ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

САМАРКАНД ИКТИСОДИЁТ ВА СЕРВИС ИНСТИТУТИ
ОЛИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

М.Р.РАИСОВ

«МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ» ФАНИДАН АМАЛИЙ МАШЂУЛОТЛАР УЧУН УСЛУБИЙ КЎЛЛАНМА

САМАРКАНД-2005

Раисов М.Р. «Математик программалаш» фанидан услубий кўлланма.Самарканд СамИСИ, 2005 бет

Услубий кўлланма 5340100 «Иктисод», 5340200 «Маркетинг», 5340600 «Молия», 5340700 «Туризм», 5810300»Сервис» ва бошка иктисодиёт йўналишлари бўйича тахсил олаётган бакалаврлар учун мўлжалланган.

«ОЛИЙ МАТЕМАТИКА» кафедраси мажлисида макулланган (6-сонли баённома, 9.03.2005 йил)

Институтилмий, ўкув-услубий бирлашмаси томонидан тасдикланган ва чоп этиш учун тавсия этилган (5-сонли баённома 10.03.2005 йил)

Такризчилар:

1. Окилов Ж.О. – ф,-м.ф. доктори, профессор.
2. Кўлдошев А.Ч. – ф,-ф.м номзоди.

Самарканд Иктисодиёт ва Сервис институти -2005 йил

М.Р.Раисов

МАТЕМАТИК ПРОГРАММАЛАШ

Самарканд - 2005

Такдимчилар:

Раисов Мансур, Хужаёров Бахтиёр Хужаёрович, Тошов Нуъмонжон математик программалаш.

Сарлавхада: УзР Олий ва урта махсус таълим вазирлиги.

Кулланма бакалавриат укув режасига мос келувчи укув дастурлари, Олий касбий таълимнинг давлат стандартлари асосида ёзилган булиб, математик программалашнинг куйидаги булимларини уз ичига олади:

Чизикли программалаш, чизикли программалашнинг иккиланмалик масалалари, транспорт масаласи, бутун сонли программалаш, параметрик программалаш, динамик программалаш, чизиксиз программалаш, уйинлар назарияси мавзуларини уз ичига олган.

Ушбу кулланма бакалавриат боскичининг барча иктисодий йуналишлари талабалари учун тавсия этилади.

Суз боши

Узбекистон Олий укув юртларида куп боскичли таълим тизими жорий килиниб, бакалавриатда ва магистратурада мутахассислар тайёрлаш йулга куйилган. Бу эса олий укув юрти укитувчиларидан жахон андозаларига тула жавоб берадиган, мустакиллик талаб ва эхтиёжларига жавоб берадиган бакалавр ва магистрлар укув режаси, укув режага тула мос келувчи укув дастурлари, олий касбий таълимининг давлат стандартлари асосида дарслик, услубий кўлланма, ўкув кўлланма каби адабиётларининг яратилишини такоза этади. Ушбу кулланмада математик программалаш фанига тегишли масалаларни ечиш методикаси келтирилган. Услубий кулланмада лаборатория ишларини ЭХМ ни куллаб бажариш учун тайёр масалалрни математик моделлари ва кискача назарий маълумотлар келтирилган.

Ушбу услубий кулланма биринчи марта ва давлат тилида ёзилганлиги сабабли камчиликлар булиши мумкин. Шунинг учун бунда кулланма буйича билдирилган барча таклиф ва фикрлар муаллиф томонидан миннатдорчилик билан кабул килинади.

М.Р. Раисов

Математик программалашдан мисол ва масалалар ечиш учун услубий кўлланма

САМАРКАНД-2005

Кириш

Математика фанининг фундаментал ривожланиши бошка фанларнинг хам ривожланишига олиб келади. Хозирги вактда математика методлари кулланилмаган фан ва техниканинг бирор сохаси йўк. Халк хўжалигини режалаштириш ва бошкариш масалалари жуда мураккаб бўлиб, бу масалаларни ечиш учун математик моделларни кўллашга тўђри келади.

Айникса бозор иктисодиётига ўтиш даврида ва ундан кейин барча иктисодий масалаларни ечганда математик моделлаштиришнинг татбики жуда катта ахамиятга эга бўлади. Шунинг учун услубий кўлланмада хар бир масала, иктисодий масала эканлигига асосий эътибор берилади. Масалалар шундай танлаб олиндики талабалар уни ечганда ортикча ташвишга тушмасин. Хар бир мавзуни бошлаганда бу мавзуда ишлатиладиган формулалар берилди. Шу билан бир каторда хар бир мавзуга доир масалалар ечилди. Айрим бобларда керак бўлган назарий коидалар хам берилди. Масалалар тузилганда, уларни соддалаштиришга харакат килинди. Масалалар шундай танлаб олиндики, келгусида бу масалаларни ЭХМ да хисоблаш мумкин бўлсин. Масалаларни танлашда жуда кўп адабиётлардан фойдаланилди.

«Математик программалаш» фани куйидаги бўлимларни ўз ичига олади: оптимизация методлари, йинлар назарияси, стохастик методлар, иктисодий методлар, чизикли дастурлаш, моделларнинг сезгилик даражасининг тахлили, икки тарафлама бахолаш, эгри чизикли программалаш, Лагранжнинг кўпайтмалар методи, каварик программалаш масалалари, Кун-Такер назарияси, квадратик программалаш масалалари ва бошка асосий тушунчалар.

Халк хўжалигининг иктисодий масалаларини ечиш учун юкоридаги методлар кейинги вактда кўп кўлланилмокда. Лекин шуни хам такидлаш лозимки, барча ишлаб чикариш корхоналарининг маблағ ва хомашё билан таъминланиши чегараланган. Шуни хисобга олиб иктисодий масалаларни ечганда бу ечимлар ичида лаёкатли ечимларни танлашга туғри келади. Демак, хар бир аник иктисодий масалани ечиш учун харакат программасини тузиб танлаш керак.

Юкоридаги усулларни тассавур килиш учун бир неча масалаларни ечишни курсатамиз.

1. Материалларни оптимал бичиш масаласи

Масала 1. Ярим тайёр махсулотлар корхонага тўкилган материаллар, темир, тахта ва ойна вараклари сифатида келтирилади. Бу ярим тайёр махсулотлардан иложи борича кўпрок деталлар комплекти тайёрлаш талаб этилади. Шу билан бирга куйидаги шартлар бажарилиши лозим. Жами n-партия материал бўлиб, i-партия q_i-бирликка эга. Комплект эса m-хил турли деталдан иборат. Хар бир комплектга эса k-хил деталдан p_k-та киради. Ярим тайёр махсулотлар бирлиги s-та турли усул билан бичилиши мумкин.

i-чи партия ярим тайёр махсулот j-чи усул билан бичилганда k-хил деталдан a_{ikj}-та хосил бўлади деб фараз килайлик.

x_{ij}-билан i-чи партиянинг j-усул билан бичилгандаги сонини (микдорини) белгилайлик. Бу усулда бичилгандаги k-хил детал микдори $a_{ikj}x_{ij}$ булади. Бичишнинг барча усулларидан хосил бўладиган k-хил детал сони $\sum_{i=1}^{s} a_{ikj}x_{ij}$ га тенг. Хар бир партия материал белгиланган k-хил деталнинг k-хил умумий сони

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1kj}x_{1j} + \sum_{j=1}^{s} a_{2kj}x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{s} a_{nkj}x_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij} \, .$$

Хар бир комплект k-хил деталдан p_k-тага эга. Шунинг учун k хил детал билан таъминланган комплект сони куйидагига тенг:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ikj} x_{ij} .$$

Комплект барча хил деталлар билан таъминланган бўлиши шарт, яъни материалларни оптимал бичиш масаласида шундай x_{ij} сонларни топиш керакки, улар Z_k нисбатнинг минимал кийматига максимум киймат берсинлар, яъни

$$Z_k > Z \quad \left(k = \overline{1,n}\right) \qquad (1)$$

шарт бажарилганда Z-га максимум киймат бериш талаб килинади. Шу билан бир каторда

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} = q_i, \ \left(i = \overline{1,n}\right) \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \left(i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}\right) \ . \qquad (3)$$

Юкоридагилардан кўриниб турибдики (2) формуладаги шартлар, i-чи партия q_i бирлик материалга эга бўлганлигини кўрсатади, (3) формула эса махсулот сонининг манфий бўлмаслигини кўрсатади.

2. Транспорт масаласи

Масала 2. Самарканд вилоятининг иккита базасидан учта туманга бир жинсли товарларни ташиш керак бўлсин. Товарлар захираси биринчи базада 400 тонна, иккинчи базада 600 тонна. Биринчи туманнинг товарга эхтиёжи 350 тонна, иккинчисиники 450 тонна ва учинчисиники 200 тонна. Биринчи базадан учта тумангача масофалар мос холда 10 км, 20 км ва 30 км. Иккинчи базадан учта тумангача бўлган масофалар мос равишда 40 км, 50 км ва 60 км –га тенг. Туманларга товар ташиш харажатларининг оптимал вариантларини топиш талаб этилади.

Бу масалани ечиш учун куйидаги жадвални тузамиз.

Жадвал 1.

Базалар	Товар захиралари	Туманлар		
		1	2	3
Жомбой	400 т	10	20	30

		x_{11}	x_{12}	x_{13}
Жума	600 т	40 x_{21}	50 x_{22}	60 x_{23}
Товарларга булган талаб	1000 т	350 т	450 т	200 т

Туманларнинг базалардан олган юклари x_{ij} $\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right)$ хар хил бўлиши мумкин. Мисол учун 1-чи базадаги юкларни куйидагича таксимлаш мумкин:

$x_{11}=150,\ x_{12}=150,\ x_{13}=100$ т

2-чи базадаги юкларни эса мос равишда истимолчиларга куйидагича таксимлаймиз $x_{21}=200,\ x_{22}=300,\ x_{23}=100$ т . кандай коидага асосан

Бу таксимот бўйича транспорт харажатлари куйидагича бўлади:

$F_1=150\cdot10+150\cdot20+100\cdot30+200\cdot40+300\cdot50+100\cdot60=36500 m/km$.

Агар x_{ij} ларни иккинчи марта бошкача танласак, яъни

$x_{11}=50m, x_{12}=200m, x_{13}=150m, x_{21}=300m, x_{22}=250m, x_{23}=100m$.

У вактда транспорт харажатлари куйидагича бўлади:

$F_2=50\cdot10+200\cdot20+150\cdot30+300\cdot40+250\cdot50+100\cdot60=39000\,m/km$.

1 ва 2 вариантлардаги харажатларнинг фарки куйидагича бўлади.

$F_2-F_1=39000\,m/km-36500\,m/km=2500\,m/km$.

