

и т. д. Ниже приведена зависимость знаков функций u_1, u_2, u_3 и u_4 от знаков аргументов:

x	-	-	-	-	+	+	+	+
y	-	-	+	+	-	-	+	+
z	-	+	-	+	-	+	-	+
u_1	-	+	+	-	+	-	-	+
u_2	+	+	+	+	+	+	+	+
u_3	-	+	+	+	+	+	+	+
u_4	-	+	-	-	-	-	-	+

(Ситуации, когда аргументы принимают нулевые значения, из рассмотрения исключены.)

Для сравнения приведем примеры функций, знак которых зависит не только от знаков аргументов, но и от их абсолютной величины:

$$\begin{aligned} v_1 &= xyz + 1, \\ v_2 &= \sin xy, \\ v_3 &= x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

«Положительность» и «отрицательность» можно рассматривать как некоторые качества, которыми может обладать действительная величина. Функции $u_1 - u_4$ обладают тем свойством, что задание качеств аргументов вполне определяет качество функции. Функции $v_1 - v_3$ таким свойством не обладают.

Кроме деления действительных чисел на положительные и отрицательные имеется бесчисленное множество других способов наделения их качествами. Можно, например, приписать качество A числам, меньшим по модулю единицы, а качество B - остальным числам; можно условиться, что качеством A обладают рациональные числа, а качеством B - иррациональные и т. д. Можно, наконец, ввести несколько или даже бесконечно много качественных градаций, разбивая множество действительных чисел на соответствующее число частей. Однако, каково бы ни было разбиение Γ множества действительных чисел на качества, задание этого разбиения означает и задание множества $\mathfrak{R}(\Gamma)$ тех функций, которые обладают свойством сохранять принадлежность своих значений к одному и тому же качественному интервалу при изменении аргументов в пределах каждого из фиксированных наборов их качественных градаций. Функции, составляющие множество $\mathfrak{R}(\Gamma)$, называются *R-функциями*, соответствующими разбиению Γ множества действительных чисел.

Если качества, соответствующие разбиению Γ , некоторым образом перенумеровать, то всякому набору качеств аргументов будет соответствовать определенный набор их номеров. Задание той или иной R-функции приведет к установлению правила, которое каждому такого рода набору поставит в соответствие некоторое качество функции, а следовательно, и номер этого качества. Таким образом, одновременно с R-функцией оказывается заданной и некоторая функция логики того же числа аргументов, что и рассматриваемая R-функция. Эту функцию логики назовем сопровождающей данную функцию.

Описанная схема введения понятия R-функции представляет собой упрощенный вариант, который был принят из соображений наглядности изложения. С более общих позиций понятие R-функции изложено в работе [4].

Для задач, которые рассмотрены в данной книге, достаточно ограничиться R-функциями, соответствующими разбиению числовой оси на положительные и отрицательные числа. Число нуль будем относить к положительным числам. В некоторых ситуациях, на которые далее будет обращено внимание, это приведет к определенной нестрогости рассуждений. Однако более точный подход, требующий выделения числа нуль в особую качественную градацию, привел бы к разбиению числовой оси на три части, что заставило бы нас рассматривать сопровождающие функции трехзначной логики с их более сложным, чем у булевых функций, математическим аппаратом.

Рассмотрим двужначный предикат

$$S_2(x) = (x \geq 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Исходя из описанного выше определения понятия R-функции, при разбиении числовой оси на интервалы $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$ функцию $y = f(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in (-\infty, \infty)$, будем называть R-функцией, если существует такая булева функция $Y = F(X_1, \dots, X_n)$, что выполняется равенство

$$S_2[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_2(x_1), \dots, S_2(x_n)]. \quad (2.4)$$

Нетрудно заметить, что одной и той же булевой функции соответствует бесчисленное множество R-функций. Например, для R-функции $w1=xy$ сопровождающей является булева функция $X \sim Y$. Действительно,

$$S_2(xy) = S_2(x) \sim S_2(y). \quad (2.5)$$

Эта же булева функция является сопровождающей для R-функций:

$$\begin{aligned}w_2 &= xy(1 + x^2 + y^2), \\w_3 &= (1 - 2^{-x})(3^y - 1)\end{aligned}\tag{2.6}$$

и т. д.

Совокупность всех R-функций, имеющих одну и ту же сопровождающую булеву функцию, назовем *ветвью* множества R-функций. Так как число булевых функций n аргументов равно 2^{2^n} , то существует 2^{2^n} различных ветвей R-функций, зависящих от n аргументов.

В работе [4] приведены доказательства следующих теорем.

Теорема 1. *Множество R-функций (соответствующее произвольному заданному разбиению числовой оси) является функционально замкнутым.*

Теорема 2. *В каждой ветви R-функций содержатся элементарные функции, непрерывно дифференцируемые везде достаточное число раз.*

Множество R-функций является несчетным, поэтому для него не существует конечных полных систем функций. Однако для приложений и не нужны все R-функции, достаточно уметь строить R-функции, принадлежащие любым наперед заданным их ветвям. Это позволяет говорить о базисных системах R-функций, полных по признаку T (достаточно полных), где Tf - множество всех R-функций, принадлежащих той же ветви, что и R-функция f . В соответствии с понятием достаточной полноты система H R-функций будет называться достаточно полной, если пересечение множества $\mathfrak{R}(H)$ H-реализуемых функций с каждой ветвью множества R-функций не является пустым.

В работе [9] показано, что условием достаточной полноты системы H , составленной из R-функций, является полнота системы HI соответствующих сопровождающих булевых функций.

Ниже приведены наиболее употребительные достаточно полные системы R-функций, соответствующие разбиению числовой оси на отрицательные и положительные числа. При построении этих систем учитывались не только соображения их достаточной полноты, но и

некоторые другие, о которых будет сказано при рассмотрении свойств дифференциального характера, которыми эти системы обладают.

Система $R\alpha$:

$$\begin{aligned} x \wedge_{\alpha} y &= \frac{1}{1+\alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \text{ (R-конъюнкция),} \\ x \vee_{\alpha} y &= \frac{1}{1+\alpha} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \text{ (R-дизъюнкция),} \\ \bar{x} &= -x \text{ (R-отрицание),} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ - произвольная функция, удовлетворяющая условию $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$.

Покажем, что R-конъюнкция $x \wedge_{\alpha} y$ принадлежит ветви, для которой сопровождающей булевой функцией является конъюнкция $X \wedge Y$. Рассмотрим треугольник со сторонами, равными $|x|$ и $|y|$, и углом между ними, имеющим косинус, равный α . Тогда третья сторона треугольника равна $\sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha |x| |y|}$. Если x и y - положительные числа, то $x + y$ есть сумма двух сторон треугольника, которая больше третьей стороны. Поэтому $x \wedge_{\alpha} y > 0$. Если одна из величин x или y отрицательна, а другая положительна, то $x + y$ есть разность сторон, которая меньше третьей стороны. Поэтому $x \wedge_{\alpha} y < 0$. Очевидно, что $x \wedge_{\alpha} y < 0$ и тогда, когда $x < 0$ и $y < 0$. Таким образом, $x \wedge_{\alpha} y > 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$ и $y > 0$ одновременно. Поэтому

$$S_2(x \wedge_{\alpha} y) \equiv S_2 \left[\frac{1}{1+\alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \right] \equiv S_2(x) \wedge S_2(y), \quad (2.8)$$

что и требовалось доказать. Аналогично убеждаемся, что

$$S_2(x \vee_{\alpha} y) \equiv S_2 \left[\frac{1}{1+\alpha} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}) \right] \equiv S_2(x) \vee S_2(y). \quad (2.9)$$

Очевидно также, что $S_2(\bar{x}) \equiv S_2(-x) \equiv \overline{S_2(x)}$.

Система $R\alpha$ (2.7) определяет целый пучок достаточно полных систем R-функций, получающихся из нее путем выбора той или иной конкретной функции $\alpha(x, y)$, удовлетворяющей условию $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$. Этот произвол в выборе функции α может быть использован в некоторых ситуациях, возникающих при построении приближенных решений краевых задач [66].

Частными случаями системы R_α являются следующие достаточно полные системы R-функций.

Система R_0 :

$$\begin{aligned}x \wedge_0 y &= x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\x \vee_0 y &= x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \overline{x} &= -x.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Эта система получается из R_α при $\alpha \equiv 0$ и является одной из наиболее простых достаточно полных систем R-функций.

Система R_1 :

$$\begin{aligned}x \wedge_1 y &\equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y), \\x \vee_1 y &\equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y), \\ \overline{x} &= -x.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Эта система получается из R_α при $\alpha \equiv 1$. Характерной особенностью ее является то, что $x \wedge_1 y \equiv \min(x, y)$, а $x \vee_1 y \equiv \max(x, y)$.

Далее описан ряд логических и дифференциальных свойств R-операций из систем R_0 и R_1 . Сейчас отметим лишь, что в то время как R-операции $x \wedge_0 y$ и $x \vee_0 y$ недифференцируемы лишь при $x = 0, y = 0$, R-операции $x \wedge_1 y$ и $x \vee_1 y$ недифференцируемы везде при $x = y$. Достаточно полной системой R-функций, дифференцируемых до m -го порядка, является система R_0^m :

$$\begin{aligned}x \wedge_0^m y &\equiv (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}, \\x \vee_0^m y &\equiv (x + y + \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}},\end{aligned}\tag{2.12}$$

При $m = 0$ эта система превращается в систему R_0 .

Отметим также систему R_p :

$$x \wedge_p y \equiv x + y - [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}},$$

$$\begin{aligned} x \underset{p}{\vee} y &\equiv x + y + [|x|^p + |y|^p]^{\frac{1}{p}}, \\ \bar{x} &= -x, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $p > 1$.

Приводим некоторые свойства R-операций, составляющих системы R_ω , R_I , R_0^m и R . При этом под символом $\wedge^*$ будем понимать любую из R-конъюнкций $\wedge_0$, $\wedge_0^m$, $\wedge_1, \dots$, а под символом $\vee^*$ - любую из R-дизъюнкций $\vee_0$, $\vee_0^m, \dots$, принадлежащих этим системам. Кроме того, будем считать, что

$$\alpha(x, y) \equiv \alpha(x, -y) \equiv \alpha(x, y).$$

1. $x \wedge^* y \equiv y \wedge^* x$.
2. $x \vee^* y \equiv y \vee^* x$.
3. $\overline{x \wedge^* y} \equiv \bar{x} \vee^* \bar{y}$.
4. $\overline{x \vee^* y} \equiv \bar{x} \wedge^* \bar{y}$.
5. $x \wedge^* y = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0, x \geq 0$ или $x = 0, y \geq 0$.
6. $x \vee^* y = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0, y \leq 0$ или $y = 0, x \leq 0$.
7. $\bar{\bar{x}} \equiv x$.
8. $(x \wedge_1 y) \wedge_1 z \equiv x \wedge_1 (y \wedge_1 z) \equiv x \wedge_1 y \wedge_1 z$.
9. $(x \vee_1 y) \vee_1 z \equiv x \vee_1 (y \vee_1 z) \equiv x \vee_1 y \vee_1 z$.
10. $x \wedge_1 (y \vee_1 z) \equiv (x \wedge_1 y) \vee_1 (x \wedge_1 z)$.
11. $x \vee_1 (y \wedge_1 z) \equiv (x \vee_1 y) \wedge_1 (x \vee_1 z)$.
12. $x \wedge_1 x \equiv x$.
13. $x \vee_1 x \equiv x$.
14. $x \wedge_1 \bar{x} \equiv -|x|$.
15. $x \vee_1 \bar{x} \equiv |x|$.

Пользуясь той или иной достаточно полной системой R-функций, легко строить R-функции, принадлежащие заданным ветвям. Так как ветвь вполне определяется заданием сопровождающей булевой функции $F(X_I, \dots, X_n)$, то можно построить R-функцию, принадлежащую рассматриваемой ветви, по тому же правилу, по которому функция $F(X_I, \dots, X_n)$ может быть построена с

помощью булевых функций $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $\bar{X}$. Следует лишь в дизъюнктивной (или конъюнктивной) нормальной форме функции F произвести формальную замену символов $\wedge$ и $\vee$ на символы R-операций $\wedge^*$ и $\vee^*$, а символы булевых переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ заменить символами $x_1, x_2, \dots, x_n$ непрерывных переменных, изменяющихся в интервале $(-\infty, \infty)$. При этом необходимо иметь в виду, что в отличие от булевых конъюнкций и дизъюнкций соответствующие R-функции $x \wedge^* y$ и $x \vee^* y$ (за исключением функций $x \wedge_1 y$ и $x \vee_1 y$) не подчиняются ассоциативным законам. Поэтому при написании формул для R-функций по указанному выше правилу необходимо прибегать к строго скобочной записи, т. е. каждую двуместную операцию заключать в скобки.

Пример. Пусть требуется построить R-функцию, принадлежащую ветви, определяемой булевой функцией

$$Y = (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge \bar{X}_3) \vee (X_1 \wedge \bar{X}_2 \wedge X_3) \vee X_3.$$

Булеву функцию первоначально упростим, осуществляя «склеивание» первой и второй элементарных конъюнкций по переменной X_3 . В результате получим

$$Y = (X_1 \wedge \bar{X}_2) \vee X_3.$$

Для построения R-функции воспользуемся системой R_0

$$\begin{aligned} y &= (x_1 \wedge_0 \bar{x}_2) \vee_0 x_3 \equiv (x_1 + \bar{x}_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee_0 x_3 \equiv \\ &\equiv (x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee_0 x_3 \equiv x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_3 + \\ &+ \sqrt{(x_1 - x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Построения уравнения геометрических объектов. С помощью R-функций можно осуществлять переход от предикатных уравнений геометрических объектов к уравнениям канонического типа $\omega = 0$, обеспечивая при этом принадлежность функции ω к множеству $\mathfrak{R}(H)$ H-реализуемых функций, везде определенных и необходимое число раз непрерывно дифференцируемых, где H - некоторая базисная система функций.

Рассмотрим вначале задачу построения уравнения границы $\partial\Omega$ области Ω , представляющей собой пересечение заданных опорных областей Ω_i ($i = 1, 2$), определяемых неравенствами Ω_i ($\omega_i \geq 0$), $\omega_i \in \mathfrak{R}(H)$, $i = 1, 2$. В этом случае предикатное уравнение области Ω имеет вид

$$\Omega \equiv (\omega_1 \geq 0) \wedge (\omega_2 \geq 0) = 1. \quad (2.14)$$

С помощью формулы R-конъюнкции $x \wedge_\alpha y$, $x \wedge_0^m y, \dots$, это предикатное уравнение можем заменить уравнением

$$\Omega \equiv (\omega_1 \wedge^* \omega_2 \geq 0) = 1, \quad (2.15)$$

где $\wedge^*$ - какая-либо из названных R-конъюнкций. Таким образом, если $x \wedge^* y \in \mathfrak{R}(H)$, то можно положить $\omega = \omega_1 \wedge^* \omega_2$. В результате получаем неравенство $\omega \geq 0$, определяющее область $\Omega: \Omega = (\omega \geq 0)$. При этом нетрудно заметить, что если $\omega_1, \omega_2 \in C^2$, то, воспользовавшись R-конъюнкцией

$$x \wedge_0^m y = (x + y - \sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$$

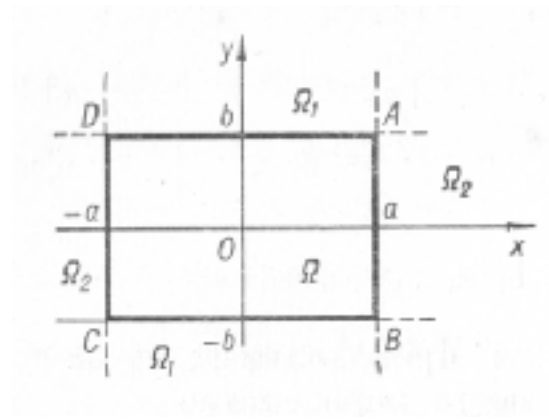


Рис. 2.1.

при $m \geq n$, получим функцию ω , принадлежащую множеству C^n n раз непрерывно дифференцируемых функций.

В обычных ситуациях строгие неравенства $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$ определяют внутренние области соответствующих областей Ω_1 и Ω_2 . Этим же свойством обладает и функция ω . Таким образом, уравнение $\omega = 0$ будет удовлетворяться лишь на границе области Ω .

Пр и м е р 1. Напишем уравнение прямоугольника $ABCD$ (рис. 2.1), ширины $2a$ и высоты $2b$.

Область Ω , ограниченная прямоугольником, представляет собой

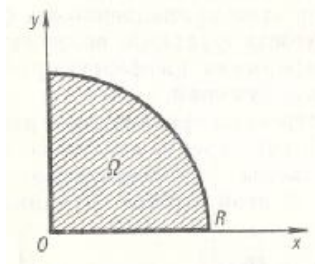


Рис. 2.2.

пересечение полос $\Omega_1=(a^2-x^2\geq 0)$ и $\Omega_2=(b^2-y^2\geq 0)$. Воспользовавшись R-конъюнкцией $x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ (2.10), уравнение прямоугольника $ABCD$ получаем в виде

$$\omega \equiv a^2 - x^2 + b^2 - y^2 - \sqrt{(a^2 - x^2)^2 + (b^2 - y^2)^2} = 0. \quad (2.16)$$

(Далее показано, что $\omega = c$ есть семейство выпуклых линий, гладких при $c \neq 0$ и включающих при $c = 0$ прямоугольник $ABCD$.)

Последовательно применяя описанную выше методику, нетрудно написать уравнение границы и в случае, когда область представляет собой объединение нескольких опорных областей $\Omega_i=(\omega_i \geq 0)$ ($i=1, \dots, n$):

$$\omega \equiv (\dots((\omega_1 \wedge^* \omega_2) \wedge^* \omega_3) \wedge^* \dots) \wedge^* \omega_n = 0. \quad (2.17)$$

При этом, естественно, можно по-разному группировать опорные области, что соответствует различным способам расстановки скобок, заключающих каждую из R-конъюнкций. Это приводит к образованию различных функций ω , для которых, общим является то что внутри области Ω они положительны, вне - отрицательны, а на $\partial\Omega$ - равны нулю. (Эти функции являются элементами одного и того же пучка функций, равных нулю на $\partial\Omega$.)

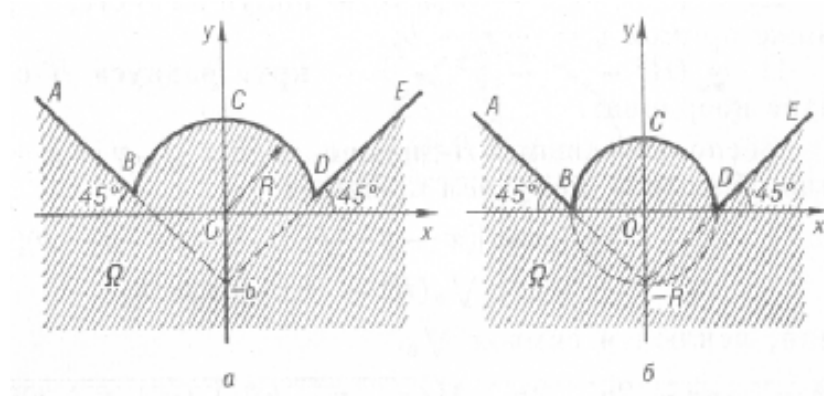


Рис. 2.3.

Пр и м е р 2. Напишем уравнение границы области Ω , отмеченной на рис. 2.2 штриховкой.

