ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА
МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

АЛ - ХОРАЗМИЙ НОМИДАГИ УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўл ёзма ҳуқуқида

Машарипова Фазилат Аҳмедовна

Чегаравий тўпламларнинг P- ўлчови

Мутахассислик: 5A 46.01.01-“Математик таҳлил”

Д и с с е р т а ц и я

Математик магистри академик даражасини олиш учун

Иш кўрилди ва ҳимоя қилишга руҳсат берилди “Функциялар назарияси” кафедра мудири: _______________
ф.м.ф.д. Имомкулов С. А.
«___» ______________ 2008 йил

Илмий раҳбар: ___________
ф.м.ф.д. Имомкулов С. А.

Илмий маслаҳатчи: ________
доц.

Урганч - 2008

Мундарижа

Кириш

0.1. Диссертациянинг умумий таснифи

0.1.1 Мавзунинг долзарблиги. Гармоник ўлчов классик потенциаллар назариясининг асосий тушунчаси бўлиб, унинг ёрдамида бутун бир потенциаллар назарияси қурилган. Гармоник ўлчов субгармоник (sh) функциялар классидаги максимал функция сифатида қуйидагича таърифланади: фараз қилайлик D Евклид фазоси $\mathbf{R}^n$ га қарашли бирор соҳа бўлсин, E эса D нинг бирор ёпиқ қисм тўплами бўлсин, у ҳолда

$$\omega(x,E,D)=\sup\{u(x)\in Sh(D): u|_E\le -1,\, u|_D\le 0\}$$

функцияга E тўпламнинг D соҳага нисбатан гармоник ўлчови дейилади ([7], [10] га қаранг). $\omega(z,E,D)$ максимал функция аниқланишига кўра $D\setminus E$ да гармоник ва E тўпламда нолга тенг бўлган D соҳага субгармоник функция бўлади. Бошқача қилиб айтганда бу функциянинг Лаплас оператори таъсирида қиймати етакловчиси E тўпламда ётувчи Борель ўлчови бўлади, яъни

$$\Delta\omega(x,E,D)=\mu,$$

$$\operatorname{supp}\ \mu\subset\subset E$$

Бу ерда $\mu-$Борель ўлчови.

Агар $\omega(x,E,D)\equiv 0$ бўлса E тўплам поляр тўплам бўлади ва аксинча, агар $E\subset D$ поляр тўплам бўлса, у ҳолда $\omega(x,E,D)\equiv 0$ бўлади.
($E\subset D$ поляр тўплам дейилади, агар шундай бир $u(x)\in Sh(D)$ функция топилиб, $u|_E=-\infty,\quad u(x)\not\equiv-\infty$ бўлади).

E тўплам D соҳа чегарасининг қисми бўлган ҳолда ҳам гармоник ўлчов худди шунингдек таърифланади: фараз қилайлик $D\subset\mathbf{R}$ - чегараси силлиқ соҳа бўлиб, $E\subset\partial D$ бўлсин, у ҳолда

$$\omega(x,E,D)=\sup\ \{u(x)\in Sh(D): \tilde{u}|_E\le -1,\, u|_D\le 0\}$$

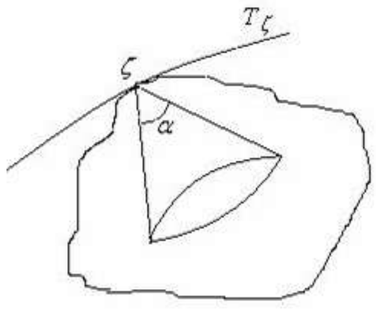
функцияга чегаравий тўплам E нинг D соҳага нисбатан гармоник ўлчови дейилади. Бу ерда $\tilde{u}(\zeta),\ \zeta \in E,\ u(x)$ функциянинг $\zeta \in E$ нуқтадаги чегаравий қиймати бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$$\sup_{\alpha>1} \overline{\lim_{\substack{x\to\zeta \\ x\in A_\alpha(\zeta)}}} u(x) = \tilde{u}(\zeta) \qquad (0.1)$$

Бу ерда

$$A_\alpha(\xi) = \{x \in D : |x-\xi| < \alpha \cdot p(x, T_\xi)\}$$

$\zeta \in \partial D, \alpha > 1,\ \rho\left(x, T_\zeta\right) - x \in D$ нуқтадан ∂D - сиртга ζ нуқтада ўтказилган урунма гипертекслик T_ζ гача бўлган масофа. Шундай қилиб, $A_\alpha(\zeta)$ учи ζ нуқтада жойлашган кенглиги α га тенг бўлган конус



(1-чизма).

Бу ҳолда $\omega(z, E, D)$ бутун D соҳада гармоник ва чегаравий қийматлари $\tilde{\omega}\big|_E = -1,\quad \tilde{\omega}\big|_{\partial D\setminus E} = 0$ бўлган функция.

Бу ҳолда ҳам агар $\omega(x, E, D) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда чегаравий E поляр тўплам ва аксинча $E \subset \partial D$ поляр тўплам бўлса, $\omega(x, E, D) \equiv 0$ бўлади. ($E \subset \partial D$ - чегаравий поляр тўплам дейилади, агар D соҳада субгармоник ва юқоридан чегараланган шундай бир $u(x)$ функция топилиб, $u(x)\big|_E \equiv -\infty, \quad u(x) \not\equiv -\infty$).

Ҳар қандай чегаравий поляр тўпламнинг $2n-1$ ўлчамли Лебег ўлчови нолга тенг ва аксинча. Демак, чегаравий гармоник ўлчов Лебег ўлчови билан боғланган.

Гармоник ўлчов ёрдамида математик физиканинг кўпгина масалалари муваффақиятли ечилган.

Масалан, Лаплас оператори учун Дирихле масаласи, гармоник функцияларнинг чегаравий қийматларининг мавжудлиги ҳақидаги масала ва ҳоказо ([7], [10] га қаранг).

Ўтган асрнинг иккинчи ярмида кўп комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясида кўпгина ечилмаган муаммолар йиғилиб қолди. Бу муаммоларни ечиш учун классик потенциаллар назариясининг кучи етмасди. Шу сабабли янги комплекс потенциаллар назариясини яратиш эҳтиёжи туғилди. Бошқача қилиб айтганда гармоник ўлчов ўрнини босувчи максимал плюрисубгармоник (Psh) функция қуриш ва унинг хоссаларини ўрганиш зарур бўлди. Бу функция плюрисубгармоник функциялар синфида максимал функция сифатида қуйидагича таърифланади: фараз қилайлик, D комплекс евклид фазоси $\mathbf{C}^n$ га қарашли соҳа ва $E \subset D$ унинг қисм тўплами бўлсин. У ҳолда қуйидаги

$$\omega^*(z,E,D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega(w,E,D),$$

функция E тўпламнинг D соҳага нисбатан плюрисубгармоник ўлчови дейилади. Қисқача $P-$ўлчов дейилади. Бунда

$$\omega(z,E,D) = \sup \left\{ u(z) \in Psh(D) : u\big|_E \le -1,\ u\big|_D \le 0 \right\}$$

$\omega^*(z,E,D)$- умуман олганда плюрисубгармоник бўлиб, D соҳанинг бирор нуқтаси ҳам гармоник ёки плюригармоник бўлмаслиги мумкин. Аниқроғи бу функция Лаплас операторининг комплекс варианти бўлган ночизиқли Монже – Ампер оператори билан боғланган. Яъни Монже – Ампер оператори таъсиридаги қиймати етакловчиси E тўпламда ётувчи Борель ўлчови бўлади:

$$\left(dd^c \omega^*(z,E,D)\right)^n = 0, \quad z \in D \setminus E,$$

яъни

$$\left(dd^c \omega^*(z,E,D)\right)^n = \mu,$$

$$\text{supp } \mu \subset\subset E$$

бу ерда

$$\left(dd^c u(z)\right)^n = 4^n \cdot n! \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_1 \partial \overline{z_1}} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_1 \partial \overline{z}_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_n \partial \overline{z_1}} \cdots\cdots & \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_n \partial \overline{z}_n} \end{vmatrix} \cdot \beta_n,$$

$\beta_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot \prod_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j -$ $\mathbf{C}^n$ да ҳажмни аниқловчи одатдаги

дифференцал форма.

Агар $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ бўлса, у ҳолда E плюриполяр бўлади ва аксинча E плюриполяр бўлса $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ бўлади.

$\omega^*(z, E, D)$ - максимал функция кўпгина хоссалари ва аниқланиши гармоник ўлчовга ўхшаганлигига қарамай, унинг билан ишлаш анча мураккаб. Сабаби гармоник ўлчов каби E тўпламдан ташқарида $P-$ўлчов силлиқ бўлавермайди. Ҳатто, умуман олганда узлуксиз ҳам бўлмайди. Шу сабабли у доим “регуляризацияга” муҳтож. Шу сабабли $P-$ўлчов билан унинг Монже – Ампер оператори таъсиридаги Борель ўлчови билан боғлиқлиги турғун эмас. Шунга қарамай бу функция А. Садуллаев, Э. Бедфорд ва А. Тейлорларнинг ишларида мукаммал ўрганилди ва бир қанча муаммоларни ечишда тадбиқ қилинди. ([1], [2 - 5], [6], [8] га қаранг).