Демак, транспорт харажатлари ошади.Яъни F_1 F_2-дан кура яхширок. Шундай килиб F_i-куп вариантлари ичидан оптималини яъни энг кам транспорт харажатларини талаб киладиган вариантни топиш керак.

Биринчи жадвалга асосланиб куйидаги математик моделни тузиш мумкин:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=400, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=600. \\ x_{11}+x_{21}=350, \\ x_{12}+x_{22}=450, \\ x_{13}+x_{23}=200\ . \end{cases} \qquad (4)$$

Бу шартларга асосланиб транспорт харажатларини куйидагича ёзиш мумкин

$$F = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 40x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23}. \qquad (5)$$

Шундай килиб (4) системанинг шундай мусбат ечимларини топиш керакки, (5) чизикли форма (максад функцияси) минимум кийматга эга булсин.

3. Рацион хакидаги масала

Фараз килайликки, махаллий сайёхнинг бир ойлик рационини 12 кг бирлик, яъни таркиби ташкил топган махсулотдан иборат. Сайёхнинг рациони гушт, макорон буюмлари ва сабзавотлардан иборат.

Махсулотлар таркиби бўйича маълумотлар куйидаги жадвалда берилган.

2-жадвал

Кўрсатгичлар	**Бирлик ўлчови**	**Сабза-вотлар X_1**	**Макарон буйумлари X_2**	**Гўшт X_3**	**Жами керакли махсулотлар**
Оксилнинг коэффицент бирлиги	**кг**	**0,18**	**0,24**	**1,2**	**12**
Оксилнинг микдори	**т**	**10**	**8**	**200**	**1000**
Витаминлар	**M_2**	**15**	**1**	**1,5**	**450**
1 кг-ни нархи	**Тийин**	**1**	**1,2**	**7,5**	

Масаланинг математик моделини тузинг

Жадвалда асосан куйидаги моделни тузамиз.

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}18X_1 + 0{,}24X_2 + 1{,}2X_3 \ge 12, \\ 10X_1 + 8X_2 + 200X_3 \ge 1000, \\ 15X_1 + 1X_2 + 1{,}5X_3 \ge 450. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

$$X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0,\ X_3 \ge 0.$$

Чизикли функция эса куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$F\ (X_1,X_2,X_3)=1X_1+1,2X_2+1,75X_3 \qquad (7)$$

Шундай килиб, (6) тизим (система)нинг Шундай нулли ва мусбат ечимларини топиш керакки (7) максадли функция киймати минимум бўлсин.

Бундай масалаларни ечиш холларини келгусида курамиз.

1-боб
ЧИЗИКЛИ ПРОГРАММАЛАШ

§1. Чизикли программалашнинг асосий масаласи ва чизикли программалаш масалаларини асосий масалага келтириш.

Чизикли программалашнинг асосий масаласи таърифини куйидагича бериш мумкин.

Бизга чизикли функция (максадли функция)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

ва n-номаълумли m-та чизикли тенгламалар системаси

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots , x_n \geq 0.$$

берилган булсин.

Бу ерда (1.2) системанинг шундай ечимларини топиш керакким (1.1) чизикли функция (максад функцияси) энг катта (максимум) ёки энг кичик (минимум) киймат кабул килсин.

Максад функциясининг энг катта ёки энг кичик кийматларни топиш масаланинг куйилишига боғлик. Ишлаб чикаришда даромад олиш талаб этилса, чизикли функциянинг энг катта (max) кийматлари топилади. Агар ишлаб чикаришда харажатларни режалаштириш керак булса, у холда чизикли функциянинг энг кичик (min) кийматларини топиш талаб этилади.

Куп масалаларни ечганда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ узгарувчиларга куйилган чекловлар чизикли тенгсизликлар системаси куринишида берилади, яъни

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

Хар кандай (1.3) кўринишдаги шартларни чизикли программалашнинг асосий масаласидаги кўринишига келтириш мумкин.

Хакикатан хам, (1.3) системасининг биринчи тенгсизлигига y_1, иккинчисига y_2 ва х.к. m-чи тенгсизлигига y_m кушсак (1.3) системага эквивалент булган куйидаги система хосил булади

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{array}\right\} \qquad (1.3)$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \ldots, y_j \geq 0,\ j = \overline{1,m}.$$

Шуни кайд килиш керакки (1.3) чизикли тенгсизликлар системасининг ечими (1.3) тенгликлар системасини хам каноатлантиради ёки аксинча.

Тенгсизликлар системаси куйидагича куринишда

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{array}\right\} \qquad (1.4)$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \ldots, y_j \geq 0,\ j = \overline{1,m}.$$

булганда хам масала юкоридаги каби ечилади, яъни бу ерда мусбат $y_1, y_2, \ldots, y_m$-лар мос равишда айирилади. Демак, чизикли программалаш масалаларини хаммаси асосий масалага келтириш мумкин. Шундай килиб, 0-га тенг ёки нолдан катта ечимларини топиш керакким (1.1) – чизикли форма (максадли функция) энг катта (max) ёки булмаса энг кичик (min) киймат кабул килсин.

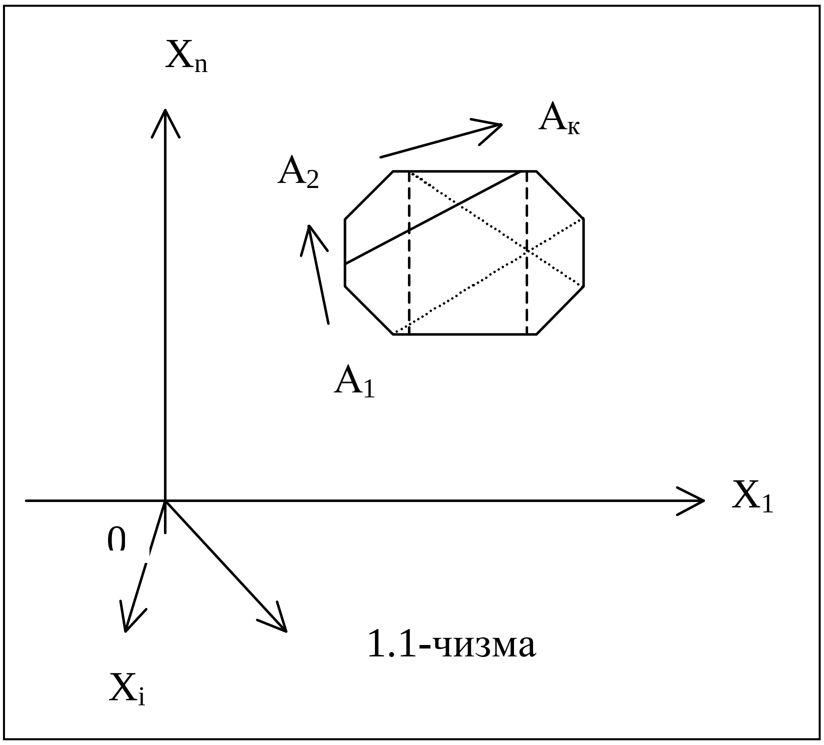
Таъриф. (1.2) системанинг манфий булмаган хар кандай ечимлар тупламига мумкин булган ечимлар ёки масаланинг таянч режаси дейилади.

Бундан кейин $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ чизикли функцияни максад функцияси деб юритамиз. Максад функциясини максимумлаштирувчи (минимумлаштирувчи) мумкин булган барча ечимларига оптимал ечимлар дейилади ёки оптимал режа хам деб юритилади.

Чизикли программалашнинг асосий масаласини ечганда одатда симплекс усулидан фойдаланамиз.

§2. Симплекс усули

Чизикли программалашнинг асосий масаласини геометрик усул ёрдамида ечганда тенгламалар системасига ва максад функциясига кирувчи узгарувчилар сони канча кам булса шунча масалани ечиш осонлашади. Агар узгарувчилар сони жуда кўп бўлса, масалан каварик фигура учларининг сони бир неча миллионта булса, у холда максад функциясининг энг катта (энг кичик) кийматларини топиш хозирги замон хисоблаш машиналарига хам ођирлик килади.

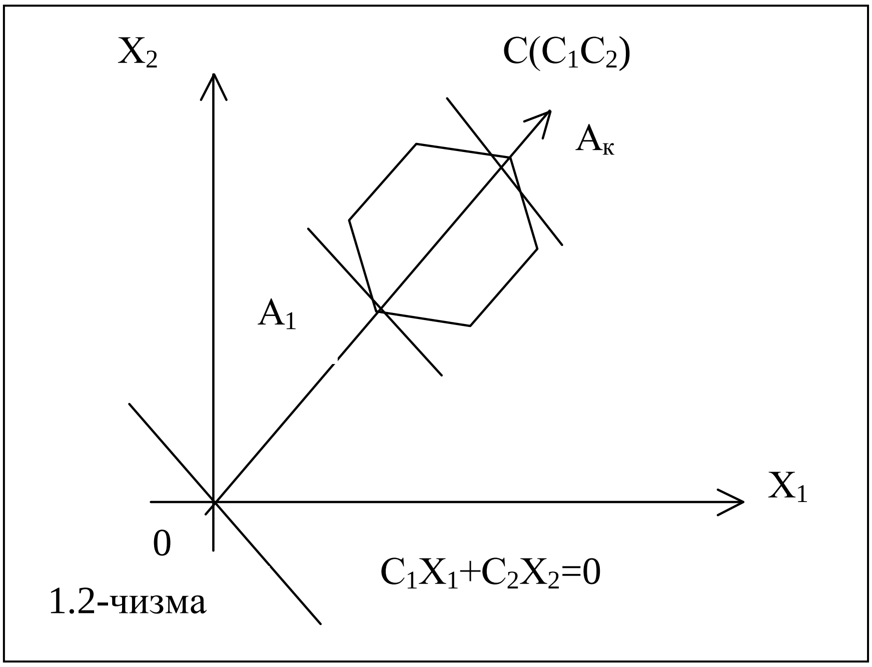


1.1-чизма

Хакикатан хам, n!-та учга эга булган каварик купёкли. Берилган булсин (1.1-чизма) Масалани ечиш учун купёклининг n!-та учларининг координаталарини топиб максад функциянинг бу нукталардаги кийматларини таккослаш керак. Агар операциялар сони $n > 15$ булса, у холда масаланинг зарур булган ечимини топиш хозирги замон хисоблаш машиналарига хам ођирлик килади. Буни курсатиш учун Стирлинг формуласидан фойдаланамиз.

$$n! = \left(\frac{n}{\ell}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,.$$

Агар каварик купёкли учларининг сони $n = 20$ булса, масаланинг шартлари $2 \cdot 10^{18}$-дан хам ошиб кетади. Бу ерда каварик купёклининг лозим булган учи координаталарини танлаб олиш учун секундига 10 миллион операцияни бажарадиган хозирги замон хисоблаш машиналарига 5000 йил хам камлик килади.