В качестве опорных берем области:

$\Omega_1 = (x \geq 0)$ - правая полуплоскость;

$\Omega_2 = (y \geq 0)$ - верхняя полуплоскость;

$\Omega_3 = (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0)$ - круг радиуса R с центром в начале координат.

Область Ω может быть задана предикатом

$$\Omega = (x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge (R^2 - x^2 - y^2 \geq 0). \quad (2.18)$$

Уравнение $\partial\Omega$ можем написать в виде

$$\omega \equiv (x \wedge_0 y) \wedge_0 (R^2 - x^2 - y^2) = 0. \quad (2.19)$$

Воспользовавшись формулой $x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, исключаем из формулы (2.17) символ $\wedge_0$. В результате уравнение $\partial\Omega$ принимает вид

$$\omega \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2} + R^2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(x + y - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + (R^2 - x^2 - y^2)^2} = 0. \quad (2.20)$$

Аналогично поступаем и в случае, когда область Ω представляет собой объединение областей $\Omega_i = (\omega_i \geq 0)$, $i = 1, \dots, n$.

Для области Ω получаем предикат

$$\Omega = \{\omega \equiv (\dots((\omega_1 \vee * \omega_2) \vee * \omega_3) \vee * \dots) \vee * \omega_n \geq 0\}. \quad (2.21)$$

При этом, если функции ω_i не равны нулю одновременно ни в одной внутренней точке области Ω , а $\omega_i = 0$ есть уравнение границ $\partial\Omega_i$ соответствующих опорных областей, то уравнение $\omega = 0$ будет уравнением границы $\partial\Omega$.

2.2 Построение рекуррентно – аналитических уравнение классических фракталов

Анализ мировых литературных источников и Интернет ресурсов по фракталам показывает, что в настоящее время достаточно глубоко изучены геометрии фракталов.

Но для того, чтобы штамповать на материалах изображения фракталов необходимо написать их уравнения, т.е. построить уравнения геометрии области фракталов, которые можно осуществить, применяя метод R-функций.

Построение уравнений границ геометрии области (ГО) требует задания как опорных функций, так и логической формулы, позволяющей при соответствующем выборе системы R-функций получить уравнение в аналитическом виде. Это требует определенных математических знаний и навыков, что делает систему труднодоступными для инженеров и исследователей, которые не знакомы с методом R-функций, аналитической и дифференциальной геометрией. Перспективным в этом направлении представляется формирование уравнений составных геометрических объектов не их опорных функций из стандартных (предлагаемых пользователю) примитивов.

Отметим, что в работе [5] впервые были построены уравнения границ некоторых объектов. В данной работе на основе конструктивных средств теории [6-7] построены ряда интересных объектов фрактальной геометрии.

Фрактал дерево

$\omega_0(a, x, y)$ – уравнения одной ветвей. В качестве исходного уравнение будет использовать уровня прямоугольник которого будем обеспечить через ω_0 , тогда (рис 2.4.):

$$\omega_0(a, x, y) = \frac{r^2 - x^2}{2r} \wedge_0 \frac{(\frac{a}{2})^2 - (y - \frac{a}{2})^2}{a} \geq 0$$

где r – толщина ветвей дерево (обычно $r=1$), a – длина ветвей дерево.

Этой уравнений будем завив 0-уровнение.

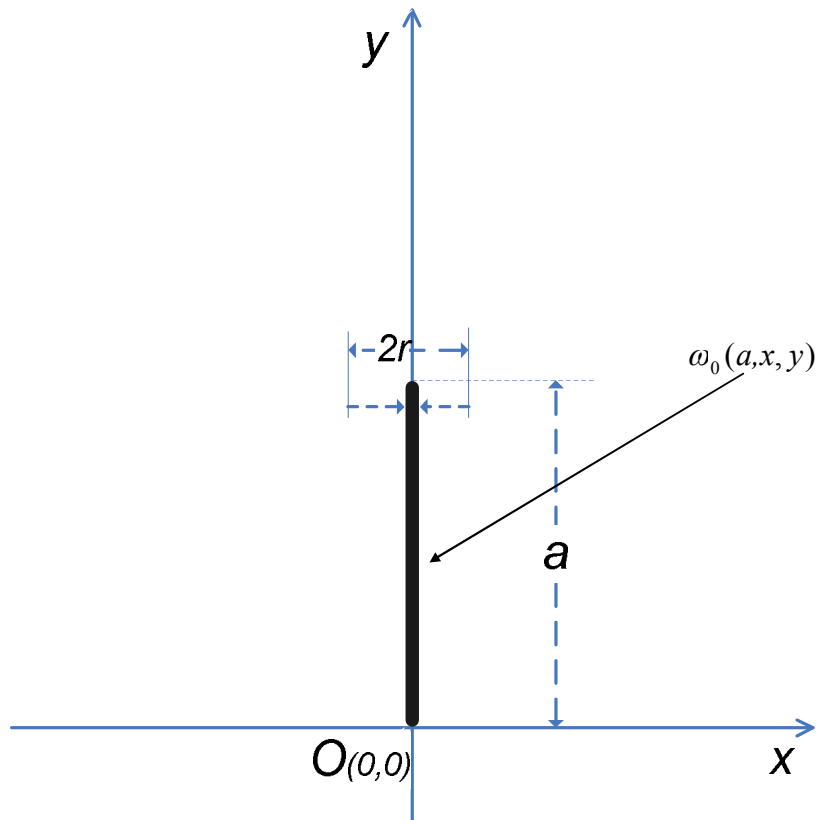


Рис 2.4. Рисунок дерево фрактал при $k=0$.

Теперь построим формулу для $k=1$. Чтобы сделать это, нам надо три уравнение – уравнения корневая ветвь, уравнения левая ветвь, уравнения правая ветвь.

$$\omega_{10}(a, x, y) = \omega_0(a/l, x, y);$$

$$\omega_{11}(a, x, y) = \omega_0(a/l, x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) - a \sin(\alpha)/l, x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - a \cos(\alpha)/l);$$

$$\omega_{12}(a, x, y) = \omega_0(a/l, x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) + a \sin(\alpha)/l, x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - a \cos(\alpha)/l).$$

Здесь α – угол наклона ветвей дерева по сравнению с предыдущей веткой, l – коэффициенты сжатия. При каждом уменьшения длины веток по сравнению большого ветка уменьшается l раз. ω_{10} – уравнения корневая ветвь, ω_{11} – уравнения левая ветвь, ω_{12} – уравнения правая ветвь. И последние уравнения для $k=1$ будет так (рис 2.5):

$$\omega_1(a, x, y) = \omega_{10} \vee_0 \omega_{11} \vee_0 \omega_{12}.$$

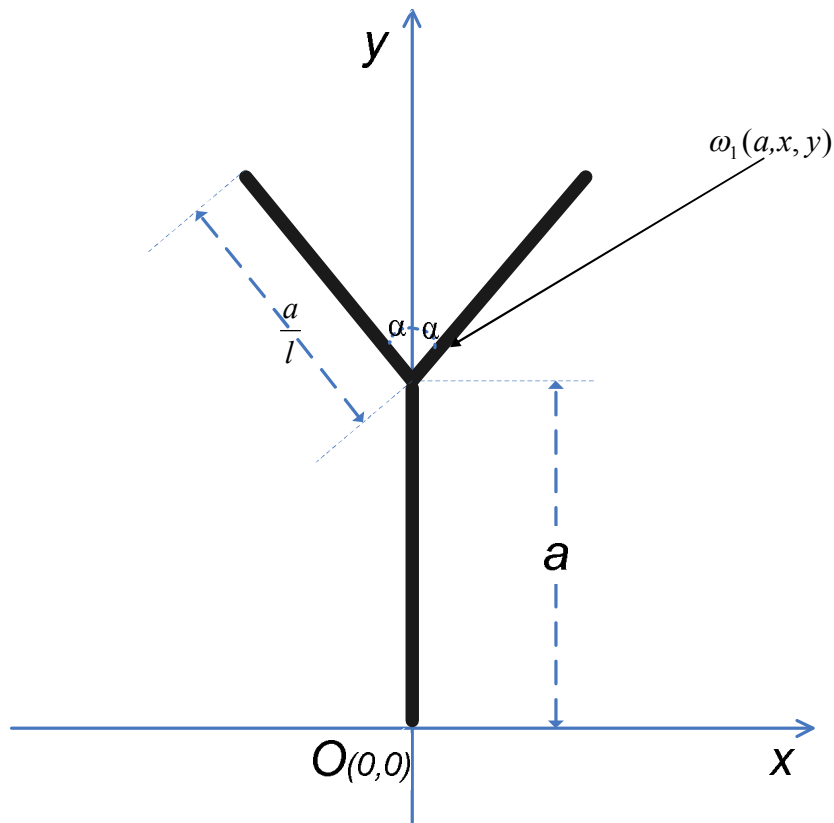


Рис 2.5. Рисунок дерево фрактал при $k=1$.

$$\omega_{k0}(a, x, y) = \omega_0(a/l, x, y);$$

$$\omega_{k1}(a, x, y) = \omega_{k-1}(a/l, x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) - a \sin(\alpha)/l, x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - a \cos(\alpha)/l);$$

$$\omega_{k2}(a, x, y) = \omega_{k-1}(a/l, x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) + a \sin(\alpha)/l, x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) - a \cos(\alpha)/l).$$

Здесь ω_{k0} – уравнения корневая ветвь, ω_{k1} – уравнения левая ветвь, ω_{k2} – уравнения правая ветвь. Теперь пишем окончательная уравнения для любой k , т.е. итерационное уравнение:

$$\omega_k(a, x, y) = \omega_{k0} \vee_0 \omega_{k1} \vee_0 \omega_{k2}.$$

На рисунки рис 2.6. а) – з) и рис 2.7. отображается дерево фракталов при разные значениях k , a и l .

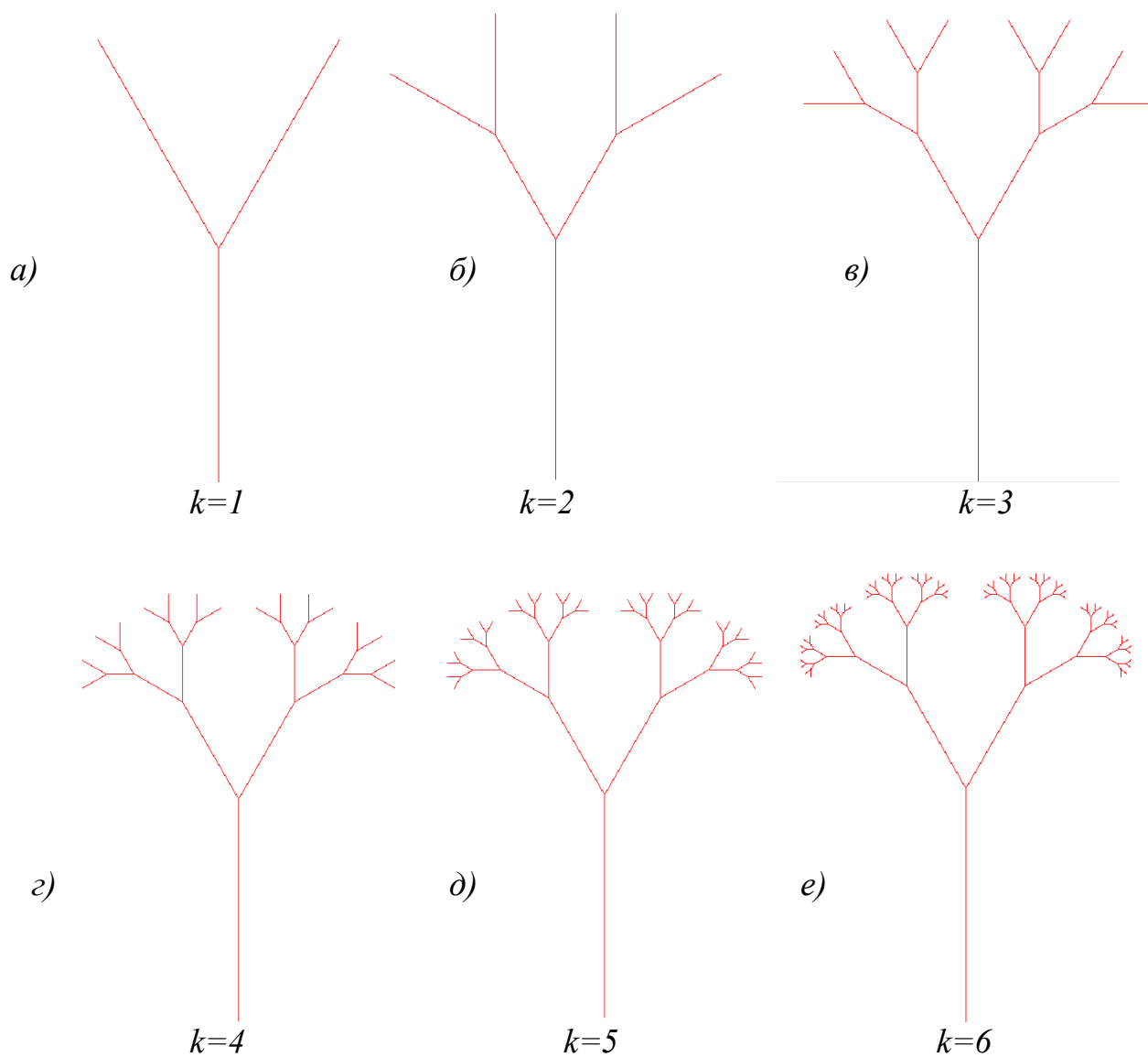


Рис 2.6. Здесь $\alpha=30^\circ$, $l=2$, $r=1$.

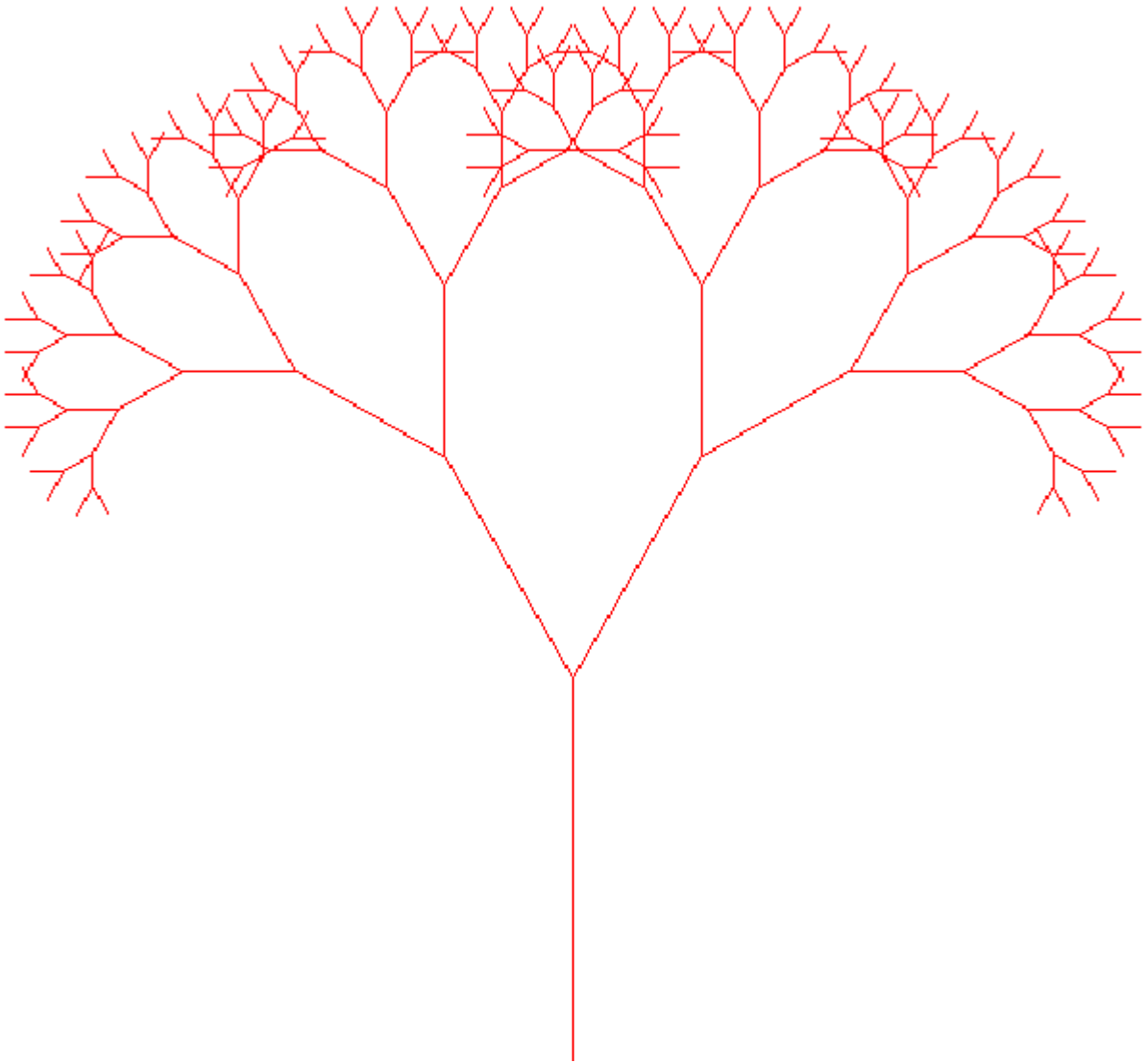


Рис 2.7. $k=7$, $a=300$, $\alpha=30^\circ$, $l=1.5$, $r=1$.

2.3 Построение рекуррентно – аналитических уравнение ковров

Для составить уравнение «Ковер» фрактал так же будет нулевой уровня (ω_0) четырехугольник (на рис 2.8.а.) :

$$\omega_0(x, y) = \frac{a^2 - x^2}{2a} \wedge_0 \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0$$

Где a и b стороны четырехугольника. Напишем дополнительные уравнение $g\omega_k(x, y)$. На $k=0$ эта функция эквивалент на основной функция : $g\omega_0(x, y) \equiv \omega_0(x, y)$.