E тўплам D соҳанинг чегарасининг қисми бўлган ҳолда $P-$ўлчов юқоридагидек аниқланишига қарамай унинг баъзи бир хоссалари ўрганиш анча мураккаб. Шу сабабли чегаравий тўпламларнинг $P-$ўлчови ҳозирги вақтгача яхши ўрганилмаган. Бу ўлчовнинг гармоник ўлчовдан асосий фарқи Лебег ўлчови ноль бўлган чегаравий тўпламларнинг $P-$ўлчови ноль бўлмаслиги мумкин, яъни Лебег ўлчови нолга тенг плюриполяр бўлмаган тўпламлар мавжуд. Чегаравий плюриполяр тўпламларнинг метрик характеристикаси ўрганилмаган. Чегаравий $P-$ўлчов билан Хаусдорф ўлчови, Борель ўлчовлари орасидаги боғланишлар ўрганилиши зарур бўлган муаммолардан. Юқорида айтилганлардан хулоса қилиб айтиш мумкинки, ушбу диссертация мавзуси долзарбдир.

0.1.2. Диссертациянинг мақсади. Диссертацияда чегаравий $P-$ўлчовнинг хоссалари ўрганилади ва уни Борель ўлчовлари билан боғловчи янгича таъриф берилади. Янгича таъриф ёрдамида аниқланган максимал функциялар $P-$ўлчов билан таққосланади. Баъзи бир соҳаларнинг чегаравий тўпламлари учун ω^* функциянинг алоҳида хоссалари ўрганилган.

0.1.3. Изланиш усули. Комплекс потенциаллар назарияси ва ўлчовлар назарияси усулларидан фойдаланилди.

0.1.4. Илмий янгилиги. Муаллиф томонидан қўлга киритилган натижалар асосан умумлашмалардан иборат.

0.1.5. Диссертация ишининг нашрлари. Диссертация мавзуси юзасидан “Функциялар назарияси” кафедраси семинарларида мунтазам маърузалар қилиб борилди ва муҳокама қилинди. Диссертация натижалари магистрлар илмий ишлари тўпламларида [14], чоп қилинди. Шунингдек иккитаси нашрга тайёр.

0.1.6. Ишнинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация иши кириш, иккита боб ва адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, биринчи боб муаллифгача қилинган ишлар таҳлилидан иборат ва ўз навбатида иккита параграфдан таркиб топади. Иккинчи бобда асосан янги натижалар ёритилган бу боб ҳам иккита параграфга ажралган. Ҳар бобнинг параграфларидаги формулалар ўз белгилашлар тартибига эга, масалан (2.2) белгилаш мазкур бобнинг мос равишда 2- параграфи ва 2- номерли белгиланишни билдиради.

0.2. Диссертация мазмуни

Диссертация иши кириш, иккита боб ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Биринчи боб икки параграфдан иборат бўлиб, унда субгармоник ва плюрисубгармоник функциялар тўғрисидаги бошланғич маълумотлар ҳамда гармоник ва плюрисубгармоник ўлчовларнинг хоссалари келтирилган.

Иккинчи боб ҳам икки параграфдан иборат. Бу бобда чегаравий тўпламларнинг $P-$ўлчови ўрганилган.

2.1 – таъриф Фараз қилайлик $D \subset \mathbf{C}^n$- чегараси силлиқ соҳа бўлсин. $E \subset \partial D$ тўпламнинг $P-$ўлчови деб экстремал функцияга айтилади.

$$\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega(w, E, D),$$

бунда

$$\omega(z, E, D) = \sup \left\{ u(z) : u(z) \in PSh(D) : \tilde{u}\big|_E \le -1,\ u\big|_D \le 0 \right\}.$$

Бу ерда $\tilde{u}(\zeta),\ \zeta \in E,\ \ u(z)$ функциянинг ζ нуқтадаги чегаравий қиймати бўлиб, у

$$\sup_{\alpha > 1} \overline{lim}_{\substack{x \to \zeta \\ x \in A_\alpha(\zeta)}} u(x) = \tilde{u}(\zeta)$$

формула ёрдамида аниқланади.

Чегаравий тўпламнинг $P-$ўлчови ω^* умуман олганда гармоник ўлчовдан фарқли $\overline{D} \setminus E$ да узлуксиз бўлмаслиги ҳам мумкин.

2.1 – параграфда қуйидагича теорема исботланган.

2.1 – теорема. $B = \{ z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1 \}$ - *бирлик шар,* $T = \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) : |z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$ - *шарнинг чегараси* ∂B *га қарашли тор бўлса,* T *нинг* $P-$*ўлчови* $\omega^*(z, T, B)$ *қуйидаги шартларни қаноатлантиради*

1) $\omega^* \in \mathbf{C}(\overline{B} \setminus T)$

2) $\omega^* \not\equiv 0,$ *ва* $\omega^*\big|_{\partial B \setminus T} \equiv 0$

2.2 – параграфда чегаравий тўпламларнинг $P-$ўлчови билан Борель ўлчовлари орасидаги боғланиш ўрганилди.

2.2 – таъриф. Фараз қилайлик $D \subset \mathbf{C}^n$- чегараси силлиқ соҳа, $E \subset \partial D$ ва $\mu -$етакловчиси E га қарашли Борель ўлчови бўлсин. Қуйидаги экстремал функцияга

$$\omega_\mu^*(z,E,D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_\mu(w,E,D)$$

Бунда

$$\omega_\mu(z,E,D) = \sup \Big\{ u(z) \in PSh(D) \cap C(\overline{D}) : u\big|_D \le 0,\ \forall E_0 \subset E :$$

$$\mu(E_0) > 0,\ \frac{1}{\mu(E_0)} \int_{E_0} u(\xi) d\mu \le -1 \Big\},$$

E - чегаравий тўпламнинг D соҳага нисбатан $P_\mu -$ўлчови дейилади.

2.2. параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

2.2 – теорема. *Агар* $D \subset \mathbf{C}^n$- *чегараси силлиқ қабариқ соҳа ва* $E \subset \partial \overline{D}$ *компакт тўплам бўлса, у ҳолда шундай бир* $\mu : \operatorname{supp} \mu \subset E -$ *Борель ўлчови топиладики*

$$\omega_\mu^*(z,E,D) \equiv \omega^*(z,E,D)$$

айният ўринли бўлади.

2.3 – теорема. *Агар* $D \subset \mathbf{C}^n$- *чегараси силлиқ қабариқ соҳа ва* $E \subset \partial D$- *компакт плюриполяр тўплам бўлса, у ҳолда ҳар қандай* $\mu : \operatorname{supp} \mu \subset E -$ *Борель ўлчови учун* $\omega_\mu^*(z,E,D) \equiv 0$ *бўлади.*

I – боб

Субгармоник ва плюрисубгармоник функциялар тўғрисида бошланғич тушунчалар

Субгармоник ва плюрисубгармоник функциялар замонавий потенциаллар назариясининг асосий объектларидан бўлиб, бу назариясининг барча методлари асосида ушбу тушунчалар ётади. Масалан, Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласи, комплекс Монже - Ампер тенгламаси учун Дирихле масаласи, кўп аргументли голоморф функцияларни аналитик давом эттириш масалалари, кўпҳад ва рационал функциялар билан яқинлаштиришлар масалалари ва бошқа масалаларни ечишда экстремал плюрисубгармоник функциялар муҳим роль ўйнайди.

§ 1.1. Субгармоник функциялар ва гармоник ўлчов

1.1 – таъриф. $G \subset R^n$ - соҳада аниқланган $u(x): -\infty \le u(x) < +\infty$ *субгармоник функция* дейилади, агар у қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

1) $u(x)$ юқоридан ярим узлуксиз, яъни

$$\overline{\lim_{x \to x^0}}\, u(x) \le u\left(x^0\right), \qquad \forall x^0 \in G.$$

2) $$u\left(x^0\right) \le \frac{1}{\left|B\left(x^0, r\right)\right|} \int_{B\left(x^0, r\right)} u(x) dx$$

$$\forall x^0 \in G, \quad \forall r : B\left(x^0, r\right) = \left\{x : \left|x - x^0\right| < r\right\} \subset\subset G.$$

Бу ерда $\left|B\left(x^0, r\right)\right|$ - шар ҳажми.

Субгармоник функциянинг бу таърифида иккинчи шартни

$$u\left(x^0\right) \le \frac{1}{\left|S\left(x^0, r\right)\right|} \int_{S\left(x^0, r\right)} u(x) d\delta(x),$$

($S\left(x^0, r\right) = \partial B\left(x^0, r\right), \quad d\partial(x) -$ сферанинг сирт элементи), каби шарт билан алмаштириш мумкин. Бу шартлар ўзаро эквивалентдир. Субгармоник функцияга Лаплас оператори ва гармоник функциялар ёрдамида ҳам таъриф бериш мумкин.