1.2-чизма

Юкоридаги курсатилган мисолдан куриниб турибдики, бундай масалаларни ечиш учун махсус усуллар ишлаб чикариш лозимки, купёклининг учларини танлаш тартибсиз эмас, балки максадли равишда амаога оширилсин. Масалан, купёклининг кирралари бўйлаб шундай харакат килиш лозимки, хар бир кадамда максад функцияси F-нинг киймати максимум (минимум) кийматга томон тартибли равишда интилсин (1.2-чизма).

Симплекс усул биринчи булиб америкалик олим Д. Данциг томонидан 1949 йили таклиф этилиб, кейинчалик 1956 йилда Данциг, Форд, Фулкерон ва бошкалар томонидан тула ривожлантирилди. Лекин, 1939 йилда рус математиги Л.В. Канторович ва унинг шогирдлари асос солган ечувчи купайтувчилар усули симплекс усулидан куп фарк килмайди. “Симплекс” сузи n-улчовли фазодаги $n+1$ та учга эга булган оддий каварик куп ёклини ифодалайди. Симплекс бу

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1$$

куринишдаги тенгсизликларнинг ечимлари сохасидир.

Симплекс усули ёрдамида чизикли программалашнинг купгина масалаларини ечиш мумкин. Бу усул ёрдамида чекли кадамларда оптимал ечимларни топиш мумкин. Хар бир кадамда шундай мумкин булган ечимларни топиш керакки, максад функциясининг киймати олдинги кадамдаги кийматидан (микдоридан) катта (кичик) булсин. Бу жараён максад функцияси оптимал (максимум ёки минимум) ечимга эга булгунча давом эттирилади.

Симпекс усулини тушинтириш учун куйидаги масалани куриб чикайлик.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

манфий булмаган шундай ечимлари $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$ топилсинки

нинг куйидаги тенгсизликларнинг максадли функцияси $F(x_1, x_2, ..., x_n)$=………………………………… Масала. Максад функция

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (1.6)$$

нинг куйидаги тенгсизликларнинг энг катта (кичик)(максимум ёки минимум) кийматга эга булсин.

Бу масалани ечиш учун (1.5) чизикли тенгсизликлар системасига шундай $y_1, y_2, ..., y_n$ манфий булмаган узгарувчиларни мос равишда кушиб, кўйидаги эквивалент системани хосил киламиз

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

бунда $x_i \ge 0,\ y_j \ge 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$.

У холда максад функциясини куйидаги куринишда ёзамиз

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + ... + 0 \cdot y_m. \qquad (1.8)$$

Агар (1.7) дан $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ деб олсак, биринчи мумкин булган ечимлар туплами $y_j = b_j, j = \overline{1,m},\ x_i = 0,\ i = \overline{1,n}$ хосил булади. Бу холда максад функцияси 0 –га тенг, яъни

$F(0,0,....,0, b_1, b_2, ..., b_m) = 0$.

Симплекс усулини ишлатганда кетма-кет жадвалларни тзиш анча кулайлик тугдиради. Жадвални тузишга утамиз:

1. Энг юкоридаги $m+1$ сатрига максад функциясининг жадвалнинг коэффициентларини жойлаштирамиз
2. Жадвалнинг юкоридаги 2 – сатрига узгарувчи $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$-ларни ёзамиз;
3. $x_1, x_2, ..., x_n$-ларнинг коэффициентлари жадвалнинг асосий кисмини ташкил килади (асосий матрица), $y_1, y_2, ..., y_m$ узгарувчиларнинг коэффициентлари эса бош диагонал буйича ёзилиб, бирлик матрицани ташкил этади;
4. Жадвалнинг охирги сатрига индекслар сатри дейилади ва бу сатр максад функцияси катнашувчи узгарувчиларнинг коэффициентларини тескари ишора билан олинган коэффициентлар оркали тулдирилади.

Натижада куйидаги жадвал хосил булади.

Дастлаби берилаганларнинг асосий жадвали

m+1	I	II	III	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0	Максад функция сатри
				x_1	x_2	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m	Узгарув-чилар сатри
1	0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	Бирлик матрица
2	0	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	0	1	…	0	

…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	0	y_m	b_m	a_{m1}	$a_{\text{м}2}$	…	a_{mn}	0	0	…	1	
Индкс сатри			0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$	0	0	…	0	

Максадли устун узгармаслар устуни Асосий матрица

Узгарувчилар устуни

Бу жадвалга асосланиб биринчи симплекс жадвални тузамиз.

Дастлабки берилганларнинг асосий жадвалини тахлил киламиз. Индекслар сатрини тахлил килганда сатр элементларининг мусбат ва манфийларига эътибор берамиз. Агар индекс сатри элементларининг хаммаси мусбат булса, у холда мумкин булган ечимини узгартириб булмайди ва бу ечим оптимал ечим булади. Фараз килайликки индекс сатри элементларининг ичида бир нечта манфий сонлар мавжуд ва бу манфий сон ($-c_1$)-га тенг булсин. ($-c_1$) ни кора чизикли туртбурчак ичига оламиз. Бу устунга калитли устун дейилади. ($-c_1$) жойлашган устун элементларини хам кора чизик билан чизилган туртбурчак ичига оламиз. Бу ерда шуни хам айтиш керакки, агар бордию индекс сатрида бир – бирига тенг бир неча кичик манфий сонлар булса, у холда чап томондан бошлаб биринчи катакдаги манфий сонни танлаймиз. Калитли сатрни топиш учун узгарувчилар устунидаги сонларни калитли устундаги мос мусбат сонларга булиб, улар ичидан энг кичигни танлаб оламиз. Фараз килайликки бу сон $\frac{b_1}{a_{12}}$ булсин, яъни

$$K = \text{энг кичик}\left\{\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{b_m}{a_{m2}}\right\} = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Биринчи симплекс жадвалда $S_1, S_2, \ldots, S_{m+1}$ нинг кийматлари куйидагича топилади

$$S_1 = 1 + b_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{1i},$$

$$S_2 = 1 + b_2 + \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \ ,$$

……………………..

$$S_m = 1 + b_m + \sum_{i=1}^{n} a_{mi} \ ,$$

$$S_{m+1} = 0 - \sum_{i=1}^{n} c_i \ ,$$

$$S = \sum_{i=1}^{m+1} S_i = m + 1 + \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=1}^{m} a_{1i} + \sum_{i=1}^{m} a_{2i} + ... + \sum_{i=1}^{m} a_{mi} - \sum_{i=1}^{n} c_i \ .$$

Иккинчи сиплекс жадвални тузишга ўтамиз

Иккинчи симплекс жадвалда узгарувчилар устуни узгаради. Бу устунда янги узгаувчи x_1 калитли сатрдаги y_1 нинг урнини эгаллайди. Яъни калитли устундаги узгарувчи калитли сатрдаги узгарувчини урнини эгаллайди. Бундан кейинги жадвалларни тузганда хам бу коида сакланади. Биринчи симплекс жадвалдаги калитли сатрга иккинчи симплекс жадвалда бош сатр деб аталади ва бу сатрдаги хар бир катак куйидаги формула ёрдамида тулдирилади

$$B_i = \frac{O_i}{K} \ ,$$

К- калитли сон;

O_i- олдинги сон;

B_i- бош сатр элементлари.

Иккинчи симплекс жадвалида бошка сатрлардаги катаклар куйидаги формула ёрдамида тулдирилади. Калитли устун билан калитли сатр кесишган катакларда турган сон $K = \frac{b_1}{a_{11}}$ -га калитли сон дейилади. Калитли сатрни хам кора чизик билан туртбурчак ичига оламиз. Дастлабки берилганлар жадвалини охирги устунига текшириш устунини жойлаштирамиз. Текшириш устунидаги хар бир сон узгармаслар устунидан бошлаб сатрдаги сонлар йиђиндисига тенгдир. Текшириш устунидаги сонлар калитли устунни топишда кулланилмайди. Натижада биринчи симплекс жадвал хосил булади.

Биринчи симплекс жадвал

M+1	I	II	III	c_1	c_2	…	c_n	0	0	…	0	
				x_1	x_2	…	x_n	y_1	y_2	…	y_m	Текшириш устуни
1	0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	…	A_{1n}	1	0	…	0	S_1 калитли сатр
2	0	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	…	A_{2n}	0	1	…	0	S_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
M	0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	…	1	S_m
Индекс сатри	Максадли устуни		F= 0	$-C_1$	C_2	…	C_n	0	0	…	0	S_{m+1}

Калитли устуни

Калитли сон

Бошка сатрдаги катаклар куйидаги формула ёрдамида тулдирилади

$$A_{ij} = O_i - \frac{K_1 K_2}{K},$$

O_i -олдинги сон;

К- калитли сон;

$К_1$ - O_i-га мос булган калитли сатрдаги сон;

$К_2$ - O_i-га мос булган калитли устундаги сон.

Юкоридаги формулалар асосида янги элементларни биринчи симплекс жадвал элементлари оркали хисоблаб чиксак, натижада иккинчи симплекс жадвал хосил булади. Бундан кейин максадли сатрни ёзмасак хам булади, чунки бу сатр элементлари кейинги жадвалларда кулланилмайди.