Уравнение $g\omega$ при $k=1$ так будет :

$$g\omega_1(x,y) = g\omega_0(2x, 2y) \leq 0$$

Здесь напишем исходного уравнение для $k=1$ (отображена на рис 5.б):

$$\omega_1(x,y) = g\omega_0(x,y) \wedge_0 g\omega_1(x,y) \geq 0$$

Теперь можно выражать функция $g\omega$ для остальные k ($k=2, 3, 4, \dots$) :

$$g\omega_k(x,y) = g\omega_{k-1}(2x-a, 2y-b) \wedge_0 g\omega_{k-1}(2x-a, 2y+b) \wedge_0 \\ g\omega_{k-1}(2x+a, 2y-b) \wedge_0 g\omega_{k-1}(2x+a, 2y+b) \geq 0$$

И окончательная уравнения фрактал ковра так будет:

$$\omega_k(x,y) = g\omega_0(x,y) \wedge_0 g\omega_1(x,y) \wedge_0 \dots \wedge_0 g\omega_k(x,y) \geq 0$$

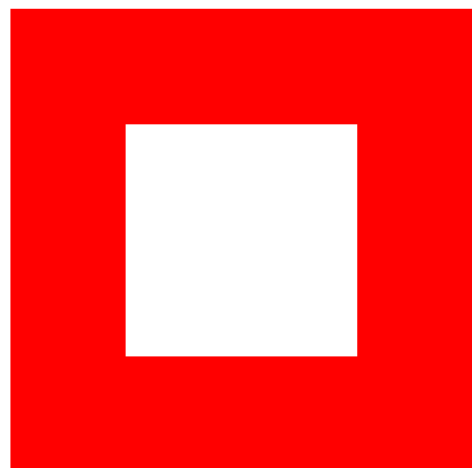
На рисунке рис 2.8. и рис 2.9. отображается этой фрактал при различные значениях k .

a)



$k=0$

б)



$k=1$

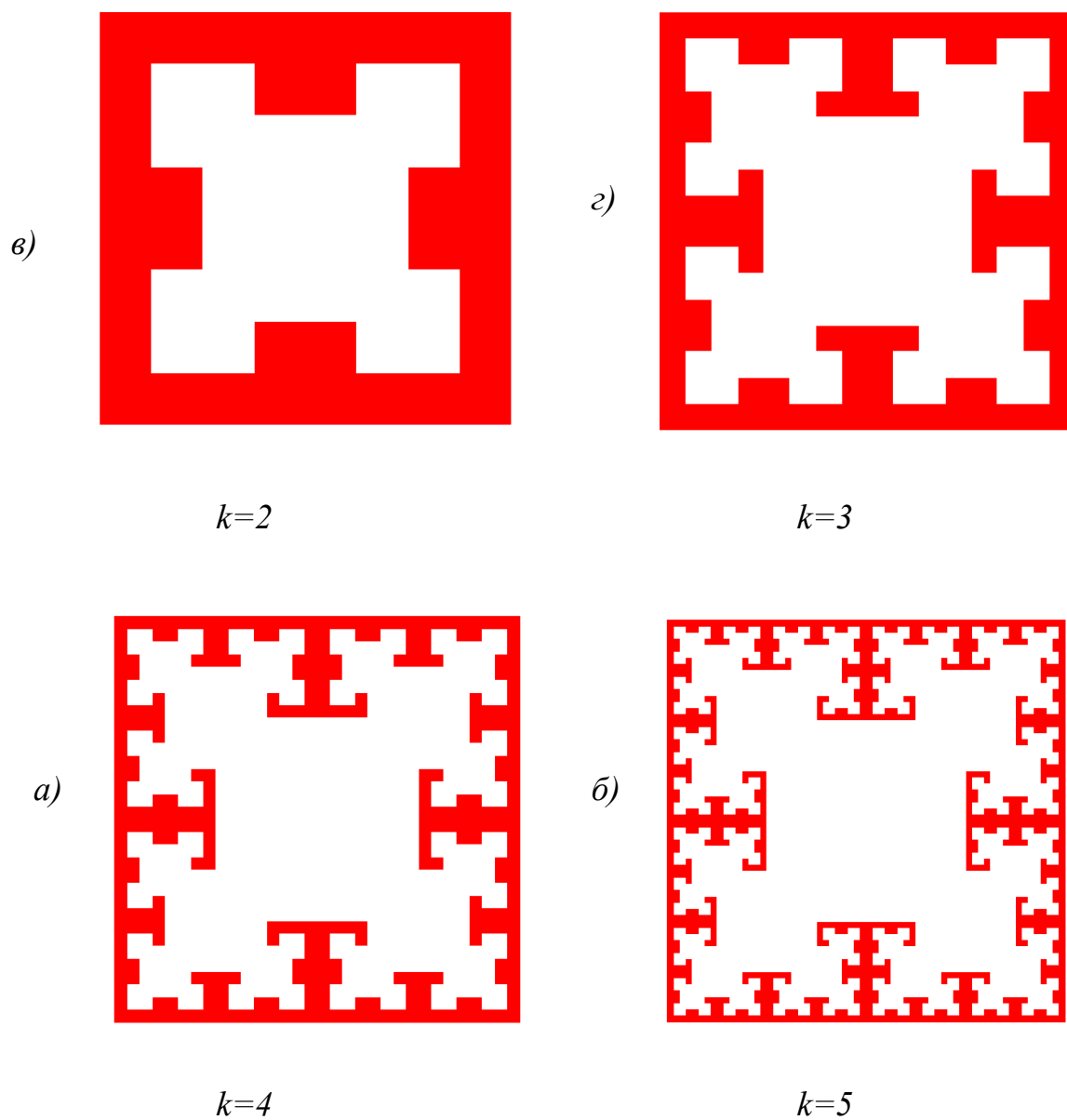


Рис 2.8. Рисунки фрактала при $k=0;1;\dots,5$.

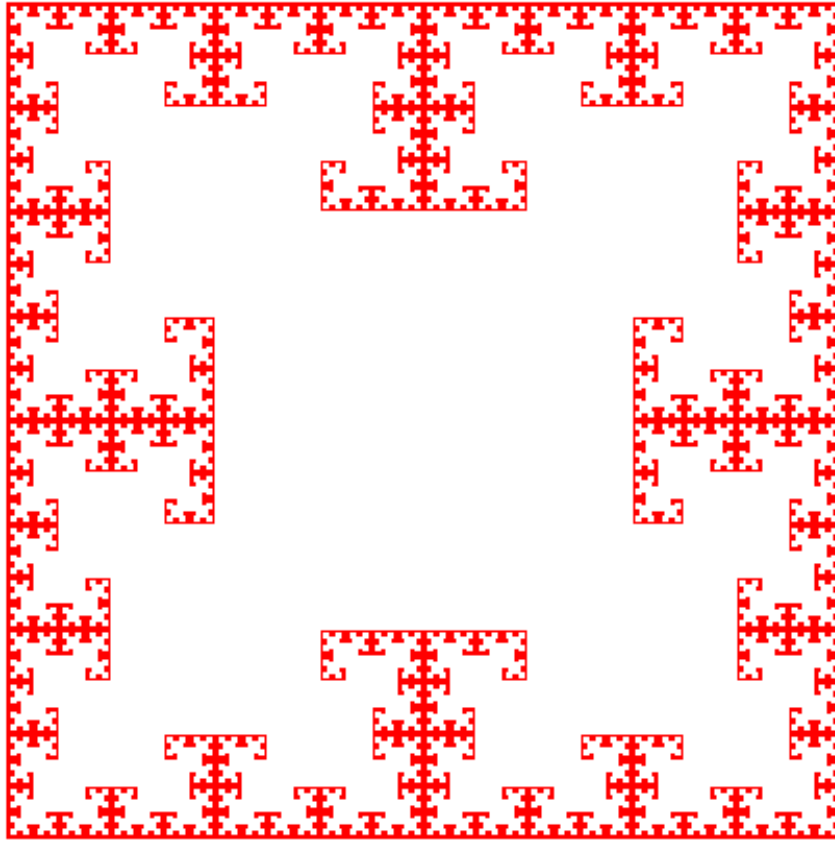


Рис 2.9. $k=7$

Салфетка Серпинского

Для уравнения равностороннего треугольника или салфетки Серпинского показана на рис 2.10.а определится следующим вида:

$$\omega_0(x, y) = \left(\left(\frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \wedge_0 \left(\left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^2 - \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^2 \right) \geq 0$$

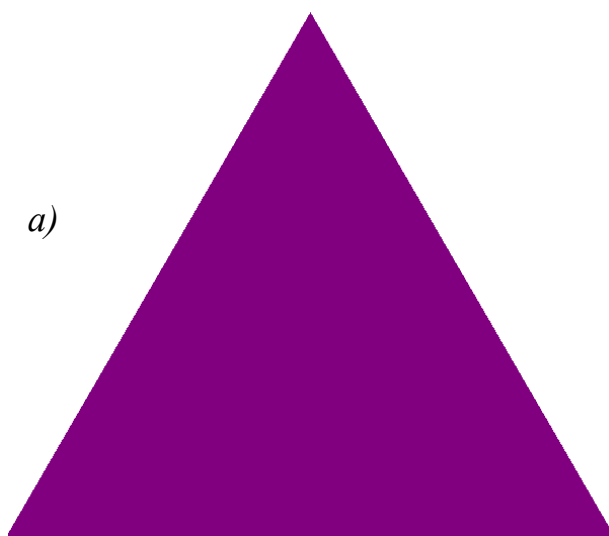
При $k=1$ уравнения Салфетка Серпинского будет следующим виде (рис 7.б):

$$\omega_1(x, y) = \omega_0\left(2x + \frac{a}{2}, 2y\right) \vee_0 \omega_0\left(2x - \frac{a}{2}, 2y\right) \vee_0 \omega_0\left(2x, 2y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

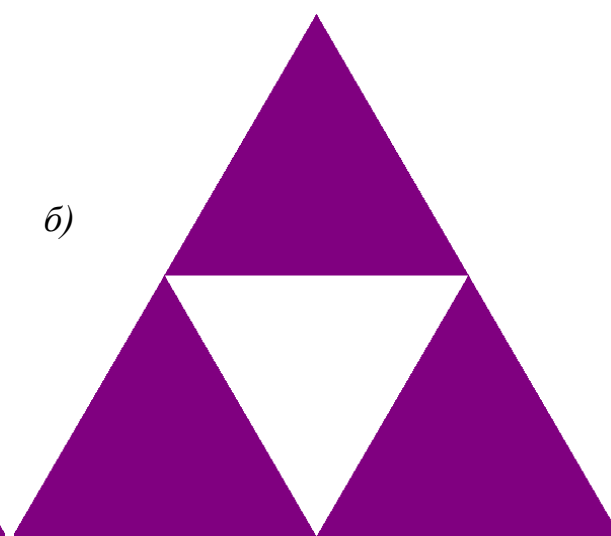
Аналогично можно написать формулы R- функции для салфетки Серпинского для остальных k (рисунки рис 7. б), в), г), д), е) и рис 8.):

$$\omega_k(x,y) = \omega_{k-1}(2x + \frac{a}{2}, 2y) \vee_0 \omega_{k-1}(2x - \frac{a}{2}, 2y) \vee_0 \omega_{k-1}(2x, 2y - \frac{a\sqrt{3}}{2}) ,$$

Здесь $k=1, 2, 3, \dots$.



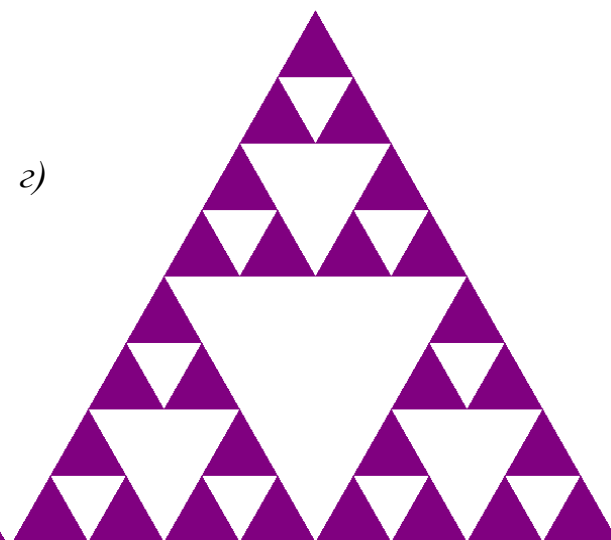
$k=0$



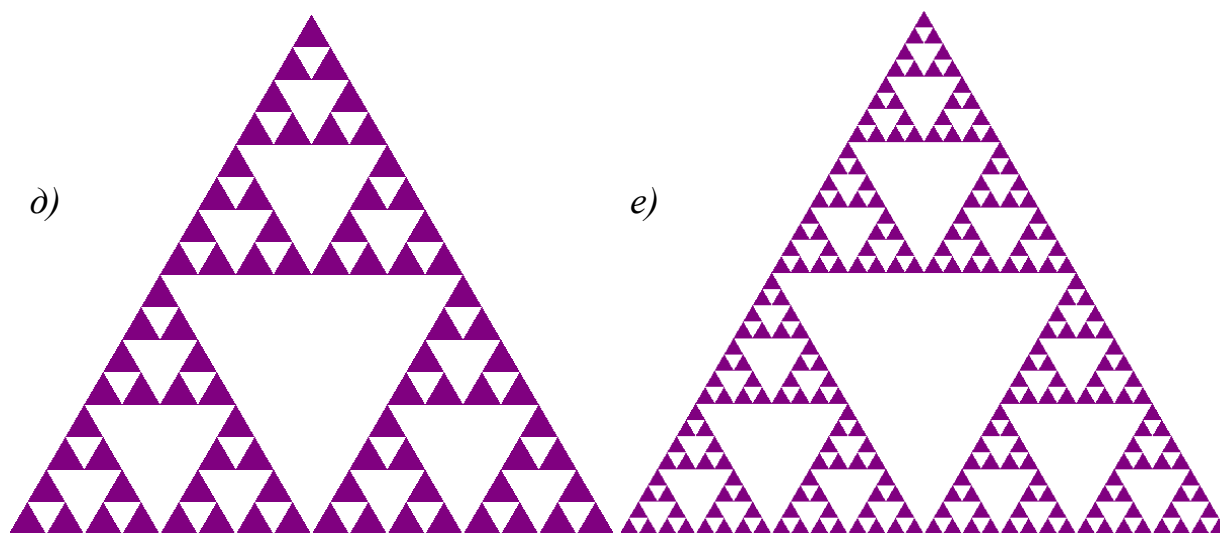
$k=1$



$k=2$



$k=3$



$k=4$ $k=5$
 Рис 2.10. Рисунки фрактала Салфетка Серпинского при
 $k=0, k=1, k=2, k=3, k=4$ и $k=5$.

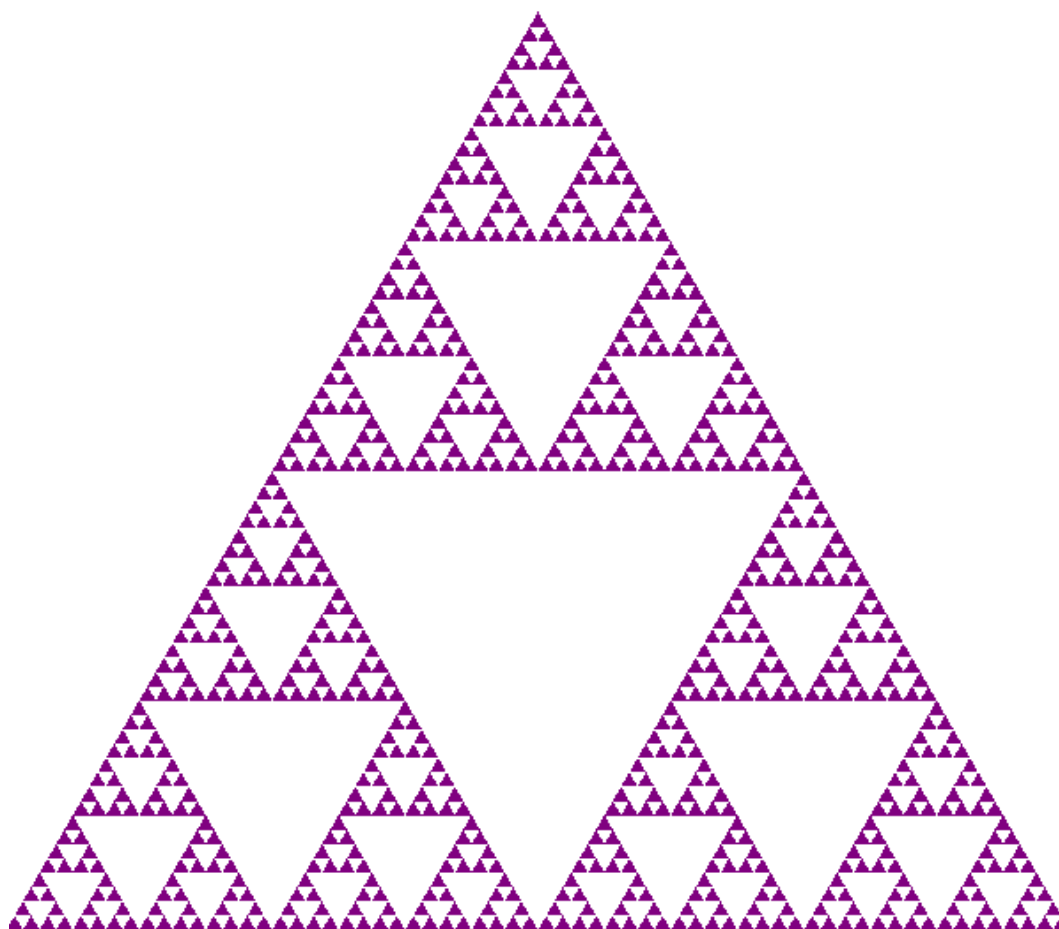


Рис 2.11. Рисунки фрактала Салфетка Серпинского при $k=6$.

2.4 Выводы по второй главе

Основные результаты данной главы заключаются в следующем:

1. Изучен метод R –функций при построение уравнение фракталов;
2. Разработан алгоритм построения уравнений фракталов на базе R -функции;
3. Построено рекуррентно – аналитическое уравнение классических фракталов на базе R -функции;
4. Построено рекуррентно – аналитическое уравнение ковров.

3. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОЙ ОБЕСПЕЧЕНИЯ

3.1 Структура программного обеспечения

Этой программа создана среди платформа Borland Delphi 7 на языке Object Pascal 7.0. Поскольку программы создана на этом платформа работает быстро, создать программы и формы – очень просто, и созданная программа будет иметь хороший и красивый дизайн.

Основное окно программа состоит из фрактальные таб–страницы и информационная страница. Чтобы начать работа, сначала надо выбрать нужная фрактала из таб–страницы (таб–панели). Например, фракталы Серпинского, фрактал Дерево или ковер-фрактал.

На выбранная страница есть компоненты для изменение параметры выбранного фрактала и команды для выбранной тип фрактала.

Есть следующие параметры выбранного фрактала :

- порядок фрактала;
- размер фрактала;
- цвет фрактала;
- тип фрактала (некоторые из них);
- α – угол между вершинами (на фрактал дерево);
- φ – начальный угол (на фрактал дерево);
- kk – коэффициент уменьшение (на фрактал дерево);
- количества углов на многоугольнике, которые создатель фрактала (Снег Коха);
- дополнительные размер фрактала (на ковер-фрактал).

Команды для выбранного фрактала :

- рисовать фрактала;
- очистить рисунка.