1.2 – таъриф. $\mathrm{G} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{n}} -$ соҳада аниқланган юқоридан ярим узлуксиз $u(x): -\infty \leq u(x) < \infty$ функция *субгармоник* дейилади, агар ихтиёрий мусбат асосий функция $\varphi(x) \in D(G)$ учун

$$\int_G u(x)\Delta\varphi(x)dx \geq 0$$

бўлса.

1.3 – таъриф. $\mathrm{G} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{n}} -$ соҳада аниқланган ва юқоридан ярим узлуксиз бўлган $u(x): -\infty \leq u(x) < +\infty$ функция *субгармоник* дейилади, агар ихтиёрий $\mathrm{G}_0 \subset\subset G -$очиқ тўплам ва $u(x) \leq v(x), \ \ x \in \partial G_0,$ тенгсизликни қаноатлантирувчи G_0 да гармоник бўлган ихтиёрий $v(x)$ функция учун

$$u(x) \leq v(x), \quad x \in G_0$$

тенгсизлик ўринли бўлса.

1.2 – ва 1.3 – таърифлар 1.1 – таъриф билан эквивалентдир ([1], [7] га қаранг). Таърифланишларига кўра субгармоник функциялар қуйидагича хоссаларни қаноатлантирадилар.

1 – хосса. Агар $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ функциялар D соҳада субгармоник функциялар бўлса ва $t_1, t_2, \ldots, t_k$ лар номанфий сонлар бўлса, у ҳолда

$$u(x) = \sum_{v=1}^{k} t_v u_v(x)$$

функция ҳам субгармоник бўлади.

2 – хосса. Агар $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_k(x)$ функциялар D соҳада субгармоник функциялар бўлса, у ҳолда

$$u(x) = \sup_{v=\overline{1,k}} u_v(x)$$

функция ҳам субгармоник функция бўлади.

Агар $u_\alpha(x),\ \alpha \in A,\ D$ соҳада субгармоник функцияларни чексиз оиласи бўлса, у ҳолда

$$u(x) = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(x)$$

формула билан аниқланган функция субгармоник бўлавермайди.

Бу ҳолда субгармоник функциялар синфи юқоридан локал текис чегараланган бўлишлиги шарт. Бу шарт бажарилган тақдирда ҳам экстремал функция $u(x)$ ихтиёрий $x^0 \in D$ ва $\forall r > 0:\ B(x^0, r) \subset\subset D$ учун

$$u(x^0) \le \frac{1}{|B(x^0, r)|} \int_{B(x^0, r)} u(x)dx$$

шартни қаноатлантиради, лекин умумий ҳолда юқоридан ярим узлуксиз бўлавермайди.

Мисол. $u_\alpha(x) = \alpha \ln|x|,\ \ x \in B(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\},\ \ \alpha \in (0,1)$, субгармоник функциялар оиласи учун

$$u(x) = \sup_{\alpha \in (0,1)} u_\alpha(x)$$

функция $B(0,1)$ бирлик шарда қуйидагича аниқланади:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0 \\ -\infty, & x = 0 \end{cases}.$$

Бу функция $x = 0$ нуқтада юқоридан ярим узлуксиз эмас.

$$\overline{\lim_{x \to 0}}\, u(x) = 0 > -\infty$$

Лекин шунга қарамай юқоридан локал текис чегараланган субгармоник функциялар оиласининг супремуми бўлган $u(x)$ функциясининг регуляризацияси

$$u^*(x) = \overline{\lim_{y \to x}}\, u(x)$$

функция аниқланишига кўра юқоридан ярим узлуксиз бўлади, яъни бу функция субгармоникликнинг барча шартлари бажарилади. Демак, $u^*(x)$ функция D соҳада субгармоник бўлади. Бундан ташқари потенциаллар назариясидан маълумки

$$N = \{x:\ u(x) \neq u^*(x)\}$$

тўплам поляр бўлади ([9] га қаранг).

E $\left(E \subset D \subset \mathbf{R}^n\right)$ тўплам *поляр тўплам* дейилади, агар D соҳа субгармоник бўлган шундай бир $u(x): u(x) \not\equiv -\infty$ функция топилиб $u|_E = -\infty$ бўлса. Бундай тўпламлар нозик тўпламлар бўлиб, уларнинг Хаусдорф ўлчамлари кўпи билан $n-2$ га тенг бўлади. Демак, $u^*(x)$ функция $u(x)$ функцияга деярли тенг функция бўлади.

Гармоник ўлчов. $D \subset \mathbf{R}^n -$ соҳа $E \subset D$- қисм тўплам бўлсин. $Sh(E,D)$ билан қуйидаги субгармоник функциялар синфини белгилаймиз.

$$Sh(E,D) = \{u \in Sh(D): u|_E \leq -1,\ \ u|_D \leq 0\}$$

($Sh(D) - D$ да субгармоник функциялар синфи).

1.4 – таъриф. Ушбу

$$\omega^*_{\mathrm{Sh}}(x,E,D) = \overline{\lim_{y \to x}}\ \omega_{Sh}(y,E,D),$$

$$\omega^*_{\mathrm{Sh}}(x,E,D) = \sup\{u(x): u(x) \in Sh(E,D)\},$$

экстремал субгармоник функцияга E тўпламнинг D соҳага нисбатан *гармоник ўлчов* дейилади.

Гармоник ўлчов тушунчаси потенцаллар назариясининг асосий фундаменталь тушунчаларидан бири бўлиб, унинг ёрдамида кўпгина масалалар ечилади.

Гармоник ўлчов ёрдамида Ньютон сиғими аниқланади. Ҳақиқатдан ҳам $\Delta\omega^*(x,E,D) = \mu,\quad \mathrm{supp}\,\mu \subset E$ ва $\mu(E) = C_{n-2}(E)$. ($C_{n-2}(E) -$ ньютон сиғими [7] га қаранг).

Агар D соҳа чегараси силлиқ соҳа бўлиб, $E \subset \partial D$- тўплам бўлса.
Бу ҳолда

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 \\ u|_E = -1, \quad u|_{\partial D \setminus E} = 0 \end{cases}$$

Дирихле масаласининг ечимига E - чегаравий тўпламнинг D соҳага нисбатан гармоник ўлчови ҳам $\omega^*_{\mathrm{Sh}}(x, E, D)$ каби белгиланади.

Чегаравий тўпламнинг гармоник ўлчовини ҳам худди ички тўпламнинг гармоник ўлчови каби аниқлаш мумкин.

1.5 – таъриф. Ушбу

$$\omega^*_{\mathrm{Sh}}(x, E, D) = \overline{\lim_{y \to x}}\,(y, E, D),$$

$$\omega(x, E, D) = \left\{ u(x) : Sh(D) : u|_D \le 0, \ \overline{\lim_{\substack{x \to \xi \in E \\ \succ\succ}}}\, u(x) \le -1 \right\}.$$

Экстремал субгармоник функция гармоник ўлчов дейилади.

Шундай қилиб биз гармоник ўлчовни ихтиёрий учун аниқлай оламиз. Гармоник ўлчов қуйидагича хоссаларга эга ([2] ва [7] га қаранг).

а) $\omega^*(x, E, D)$ - гармоник ўлчов D соҳага субгармоник ва D \ E да гармоник бўлган функция.

б) Агар $E_1 \subset E_2$ бўлса, у ҳолда

$$\omega^*(x, E_2, D) \le \omega^*(x, E_1, D)$$

ихтиёрий $x \in D$.

в) Ихтиёрий $E_1, E_2, ..., E_k, ...$ $E_k \subset D, \ \ k = 1,2,3...$ тўпламлар учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega^*(x, E_k, D) \le \omega^*\left(x, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, D \right), \quad \forall x \in D,$$

г) Агар бирор бир $x^0 \in D$ нуқтада $\omega^*\left(x^0, E, D\right) = 0$ бўлса, у ҳолда $\omega^*(x, E, D) \equiv 0$ бўлади.

д) Агар E - поляр тўплам бўлса, у ҳолда $\omega^*(x, E, D) \equiv 0$ ва аксинча.

Гармоник ўлчовнинг муҳим тадбиқлари. Гармоник ўлчов тушунчаси потенциаллар назарияси ва комплекс ўзгарувчининг функциялари назариясида муҳим тадбиқларга эга. Масалан, гармоник ўлчов ёрдамида ихтиёрий чегараси поляр тўплам бўлган соҳада Лаплас оператори учун Дирихле масаласини ечиш мумкин: Айтайлик $D \subset \mathbf{R}^n$ чегараси ∂D поляр тўплам бўлмаган соҳа бўлсин ва $f(x)$ $\Gamma = \partial D$ да аниқланган функция бўлсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли.

1.1 – Теорема. *([7]) $f(x)$ функция $\mathbf{R}^n$ фазодан олинган D соҳанинг чегараси $\Gamma = \partial D$ да чегараланган функция бўлиб, бирор поляр тўплам $E_0 \subset \Gamma$ дан ташқарида узлуксиз бўлсин ($n = 2$ да E_0 тўплам ∞ нуқтани ўзида сақлаши ҳам мумкин, лекин $n > 2$ да мумкин эмас).*

Агар $\Gamma -$поляр тўплам, у ҳолда D да аниқланган ҳар қандай чегараланган гармоник функция ўзгармас бўлади.