Иккинчи симплекс жадвал

М+1	I	II	III	x_1	x_2	…	x_n	c_1	c_2	…	c_n	Текширин устуни
1	0	y_1	F_1	$c_{11}=1$	c_{12}	…	c_{1n}	$1/a_{11}$	0	…	0	S_1'-бош сатр
2	0	y_2	F_2	$c_{21}=0$	c_{22}	…	c_{2n}	d_{21}	d_{22}	…	$d_{2м}$	S_2'
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
М	0	y_m	F_m	$c_{m1}=0$	c_{m2}	…	c_{mn}	d m_1	D m_2	…	dm_n	S_m'
Индекс сатри			F_1'	α_1	α_2	…	α_n	β_1	β_2	…	β_m	S_{m+1}'

Бу жадвал катакларидаги сонлар куйидагиларга тенг:

$$S_1' = F_1 + \frac{1}{a_{11}} + \sum_{i=1}^{n} c_{1i} \text{ ,}$$

$$S_2' = F_2 + \sum_{i=1}^{n} c_{2i} + \sum_{j=1}^{m} d_{2j} \text{ ,}$$

……………………………

$$S_m' = F_m + \sum_{i=1}^{n} c_{mi} + \sum_{j=1}^{m} d_{nj} \text{ ,}$$

$$S_{m+1}' = F_1' + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \text{ .}$$

Бош сатр элементлари:

$$F_1 = \frac{b_1}{a_{11}},\ c_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1,\ c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}},\ ...,c_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}},\ d_{11} = \frac{1}{a_{11}},\ d_{12} = \frac{0}{a_{11}} = 0,\ ...,,\ d_{1n} = \frac{0}{a_{11}} = 0 \text{.}$$

Иккинчи сатр катакларидаги сонлар:

$$F_2 = b_2 - \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}},\ c_{21} = a_{21} - \frac{a_{11} a_{21}}{a_{11}} = 0,....,c_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21} a_{1n}}{a_{11}}$$

………………………………………

m-чи сатр элементлари:

$$F_m = b_m - \frac{b_1 a_{m1}}{a_{11}},\ c = a_{m1} - \frac{a_{m1} a_{11}}{a_{11}} = 0,\ c_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{m1} a_{1n}}{a_{11}},\ d_{m1} = 0 - \frac{a_{m1} \cdot 1}{a_{11}},...,d_{m2} = 1 - \frac{0 \cdot a_{m1}}{a_{11}}$$

Индекс сатр элементлари:

$$F_1 = 0 - \frac{(-c_1) b_1}{a_{11}},\ \alpha_1 = -c_1 - \frac{(-c_1) a_{11}}{a_{11}} = 0,\ \alpha_2 = -c_2 - \frac{(-c_1) a_{12}}{a_{11}},...,\alpha_n = -c_n - \frac{(-c_1) a_{1n}}{a_{11}}$$

$\beta_1 = 0 - \frac{1 \cdot (-c_1)}{a_{11}}, \ldots, \beta_m = 0 - \frac{0 \cdot (-c_1)}{a_{11}} = 0$.

Агар иккинчи симплекс жадвалнинг индекс сатридаги катаклардаги сонларнинг хаммаси мусбат булса, у холда бу жадвалдаги ечимларга оптимал ечимлар дейилади ва максад функциясининг оптимал киймати

$$F_1(F_1, 0, 0, \ldots, 0, 0, F_2, F_3, \ldots, F_m) = c_1 F_1 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 + 0 \cdot 0 +$$
$$+ F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0 + \ldots + F_m \cdot 0 = c_1 F_1,$$

бўлади, бу ерда $x_1 = F_1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \ldots, x_n = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = F_2,\ y_3 = F_3, \ldots, y_m = F_m$.

Агар индекс сатрида манфий сонлар мавжуд булса, юкоридаги ечимлар оптимал ечим булмайди. Шунинг учун юкоридаги коидаларни иккинчи симплекс жадвалга куллаб, учинчи симпекс жадвални тузамиз. Жадвалларни алмаштириш (яхшилаш) индекс сатрида хамма катаклардаги сонлар мусбат булгунча давом эттирилади.

Симплекс жадвалларни тузганда куйидаги коидаларга асосий эътиборни бериш керак:

1. Агар калитли устунда нол булса, келгуси жадвалда шу нол турган сатр узгармайди;
2. Калит сатрда нол булса, бу нол турган устун келгуси жадвалда узгармайди;
3. Хар бир узгарувчи устун ва мос узгарувчи сатр кесишган катакдаги сон 1- га тенг булса, бу устундаги бошка катакдаги сонлар нолга тенг

Шу вактгача максад функциясининг максимум кийматини излаган эдик. Лекин айрим масалаларда максад функциясининг минимум кийматларини топиш талаб этилади, яьни

$F_{\min} = -F_{\max} = -c_1 x_1 - c_2 x - \ldots - c_n x_n$ ёки, $F_{\max} = -F_{\min} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$.

Бундан кўринадики масалани максимумини топсак етарли.Шундай килиб, хар кандай максимум киймат талаб килинган масалаларни унга эквивалент булган минимум кийматни талаб килган масалалар билан алмаштириш мумкин.

Юкоридаги коида ва формулалардан фойдаланиб куйидаги масалани ечамиз.

Масала 1. Корхонада икки тур буюм ишлаб чикариш учун уч хил хом ашё ишлаталади. Биринчи тур буюм ишлаб чикариш учун биринчи хил хом ашёдан 6 кг, иккинчи хил хом ашёдан 3 кг, учинчи хил хом ашёдан 4 кг ишлатлади. Агар корхона биринчи хом ашёдан 600 кг га эга ва биринчи хил буюмни сотганда хар бир донасидан 6 сум , иккинчи хил буюмни сотганда эса 3 сум фойда олганда, корхона ишлаб чикаришни шундай режалаштиринки олинган даромад максимал булсин.

Ечиш. Фараз килайликки бирнчи тур буюмдан x_1 дона, иккинчи тур буюмдан x_2 дона ишлаб чикарилсин.

Масаланинг шартини x_1 ва x_2 узгарувчиларни уз ичига олган куйидаги тенгсизликлар системаси куринишда ёзиш мумкин

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 \le 600, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 520, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 600. \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 .$$

У холда максад функцияси

$$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 3x_2 \qquad (1.9)$$

бўлади.

Демак, (1.8) чизикли тенгсизликлар сохасида шундай манфий булмаган ечимларини топиш керакки максад функцияси $F(x_1, x_2)$ максимал кийматга эга булсин.

Масалани симплекс усули билан ечиш учун (1.8) тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига келтирамиз

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + y_1 = 600, \\ 4x_1 + 3x_2 + y_2 = 520, \\ 3x_1 + 4x_2 + y_3 = 600. \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0 .$$

Максад функция эса куйидагича булади

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 . \qquad (1.11)$$

Агар (1.10) дан x_1=0, x_2=0 деб олсак, у холда y_1=600, y_2=520, y_3=600-га тенг булади. Демак, биринчи базис ечим x_1=0, x_2=0, y_1=600, y_2=520, y_3=600 бўлади.

Бу ечимга мос кийматини топамиз

F (0, 0, 600, 520, 600)=6·0+3·0+600·0+520·0+600·0=0.

Бундан куриниб турибдики ишлаб чикариш хали бошланмаган. Симплекс усул кондаларидан фойдаланиб дастлабки берилганларнинг асосий жадвалини тузамиз.

Дастлабки берилганларнинг асосий жадвали

	I	II	III	6	3	0	0	0	Максад сатри
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Узгарувчилар сатри
1	0	y_1	600	6	2	1	0	0	Асосий матрица
2	0	y_2	520	4	4	0	1	0	Бирлик матрица
3	0	y_3	600	3	3	0	0	1	
Индекс сатри	Максд устуни	Узгарувчилар устуни	F=0	-6	-3	0	0	0	

Дастлабки берилганларнинг асосий жадвалига асосланиб биринчи симплекс жадвални тузамиз

Биринчи симплекс жадвал

IV	I	II	III	6	3	0	0	0	Текшириш
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Устуни
1	0	Y_1	600	6	2	1	0	0	609 калитли сатр
2	0	Y_2	520	4	3	0	1	0	528
3	0	Y_3	600	3	4	0	0	1	608
Индекс сатри		Максад устуни	F_0=0	-6	-3	0	0	0	

Калитли устун Калитли сон

Бу жадвалдан кўриниб турибдики, индекс сатрида манфий сонлар бор. Бу сонлар ичидан энг кичигини топамиз. Энг кичиги {-6, -3}=-6 булгани учун бу устун калитли устундир. Узгармаслар устунидаги сонларни мос равишда калитли устундаги сонларга булиб, улар ичидан энг кичигини топамиз

$$\min\left\{\frac{600}{6}, \frac{520}{4}, \frac{600}{3}\right\} = \frac{600}{6} = 100.$$

Бу сатрга калитли сатр дейилади. Калитли устун ва калитли сатр кесишган катакда жойлашган К= 6 сонга калитли сон дейилади.

Симплекс жадвал тузиш коида ва формулалардан фойдаланиб иккинчи симплекс жадвални тузамиз.

Иккинчи симплекс жадвал

IV	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Текшириш устуни
III	6	x_1	100	1	1/3	1/6	0	0	$101\frac{1}{2}$ бош сатр
II	0	y_2	120	0	5/3	-2/3	1	0	122 калитли сатр
I	0	y_3	300	0	3	-1/2	0	1	$303\frac{1}{2}$
Индекс сатри			F_1=600	0	-1	1	0	0	600

Калитли устун

Калитли сон

Индекс сатрида манфий сон мавжуд булгани учун иккинчи симплекс жадвал тузилгани каби учинчи симплекс жадвални тузамиз.

Учинчи симплекс жадвал

IV	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Текшириш устуни
I	6	x_1	76	1	0	3/10	-1/5	0	$77\frac{1}{10}$
II	3	x_2	72		1	-2/5	3/5	0	$73\frac{1}{5}$ бош сатр
III	0	y_3	272		0	7/5	-9/5	1	$272\frac{3}{5}$
Индекс сатри			F_2=672		0	3/5	3/5	0	$673\frac{1}{5}$

Шундай килиб учинчи симплекс жадвалнинг индекс сатрида манфий сонлар йук. Шунинг учун бу жадвал оптимал программадир. Оптимал ечим эса x_1=76, x_2=72, y_1=0, y_2=0, y_3=272 га тенг. Бу ечимни (1.11) формулага куйсак куйидаги хосил булади

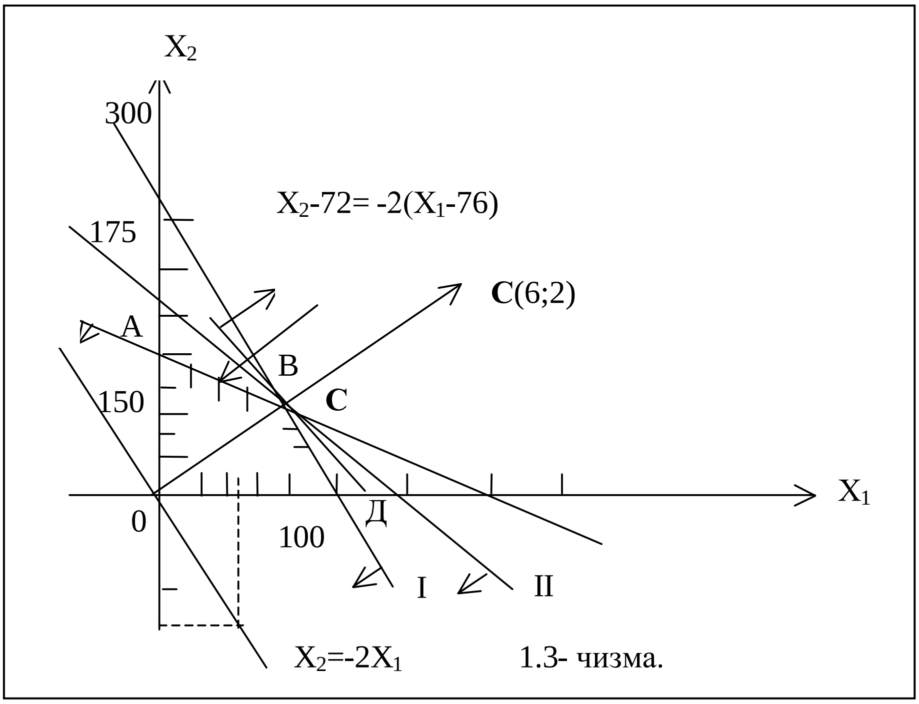
$F(76, 72, 0,0, 272) = 6\cdot76+3\cdot72+0\cdot0+0\cdot0+0\cdot272=6\cdot76+3\cdot72=672$, $F_{мах}$=672 сум.