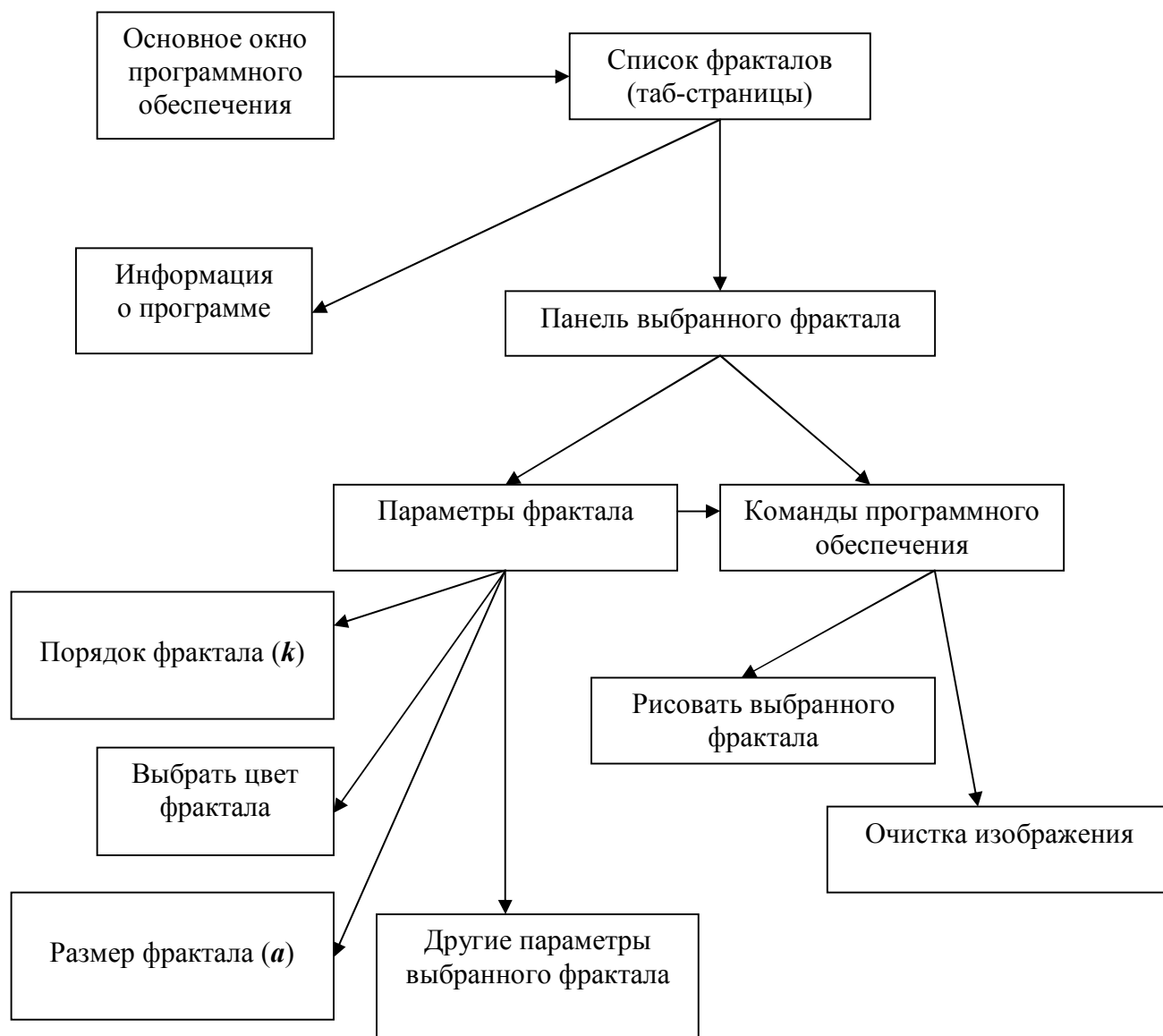


Рис. 3.1. Структура программного обеспечения

3.2 Описание модулей программного обеспечения

Программное обеспечение состоит из одного модуля. В этом модуле есть следующие функции :

Функции для линии Гилберта:

gilbertLen – определяет коэффициент умножения к минимальной длине линии. gilbertA, gilbertB, gilbertC, gilbertD – функции для линии Гилберта A,B,C,D

```
function gilbertLen(deg:integer):integer;  
Procedure gilbertA(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);  
Procedure gilbertB(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);  
Procedure gilbertC(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);  
Procedure gilbertD(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);
```

Функции для линии Серпинского:

```
Function serpinLenn(i:integer):real;  
Procedure serpinA(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);  
Procedure serpinB(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);  
Procedure serpinC(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);  
Procedure serpinD(i:Integer;len:Integer; x,y:Integer; can:TCanvas);  
Procedure serpinS(i:Integer;len:Integer;x,y:Integer;can:TCanvas);
```

Функции для ковра Серпинского и салфетка Серпинского:

serpinKk – функция ковра Серпинского. serpinW – базовая функция для ковра Серпинского. salfetka_fast_draw – функция для быстрого рисовать салфетка Серпинского.

```
function serpinW(k,a,b:Integer;x,y:Real):Boolean;  
function serpinKk(k,a,b:Integer;x,y:Integer):Boolean;
```

procedure

salfetka_fast_draw(can:TCanvas;Color:TColor;k,a:Integer;x,y:Integer);

Функции для линия Коха, снег Коха и крест Коха:

кохW – функция чтобы рисовать линию Коху. кохWs – функция чтобы рисовать снег Кох. кохWw – базовая функция для кресте Кохе. кохWk – функция чтобы рисовать крест Кох.

function кохW(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;

function кохWs(n:Integer;k,r:Integer;x,y:Integer):Boolean;

function кохWw(k,a:Integer;x,y:Integer):Boolean;

function кохWk(k,r:Integer;x,y:Integer):Boolean;

Функции для фрактала Коробка:

function қutiW(k,a:Integer; x,y:Integer):Boolean;

procedure box_fast_draw

(can:TCanvas;k,a:Integer;xcen,ycen,height,width:Integer);

Функции для фрактал-дерево

function bur(p:TPoint;fi:Integer):TPoint;

function treeW(k,a:Integer;fi,alpha:Integer;x,y:Integer):Boolean;

Функции для ковер-фрактал

function fgWw(k:Integer;a,b:Integer;x,y:Real):Boolean;

function fgW(k:Integer;a,b:Integer;x,y:Integer):Boolean;

3.3 Инструкция по использования программного обеспечения

Созданная программа очень просто для использование. На рис. 3.2 показана начальная ситуация программа.

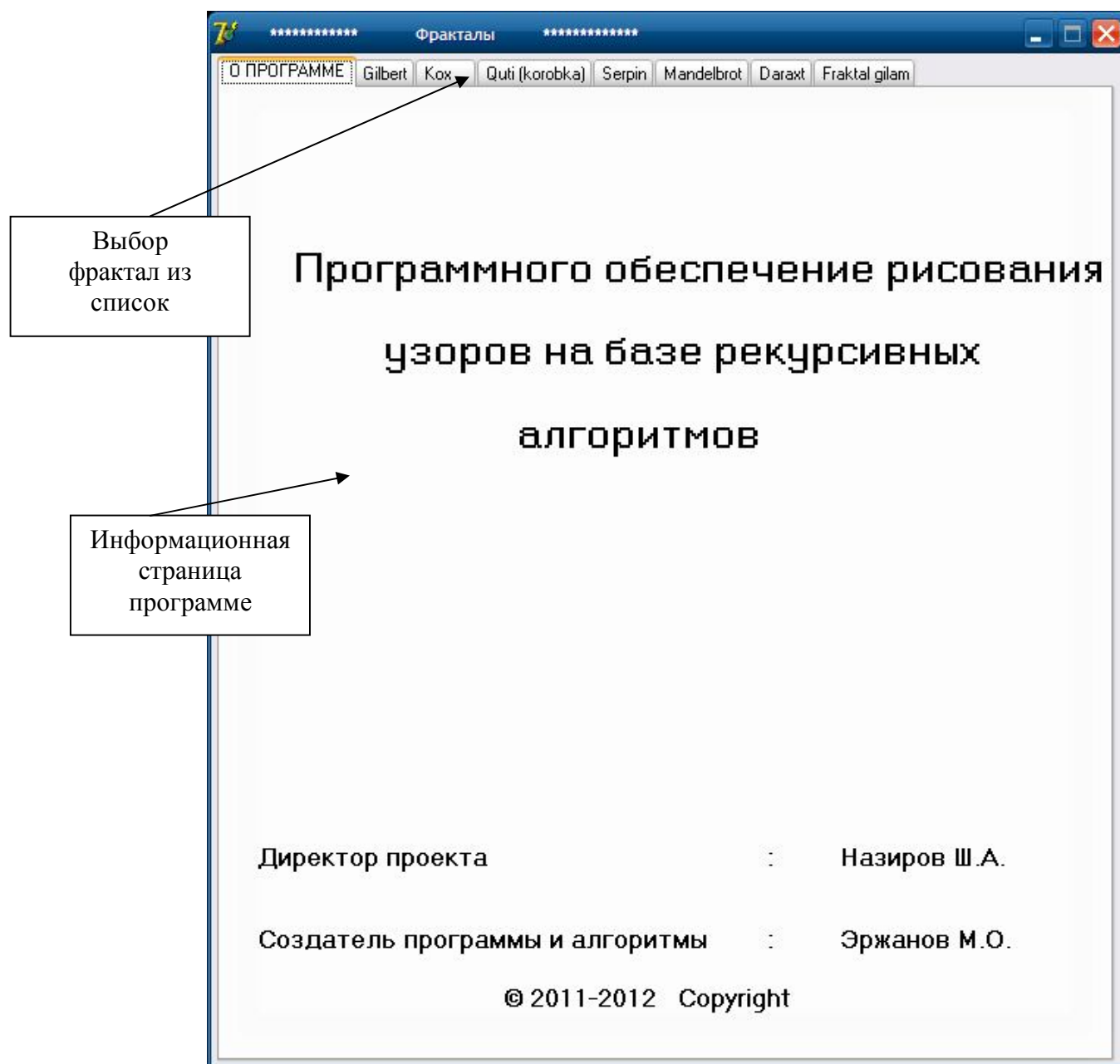


Рис. 3.2. Программа работает.

В этой страница приведены название, и так же данные о создатели текущего программного обеспечения.

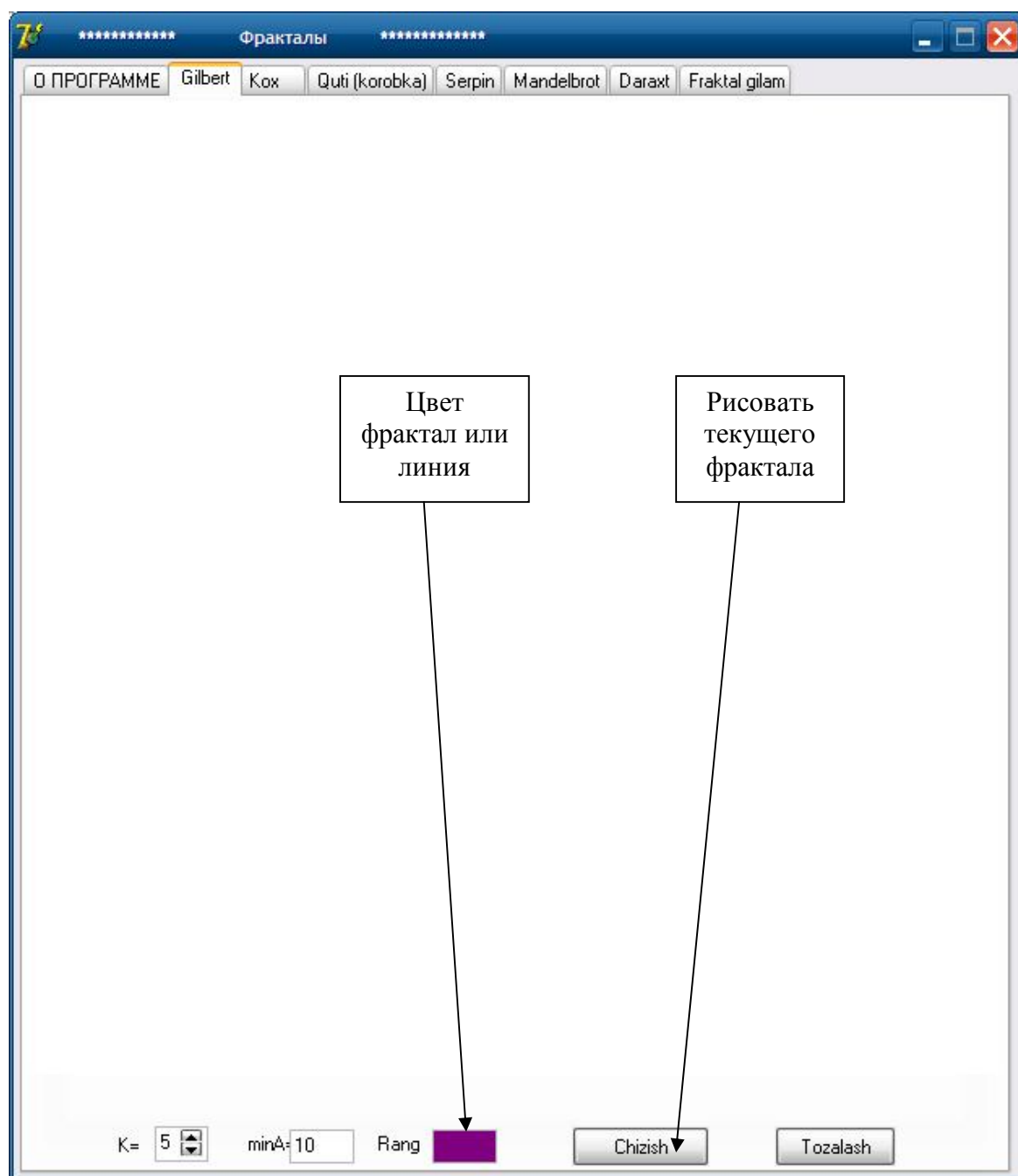


Рис. 3.3. Пустая рисунка.

Эта страница кривая линия Гилберта. Сначала у каждого таб–страница будет так пуста (или пустая рисунка). У каждого странице есть кнопки, чтобы рисовать фрактала.

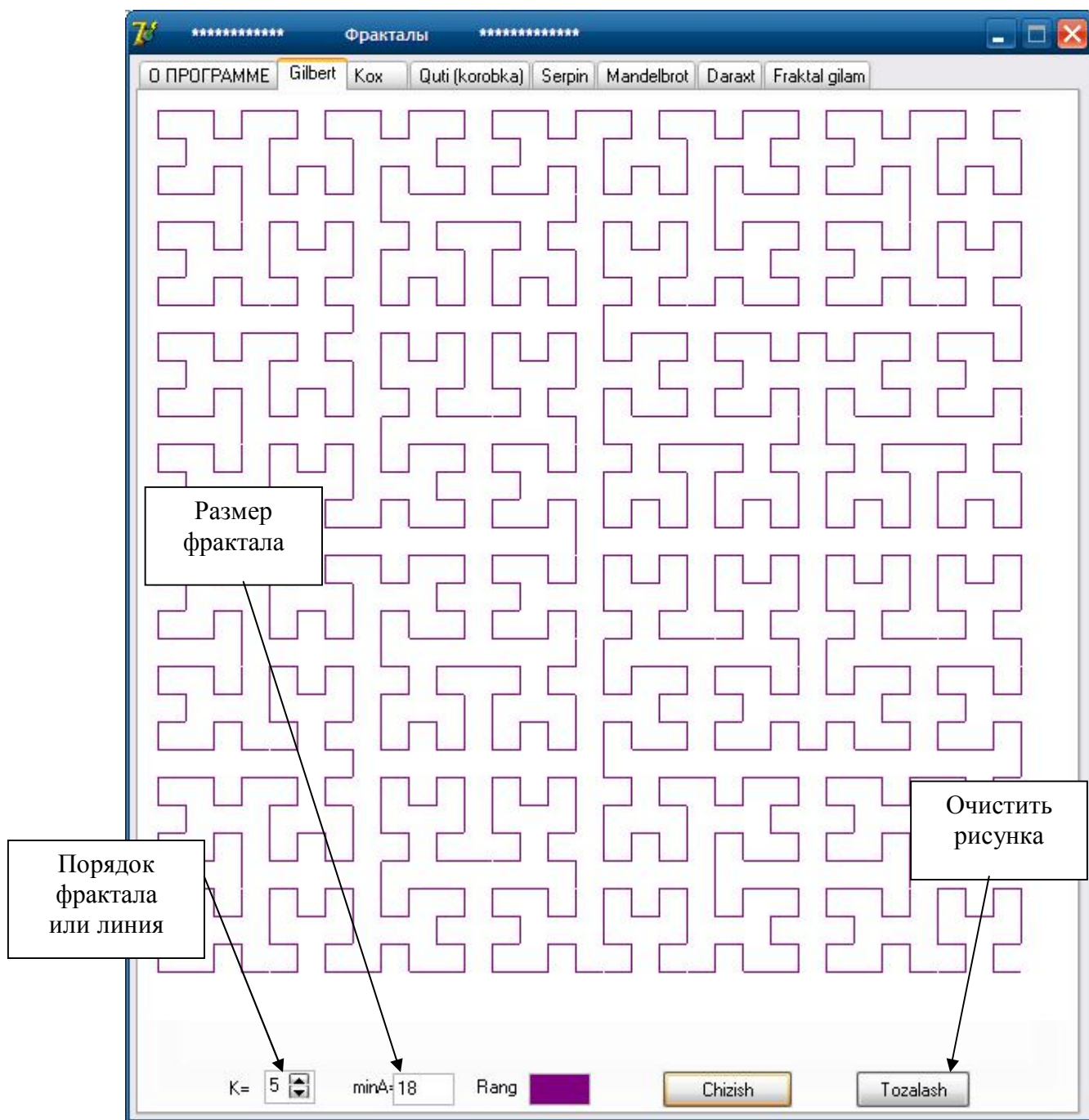


Рис. 3.4. Линия Гилберта.

На этом рисунке нарисована кривая линия Гилберта. Здесь порядок линии 5 и минимальная длина линии 18 пиксель. У каждого экрана есть кнопка для очистки панели-рисунка (панель для рисования нужных фракталов или линий).

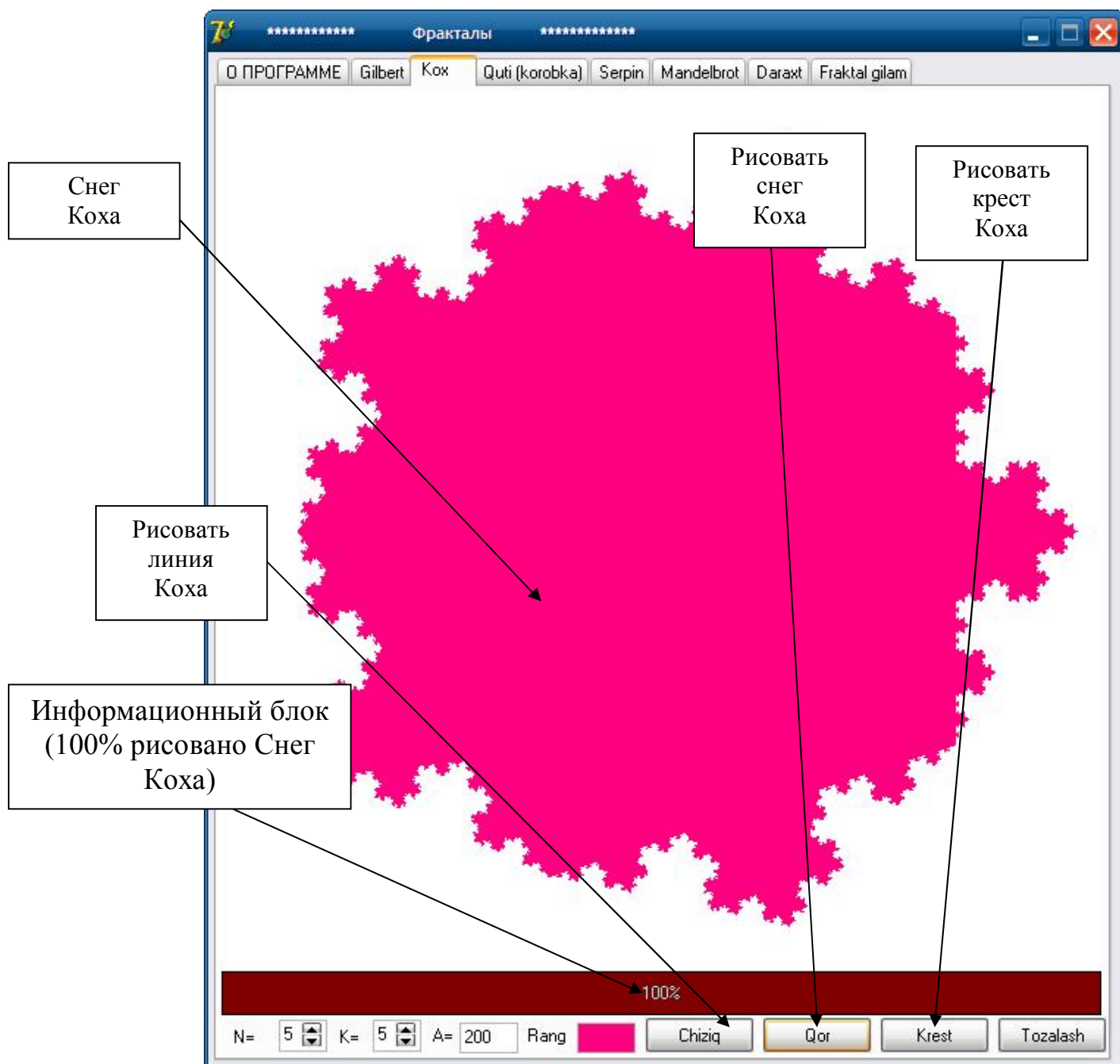


Рис. 3.5. Снег Коха.