Акс ҳолда D соҳада чегараланган ва гармоник бўлган шундай $v(x)$ функция топиладики, қайсиким Γ да $f(x)$ га тенг бўлади. Ҳамда $\overline{D}$ да бирор $E_1 \subset \Gamma$ ($E_0 \subset E_1$) поляр тўпламдан ташқарида узлуксиз бўлади.

Бу ерда $v(x)$ ечим қуйидагича қурилади ([7] га қаранг)

$$v(x) = \int_{\Gamma} f(y) d\omega(x, e_y),$$

$e_y - y$ нуқтанинг етарли чексиз кичик атрофи $\omega(x, e_y) -$эса шу атроф гармоник ўлчови, $d\omega(x, e_y) -$гармоник ўлчовни y ўзгарувчига нисбатан дифференциали.

Гармоник ўлчов ёрдамида комплекс текисликка қарашли чегараси тўғриланувчи Жордан чизиғидан иборат $D \subset C$ соҳада ва голоморф бўлган функцияни соҳа чегараси бўлагида берилган қийматлари орқали тасвирлаш мумкин.

Карлеман формуласи. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $D \subset C$ соҳада голоморф ва $\overline{D}$ да узликсиз бўлсин. E тўплам D соҳа чегараси ∂D нинг очиқ қисм тўплами бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринли:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_E \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(\zeta)} \right]^K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Бунда $\varphi(z) = e^{\omega(z,E,D)+iv(z)} \cdot v(x)$ функция $\omega(z,E,D)$- гармоник ўлчовга қўшма гармоник функция.

Гармоник ўлчов ёрдамида сепарат аналитик функцияларнинг голоморфлик соҳалари ҳам аниқланади.

1.2 - Теорема. *$D \subset C$ ва $G \subset C$ соҳалар бўлиб, E ва F тўпламлар мос равишда бу соҳаларнинг қисм тўпламлари бўлсин, у ҳолда $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ тўпламда сепарат аналитик бўлган ҳар қандай функция*

$$\hat{X} = \{(z,w) : \omega(z,E,D) + \omega(w,E,D) < 1\}$$

соҳага голоморф давом этади ([3], [5] ва [8] га қаранг).

§ 1.2. Плюрисубгармоник функциялар ва P- ўлчов

Плюрисубгармоник функцияларнинг соддалиги, муҳим хоссаларга эгалиги, синфининг кенглиги, айни пайтда, уларнинг голоморф функциялар билан яқин боғланганлиги каби хусусиятларга эга бўлиши плюрисубгармоник функцияларнинг комплекс анализда кенг ўрин эгаллашига олиб келди.

Аввало, $\mathbf{C}$ комплекс текисликда аниқланган субгармоник функциялар синфи (Sh) аналитик функцияларни ўрганишда асосий метод, аппарат сифатида юзага келади. Кейинчалик, субгармоник функциялар назарияси бошқа йўналишлар бўйича ривожланиб, $\mathbf{R}^n$ фазода субгармоник функциялар, потенциаллар, $\mathbf{C}^n$ фазода плюсубгармоник функциялар ва ҳ. к синфлар шаклланди, ўрганилди.

Плюригармоник, плюрисубгармоник функциялар, бу функцияларга мос P – ўлчов, P – сиғим, экстремал функциялар, уларга хос дифференциал операторлар комплекс потенциаллар назариясининг асосини ташкил қилади.

Комплекс потенциаллар назарияси ўтган асрнинг 80 – 90 йилларида юзага келган, шаклланган янги бир йўналиш бўлиб, унинг ёрдамида комплекс анализнинг бир қанча муҳим муаммолари ҳал қилингани бу назариянинг гуркираб ўсишига сабаб бўлди.

Плюригармоник функциялар. $\mathbf{C}^n$ комплекс фазодаги $D \subset \mathbf{C}^n$ соҳада $u(z)$ функция берилган бўлиб, $u(z) \in C^2(D)$ бўлсин. Агар ихтиёрий $z^0 \in D$ ва бу нуқтадан ўтувчи ихтиёрий комплекс тўғри чизиқ $l : z = z^0 + w\xi, \quad w \in \mathbf{C}^n, \ \xi \in \mathbf{C}$ учун ушбу $\varphi(\xi) = u / l = u(z^0 + w\xi)$ кесим – функция $\xi = 0$ нуқтада гармоник, яъни $\xi = 0$ да $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \cdot \partial \overline{\xi}} = 0$ бўлса, $u(z)$ функция D да *плюригармоник функция* дейилади.

Плюригармоник функциялар синфи $Ph(D)$ каби белгиланади. Айтайлик, $u(z) \in Ph(D)$ бўлсин. Унда

$$\frac{\partial^2 u(z^0 + w\xi)}{\partial \xi \, \partial \overline{\xi}} = 0$$

бўлиб, мураккаб функциянинг дифференциаллаш қоидасидан $\sum\limits_{j,k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w_k} = 0$, $w \in \mathbf{C}^n$, эканлигини кўрамиз. Бундан ва $w \in \mathbf{C}^n$ векторнинг ихтиёрийлигидан

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} = 0 \qquad (k, j = 1,2,..., n) \tag{1.1}$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, плюригармоник функциялар синфи (1) тенгламалар системаси билан аниқланади ва баъзан бу система плюригармоник функциянинг таърифи сифатида ҳам қаралади.

1.3 – т е о р е м а. Агар $f(z)=u(z)+iv(z)$ функция $D\subset\mathbf{C}^n$ соҳада голоморф бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{Re} f(z)=u(z), \quad \operatorname{Im} f(z)=\vartheta(z)$$

функциялар D соҳада плюригармоник бўлади ва, аксинча, агар $u(z)$ функция D соҳада плюригармоник бўлса, у ҳолда ихтиёрий $B(z^0,r)\subset D$ атрофда $u(z)$ функция бирор $f(z)\in O(B(z^0,r))$ голоморф функциянинг ҳақиқий қисми бўлади: $u(z)\equiv\operatorname{Re} f(z)$.

Плюрисубгармоник функциялар. Агар $D\subset\mathbf{C}^n$ соҳада аниқланган $u(z)\colon\ D\to[-\infty,\infty)$ функция қуйидаги икки шартни бажарса:

1) $u(z)$ юқоридаги ярим узлуксиз;

2) ихтиёрий l комплекс тўғри чизиқ учун u/l функция $l\bigcap D$ да субгармоник бўлса, $u(z)$ функция D соҳада *плюрисубгармоник* функция дейилади.

Плюрисубгармоник функциялар тўплами $Psh(D)$ каби белгиланади. $D\subset\mathbf{C}^n$ соҳада плюрисубгармоник бўлган функция $D\subset\mathbf{R}^{2n}$ да аниқланган функция сифатида субгармоник функция бўлади. Уни субгармоник функцияларнинг 2 – шартини бажаришини кўриш қийин эмас. Бинобарин, субгармоник функцияларнинг хоссалари плюрисубгармоник функциялар учун ҳам сақланади.

Энди плюрисубгармоник функцияларнинг хоссаларини келтирамиз:

а) агар $u(z)\in Psh(D)$ бўлса, у ҳолда

$$u_\delta(x)=\frac{1}{\delta^n}\int\limits_{|y-x|\le\delta}u(y)K\left(\frac{y-x}{\delta}\right)dV\ , \quad \delta>0\ , \tag{1.2}$$

формула билан аниқланган $u_\delta(z)$

$$D_\delta=\{x\in D: dist(\partial D,x)>\delta\}$$

сохада плюрисубгармоник функция булади ва $Psh(D_\delta)\bigcap C^\infty(D_\delta)$ синфга тегишли бўлиб, $\delta \downarrow 0$ да $u_\delta(z) \downarrow u(z)$ бўлади;

б) агар $u(z) \in Psh(D)$ функция $z^0 \in D$ нуқтада максимумга эришса, яъни $u(z^0) \geq u(z) \quad (z \in D)$ бўлса, у ҳолда $u(z) \equiv const$ бўлади;

в) плюрисубгармоник функцияларнинг мусбат коэффициентли чизиқли комбинацияси плюрисубгармоник функция бўлади;

г) монотон камаювчи ёки текис яқинлашувчи плюрисубгармоник функциялар кетма – кетлигининг лимити плюрисубгармоник функция бўлади;

д) D соҳада плюрисубгармоник функциялар синфи $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ берилган бўлиб, $u = \sup\limits_{\alpha \in \wedge} u_\alpha$ юқоридан ярим узлуксиз функция бўлсин. У ҳолда $u(z)$ плюрисубгармоник функция бўлади, $u \in Psh(D)$. Жумладан, $u_j(z) \in Psh(D) \qquad (j = 1,2,..., k)$ бўлса,

$$\sup\{u_1(z),\, u_2(z),..., u_k(z)\} \in Psh(D)$$

бўлади;

е) агар $f(z) \in O(D)$ бўлса, $\alpha \cdot \ln|f(z)| \in Psh(D)$ бўлади, бунда $\alpha \geq 0$;

ж) агар $u(z) \in Psh(D)$ бўлса, у ҳолда $e^{u(z)} \in Psh(D)$ бўлади, агар $u(z) \in Psh(D),\ \ u\big|_D < 0$ бўлса, у ҳолда $-\ln[-u(z)] \in Psh(D)$ бўлади.