Демак, максимум даромад олиш учун биринчи тур буюмдан x_1=76 дона, иккинчи тур буюмдан эса x_2=72 дона ишлаб чикариш керак экан. Энди юкоридаги симплекс усул билан ечилган масаланинг геометрик талкинини берамиз. Олдин (1.8) тенгсизликлар системасини каноатлантирувчи сохани чизамиз. Бунинг учун (1.8) тенгсзликлар системасини тенгламалар системаси куринишида ёзамиз ($x_i \geq 0,\ i=\overline{1,2}$)

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1+2x_2=600, \\ \\ 4x_1+3x_2=520, \\ \\ 3x_1+4x_2=600. \end{array}\right\} \begin{array}{l} (I) \\ \\ (II) \\ \\ (III) \end{array}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Бу системага кирувчи туђри чизикларни чизиб, ярим текисликларни топамиз.



1.3- чизма.

ОАВС купбурчакнинг учларининг координаталари туплами оптимал ечимлар тупламига киради (1.3-чизма): О(0 ; 0), В(14; 119,5), С(76; 72), Д(100; 0), А(0; 150).

Энди максад функциянинг ОАВСД куп бурчакнинг учларидаги кийматларини хисоблаймиз

$F_O(0;\ 0)=0$ сум,

$F_A(0;\ 150)=6\cdot0+3\cdot150=450$ сум,

$F_B(14;\ 119{,}5)=6\cdot14+3\cdot119{,}5=84+358{,}5=442{,}5$сум,

$F_C(76;\ 72)=6\cdot76+3\cdot72=456+216=672$ сум,

$F_D(100;\ 0)=6\cdot100+3\cdot0=600$ сум.

Демак,

$F_{мах}=мах\{F_O,\ F_A,\ F_B,\ F_K,\ F_Д\}=672$ сум.

Агар сатх чизиђи $6x_1+3x_2=K$ булса, К –га 0,1,2, … кийматлар бериб $\overline{C}(6{,}3)$ вектори йуналишини узгартирмасдан силжитиб борсак, таянч чизиђи С нуктада уриниб утади. Максадли функция шу нуктада оптимал ечимга эга булади. Таянч чизиђинг тенгламаси: $x_2-72=-2(x_1-76)$ F(76; 72)=672 сўм максимум даромад булиб, симплекс усул ёрдамида топилган оптимал ечимга мос келади.

Масала 1.2 Куйидаги масалани чизикли программалашнинг асосий масаласи куринишда ёзинг:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_3-x_4+x_5 &\le 2,\\ x_1-x_3+2x_4+x_5 &\le 3,\\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5 &\le 6,\\ x_1+x_4-5x_5 &\ge 8. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=3x_1-2x_2-5x_4+x_5 \quad \max.$$

Ечиш. Бу масалани чизикли программалашнинг асосий масаласи куринишида ёзиш учун мусбат базисли узгарувчилар x_6, x_7, x_8, x_9 ни «≤» белги булган тенгсизликларнинг чап тарафига кушамиз ёки «≥» ишораси булган тенгсизликларнинг чап тарафидан айирамиз. У холда куйидаги хосил булади

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_3-x_4+x_5+x_6 &=2,\\ x_1-x_3+2x_4+x_5+x_7 &=3,\\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5+x_8 &=6,\\ x_1+x_4-5x_5-x_9 &=8. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \ge 0.$$

Шундай килиб бу масалани чизикли программалашнинг асосий масаласи куринишда ёзиш мумкин. Куйидаги шартлар

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_3-x_4+x_5+x_6 &=2,\\ x_1-x_3+2x_4+x_5+x_7 &=3,\\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5+x_8 &=6,\\ x_1+x_4-5x_5-x_9 &=8. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \ge 0.$$

бажарилганда $F(x_1,x_2,...,x_9)=3x_1-2x_2-5x_4+x_5+0\cdot x_6+0\cdot x_7+0\cdot x_8+0\cdot x_9$ функцияинг максимум кийматини топинг.

Масала 1.3 Куйидаги масалани куйидаги чизикли программалашнинг асосий масаласи куринишда ёзинг

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \to \min.$$

Ечиш. Бу масалада максад функциянинг минимум кийматини топиш талаб этиляпти. Шунинг учун максадли функцияни минимум кийматини топиш урнига $F_1 = -F$ нинг максимум кийматини юкоридаги шартлар буйича топамиз.

Демак масала куйидагича кўйилади.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 0 = 15. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0. \ ,$$

шартлар бажарилганда

$F(x_1, x_2, ..., x_7) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7$ нинг максимум кийматини топинг.

Топшириклар куйидаги масалаларни чизикли программалашнинг асосий масаласига келтиринг.

1.1

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + 8x_2 \le 3. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max$$

1.2.

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \le 24, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 2. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$$

1.3.

$$\left.\begin{array}{l} 7x_1+2x_2\geq 14, \\ x_1+2x_2\geq 10. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

$F=3x_1+2x_2\to\max$

1.4.

$$\left.\begin{array}{l} -5x_1+x_2\leq 0, \\ x_1+x_2\geq 1, \\ x_1+5x_2\geq 0, \\ x_1+x_2\leq 6, \\ x_1-x_2\leq 7. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

$F=2x_1+3x_2\to\min$

1.5.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2\leq 4, \\ 8x_1+2x_2\geq 1, \\ x_1+5x_2\geq 4. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

$F=2x_1+4x_2\to\max$

1.6.

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+4x_2\leq 24, \\ 5x_1+4x_2\geq 22, \\ 2x_1+7x_2\geq 28. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

$F=7x_1+4x_2\to\min$

1.7.

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2\leq 1, \\ 2x_1-x_2\leq 2. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0, x_2\geq 0.$

$F=3x_1+8x_2\to\min$

1.8.

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2\leq 1, \\ 2x_1-x_2\leq 2. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0, x_2\geq 0.$

$F=3x_1+8x_2\to\min$

1.9.

$$\left.\begin{array}{l} 18x_1+9x_2\leq 720, \\ 8x_1+28x_2\leq 56. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

$F=11x_1+7x_2\to\min$

1.10.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2\geq 70, \\ 15x_1+12x_2\leq 36, \\ 7x_1+13x_2\geq 200. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$

$F=27x_1+50x_2\to\max$

1.11.

1.12.

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+2x_2+5x_3\leq 24, \\ 5x_1-3x_2+4x_3=18, \\ 3x_1+9x_2-2x_3=27. \end{array}\right\}$$

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0, x_3\geq 0.$

$F=-4x_1+x_2+4x_3\to\max$

$$\left.\begin{aligned}&2x_1-x_2+6x_3\le 12,\\&3x_1+5x_2-12x_3=14,\\&-3x_1+5x_2+4x_3\le 18.\end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

$F=-2x_1-12x_2+5x_3\to \min$

1.13.

$$\left.\begin{aligned}&-x_1+x_2+x_3\ge 4,\\&3x_1+x_2+x_3\ge 16,\\&2x_1+x_2+x_3\le 18.\end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

$F=-x_1+x_2-3x_3\to \min$

1.14.

$$\left.\begin{aligned}&2x_1+5x_2-7x_3+x_4\le 12,\\&-4x_1+3x_2+4x_3-5x_4\ge 18,\\&3x_1+x_2+x_3-9x_4=25,\\&9x_1+18x_2+x_3-27x_4\le 9.\end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3, x_4\ge 0.$

$F=-x_1+2x_2+3x_3-6x_4\to \max$

1.15.

$$\left.\begin{aligned}&2x_1-x_2+x_3\le 4,\\&x_1+4x_2-2x_3\le 2,\\&x_1+x_2+4x_3\le 5.\end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

$F=-x_1+x_2+x_3\to \max$

1.16.

$$\left.\begin{aligned}&0{,}3x_1+0{,}1x_2+x_3\le 150,\\&0{,}7x_1+0{,}3x_2+2x_3\le 270,\\&0{,}1x_1+4x_2-3x_3\le 0.\end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

$F=3x_1+x_2+2x_3\to \min$

1.17.

$$\left.\begin{aligned}&3x_1+5x_2+4x_3\ge 20,\\&5x_1+2x_2+2x_3\le 25,\\&8x_1+0\cdot x_2-3x_3\ge 3.\end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0, x_3\ge 0.$

$F=8x_1-3x_2+x_4\to \max$

1.18.

$$\left.\begin{aligned}&10x_1+5x_2\le 50,\\&6x_1+0x_2\le 26,\\&12x_1+4{,}5x_2=1\cdot\end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2\ge 0.$

$F=10x_1+20x_2\to \min$

1.19.

$$\left.\begin{aligned}&3x_1+x_2-x_3\ge 0,\\&4x_1+5x_2-6x_3\le 4,\\&5x_1-3x_2+15x_3\le 30.\end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2, x_3\ge 0.$

$F=x_1+x_2-4x_3\to \max$

1.20.

$$\left.\begin{aligned}&7x_1-5x_2\ge 2,\\&x_1-3x_2\le 4,\\&6x_1+5x_2\le 30.\end{aligned}\right\}$$

$x_1, x_2\ge 0.$

$F=x_1-10x_2\to \min$

1.21.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 30, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 4, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &\le 45. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 5x_1 + 14x_2 - 7x_3 \to \max$

1.22.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4, \\ x_1 + 5x_2 &\le 20, \\ x_1 &\le 8, \\ x_2 &\ge 4. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 + x_2 \to \min$

1.23.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 12x_3 &\le 36, \\ 4x_1 + x_2 + 36x_3 &\ge 14, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 &= 10. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = x_1 + 10x_2 - 20x_3 \to \max$

1.24.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 12x_3 &= 24, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 &\le 10, \\ 7x_1 + x_2 + 14x_3 &\le 28. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 5x_1 - 10x_2 + 15x_3 \to \min$

1.25.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 9x_2 + 18x_3 &= 36, \\ 9x_1 + 18x_2 - x_3 &\le 36, \\ 21x_1 + 42x_2 - 84x_3 &\ge 168. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 10x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

Куйидаги масалаларни чизикли программалашнинг асосий масаласига келтиринг ва симплекс усули ва график усул билан ечинг. Ечимни талкин этинг.