У некоторых странице есть несколько фракталы, как этот странице. В этом странице есть три фрактала – линия Коха, снег Коха и крест Коха. Чтобы рисовать каждого фрактала есть отдельная кнопка.

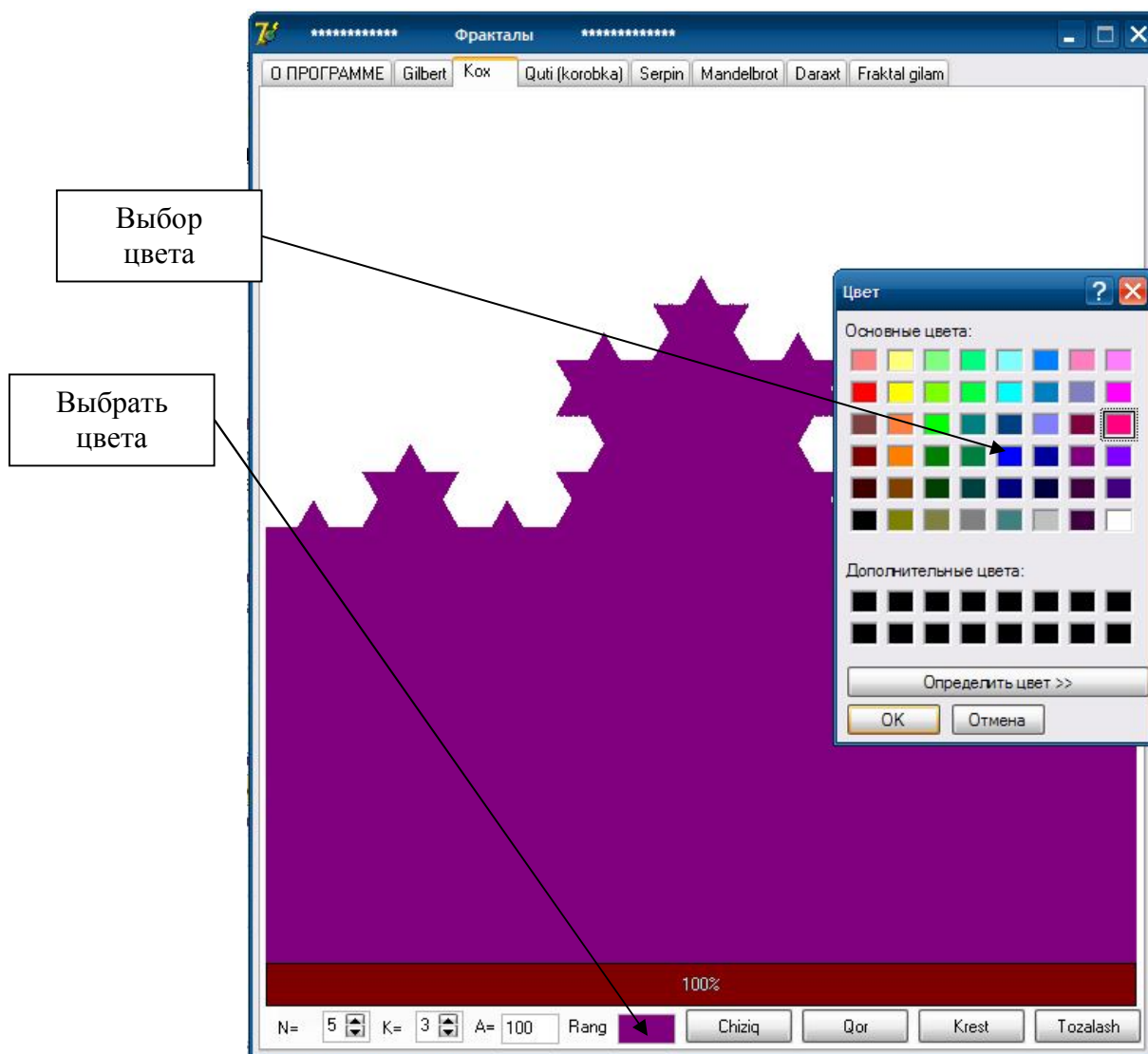


Рис. 3.6. Выбор цвета рисунка.

У каждого также же есть мини-площадка для выбора цвет фрактала. После двойной щелчок этой мини-площадка, будет открыть дополнительное окно для выбора цвета фракталы текущего страница.

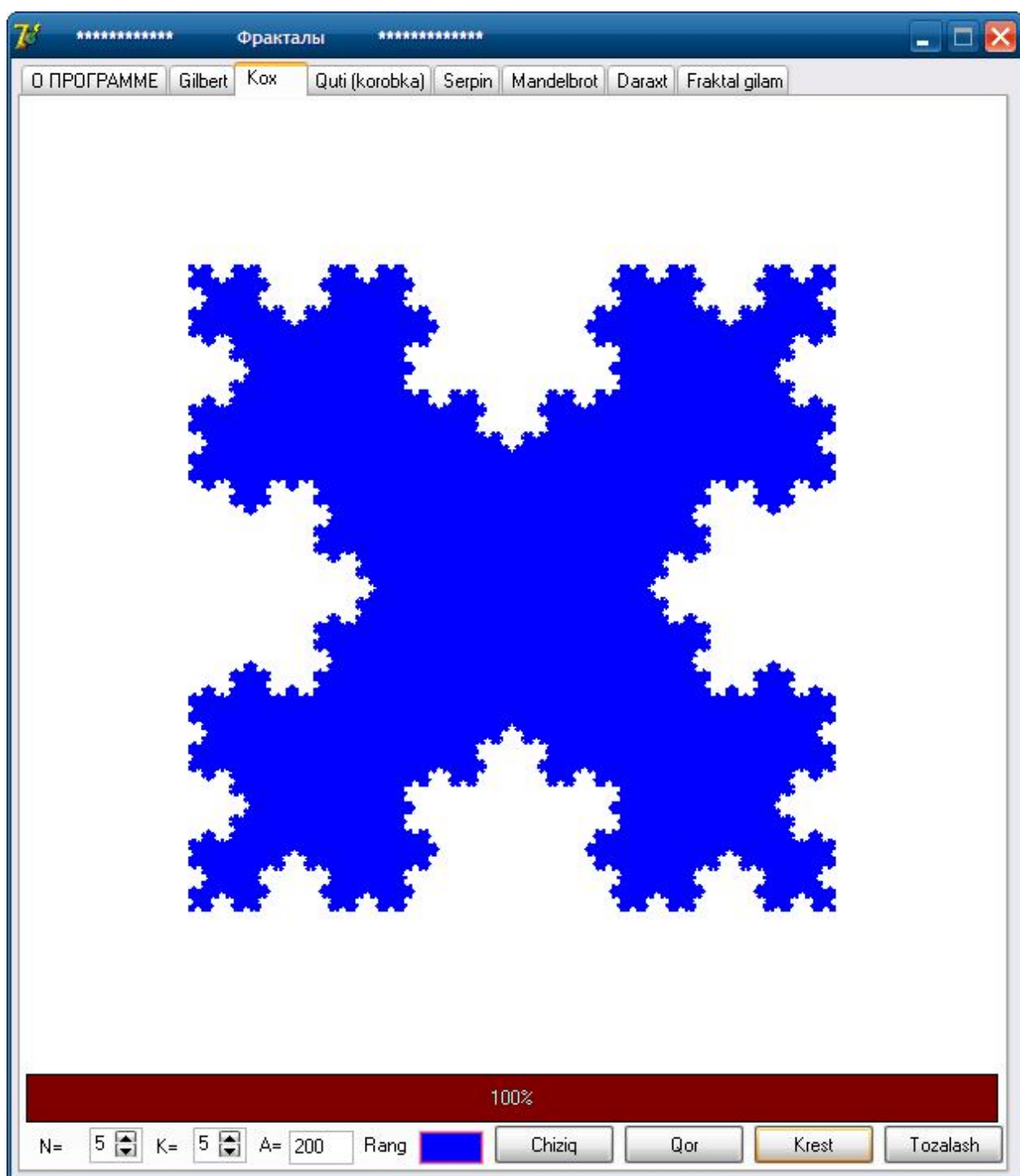


Рис. 3.7. Крест Коха.

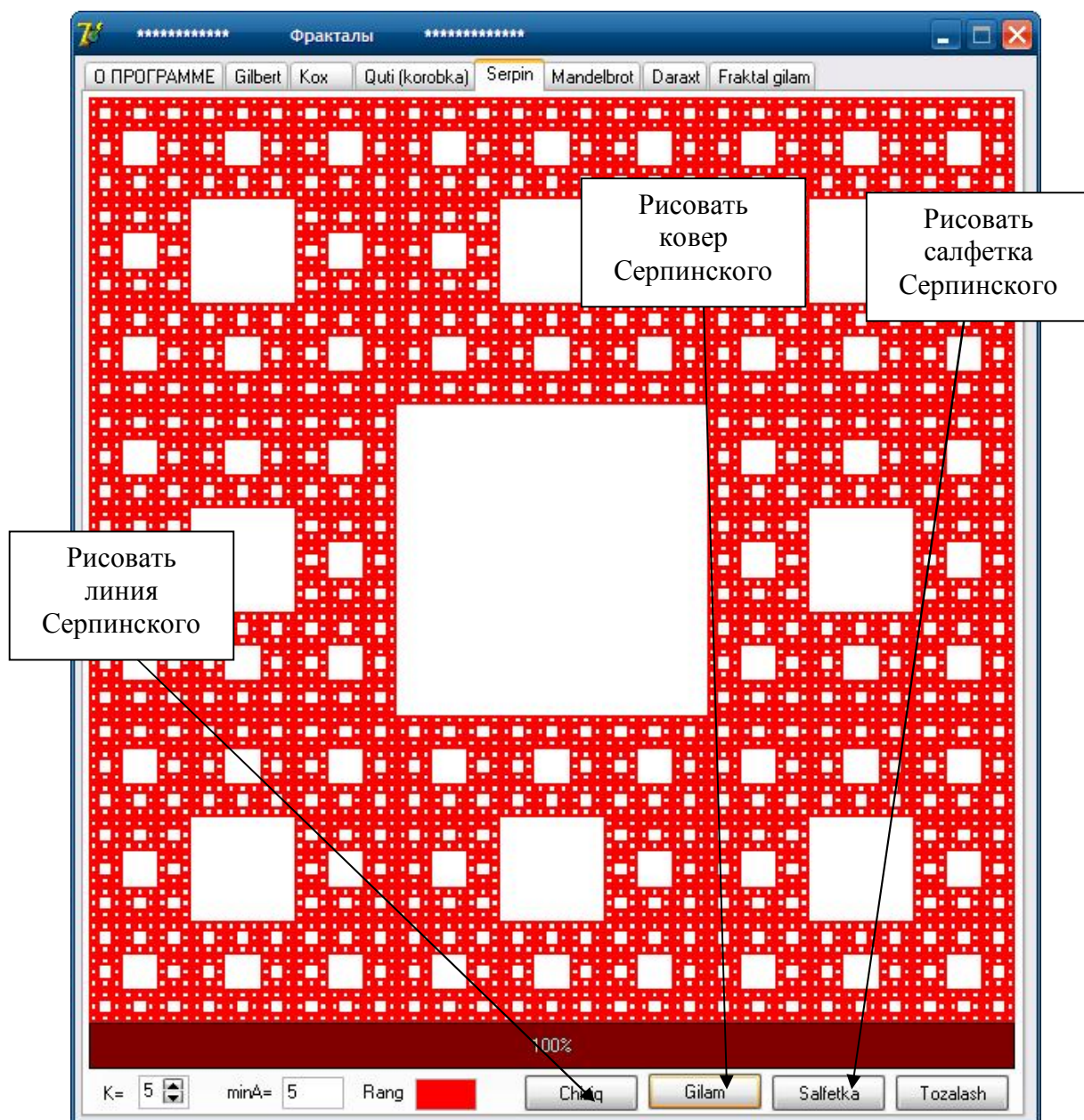


Рис. 3.8. Ковер Серпинского.

3.4 Выводы по третьей главе

Основные результаты данной главы заключаются в следующем.

1. Разработана структура программного обеспечения;
2. Разработано функционального модуль программного обеспечения;
3. Разработана инструкция по использованию программного обеспечения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной магистерской работы заключаются в следующем :

1. Изучены и исследованы размерности фракталов.
2. Изучены классификация фракталов.
3. Представлен метод построения уравнения фракталов.
4. Построены рекуррентны уравнения классических фракталов и уравнения ковров на базе R-функции.
5. Разработана программное обеспечение рисования изображения фракталов.
6. Разработан удобный пользовательский интерфейс.
7. Программное обеспечение может быть использовано в разных областях:
 - в текстильной промышленности при рисовании узоров для штамповки на ковры, ткани и т.д.;
 - в радиотехнике – фрактальные антенны, при проектировании антенных устройств;
 - в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких, как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Указ Президента Республики Узбекистан «О дальнейшем развитии компьютеризации и внедрении информационно-коммуникационных технологий», г. Ташкент, 30 мая 2002 г.
2. Закон Республики Узбекистан «Об образовании», г. Ташкент, 29 августа 1997 г.
3. Закон Республики Узбекистан «Об информатизации», г. Ташкент, 11 декабря 2003 г.
4. Постановление Президента Республики Узбекистан «О дополнительных мерах по дальнейшему развитию информационно-коммуникационных технологий», г. Ташкент, 8 июля 2005 г.
5. Постановление Президента Республики Узбекистан «О мерах по дальнейшему внедрению и развитию современных информационно-коммуникационных технологий», г. Ташкент, 21 марта 2012 г.
6. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М: Институт компьютерных исследований, 2002. - 656с.
7. Пайтген Х.О. Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.:«Мир» ,1991. - 206с.
8. Федер Е. Фракталы. М.:«Мир» ,1991. – 254с.
9. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. - 552с.
10. Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебры и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. – М.: Физматлит, 2004. - 308 с.\

- 11.Максимено-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков, ИПМаш НАН Украины, 2009. - 306 с.
- 12.Дубовиков М.М, Старченко Н.В. ЭКОНОФИЗИКА И АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
- 13.Беданоква С.Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организацией. Нальчик, 2007.- 102 с.
- 14.Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Москва, 2002. – 160с.
15. Погодаева Е.А. ТЕОРИЯ ФРАКТАЛОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ
- 16.Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. М.: Интернет-трейдинг, 2004. - 304с.
- 17.Божокин С.В., Д. А. Паршин. Фракталы и мультифракталы. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 128с.
- 18.Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. – 353с.
- 19.Газале М.Г. От фараонов до фракталов. «Институт компьютерных исследований», 2002. – 272с.
- 20.Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Издательство: «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528с.
- 21.Стрыгин А. Ю. Анализ фрактальных свойств финансово-экономических процессов в экономике РФ
- 22.Дмитриев С.В. О причинности нарушений в сфере обращения финансов и капиталов в открытой экономике // Наука Кубани, 2000, с.14.
- 23.Дмитриев С.В. К вопросу о спектральных хаотических отображениях квантовых морфологических систем в приложении к экономике // Наука Кубани, №6, 2000, с.26.
- 24.Тарасенко В.В. Фрактальная логика. «Прогресс-Традиция», 2002. – 160с.

- 25.Шабетник В.Д. Фрактальная физика. Наука о мироздании. М.: Тибр, 2000.- 416 с.
- 26.Перегуда Е.С. Ускорение фрактального алгоритма в системах сжатия и передачи изображений.// Телекоммуникации. 2007. №6. С.2-7.
- 27.Абу Айаш Т.А. Схемы блочного разбиения для фрактального сжатия неподвижных изображений / Абу Айаш Т.А., Лебедева Е.Ю. // Труды Одесского политехнического университета. – 2000. – Вып. 2.
- 28.Абу Айаш Т.А. Генерация фракталов при помощи L-систем // Труды Одесского политехнического университета. – 2001. – Вып. 1. – С. 120 – 123.
- 29.Абу Айаш Т.А. Розробка метода фрактального стискування відеопотоків в автоматизованих системах управління хірургічними операціями.
- 30.Гелашвили Д. Б., Якимов В. Н., Иудин Д. И., Розенберг Г. С. Фрактальные аспекты таксономического разнообразия. Журнал общей биологии. - М.: Наука, 2010. - Том 71, N 2. - . 115-130.
- 31.Кириллов А. А. Повесть о двух фракталах. — Летняя школа «Современная математика», 2009. – 184с.
- 32.Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. — М.: «Мир», 1993. – 176с.
- 33.Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. — М.: изд-во МГУ, 1998. – 416с.
- 34.Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. — М.: «Мир», 1988.
- 35.Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. – 528с.
- 36.Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. – 352с.

- 37.Мандельброт Б., Ричард Л.Х. (He) послушные рынки: фрактальная революция в финансах = The Misbehavior of Markets. — М.: «Вильямс», 2006. — С. 400. — ISBN 5-8459-0922-8
- 38.Велигоша А.В. Решение задач цифровой фильтрации на основе применения непозиционных кодов / А.В. Велигоша, Д.А. Велигоша // Известия вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. - 2006. - № 3. - С. 21-22.
- 39.Крупенин С.В. Фрактальные излучающие структуры и аналоговая модель фрактального импеданса. Москва, 2009. – 157с.
- 40.Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Романов Е. П. Автоволновые процессы при нелинейной фрактальной диффузии // ДАН. 1999. Т. 369, № 3.- С. 332-333.
- 41.Нигматуллин Р.Р. Теория и методы анализа диэлектрических спектров, описываемых дробно-степенными выражениями с действительными и комплексно-сопряженными показателями. Казань, 2009.
- 42.Довбня Л.А. Моделирование и фрактальный анализ процесса перемангничивания напряженных феррогранатовых пленок. Самара, 2001.
- 43.Леготкин Р.Л. Исследование методов фрактального анализа для целей тематического дешифрирования аэрофотоизображений. Москва, 2002
- 44.Иудин, Дмитрий Игоревич. Фрактальные модели динамики активных распределенных систем. Нижний Новгород, 1998.
- 45.Чуприков Н.Л. Вопросы квантовой динамики частицы в структурах с обычной и фрактальной геометрией. Томск, 2010.
46. <http://www.wikipedia.org/> - универсальная интернет-энциклопедия.
47. <http://www.google.com/> - поисковая система.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Созданная программа очень проста для использования. На рис. 1 показана начальная ситуация программы.