Бу хоссанинг исботи субгармоник функцияларнинг шу хоссасидан бевосита келиб чиқади;

з) D соҳада аниқланган $u(z) \in C^2(D)$ функциянинг D да плюрисубгармоник бўлиши учун ушбу

$$L(u, w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k \qquad (1.3)$$

квадратик форманинг (Леви формасининг) ихтиёрий $z \in D$ да мусбат аниқланган бўлиши зарур ва етарлидир. (1.3) муносабатда

$w=(w_1,w_2,...,w_n)\in \mathbf{C}^n$ бўлиб, квадратик форманинг мусбат аниқланганлиги $\forall w\in \mathbf{C}^n$ да $L(u,w)\geq 0$ бўлишини англатади.

Агар $\forall w\in \mathbf{C}^n$, $w\neq 0$ да $L(u,w)>0$ бўлса, $u(z)$ функция z нуқтада *қатъий плюрисубгармоник* функция дейилади; агар $u(z)$ функция D соҳанинг ҳар бир нуқтасида қатъий плюрисубгармоник бўлса, $u(z)$ *соҳада қатъий плюрисубгармоник* функция дейилади.

Плюриполяр тўпламлар. Плюрисубгармоник функциялар учун ҳам поляр тўпламга ухшаш тушунча киритилади. Агар шундай $u(z)\in Psh(D)$, $u(z)\not\equiv -\infty$ функция топилсаки

$$u(z)\big|_E \equiv -\infty$$

бўлса, E тўплам D да *плюриполяр* тўплам дейилади.

$Psh(D)\subset Sh(D)$ муносабатдан плюриполяр тўпламларнинг полярлиги келиб чиқади. Жумладан, плюриполяр тўплам E учун $H_{2n-2+\varepsilon}(E)=0$, $\varepsilon>0$, бинобарин, E тўпламнинг Лебег ўлчовини нолга тенг бўлиши келиб чиқади.

1.4 – т е о р е м а. Саноқли сондаги плюриполяр тўпламларнинг йиғиндиси плюриполярдир: агар $E_j\subset D$, $j=1,2,...$ плюриполяр бўлса, у ҳолда $E=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$ - плюриполяр бўлади.

Исбот. Ҳақиқатан, ҳам, $E_j\subset\{z\in D:\ u_j(z)=-\infty\}$, бунда $u_j\in Psh(D)$, $u_j\neq-\infty$ $(j=1,2,...)$ бўлсин. D соҳани $D=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}D_j$, $D_j\subset D_{j+1}$, $D_j\subset\subset D$, $D_1\neq\varnothing$ компакт соҳалар йиғиндиси шаклида ёзиб, $M_j=\sup\limits_{G_j}u_j$, $F_j=\{z\in D:\ u_j(z)=-\infty\}$

белгилашларни киритайлик $(j=1,2,\ldots,)$. У ҳолда $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ тўпламнинг Лебег ўлчови 0 га тенг. Демак, $z^0 \in D_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ нуқта мавжуд бўлиб, бу нуқтада барча $u_j(z^0) \neq -\infty, \quad j=1,2,\ldots$. Ушбу $\vartheta_j = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{u_j(z) - M_j}{M_j - u_j(z^0)}$ функциялар кетма–кетлигини қарайлик. Равшанки, $\vartheta_j \in Psh(D)$, $\vartheta_j\big|_{G_j} \leq 0$, $\vartheta_j(z^0) = -\frac{1}{2^j}$. Бундан $\vartheta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \vartheta_j(z)$ қаторнинг йиғиндисини D да Psh ва $\vartheta(z) \not\equiv -\infty$ (чунки $\vartheta(z^0) = -1$) экани келиб чиқади. Иккинчи томондан, $\vartheta\big|_E = -\infty$ эканини кўриш қийин эмас. Теорема исботланди.

1.5 – т е о р е м а. Локал плюриполяр тўплам глобал плюриполяр, яъни агар E тўплам ҳар бир $z^0 \in E$ нуқтанинг бирор атрофида плюриполяр бўлса, у ҳолда у бутун $\mathbf{C}^n$ фазода плюриполяр бўлади. Жумладан, агар E тўплам D соҳада плюриполяр бўлса, у ҳолда у $\mathbf{C}^n$ фазода ҳам плюриполяр бўлади.

P **- ўлчов**. $\mathbf{C}^n$ - фазода чегараланган

$$D = \{z \in \mathbf{C}^n : \quad \rho(z) < 0\} \tag{1.4}$$

кўринишдаги соҳаларни қарайлик, бунда $\rho(z)$ функция $\overline{D}$ нинг бирор атрофида узлуксиз ва плрисубгармоник функция. Бундай соҳалар *кучли псевдоқавариқ* соҳалар билан боғланган бўлиб, улар $\mathbf{C}^n$ фазодаги муҳим соҳалардан ҳисобланади.

Ушбу бўлимда потенциаллар назариясининг дастлабки тушунчаларидан экстремал функциялар ва P - ўлчовлар баён этилади. Бунда соддалик учун D соҳа сифатида (1.4) кўринишдаги соҳа олинади. Аслида эса келтириладиган маълумотлар (тасдиқлар) умумийрок соҳалар учун ҳам ўринли бўлади. Бирор $E \subset D$ тўпламни олиб,

$$U(E,D)=\{u(z)\in Psh(D):\quad u|_G\le 0,\quad u|_E\le -1\}$$

синфни қарайлик. Ушбу

$$\omega(z,E,D)=\sup\{u(z):u\in U(E,D)\}$$

функциянинг регуляризацияси

$$\omega^*(z,E,D)=\overline{\lim_{w\to z}}\,\omega(w,E,D)$$

E тўпламнинг P - *ўлчови* дейилади.

Шоке леммасига кўра [10] шундай саноқли қисм тўплам $U'\subset U(E,D)$ топиладики,

$$[\sup_{u\in U'}u(z)]^*=\omega^*(z,E,D)$$

бўлади. Бундан, шундай монотон ўсувчи $u_j(z)\in U(E,D)$ $j=1,2,3,...$ функциялар кетма – кетлиги мавжуд бўлиб,

$$[\lim_{j\to\infty}u_j(z)]^*=\omega^*(z,E,D)$$

бўлиши келиб чиқади.

P - ўлчов қуйидаги хоссаларга эга:

а) агар $E_1\subset E_2$ бўлса, у ҳолда

$$\omega^*(z,E_1,D)\ge\omega(z,E_2,D)$$

бўлади. Бу P - ўлчовнинг *монотонлик* хоссаси дейилади;

б) агар $U\subset D$ - очиқ тўплам ушбу

$$K_j\subset K_{j+1}\qquad(j=1,2,...)$$

компакт тўпламлар йиғиндиси: $U=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$ шаклида ифодаланган бўлса, у ҳолда $\omega^*(z,K_j,D)$ кетма – кетлик $\omega^*(z,U,D)$ га монотон камайиб интилади: $j\to\infty$ да $\omega^*(z,K_j,D)\downarrow\omega^*(z,U,D)$.

Шунингдек, ихтиёрий $E \subset D$ тўплам учун шундай

$$U_j \supset E, \quad U_j \supset U_{j+1} \qquad (j = 1,2,...)$$

ичма – ич жойлашган очиқ тўпламлар кетма – кетлиги мавжудки,

$$\omega^*(z, E, D) = [\lim_{j\to\infty} \omega(z, U_j, D)]^*$$

бўлади;

в) P - ўлчов $\omega^*(z, E, D)$ ёки ҳеч бир нуқтадан 0 га тенг эмас ёки у айнан 0 га тенг. Бу функциянинг айнан нолга тенг,

$$\omega^*(z, E, D) \equiv 0$$

бўлиши учун E тўпламнинг плюриполяр бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Айтайлик, $\omega^*(z, E, D)$ функция бирор ички $z^0 \in D$ нуқтада 0 га тенг бўлсин. Унда максимумлар принципига кўра $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ бўлади.

Демак, деярли барча $z \in D$ нуқталарда $\omega(z, E, D) = 0$ тенглик бажарилади ва бу тенглик ўринли бўладиган $z^0 \in D$ нуқтани тайинлайлик. Унда ω функциянинг таърифига кўра шундай $u_j(z) \in U(E, D)$ $j = 1,2,3,...$, функциялар кетма – кетлиги мавжудки,

$$u_j(z^0) \geq -\frac{1}{2^j} \qquad (j = 1,2,3,...)$$

тенглик бажарилади.