1.26.

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \le 470, \\ 7x_1 + 3x_2 \le 365, \\ 4x_1 + x_2 \le 310. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 11x_1 + 8x_2 \to \max$

1.27.

$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 \le 614, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 455, \\ 5x_1 + x_2 \le 320. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 20x_1 + 7x_2 \to \max$

1.28.

1.29.

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 740, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 690, \\ 6x_1 + x_2 \le 456. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 350, \\ 6x_1 + 6x_2 \le 366, \\ 9x_1 + 3x_2 \le 81. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 9x_1 + 11x_2 \to \max$

1.30. 1.31.

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 \le 630, \\ 4x_1 + 13x_2 \le 420, \\ 8x_1 + x_2 \le 320. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 11x_1 + 14x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 + 14x_3 \ge 10, \\ 28x_1 + 9x_2 + x_3 \ge 2. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 1238x_1 + 1118x_2 + 523x_3 \to \min$

1.32. 1.33.

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 12x_3 \ge 5, \\ 21x_1 + 15x_2 + 3x_3 \ge 3. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 740x_1 + 740x_2 + 822x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 44x_1 + 12x_2 + 8x_3 \ge 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 3. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 620x_1 + 545x_2 + 380x_3 \to \min$

1.34. 1.35.

$$\begin{cases} 19x_1 + 16x_2 + 20x_3 \geq 5, \\ 26x_1 + 17x_2 + 8x_3 \geq 4. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 620x_1 + 372x_2 + 540x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 14x_1 + 15x_2 + 20x_3 \geq 5, \\ 40x_1 + 27x_2 + 4x_3 \geq 13. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 1200x_1 + 990x_2 + 1100x_3 \to \min$

1.36.

$$\begin{cases} 9x_1 + 15x_2 + 15x_3 \geq 11, \\ 27x_1 + 15x_2 + 3x_3 \geq 6. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 600x_1 + 400x_2 + 820x_3 \to \min$

1.37.

$$\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 + 14x_3 \geq 5, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 \geq 7. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 60x_1 + 80x_2 + 400x_3 \to \min$

1.38.

$$\begin{cases} 19x_1 + 16x_2 + 19x_3 \geq 16 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 \geq 19 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 1121x_1 + 706x_2 + 1066x_3 \to \min$

1.39.

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 11, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 480x_1 + 364x_2 + 320x_3 \to \min$

1.40.

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 3x_3 \geq 11, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

$F = 1240x_1 + 1120x_2 + 53x_3 \to \min$

Энди сунъий базис усул билан масала ечамиз. Юкорида каралган чизикли программалаш масаласида чеклаш шартларида m- чи тартибли бирлик матрица мавжуд эди, яъни чеклаш шартлари $AX \leq A_0$, $A_0 \geq 0$ эди. Бундай система хамиша бирлик матрицага эга бўлади. Чизикли программалашнинг кўп масалаларида чеклаш шартлари юкоридагидек бирлик матрицага эга бўлмайди. Бундай холларда сунъий базис усулидан фойдаланилади. Сунъий базис усулини куйидаги мисолда караймиз.

Мисол. Куйидаги шартлар

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,$$

бажарилганда

$$z=5x_1+3x_2+4x_3-x_4$$

функциянинг максимум кийматини топинг.

Ечиш: Маълумки, системада бирлик матрица мавжуд эмас. Ҳар бир тенгламага биттадан манфий бўлмаган, мос равишда $x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$ сунъий базисли ўзгарувчиларни киритамиз. Натижада берилган масалага нисбатан кенгайтирилган масала деб аталувчи масалага ўтамиз.

Куйидаги шартлар

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_6=3. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j=\overline{1-6}$$

бажарилганда

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

максад функцияни максимум кийматини топинг (бунда М етарлича кичик манфий сон, масала минимумга ечилаётган бўлса етарлича катта мусбат сон деб аталади).шартларни вектор шаклида ёзамиз.

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = Ax_0 .$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad A_5=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad A_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad A_0=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

x_5, x_6 ўзгарувчилар базис ўзгарувчилар бўлсин. У холда биринчи таянч ечим X_0=(0,0.0,0,3,3) хосил булади. Симплекс усулни куллаб оптимал ечимни топамиз.

1-симплекс жадвални тузамиз:

Жадвалнинг (m+1) ва (m+2) сатрларини тўлдиришда

$$Z(X_0) = C_6 X_0 = -M \cdot 3 = M \cdot 3 + 0 = 0 - 6M,$$

$$Z_1 - C_1 = C_6 X_1 - C_1 = -M \cdot 1 - M \cdot 2 - 5 = -5 - 3M;$$

1- симплекс жадвал

i	Базис лар	Базис коэффициентлар	A_0	5	3	4	1	–M	–M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	–M	3	1	3	2	2	1	0
2	A_6	–M	3	2	2	1	1	0	1
m+1	Z_j –C_j		0	–5	–3	–4	1	0	0
m+2	Z_j – C_j		–6	–3	–5	–3	–3	0	0

$$Z_2 - C_2 = C_6 X_2 - C_2 = -M \cdot 3 - M \cdot 2 - 3 = -3 - 5M,$$
$$Z_3 - C_3 = C_6 X_3 - C_3 = -M \cdot 2 - M \cdot 1 - 3 = -4 - 3M,$$
$$Z_4 - C_4 = C_6 X_4 - C_4 = -M \cdot 2 - M \cdot 1 - (-1) = 1 - 3M,$$
$$Z_5 - C_5 = C_6 X_5 - C_5 = -M \cdot 1 - M \cdot 0 - (-M) = 0 + 0 \cdot M,$$
$$Z_6 - C_6 = C_6 X_6 - C_6 = -M \cdot 0 - M \cdot 1 - (-M) = 0 + 0 \cdot M$$

хисоблашларни бажариб, $Z_j - C_j$ кийматларини топамиз ва M нинг чизикли функцияси эканлигини аниклаймиз.

Хисоблашларнинг улайлиги учун (m+1) -сатрга чизикли функциянинг озод хадларини, (m+2) -сатрга, M нинг коэффицентларини ёзамиз. Жадвалнинг (m+2) -сатрида манфий сонларнинг мавжудлиги таянч ечимнинг оптимал эмаслигини билдиради ва уни яхшилаш мумкин бўлади. Жадвалнинг (m+2) сатрида энг кичик сон (–5) A_2 вектор бахоси бўлганлиги учун калит устун A_2 устуни бўлади. $\min(\frac{3}{3}, \frac{3}{2}) = 1,$ уларнинг кесишишмасдаги 3 элемент бўлганлиги учун A_5 вектор сатри калит сатр, ечувчи (калит) элемент бўлади. Демак, A_5 ни базисдан чикариб ўрнига A_2 векторни базисга киритамиз. 2-симплекс жадвални тузамиз.

2- симплекс жадвал

I	Базислар	Базис коэффици Ентлар	A_0	5	3	4	1	–M	–M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	A_6	–M	1	1/3	0	–1/3	–1/3	–2/3	1
m+1	Z_j –C_j		3	–4	0	–2	3	1	0
m+2	Z_j – C_j		–1	–4/3	0	1/3	1/3	5/3	0

2-симплекс жадвалининг (m+2) сатри асосий кисмида (–4/3) манфий сон бўлганлиги учун A_1 вектор устуни калит устун, A_6 вектор сатри калит сатр, 4/3 ечувчи (калит) элемент бўлади. Базисдан A_6 сунъий векторни чикариб, A_1 векторни базисга киритиб, 2-симплекс жадвалдагидек, 3-симплекс жадвални хосил киламиз:

3-симплекс жадвал

i	Базислар	Базис коэффи-циентлар	A_0	5	3	4	1	–M	–M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	–1/4
2	A_6	5	3/4	1	0	–1/4	–1/4	–1/2	3/4
m+1	Z_j – C_j		6	0	0	–3	2	–1	3
m+2	Z_j – C_j		0	0	0	0	0	1	1

3-жадвалда (m+2) сатрда сунъий базис кийматларидан ташкари хамма кийматлар 0 га тенг бўлади:

M соннинг танланишига асосан A_5 ва A_6 векторлар энди базисга тушмайди.

$\overline{X}_0^2$= (3/4, 3/4, 0 ,0 ,0 ,0) ечим берилган масаланинг ечими бўлади, лекин у оптимал эмас, чунки (m+1) сатрда манфий киймат мавжуд. Энди ечимни яхшилаш (m+1) сатр бўйича олиб борилади. Z_3 –C_3 =–3< 0 , бўлганлиги учун A_3 вектор устуни калит устун, A_2 вектор сатри калит сатр, 3/4 ечувчи (калит) элемент бўлиб, m+2 -сатр энди хисобга олинмайди.

Юкорида кўрсатилган усул билан 4-симплекс жадвални тузамиз:

4-симплекс жадвал

i	Базис-лар	Базис коэффици-ентлар C_6	A_0	5	3	4	1	–M	–M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	–1/3
2	A_1	5	1	1	1/3	0	0	–1/3	2/3
m+1	$Z_j – C_j$		9	0	4	0	5	1+M	2+M

3-симплекс жадвалдан кўйилган масаланинг оптимал ечими $\overline{X}=(1,0,1,0,0)$ бўлиб, $Z_{max}(\overline{X})=9$ бўлади. Биринчи ва иккинчи сатрларни ўзаро алмаштириб, A_5 ва A_6 векторлар устунида тескари матрицани хосил киламиз.

2-боб. Чизикли програмалашнининг иккиланган масалалари

§ 1. Иккиланган масалалар хакида аосий тушинчалар

Бизга чизикли программалаш масаласи берилган бўлсин.а

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

$$x_1, x_2, ..., x_3 \ge 0$$

максад функцияси

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n \qquad (2.2)$$

нинг максимум кийматини топиш керак булсин.

Хар кандай чизикли програмалаш масаласини иккиланган масала деб аталувчи масала билан узвий бођлик эканлигини кўрсатиш мумкин.

Таъриф. Куйидаги шартлар

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ .... \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

$$y_1, y_2, ..., y_m \geq 0$$

каноатлантирилганда

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \qquad (2.4)$$

функциянинг минимум кийматини топишга (2.1), (2.2) чизикли программалаш масаласининг иккиланган масаласи дейилади.