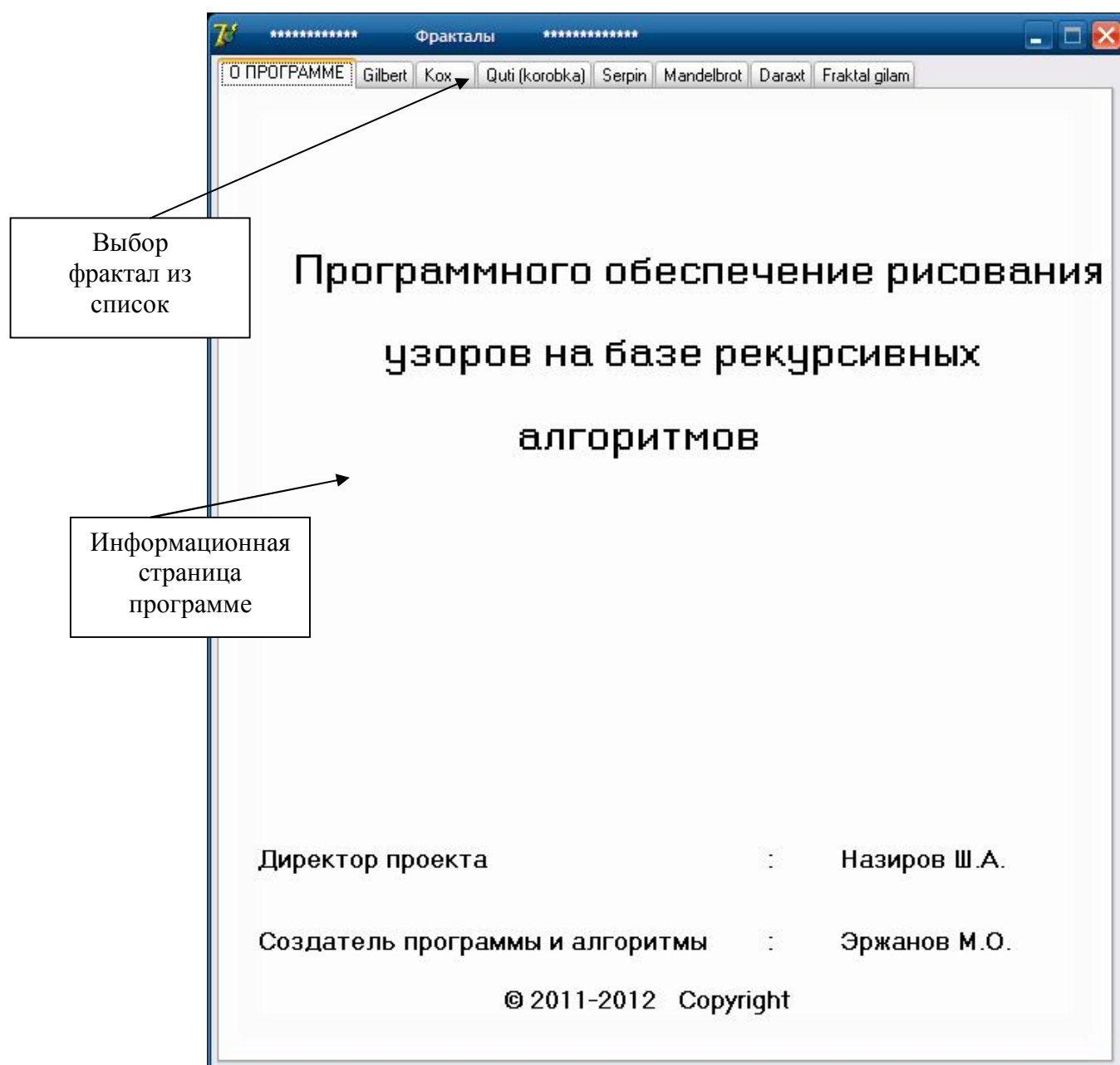


Рис. 1. Программа работает.

В этой странице приведены название, и так же данные о создателях текущего программного обеспечения.

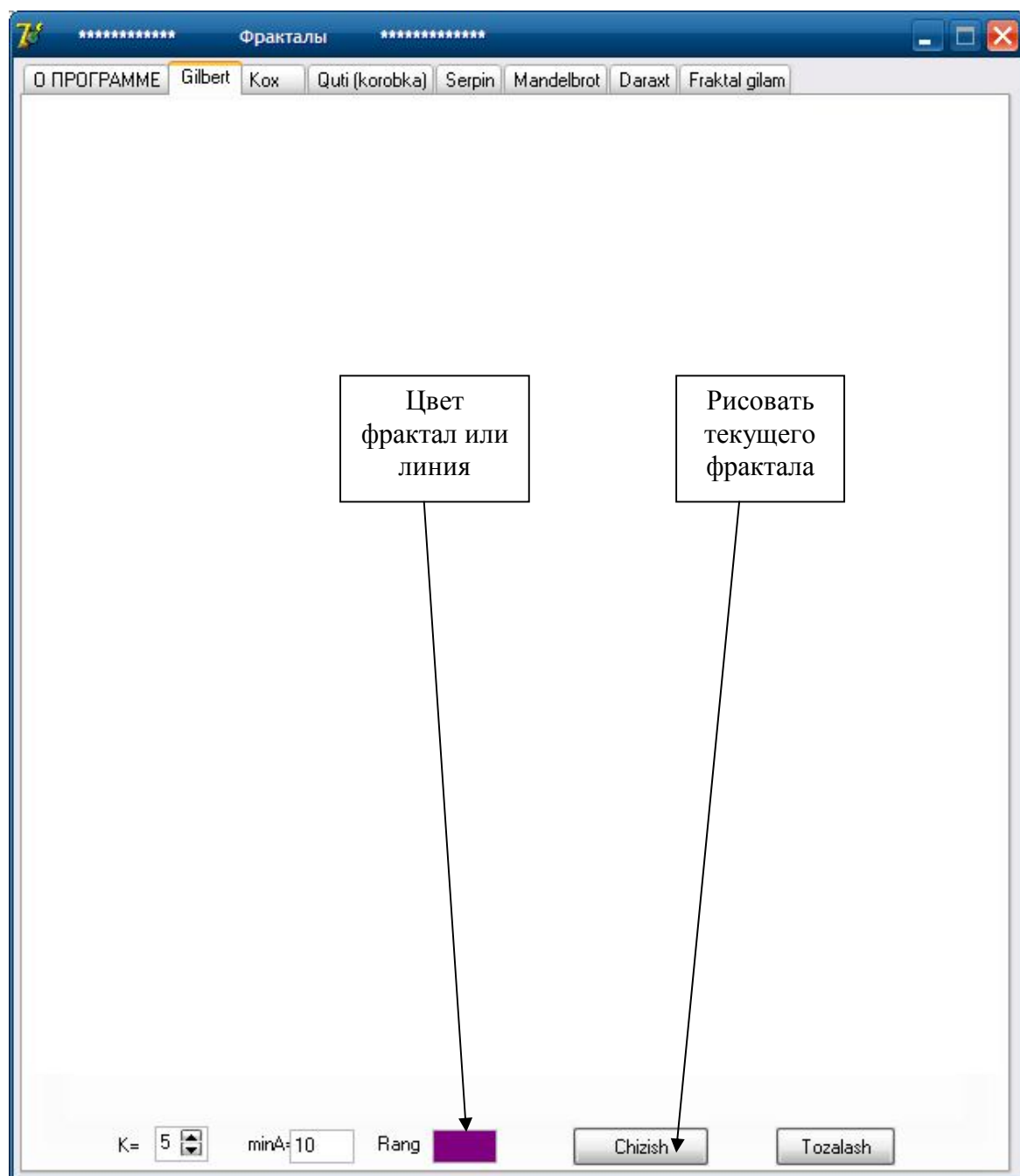


Рис. 2. Пустая рисунка.

Эта страница кривая линия Гилберта. Сначала у каждого таб–страница будет так пуста (или пустая рисунка). У каждого странице есть кнопки, чтобы рисовать фрактала.

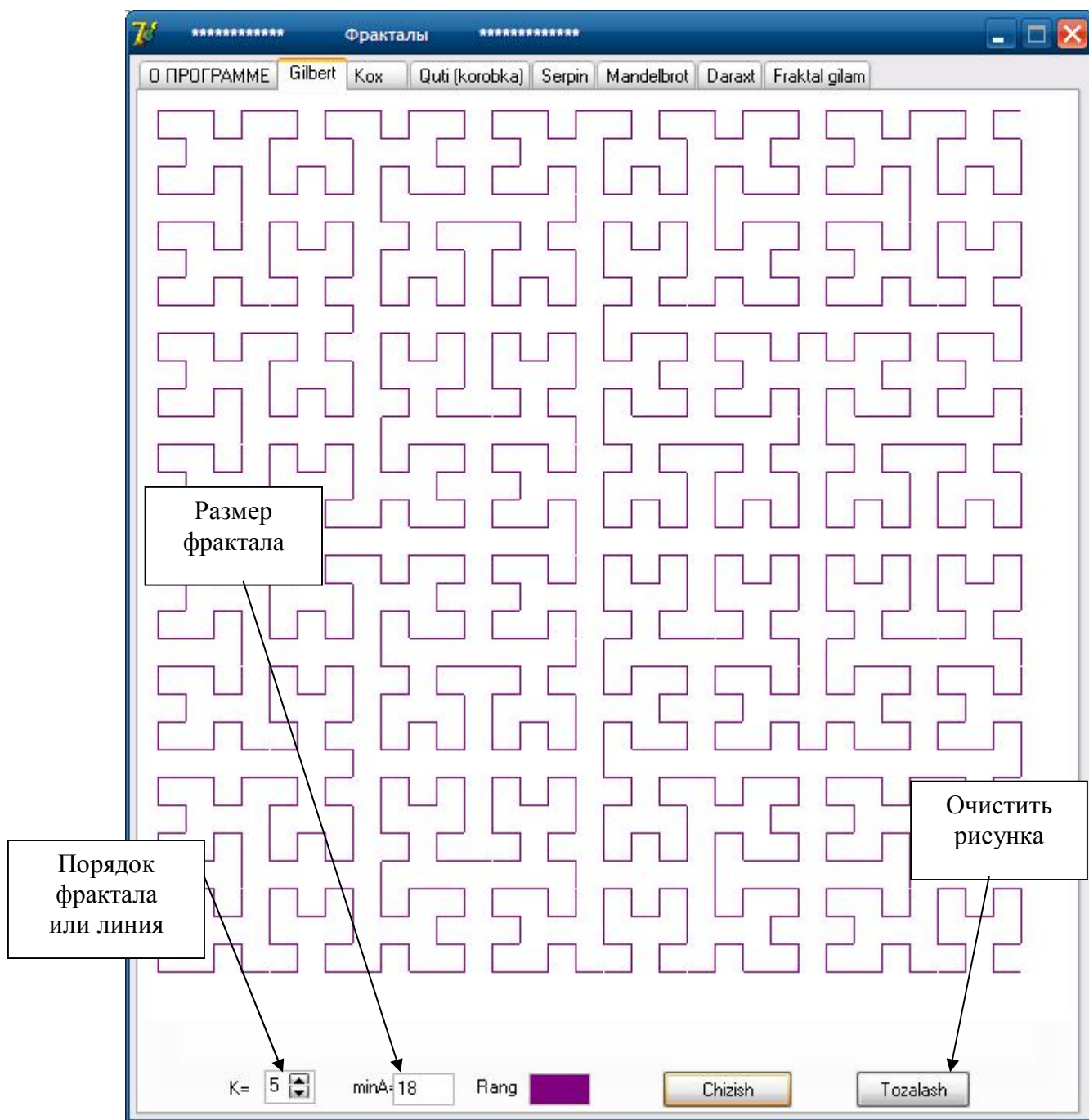


Рис. 3. Линия Гилберта.

На этом рисунке рисовано кривая линия Гилберта. Здесь порядок линия 5 и минимальная длина линия 18 пиксель. У каждого страница есть кнопка для очищения панель–рисунка (панель для рисование нужные фрактал или линия).

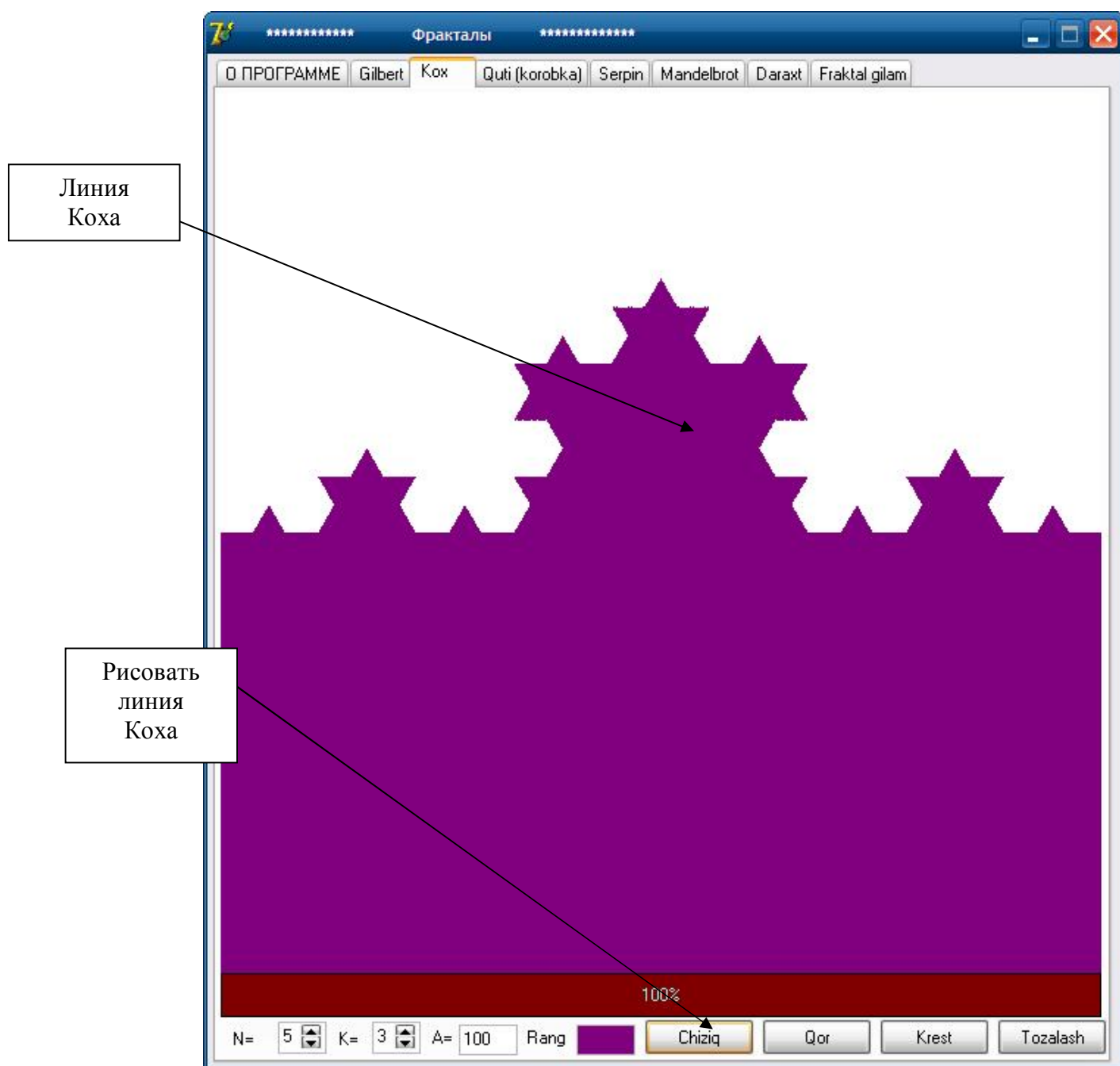


Рис. 4. Линия Коха.

У некоторых странице есть несколько фракталы, как этот странице. В этом странице есть три фрактала – линия Коха, снег Коха и крест Коха. Чтобы рисовать каждого фрактала есть отдельная кнопка.

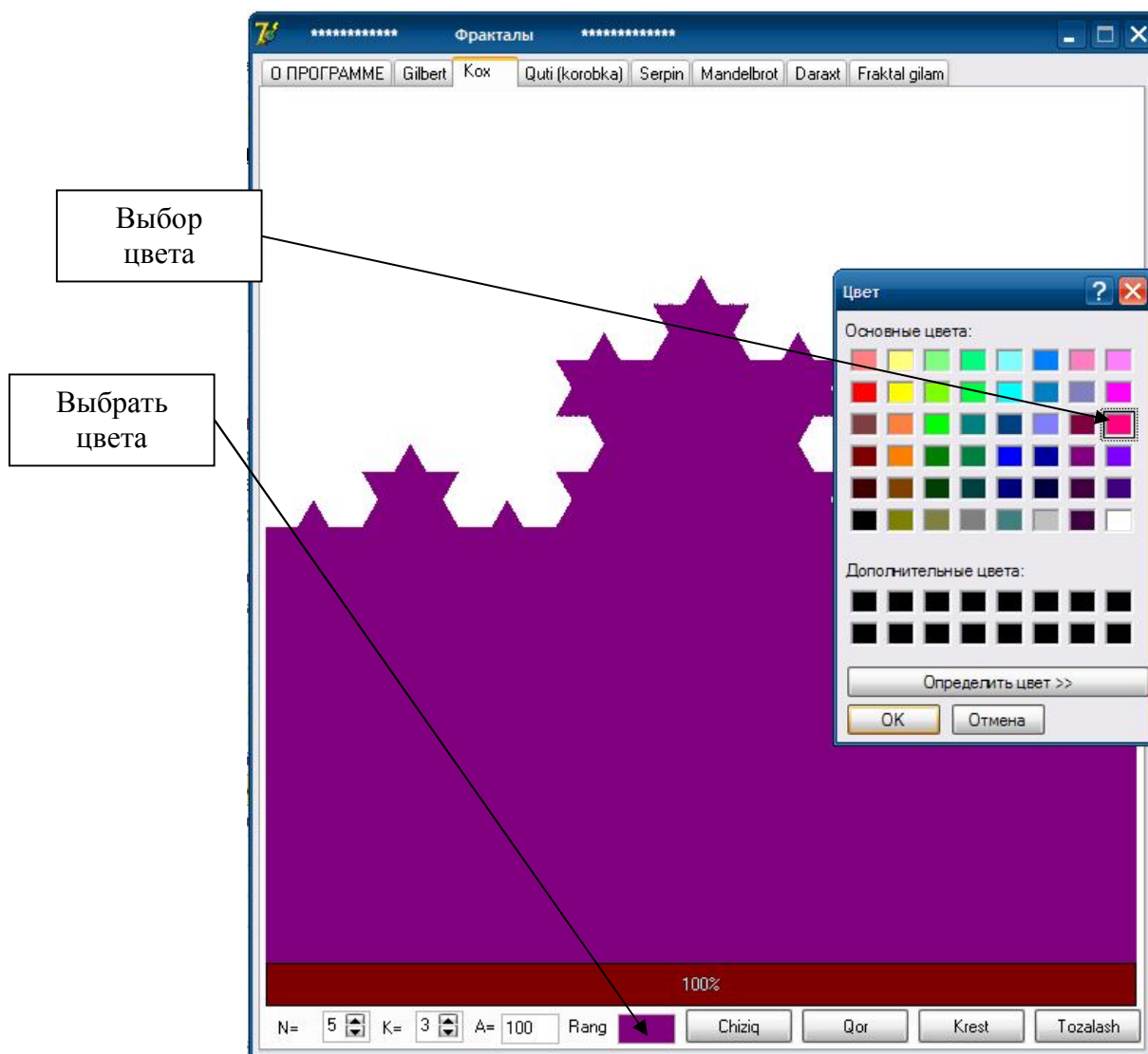


Рис. 5. Выбор цвета рисунка.