Ушбу

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$$

йиғиндини қарайлик. Бу йиғинди, биринчидан, D соҳада плюрисубгармоник функция бўлади, чунки $u_j(z) \leq 0$ ва $\sum_{j=1}^{k} u_j(z)$ монотон камаювчи. Иккинчидан эса, $u(z^0) \geq -1$ бўлишлигидан, $u(z) \not\equiv -\infty$ эканлиги келиб чиқади. Бундан ташқари, $u_j(z) \in U(E, D)$ лигидан, $z \in E$ ларда

$u(z) = -\infty$ бўлишлиги ва E тўпламни плюриполяр эканлиги келиб чиқади.

Энди фараз қилайлик, $E \subset D$ тўплам плюриполяр, яъни шундай $u_j(z) \in Psh(D)$, $u(z) \not\equiv -\infty$ функция мавжуд бўлсинки, $u(z)\big|_D \leq 0$, $u(z)\big|_E \equiv -\infty$ бўлсин. У ҳолда $\frac{1}{j} u(z) \in U(E, D)$, $(j = 1,2,...)$ бўлиб, $u(z^0) \neq -\infty$ шартни қаноатлантирувчи нуқталарда $\omega(z, E, D) = 0$ тенглик бажарилади. Ундан эса $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ бўлиши келиб чиқади.

г) *Икки константа хақидаги теорема*. Агар $u(z)$ функция $D \subset \mathbf{C}^n$ да плюрисубгармоник бўлиб,

$$u\big|_D \leq M \ , \quad u\big|_E \leq m \quad (E \subset D)$$

бўлса, у ҳолда $z \in D$ да $u(z) \leq M(1 + \omega^*(z, E, D)) - m\omega^*(z, E, D)$, тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хоссанинг исботи бевосита ω^* нинг таърифидан келиб чиқади;

д) айтайлик $E \subset D$ тўплам берилган бўлиб, $\omega(z, E, D)$ унинг P-ўлчови бўлсин. Ушбу

$$P(E, D) = -\int_D \omega(z, E, D) dV \tag{1.5}$$

интеграл E - тўпламнинг P - *сиғими* дейилади. P - сиғим ҳам P - ўлчов хоссалари каби хоссаларга эга. Жумладан, агар $E_1 \subset E_2$ бўлса, $P(E_1, D) \leq P(E_2, D)$ (монотонлик хоссаси); $P(E, D) = 0 \quad \Leftrightarrow E$ - плюриполяр каби хоссалар ўринлидир.

Қуйида P - сиғимнинг муҳим хусусиятини ифодаловчи теоремани келтирамиз.

1.6 – т е о р е м а. Ихтиёрий $E_j \subset D \quad (j = 1,2,3,...)$ тўпламлар учун

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, D) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P(E, D)$$

бўлади.

Одатда, бу хосса P сиғимнинг субаддитивлик хоссаси дейилади.

Грин функцияси. $\mathbf{C}^n$ фазода $K \subset \mathbf{C}^n$ компакт берилган бўлиб, $L = \{u(z) \in Psh(\mathbf{C}^n): \ u(z) \le C_u + \ln(1 + \|z\|)\}$, C_u - константа бўлсин. У ҳолда $V(z,K) = \sup\{u(z): \ u(z) \in L, \ u|_K \le 0\}$ функцияга ва унинг регулярланган функцияси $V^*(z,K) = \overline{\lim_{w \to z}} V(w,K)$ га K компактнинг *экстремал функциялари* ёки *Грин функциялари* дейилади.

Грин функциялари қуйидаги ҳоссаларга эга:

а) $V^*(z,K) \in Psh(\mathbf{C}^n)$ мавжуд бўлишлиги учун K нинг плюриполяр бўлмаслиги зарур ва етарлидир. K плюриполяр бўлса, $V^*(z,K) \equiv +\infty$ бўлади. Акс ҳолда, $V^*(z,K) \in L$ бўлиб, $\{z \in \mathbf{C}^n: \ V(z,K) < V^*(z,K)\}$ тўплам плюриполярдир;

б) *Бернштейн – Уолш тенгсизлиги.* Агар $P_m(z)$ m - даражали полином бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{m}\ln|P_m(z)| \le \frac{1}{m}\ln\|P_m\|_K + V(z,K), \quad z \in \mathbf{C}^n, \tag{1.6}$$

тенгсизлик ўринлидир ($V(z,K)$ нинг таърифидан бевосита келиб чиқади);

в) **1.7 – т е о р е м а.** [3]. Ихтиёрий $K \subset \mathbf{C}^n$ компакт учун

$$V(z,K) = \sup\left\{\frac{1}{\deg P}\ln|P|: \ \|P\|_K = 1\right\} \tag{1.7}$$

тенглик ўринлидир. Бунда $\deg P$ – полиномнинг даражаси;

г) агар K компакт ўсувчи $K_j \subset K_{j+1}$ компактларни йиғиндиси шаклида ифодаланган бўлса, $K = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, у ҳолда $j \to \infty$ да $V^*(z,K_j) \uparrow V^*(z,K)$ бўлади.

Плюрирегуляр нуқталар. Равшанки, $\omega(z,E,D)$ функцияси учун

$$\omega(z,E,D)\big|_E \equiv -1$$

бўлади. Айни пайтда, функциянинг регулярланиши билан ҳосил бўлган $\omega^*(z,E,D)$ функция E тўпламнинг баъзи нуқталарида –1 га тенг бўлмасдан қолиши мумкин.

Ушбу

$$\omega^*(z,E,D) \equiv -1$$

тенгликни қаноатлантирувчи $z^0 \in E$ нуқта E тўпламнинг *плюрирегуляр нуқтаси* (D соҳага нисбатан) дейилади.

Очиқ $U \subset D$ тўпламнинг ҳар бир нуқтаси плюрирегуляр нуқта бўлади. Агар $K \subset D$ компактнинг барча нуқталари плюрирегуляр бўлса, K га *плюрирегуляр компакт* дейилади.

1.8 – т е о р е м а. Плюрирегуляр компакт $K \subset D$ учун P - ўлчов узлуксиз бўлади:

$$\omega(z,K,D) = \omega^*(z,K,D) \in C(D)$$

Исбот. Маълумки, $D = \{\rho < 0\}$ тўпламдаги ρ функция $\overline{D}$ ёпиқ соҳанинг бирор $G \supset \overline{D}$ атрофида аниқланган ва плюрисубгармоник функциядир. $M > 0$ сонини шундай танлаб оламизки, $M\ \rho\big|_K \leq -1$ бўлсин. У ҳолда $M\rho \in U(K,D)$ бўлиб, D соҳада

$$\omega^*(z,K,D) \geq M\ \rho(z)$$

бўлади.

Ушбу

$$w(z) = \begin{cases} \omega^*(z,K,D), & \text{\textit{агар} } z \in D \text{ \textit{бўлса},} \\ Mp(z), & \text{\textit{агар} } z \in G \setminus D \text{ \textit{бўлса}} \end{cases}$$

функция, плюрисубгармоник функцияларнинг таърифига кўра плюрисубгармоник бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, биринчидан, $w(z)$ функцияси G соҳада юқоридан ярим узлуксиз: D да у $\omega^*(z,K,D)$ га тенг, $G\setminus\overline{D}$ да эса у $M\,\rho(z)$ узлуксиз функцияга тенг бўлиб, чегаравий $z^0\in\partial D$ нуқталарда $\lim\limits_{z\to z^0} w(z)=0$ дир. Энди ихтиёрий $\varepsilon>0$ олиб, ушбу

$$w_\varepsilon(z)=\begin{cases}\max\left\{\omega^*(z,K,D)-\varepsilon,\ M\,\rho(z)\right\}, & агар\ \ z\in D\ \ бўлса,\\ M\,\rho(z), & агар\ \ z\in G\setminus D\ \ бўлса\end{cases}$$

функциясини қарайлик. Бу функция D да иккита Psh функцияларнинг максимуми сифатида Psh дир. $\forall\varepsilon>0$ учун ∂Dнинг бирор атрофида $w_\varepsilon(z)=M\,\rho(z)$ бўлиб, бундан унинг $G\setminus D$ да ҳам Psh эканлиги ва натижада $w_\varepsilon(z)\in P\,sh(G)$ эканлиги келиб чиқади. Бундан ва $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} w_\varepsilon(z)=w(z)$ лигидан $w(z)\in Psh(G)$ эканлиги равшан.