Бу масалаларнинг оптимал ечимлари узаро куйидаги теорема асосида бођланган.

Теорема. Агар берилган масала ёки унга иккиланган масалалардан бирортаси оптимал ечимга эга булса, у холда иккинчиси хам оптимал ечимга эга булади, хамда бу масалалардаги чизикли функциянинг оптимал кийматлари узаро тенг булади, яъни

$$F_{\max} = F^*_{\min}.$$

Агар $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ёки $F'(y_1, y_2, ..., y_n) -$ чизикли функциялардан биронтаси чегараланмаган булса, у холда масала хеч кандай ечимга эга булмайди.

Иккиланганлик масалалари симметрик ва симметрик булмаган масалаларга булинади. Юкоридаги теорема симметрик булмаган масалаларни ечишда кулланилади. Шуни хам айтиш керакки тенгсизликлар системасини кушимча узгарувчилар ёрдамида тенгламалар системаси куринишига келтириш мумкин. Демак, симметрик иккиланмалик масалаларни симметрик булмаган иккиланмалик масалага келтириш мумкин. Шунинг учун симметрик булмаган иккиланиш маслаларининг оптимал ечимлари хакидаги теорема симметрик иккиланган масалалар учун хам уринлидир.

Масала 2.1 **К**уйидаги шартлар билан берилган масалани иккиланган масалага келтиринг

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 7x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min$$

Масалани иккиланган масалага келтириш учун олдин чегараловчи шартларни бир хил кўринишдаги тенгсизликларга келтирамиз. Бунинг учун биринчи тенгсизликни тескари кўринишга келтирамиз

$$\left.\begin{array}{r} -x_1 + 7x_2 + 4x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min.$$

Хосил бўлган масалага иккиланган масала куйидаги кўринишда бўлади

$$\left.\begin{array}{r} -y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ 7y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 2, \\ 4y_1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4 \leq 4. \end{array}\right\}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$F^* = 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 \to \max.$$

Иккиланган масалани чизикли программалашнинг асосий масаласига келтириб симплекс метод билан ечиш мумкин.

§ 2. Иккиланган симплекс усул

Бу усул олдин академик Л.В. Канторович томонидан кўрсатилган эди. Лекин бу усулни бошка кўринишда Лемкс деган олим кўрсатган. Шуни хам айтиш керакки, агар биронта чизикли программалаш масаласини ечиш керак бўлса, унинг ўрнига иккиланган масалани ечиш мумкин. Агар иккиланган масала оптимал ечимга эга бўлса, у холда дастлабки берилган масала хам оптимал ечимга эга бўлади.

Дастлаб А матрицага $А^т$ – транспонирланган матрицани ёзиб оламиз. Матрицага транспонирланган матрицани ёзганда устунлар ва сатрларнинг роли ўзгаради, яъни берилган масаланинг сатри тўђрисида сўз кетса у устунга ўтади.

Хусусий холда симплекс жадвалларнинг индекс сатри тўђрисида гап кетса иккиланган масалаларда озод хадлар устуни тўђрисида гап кетади. Буни куйидаги иккита масалада кўрамиз.

2.2 - масала. Куйидаги шартларда

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \le 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

$F = 3x_1 + 4x_2$ - функциянинг максимум кийматини топинг.

Симплекс усул коидаларидан фойдаланиб дастлабки берилганларнинг асосий жадвалини тузамиз.

1-жадвал

	I	$-x_1$	$-x_2$	**Тек. Устуни**
y_1	**56**	**4**	**9**	**69**
y_2	**37**	**5**	**3**	**45**
y_3	**2**	**-1**	**2**	**3**
F	**0**	**-3**	**-4**	**-7**

1. Индекс сатридан F дан абсолют киймат бўйича энг катта манфий сонни оламиз. Бу сон калит устунни кўрсатади.
1. Озод хадларни мос равишда калитли устундаги мусбат сонларга бўлиб уларнинг энг кичигини танлаймиз. Бу сатрга калитли сатр дейилади $\left\{\frac{56}{9}, \frac{37}{3}, \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1.$
2. Калитли устун ва калитли сатр кесишган катакдаги сонга калитли сон дейилади.
3. Симплекс жалдвалларни тўлдириш формулалардан фойдаланиб колган катакларни тўлдирамиз. Натижада 2 – чи жадвал хосил бўлади. Бу жадвалда x_2 – ни асосий ўзгарувчилар сафига ўтказамиз. y_3 –ни кўшимча ўзгарувчилар сафига ўтказамиз.

2-чи жадвал

	I	$-x_1$	$-y_3$	Текшириш устуни

y_1	47	7/2	$-\frac{9}{2}$	51
y_2	34	13/2	-3/2	39
x_2	1	1/2	$\frac{1}{2}$	1
F	4	-5	2	1

F - индекс сатрида манфий сон (-5) бўлгани учун 3 – чи симплекс жадвални тузамиз. Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

3- чи жадвал

	I	$-y_2$	$-y_3$
y_1	$^{33}\!/_{13}$	$-^{17}\!/_{13}$	$-^{33}\!/_{13}$
x_1	$^{68}\!/_{13}$	$^{2}\!/_{13}$	$-^{3}\!/_{13}$
x_2	$^{47}\!/_{13}$	$^{1}\!/_{13}$	$^{5}\!/_{13}$
F	$^{392}\!/_{13}$	10/13	11/13

F- индекс сатри хадларининг хаммаси мусбат бўлгани учун куйидаги ечим:

$$y_1 = \frac{33}{13};\ x_1 = \frac{68}{13};\ x_2 = \frac{47}{13};\ y_2 = 0;\ y_3 = 0,$$

Оптимал ечим бўлади. Унга максад функциясининг куйидаги киймати мос келади.

$$F_{\max} = \frac{10}{13}(-y_2) + \frac{11}{13}(-y_3) + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}$$

Масала.2.3. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} 4u_1 + 5u_2 - u_3 \geq 3, \\ 9u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq 4, \end{aligned}\right\}$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0.$$

$F' = 56u_1 + 37u_2 + 2u_3$ - функцияни минимум кийматини топинг.

Симплекс усул коидаларидан фойдаланиб берилганларнинг асосий жадвалини тузамиз.

Жадвал 1.

	I	u_1	u_2	u_3
v_1	-3	4	5	-1
v_2	-4	9	3	2
F	0	56	37	2

1. Озод хадлар устунидан манфий сонлар ичидан энг кичик манфий сонни оламиз. Бу сон турган сатр калитли сатрни кўрсатади.
2. F сатр хадларини мос равишда калитли сатрдаги сонларга бўлиб энг кичигини

оламиз $\min\left\{\frac{56}{9}; \frac{37}{3}; \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2}$.

Бу устунга калитли устун дейилади.

3. Калитли сатр ва калитли устун кесишган катакдаги сон калитли сон дейилади.
4. Кўшимча ўзгарувчи u_3 – ни, v_2 асосий ўзгарувчи сифатида базисга киритамиз. Симплекс жадвалларни тузиш формулаларидан фойдаланиб 2-чи симплекс жадвални тузамиз

2 – жадвал

	1	u_1	u_2	v_2	Текшириш устуни
v_1	-5	$17/2$	$13/2$	$-1/2$	$91/2$
u_3	2	$-9/2$	$-3/2$	$1/2$	$-3\frac{1}{2}$
F^*	4	47	34	1	83

Ўзгармаслар устунида манфий сон (-5) бўлгани учун бу жадвални хам юкоридаги каби алмаштирамиз. Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

3-жадвал

	1	u_1	v_1	v_2

u_2	$\frac{10}{13}$	$-\frac{17}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$
u_3	$\frac{11}{13}$	$-\frac{33}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$
F^*	$\frac{392}{13}$	$\frac{33}{13}$	$\frac{68}{13}$	$\frac{47}{13}$

Эркин хадлар устунида хамма хадлар мусбат бўлгани учун куйидаги ечим оптимал бўлади

$$u_2 = \frac{10}{13};\ u_3 = \frac{11}{13};\ u_1 = 0;\ v_1 = 0;\ v_2 = 0,$$

$$F_{\min} = \frac{33}{13}u_1 + \frac{68}{13}v_1 + \frac{47}{13}v_2 + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}$$

Шундай килиб иккиланган симплекс метод оркали масала ечилди.

Куйидаги масалаларни чизикли программалашнинг иккиланган масаласига келтиринг ва иккиланган симплекс усул билан ечинг

2.4.

$$\left.\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 \le 52, \\ x_2 \le 2, \\ 10x_1 + 4x_2 \le 70, \end{array}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$$

2.5.

$$\left.\begin{array}{r} 9x_1 + 11x_2 \le 46, \\ 5x_1 + x_2 \le 42, \\ x_1 + 13x_2 \le 4, \end{array}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 5x_1 + x_2 \to \max$$

2.6.

2.7.

$$\left.\begin{array}{c} 8x_1 + 2x_2 \le 90, \\ 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 6x_2 \le 60. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 9x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 11x_2 \le 11, \\ 3x_1 + x_2 \le 28, \\ 2x_1 + 13x_2 \le 11. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 8x_1 + 2x_2 \to \max$

2.8.

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 3x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 35, \\ 5x_1 + 13x_2 \le 18. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 7x_1 + x_2 \to \max$

2.9.

$$\left.\begin{array}{c} 2x_1 + 4x_2 \le 1, \\ 5x_1 + x_2 42, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 11. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 7x_1 + 5x_2 \to \max$

2.10.

$$\left.\begin{array}{c} 8x_1 + 14x_2 \le 14, \\ 13x_1 + 5x_2 \le 100, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 5. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

2.11.

$$\left.\begin{array}{c} 3x_1 + 5x_2 \le 1, \\ 17x_1 + x_2 \le 152, \\ 5x_1 + 14x_2 \le 13. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 13x_1 + 3x_2 \to \max$

2.12.

$$\left.\begin{array}{c} 11x_1 + 17x_2 \le 72, \\ x_1 + 11x_2 \le 20, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 20. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 9x_1 + 7x_2 \to \max$

2.13.

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 9x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 1. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 7x_1 + 3x_2 \to \max$

2.14.

$$\left.\begin{array}{c} 9x_1 + 11x_2 \le 48, \\ 5x_1 + x_2 \le 44, \\ x_1 + 13x_2 \le 6. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$

2.15.

$$\left.\begin{array}{c} 2x_1 + 4x_2 \le 5, \\ 5x_1 + x_2 \le 46, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15. \end{array}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$

2.16.