У каждого также же есть мини-площадка для выбора цвет фрактала. После двойной щелчок этой мини-площадка, будет открыть дополнительное окно для выбора цвета фракталы текущего страница.

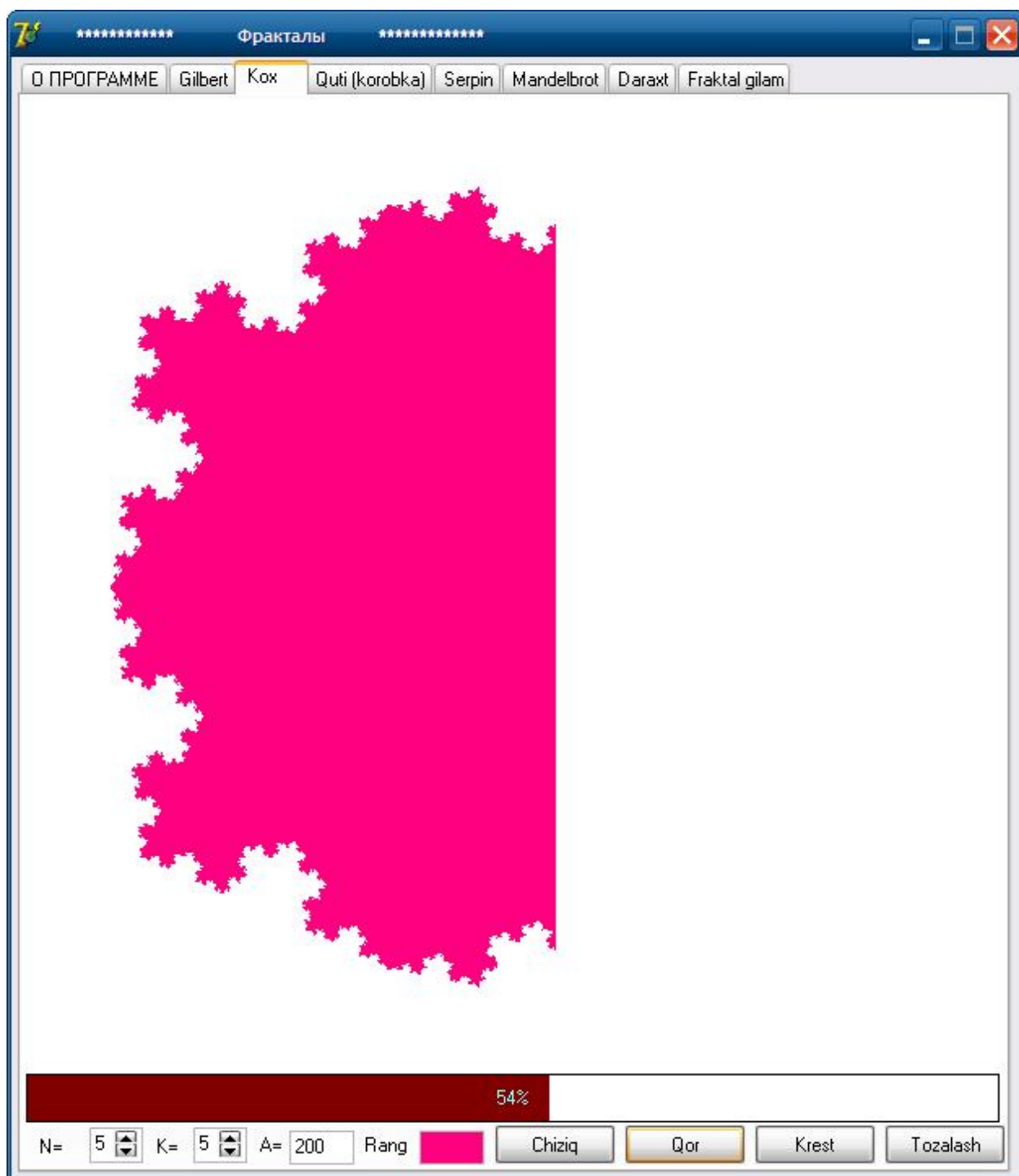


Рис. 6. Информационный блок (54% рисовано Снег Коха).

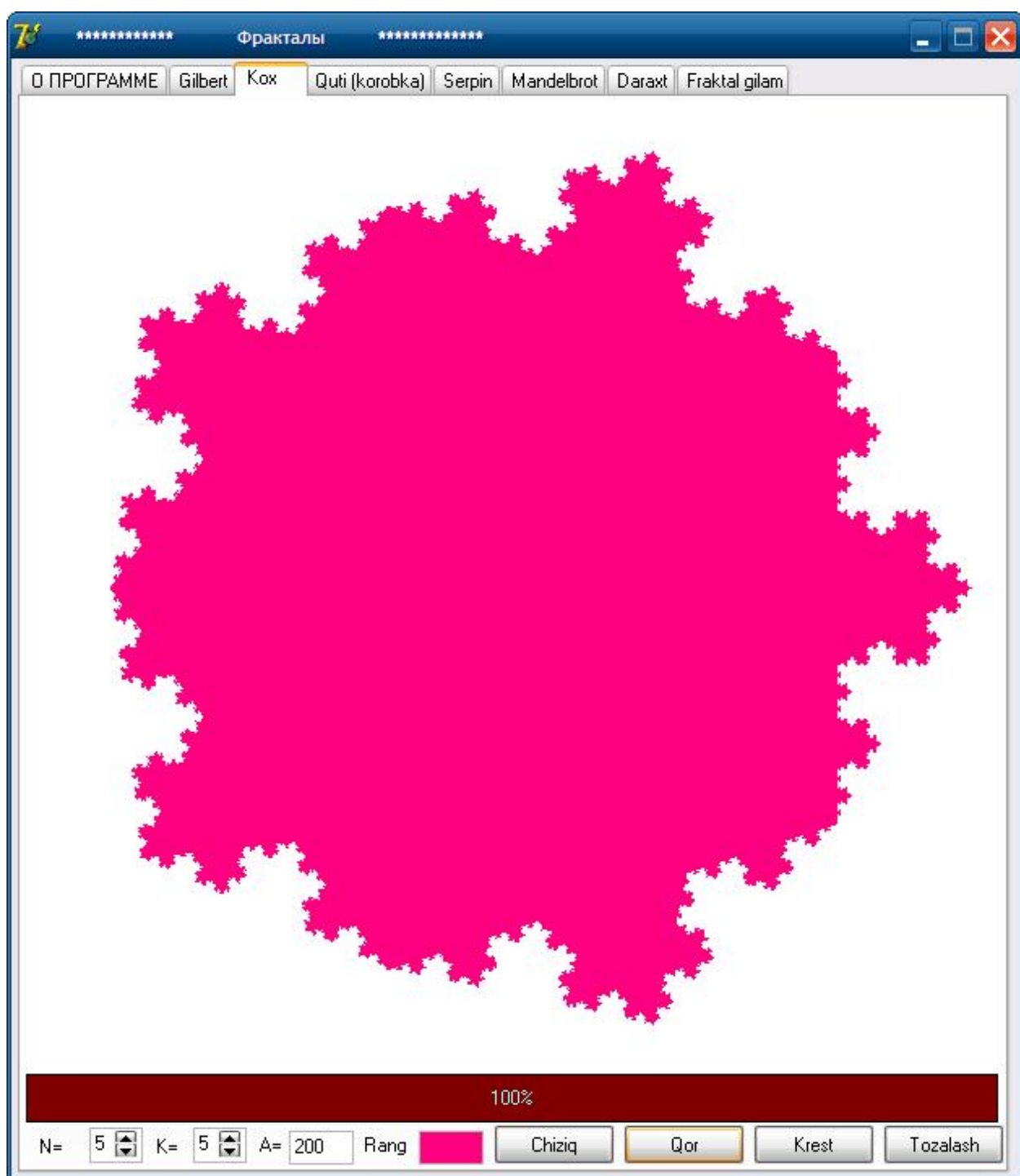


Рис. 7. Снег Коха.

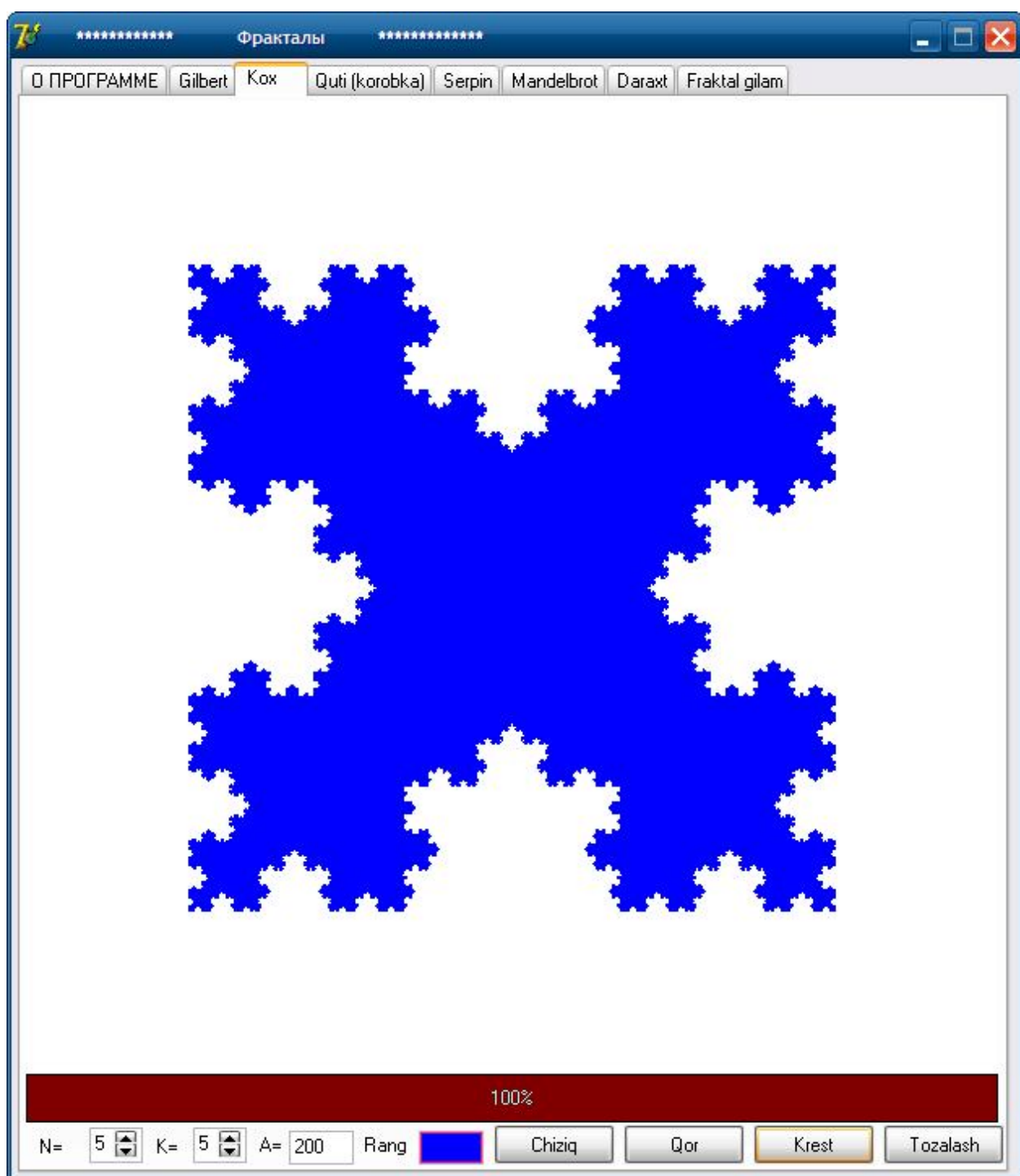


Рис. 8. Крест Коха.

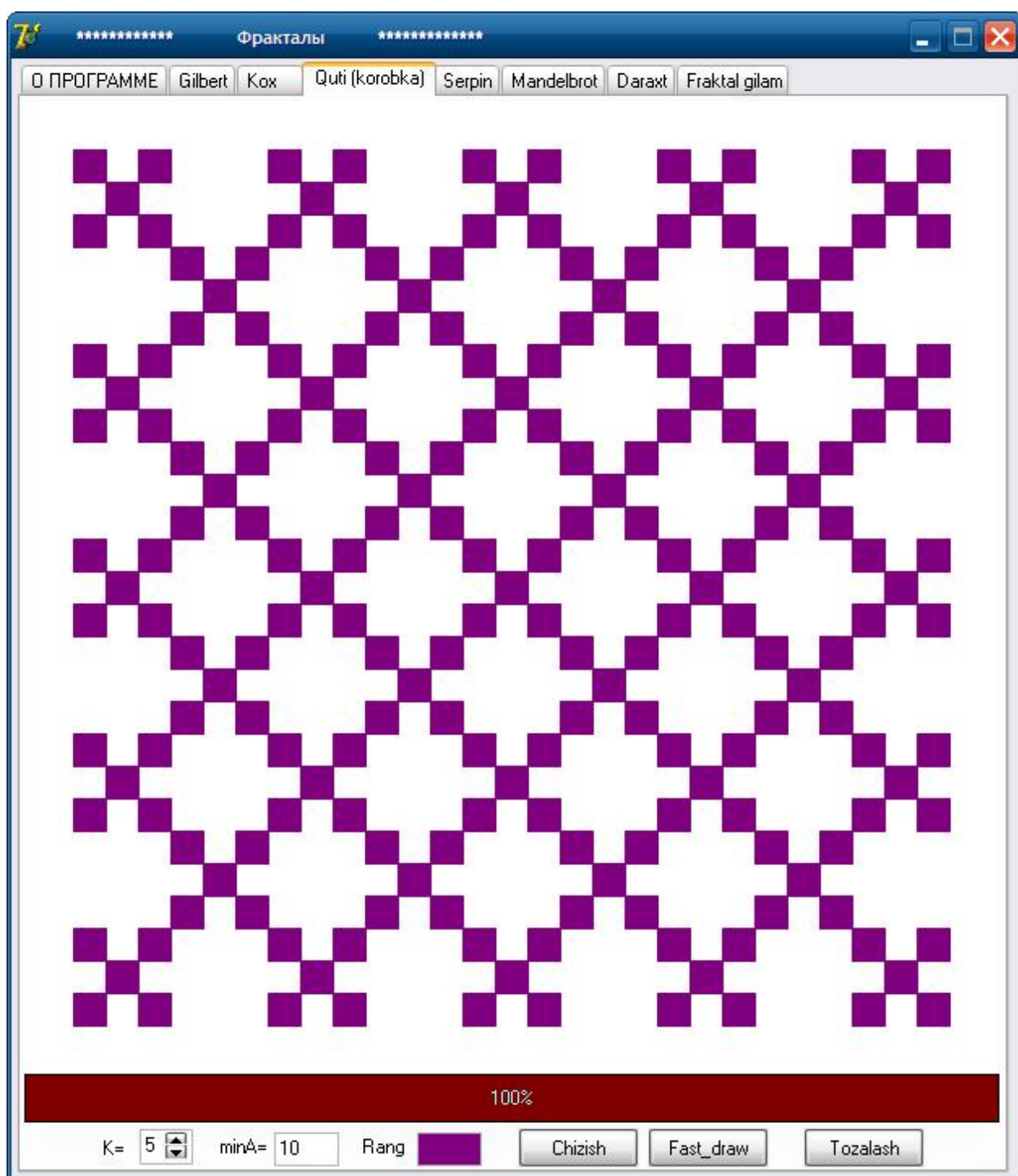


Рис. 9. Фрактал «Коробка».

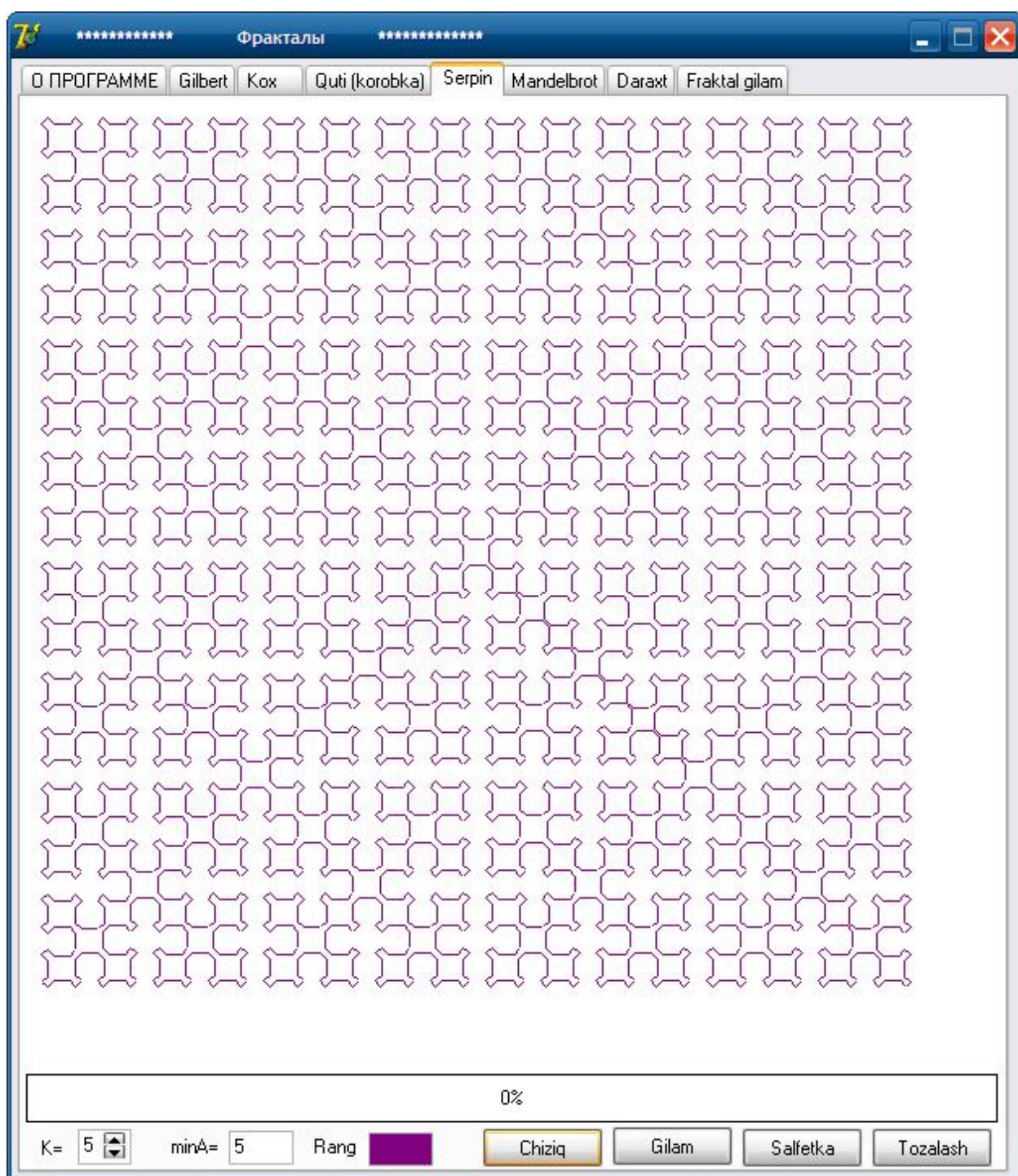


Рис. 10. Линия Серпинского.