Плюрисубгармоник функцияларнинг хоссасига кўра $\overline{D}$ нинг бирор атрофи $\overline{D}\subset D'\subset\subset G$ да плюрисубгармоник бўлган шундай $u_j(z)\in Psh(D')\bigcap C^\infty(D')$ монотон кетма – кетлик топиладики, $j\to\infty$ да $u_j(z)\downarrow w(z)\quad (j=1,2,3,...)$ бўлади. Энди $\varepsilon>0$ сонини фиксирлаб, ушбу

$$U_1=\left\{z\in D:\ w(z)<-1+\varepsilon\right\},$$
$$U_2=\left\{z\in D':\ w(z)<\varepsilon\right\}$$

очиқ тўпламларни қараймиз. Равшанки, $\overline{D}\subset U_2$ ва K нинг плюрирегулярлигидан $K\subset U_1$ дир. Бундан ташқари,

$$U_1\ \text{да:}\ \ \overline{\lim_{j\to\infty}}\, u_j(z)=w(z)\le -1+\varepsilon\ ,$$

$$U_2\ \text{да:}\ \ \overline{\lim_{j\to\infty}}\, u_j(z)=w(z)\le \varepsilon$$

бўлади. Бундан $u_j(z)\quad (j=1,2,3,...)$ кетма – кетликка икки марта Хартогс леммасини қўлласак, шундай j_0 номер топиладики, $j\ge j_0$ ларда

$u_j(z) \le -1+2\varepsilon$, $z \in K \subset U_1$ ва $u_j(z) \le 2\varepsilon$, $z \in \overline{D} \subset U_2$, бўлади. Демак, $j \ge j_0$ ларда $u_j(z) - 2\varepsilon \in U(K,D)$ ва $u_j(z) - 2\varepsilon \le \omega^*(z,K,D)$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $j \ge j_0$ да $u_j(z) - 2\varepsilon \le \omega^*(z,K,D) \le u_j(z)$, $z \in D$, тенгсизликнинг ўринли бўлишини топамиз. Бу эса $\omega^*(z,K,D)$ нинг узлуксизлигини билдиради. Теорема исботланди.

Агар полиномиал қаварик компакт $K \subset D$ плюрирегуляр бўлса, у ҳолда ихтиёрий $z^0 \in K$ учун $V^*(z^0,K)=0$ дир. Ва, аксинча, $V^*(z^0,K)=0$ бўлишидан $\omega^*(z^0,K,D)=-1$ бўлишлиги келиб чиқади. Кўпинча, $V^*(z,K)$ нинг бу хоссасини плюрирегулярлик таърифи сифатида ҳам қабул қилишади: агар $z^0 \in K$ нуқта учун $V(z^0,K)=0$ бўлса, z^0 га K компактнинг *плюрирегуляр* нуқтаси дейилади.

Қуйидаги теорема 1.8 – теорема каби исботланади.

1.9 – т е о р е м а. Агар $K \subset \mathbf{C}^n$ - плюрирегуляр бўлса, у ҳолда $V(z,K) = V^*(z,K) \in Psh(\mathbf{C}^n) \bigcap C(\mathbf{C}^n)$.

II – боб

Чегаравий тўпламларнинг P - ўлчови

§ 2.1. Чегаравий тўпламларнинг P - ўлчови ва унинг хоссалари

Ушбу параграфда биз чегаравий тўпламларнинг P - ўлчови ўрганамиз.

2.1 – таъриф. Фараз қилайлик $D \subset \mathbf{C}^n$ - чегараси силлиқ соҳа бўлсин. $E \subset \partial D$ тўпламнинг $P-$ўлчови деб экстремал функцияга айтилади.

$$\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega(w, E, D),$$

бунда

$$\omega(z, E, D) = \sup \left\{ u(z) : u(z) \in PSh(D) : \tilde{u}\big|_E \le -1,\ u\big|_D \le 0 \right\}.$$

Бу ерда $\tilde{u}(\zeta),\ \zeta \in E,\ \ u(z)$ функциянинг ζ нуқтадаги чегаравий қиймати бўлиб, у

$$\sup_{\alpha > 1} \overline{lim}_{\substack{x \to \zeta \\ x \in A_\alpha(\zeta)}} u(x) = \tilde{u}(\zeta)$$

формула ёрдамида аниқланади, бунда $A_\alpha(\xi) = \left\{ x \in D : |x - \xi| < \alpha \cdot p(x, T_\xi) \right\}$.

Бу ерда ҳам $E \subset D$ бўлган ҳолдагидек (1.2 параграфга қаранг) чегаравий тўпламлар учун $\omega^*(z, E, D)$ экстремал функция ёки айнан нолга тенг бўлади ёки D соҳанинг бирор нуқтасида ҳам нолга тенг бўлмайди. Биринчи ҳолда D соҳада юқоридан чегараланган шундай бир плюрисубгармоник функция топиладики, қайсиким $u(z) \not\equiv -\infty$ ва $\tilde{u}\big|_E \equiv -\infty$ бўлади. Шу сабабли E тўплам чегаравий плюриполяр тўплам дейилади. $E \subset \partial D$ тўплам учун $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ эканлиги $E-$ тўпламнинг чегаравий плюриполяр тўплам эканлиги билан эквивалентдир.

Ҳақиқатдан ҳам, фараз қилайлик $E \subset \partial D$ - плюриполяр тўплам бўлсин. У ҳолда таърифга кўра шундай бир $u(z)$- плюрисубгармоник функция мавжудки, $u(z) \le 0,\ z \in D, u(z) \not\equiv -\infty$ ва $u\big|_E = -\infty$ бўлади. Агар биз

$$u_\varepsilon(z) = \varepsilon \cdot u(z), \quad \varepsilon > 0$$

функциялар оиласини қарасак бу функциялар барчаси

$$u_\varepsilon(z)\big|_E \le -1\,, \;\; u_\varepsilon(z)\big|_D \le 0$$

шартни қаноатлантиради ва $\varepsilon \to 0$ да деярли барча $z \in D$ нуқталарда $u_\varepsilon(z) \to 0$ бўлади.

Демак

$$0 \equiv \left(\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z)\right)^* \le \omega^*(z, E, D) \le 0$$

тенгсизлик ўринли.

Бундан келиб чиқадики $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$. Энди фараз қилайлик $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ бўлсин. ω^* функциянинг таърифига кўра ихтиёрий фиксирланган $z^0 \in D$ нуқта учун шундай плюрисубгармлник функциялар кетма – кетлиги топиладики қайсиким

$$u_k(z^0) > -\frac{1}{2^k}\,, \quad u_k\big|_D \le 0, \quad u_k\big|_E \le -1$$

бўлади.

Бу функциянинг йиғиндиси бўлган $u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z) -$ функция D соҳада плюрисубгармоник бўлади ва $u(z^0) > -1, \quad u\big|_E = -\infty$.

Демак, $u(z) \le 0,\ z \in D,\ u(z) \not\equiv -\infty$ ва $u\big|_E = -\infty$.

Таърифга кўра E плюриполяр тўплам экан.

Чегаравий тўпламнинг P- ўлчови умуман олганда гармоник ўлчовдан фарқли бўлиб, у ҳамма вақт ҳам $\overline{D} \setminus E$ да узлуксиз бўлавермайди. Ҳатто E компакт тўплам бўлган ҳолда ҳам.

Биз бу ерда қуйидаги теоремани исботлаймиз.

2.1 – теорема. $B = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1\}$ - бирлик шар,

$T=\left\{z=(z_1,z_2,...,z_n):|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ - шарнинг чегараси ∂B га қарашли тор бўлса, T нинг $P-$ўлчови $\omega^*(z,T,B)$ қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1) $\omega^* \in \mathbf{C}(\overline{B}\setminus T)$

2) $\omega^* \not\equiv 0,$ ва $\omega^*\Big|_{\partial B\setminus T} \equiv 0$.

Исбот. $B-$ шар ва $T-$тор буришга нисбатан инвариант бўлганликлари сабабли

$$\omega^*(z,T,B)=\omega^*(z_1,z_2,...,z_n,E,D)=$$
$$=\omega^*\left(|z_1|e^{i\theta_1},|z_2|e^{i\theta_2},...,|z_n|e^{i\theta_n},E,D\right)$$

$\theta_1,\theta_2,...,\theta_n-$ўзгарувчилардан боғлиқ бўлмай, фақат $|z_1|,|z_2|,...,|z_n|-$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади [12] .

Агар $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in\partial B\setminus T$ бўлса, у ҳолда

$$u(z,\xi)=\frac{|\xi_1 z_1|+|\xi_2 z_2|+\cdots+|\xi_n z_n|-1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(|\xi_1|+|\xi_2|+\cdots|\xi_n|\right)}$$

плюрисубгармоник функция қуйдаги тенгсизликларни қаноатлантиради

$$u(z,\xi)\le\omega^*(z,T,B),$$

$u(z,\xi)\le 0,\ \ z\in B$ ва $u(z,\xi)\equiv -1,\ z\in T$.

Бу ердан қуйидагига эга бўламиз.

$$0=\lim_{z\to\xi}u(z,\xi)\le\underline{\lim}_{z\to\xi}\omega^*(z,T,B)\le\overline{\lim_{z\to\xi}}\,\omega^*(z,T,B)\le 0,\quad \xi\in\partial B\setminus T\cdot$$

Бундан келиб чиқадики $\omega^*(z,T,B)$ функция $\partial B\setminus T$ чегаравий тўплам нуқталарида узлуксиз. Демак, $\omega^*(z,T,B)$ функция $\overline{B}\setminus T$ тўпламда узлуксиз. Ҳамда $\omega^*(z,T,B)=0,\quad z\in\partial B\setminus T$ экан.