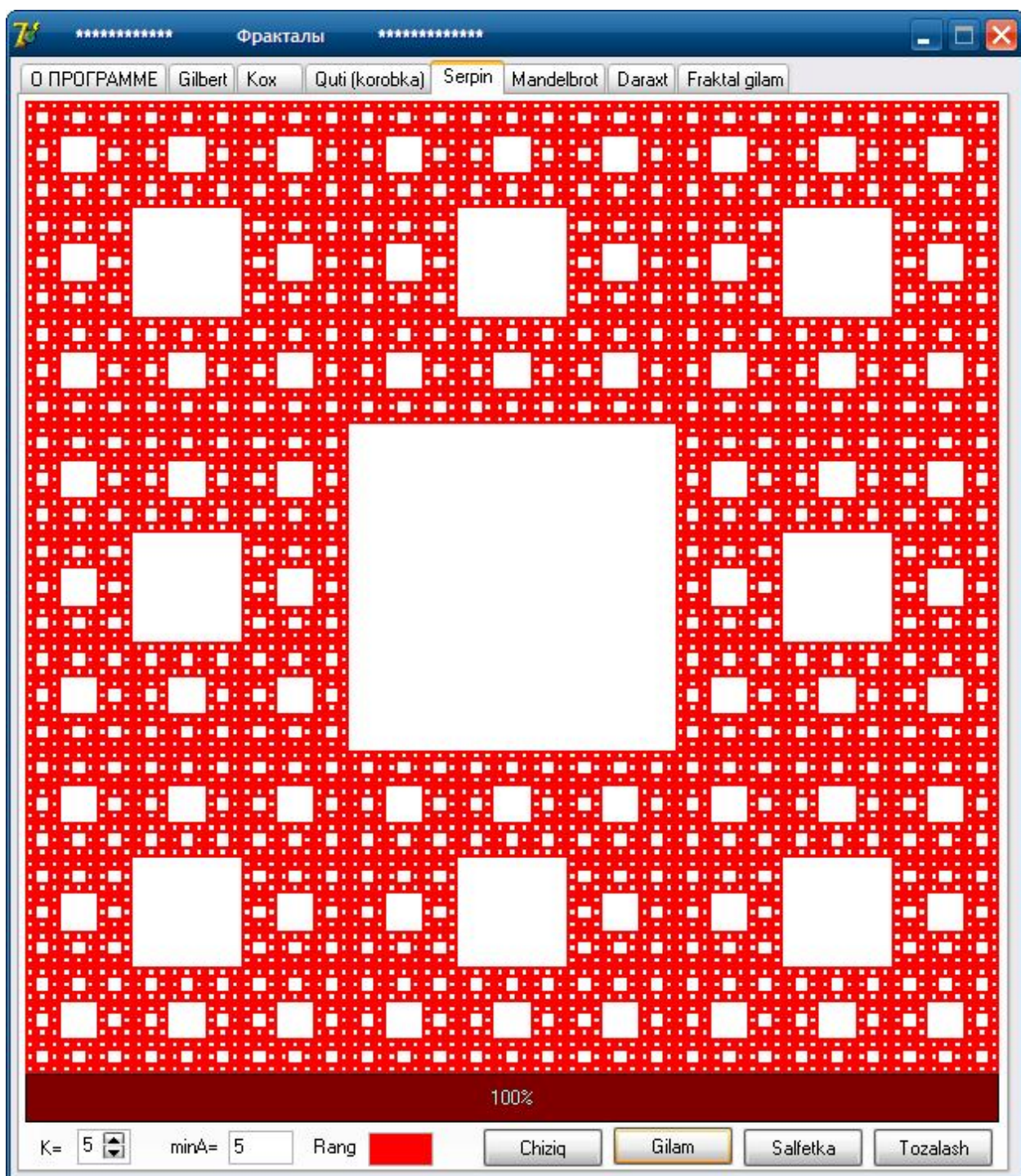


Рис. 11. Ковер Серпинского.

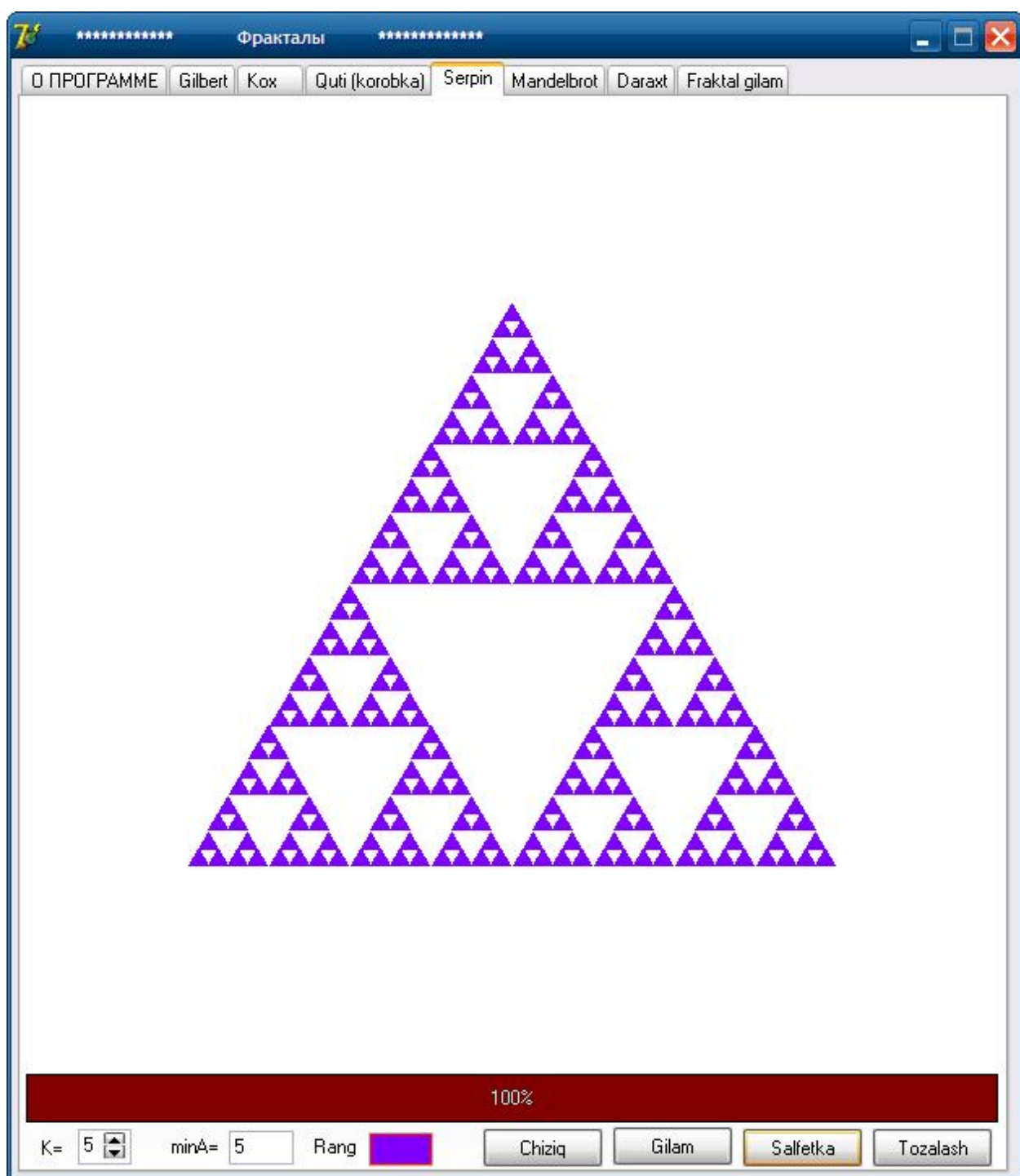


Рис. 12. Салфетка Серпинского.

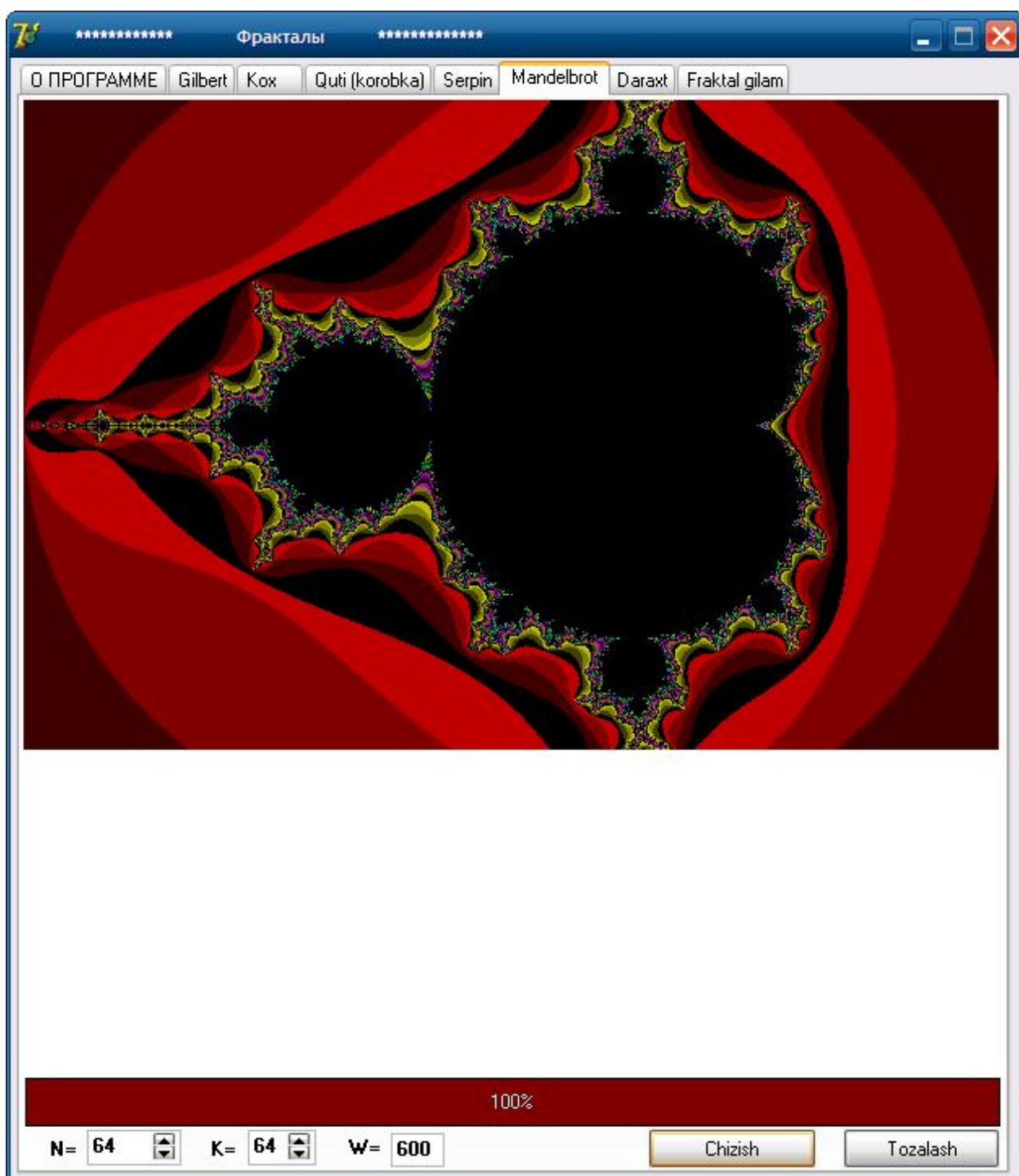


Рис. 13. Множества Манделброта в цветном виде.

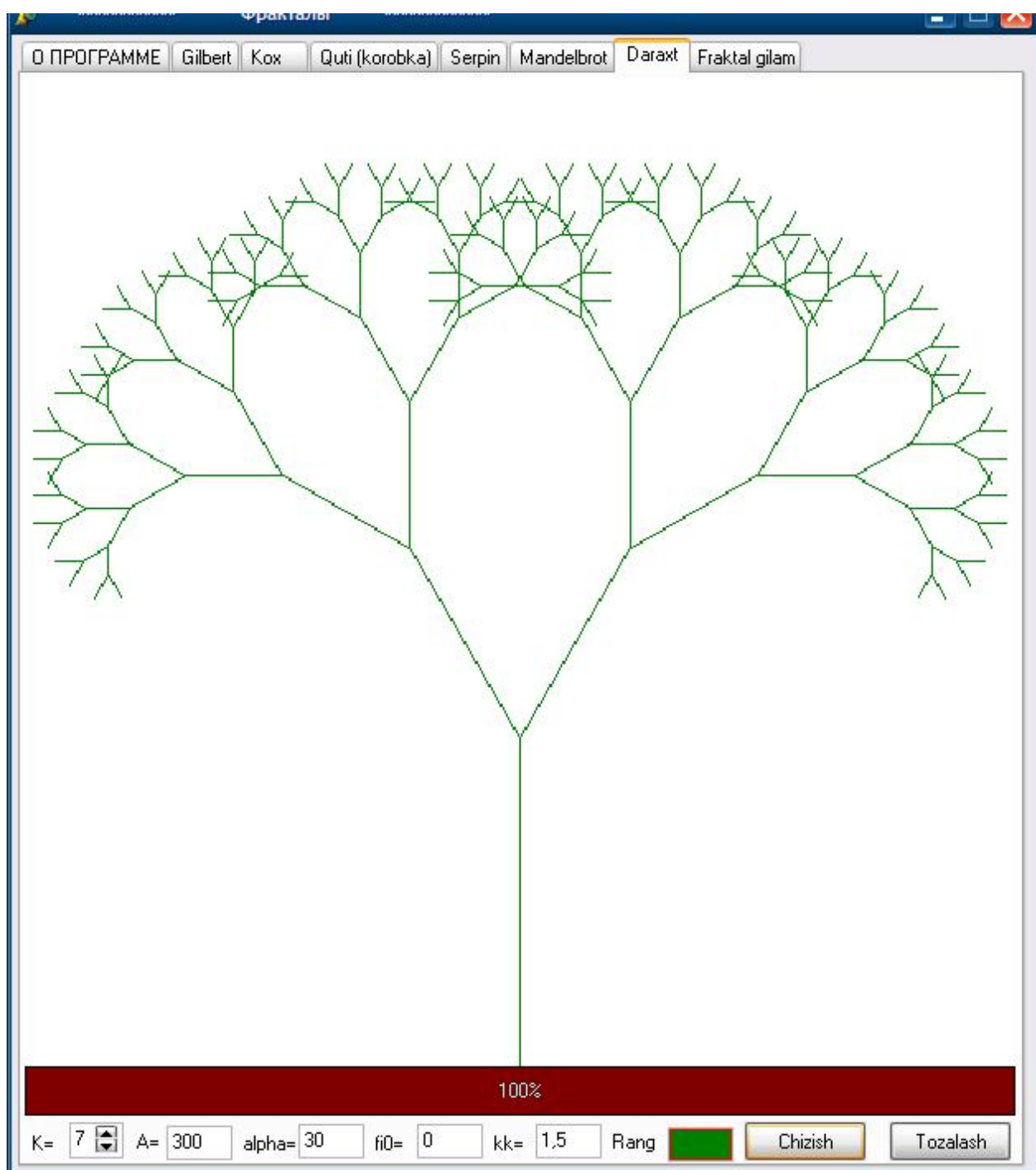


Рис. 14. Фрактал «Дерево».

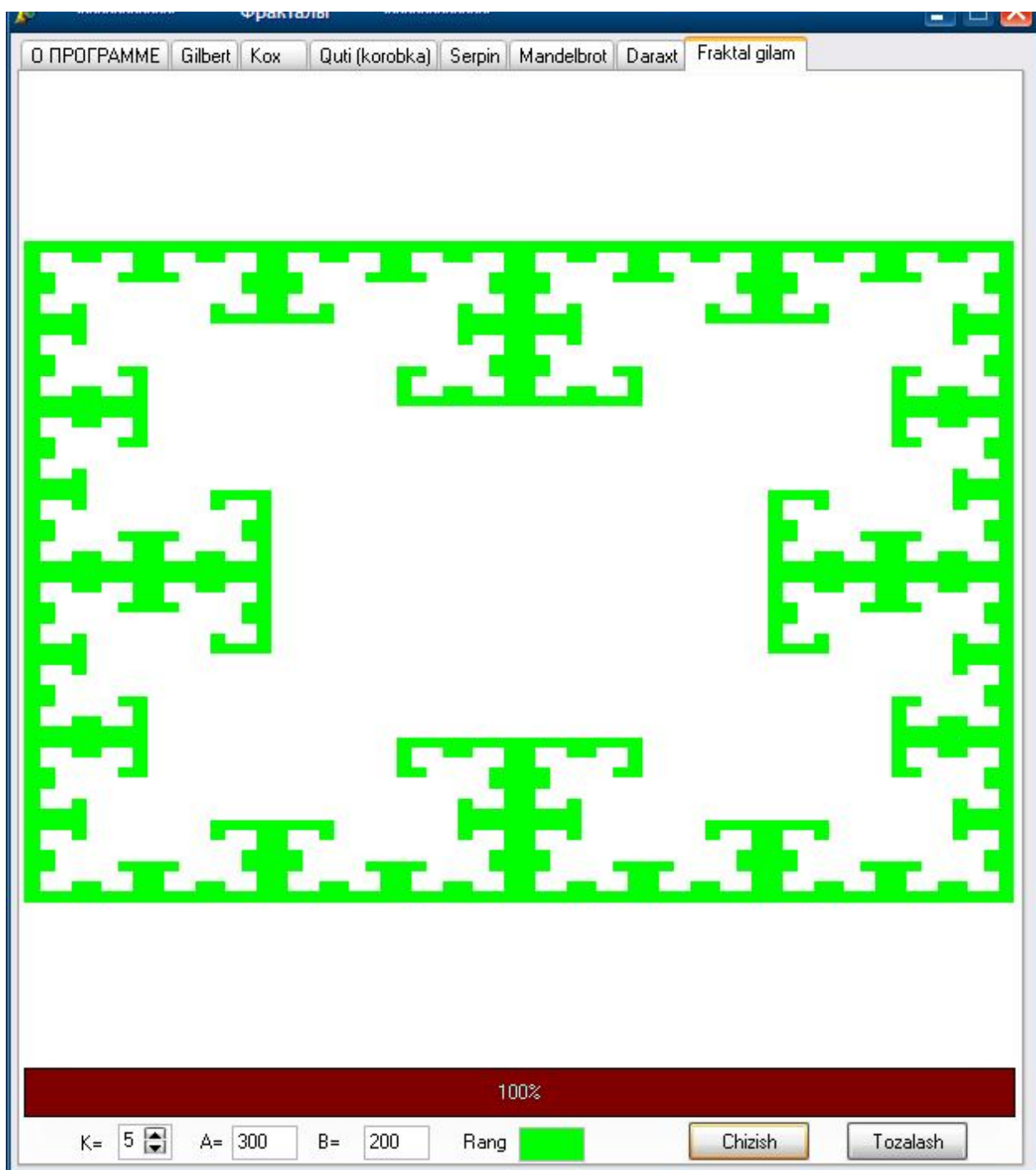


Рис. 15. Фрактал «Ковер».