$\omega^*(z,T,B)\not\equiv 0$ эканлиги T тўпламнинг плюриполяр эмаслигидан келиб чиқади (2.1 – параграфга қаранг). Теорема исбот бўлди.

§ 2.2. Чегаравий тўплам P- ўлчовини Борель ўлчови билан боғлиқлиги

Бу параграфда биз $P_\mu -$ ўлчовга таъриф берамиз ва унинг P- ўлчови билан боғлиқлигини ўрганамиз.

2.2. – таъриф. Фараз қилайлик $D \subset \mathbf{C}^n$- чегараси силлиқ соҳа, $E \subset \partial D$ ва $\mu -$етакловчиси E га қарашли Борель ўлчови бўлсин. Қуйидаги экстремал функцияга

$$\omega_\mu^*(z,E,D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_\mu(w,E,D)$$

бунда

$$\omega_\mu(z,E,D) = \sup \Big\{ u(z) \in PSh(D) \cap C(\overline{D}) : u|_D \le 0,\ \forall E_0 \subset E;$$

$$\mu(E_0) > 0,\ \frac{1}{\mu(E_0)} \int_{E_0} u(\xi) d\mu \le -1 \Big\},$$

E - чегаравий тўпламнинг D соҳага нисбатан $P_\mu -$ўлчови дейилади.

2.2 – теорема. Агар $D \subset \mathbf{C}^n$- чегараси силлиқ қабариқ соҳа ва $E \subset \partial D$ компакт тўплам бўлса, у ҳолда шундай бир $\mu : \operatorname{supp} \mu \subset E -$ Борель ўлчови топиладики,

$$\omega_\mu^*(z,E,D) \equiv \omega^*(z,E,D)$$

айният ўринли бўлади.

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун А. Вольбег ва С. Конягинларнинг [3] ишида исбот этилган қуйидаги теоремадан фойдаланамиз: ихтиёрий $E \subset \mathbf{C}^n$ компакт тўплам учун

$$\mu(B(z,2R)) \le C \cdot \mu(B(z,R)), \forall z \in E,\ \forall R > 0, \tag{2.1}$$

шартни қаноатлантирувчи $\mu : \operatorname{supp} \mu \subset E -$мусбат Борель ўлчови мавжуд. Бу ерда $c = const,\quad B(z,R) -$ маркази z нуқтада радиуси R га тенг шар.

$E \subset \partial D -$ компакт тўпламда (2.1) шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий бир мусбат Борель ўлчовини танлаб оламиз. (2.1) шартга кўра ихтиёрий $\xi \in E$ нуқта ва ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $\mu(B(\xi, E)) > 0$ бўлади.

D соҳа қабариқ ва чегараси силлиқ бўлганлиги сабабли

$$f_E(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi \in E \\ 0, & \xi \in \partial D \setminus E \end{cases}$$

функцияга қуйидан монотон ўсиб яқинлашувчи шундай $f_k(\xi)$ узлуксиз функциялар кетма – кетлиги топиладики, Монже – Ампер тенгламасига қўйилган қуйидаги Дирихле масаласи

$$\begin{cases} \left(dd^c u(z)\right)^n = 0 \\ u|_{\partial D} = f_k(\xi) \end{cases}$$

ҳар бир $k \in N$ учун $Psh(D) \bigcap C(\overline{D})$ синфга қарашли ва

$$u_k(z)\big|_E \le -1\,,\ \ u_k(z)\big|_D \le 0 \qquad (2.2)$$

шартни қаноатлантирувчи $u_k(z)$ ечимга эга бўлади ([3], [4]).

Аниқланишига кўра $u_k(z)$ кетма – кетлик монотон ўсиб $\omega(z, E, D)$ функцияга интилади. $u_k(z)$ функциялар $PSh(D) \bigcap C(\overline{D})$ синфга тегишли бўлиб (2.2) шартни қаноатлантиришдан $P_\mu -$ ўлчовнинг таърифига кўра

$$\omega^*(z, E, D) \le \omega_\mu^*(z, E, D) \qquad (2.3)$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Иккинчи томондан μ ўлчов (2.1) хоссани қаноатлантирганлиги сабабли $u(z)$ узлуксиз плюрисубгармоник функция учун

$$\int\limits_{B(\xi,E)\cap E} u(\xi) d\mu(\xi) \le -1, \quad \forall \xi \in E, \ \ \forall \varepsilon > 0,$$

шартни қаноатлантиришлигидан $u(\xi) \le -1, \xi \in E$ шартни ҳам қаноатлантириши келиб чиқади. Демак P- ўлчов ва $P_\mu -$ ўлчовларнинг таърифига кўра

$$\omega_{\mu}^{*}(z,E,D)\leq\omega^{*}(z,E,D) \tag{2.4}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Хуллас (2.3) ва (2.4) тенгсизликларни бирлаштириб

$$\omega_{\mu}^{*}(z,E,D)\equiv\omega^{*}(z,E,D)$$

айниятга эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

2.3 – теорема. Агар $D\subset\mathbf{C}^n$ - чегараси силлиқ қабариқ соҳа ва $E\subset\partial D$ - компакт плюриполяр тўплам бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\mu:\operatorname{supp}\mu\subset E-$ Борель ўлчови учун $\omega_{\mu}^{*}(z,E,D)\equiv 0$ бўлади.

Исбот. 2.1 – теореманинг исботида қурилганидек бу ерда ҳам шундай $u_k(z)\in PSh(D)\cap C(\overline{D})$ плюрисубгармоник функциялар кетма – кетлиги мавжудки, қайсиким $u_k(z)$ монотон ўсиб $\omega(z,E,D)$ функцияга интилади. Иккинчи томондан ихтиёрий бир $\mu:\operatorname{supp}\mu\subset E-$ Борель ўлчови учун $P_{\mu}-$ ўлчовнинг таърифига кўра

$$\omega^{*}(z,E,D)=\left(\lim_{k\to\infty}u_k(z)\right)^{*}\leq\omega_{\mu}^{*}(z,E,D)$$

тенгсизлик ўринли. $E-$плюриполяр бўлганлиги сабабли $\omega^{*}(z,E,D)\equiv 0$.
Демак

$$\omega_{\mu}^{*}(z,E,D)\equiv 0.$$

теорема исбот бўлди.

Хулоса

Диссертация чегаравий тўпламларнинг комплекс потенциалларини ўрганишга бағишланган.

Диссертацияда олинган натижалар юзасидан қуйидаги хулосага келдик.

1. $B \subset \mathbf{C}^n$ шар чегарасида ётувчи T - торнинг P - ўлчови $\overline{B} \setminus T$ тўпламда узлуксиз.

2. $D \subset \mathbf{C}^n$ чегараси силлиқ чегараланган соҳа ва $E \subset \partial D$ - ихтиёрий компакт тўплам бўлса, у ҳолда шундай бир $\mu : \operatorname{supp} \mu \subset E$ Борел ўлчови топилиб,

$$\omega_\mu^*(z, E, D) \equiv \omega^*(z, E, D)$$

бўлади.

3. Агар $E \subset \partial D$ плюриполяр тўплам бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\mu : \operatorname{supp} \mu \subset E$ - Борель ўлчови учун

$$\omega_\mu^*(x, E, D) \equiv 0$$

бўлади.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т.1,Т.2, М: Наука, 1985 г.

2. Садуллаев А. С. «Кўп аргументли голоморф функциялар» Урганч – 2004 йил, 193 бет.

3. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические функции // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М: ВИНИТИ АНСССР. 1985, Т.8.с.65 – 113.

4. Садуллаев А.С. Плюрисубгармонические меры и ёмкости на комплексных многообразиях // УМН, 1981, Т.36, вып 4, с. 53 – 105.

5. Садуллаев А.С, Имомкулов С.А. Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях //. Труды МИРАН. 2006. Т.253. с. 158 – 174.

6. Bedford E. Taylor B.A. A new capacity for plurisubharmonic functions // Acta Math., 1982, 149, № 1 – 2, p.1 – 40.

7. Хейман У, Кеннеди П.И. Субгармонвческие функции. М: МИР, 1980.

8. Имомкулов С.А. Аналитическое продолжения сепаратно – аналитических функций // Вестник КрасГУ. 2006. вып. 7.с. 75 – 84.

9. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.; Наука, 1971.

10. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.

11 Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: «Наука», 1990.

12. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: «Наука» 1964.

13. Вольберг А.Л., Конягин С.В. На любом компакте в $\mathbf{R}^n$ существует однородная мера // Докл. АНСССР. 1984, Т. 278, №3, - с. 783. – 786.

14. Имомкулов С.А. , Машарипова Ф.А. Чегаравий тўпламларнинг P - ўлчови ҳақида. УрДУ, “Магистрлар тўплами” 2007й 91 бет.

15. Имомкулов С.А. , Машарипова Ф.А. Чегаравий тўплам P - ўлчовини Борель ўлчови билан боғлиқлиги. УрДУ, “Магистрлар тўплами” 2008 й * бет.

16. Машарипова Ф. А. Шар чегарасига қарашли тор P - ўлчовининг узлуксизлиги. УрДУ, “Магистрлар тўплами” 2008 й * бет.