$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 14x_2 &\le 14, \\ 13x_1 + 5x_2 &\le 100, \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 5. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 11x_1 + 7x_2 \to \max$$

2.17.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 2, \\ 17x_1 + x_2 &\le 153, \\ 8x_1 + 14x_2 &\le 14. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 3x_1 + 15x_2 \to \max$$

2.18.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 11x_2 &\le 11, \\ 3x_1 + x_2 &\le 28, \\ 5x_1 + 13x_2 &\le 11. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 10x_1 + 8x_2 \to \max$$

2.19.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 1, \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 34, \\ 5x_1 + 13x_2 &\le 17. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$

§ 3. Иккиланган масалаларнинг геометрик тахлили

Агар берилган ва унга иккиланган масалаларда ўзгарувчилар сони иккига тенг бўлса, чизикли программалаш масалаларининг геометрик тахлилини бериш осонлашади. Бу холда бир –бирини истсино килувчи куйидаги учта хол бўлиши мумкин: 1) иккала масала хам оптимал ечимга эга; 2) факат битта масала оптимал ечимга эга; 3) иккала масаланинг оптимал режалари бўш тўпламни ташкил килади.

Масала 2.20. Куйидаги шартлар бўйича

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 14, \\ x_1 + x_2 &\le 8. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

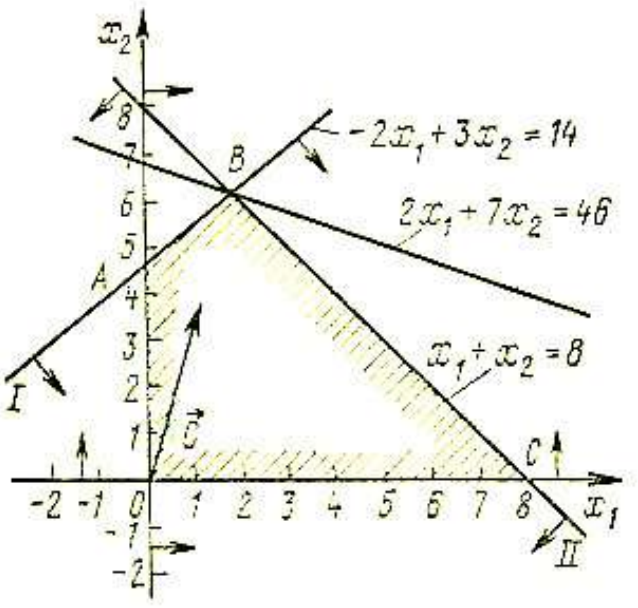
$F = 2x_1 + 7x_2 \to \max$ масалани иккиланган масалага келтиринг ва иккала масаланинг ечимларини топинг.

Ечиш. Бу масалага иккиланган масала: $F^* = 14y_1 + 8y_2$ функциянинг куйидаги шартларда

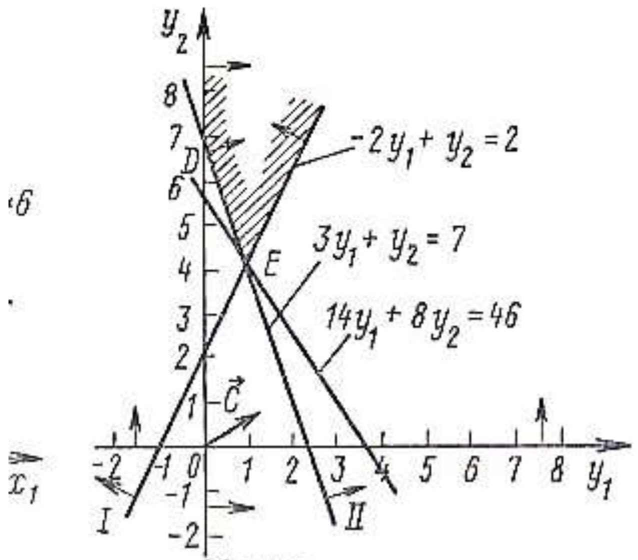
$$\left.\begin{array}{r} -2y_1 + y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \end{array}\right\}$$

$$y_1,\ y_2 \ge 0.$$

минимум кийматини топишдан иборат бўлади



2.1-чизма



2,2-чизма

Берилган ва унга иккиланган масалада хам номаълумлар сони иккита (x_1 ва x_2), (y_1 ва y_2) унинг учун геометрик усул билан ечиш мумкин. Дастлабки масалада максад функцияси B нуктада максимум кийматга эга. Шунинг учун B(2; 6) нуктада F (2; 6)=2·2+7·6=46 максад функцияси оптимал ечимга (планга) эга (2.1-чизма). Иккиланган масала эса E(1; 4) нуктада минимум кийматга (2.2-чизма) эга. Шунинг учун $F^*(1; 4) = 14·1+8·4=46$ – максад функциясининг минимал кийматидир.

Масала 2.21. Икkиланган масалалар жуфтлигининг ечимларини топинг.

Дастлабки масала

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 6. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to \min$$

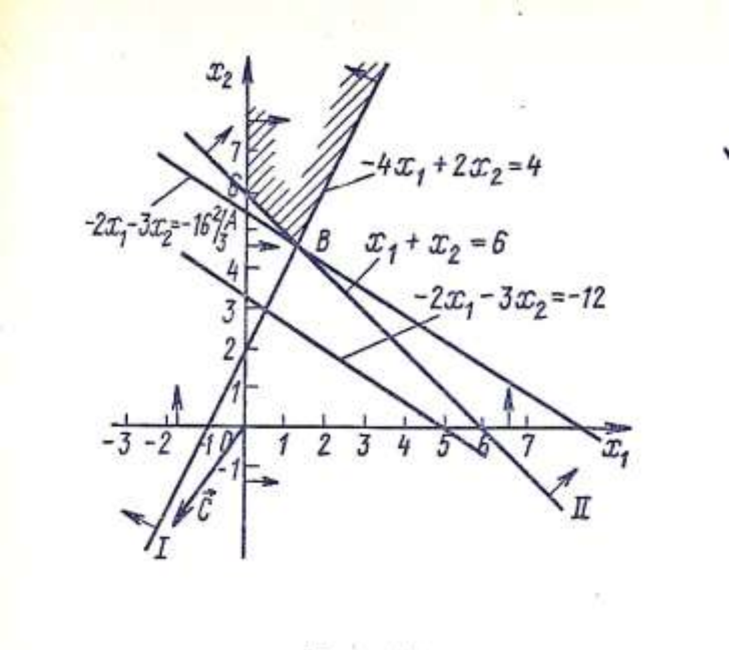
Иккиланган масала

$$\left.\begin{array}{r} -4y_1 + y_2 \le -2, \\ 2y_1 + y_2 \le -3. \end{array}\right\}$$

$$y_1,\ y_2 \ge 0.$$

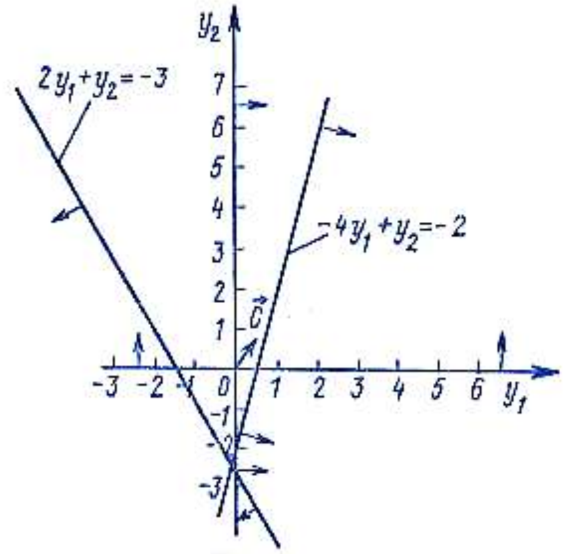
$$F' = 4y_1 + 6y_2 \to \max$$

Ечиш. Дастлабки масала ва унга иккиламнган масала хам иккитадан ўзгарувчига эга. Шунинг учун уларни геометрик усул билан ечамиз. Иккала масала учун хам шаклларни чизамиз. (чизмалар 2.3,2.4)



2.3-чизма

2.3 -чизмадан кўриниб турибдики дастлабки масала ечимга эга эмас. Чунки максад функцияси $F = -2x_1 - 3x_2$ мумкин бўлган ечимлар тўпламида куйидан чегараланмаган. Чизма2.4-дан кўриниб турибдики иккиланган масаланинг хам оптимал планлари йўк, чунки ечимлар кўп бурчаги бўш тўпламни ташкил килади. Шундай килиб дастлабки масала оптимал ечимга эга бўлмаса (максад функцияси мумкин бўлган ечимлар тўпламида чегараланмаган бўлгани учун) унга иккиланган масала хам ечимга эга бўлмайди.



2,4-чизма

III- боб

Транспорт масласи

§1. Таксимот услуби

Фараз килайлик m – та ишлаб чикариш корхонаси берилган бўлсин. Бу корхоналарда мос равишда $a_1, a_2, ..., a_m$- тоннадан бир жинсли махсулотлар ишлаб чикарилган бўлиб, $B_1, B_2, ..., B_n$- истеъмолчиларга мос равишда $b_1, b_2, ..., b_n$ тоннадан таркатиш керак. A_j- ишлаб чикариш корхонасидан B_i истеъмолчиларгача махсулотларни ташиш бахоси куйидаги тариф матрицаси кўринишда берилган бўлсин

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Юкоридагиларга асосан куйидаги жадвални тузиш мумкин

1-чи жадвал

Ишлаб чикариш корхоналари	Корхонада бўлган ишлаб чикарилган	Истеъмолчилар ва уларнинг талаби				
		B_1	B_2	B_3	…	B_n

	махсулотлар (тонна хисобида)	b_1	b_2	b_3	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}

Агар ишлаб чикариш корхонасидаги жами бир жинсли махсулотлар микдори истеъмолчиларнинг талабини тула кондирса, яъни

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

$$b=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

$$a=b$$

булса, юкоридаги жадвалга асосланиб тузилган математик моделга ёпик математик модел дейилади.

Агар масалан $a > b$ бўлса, тузилган математик моделга очик модел дейилади.

Истеъмолчилар сафига сохта истеъмолчи B_{n+1} - ни киритамиз.

Сохта истеъмолчи махсулот жойлашган корхона бўлгани учун махсулотларни ташиш бахоси 0 га тенг.

Шундай килиб, очик математик моделни ёпик математик моделга келтирса бўлади.

Жадвални куйидагича тушунтириш мумкин: $x_{11}, x_{12},..., x_{1n}$ лар A_1- чи ишлаб чикариш корхонасидаги махсулотни мос равишда $B_1, B_2,..., B_n$ истеъмолчиларга таркатиладиган микдори

$x_{11}, x_{12},..., x_{1n}$ лар A_2-чи ишлаб чикариш корхонасидаги махсулотни мос равишда $B_1, B_2,..., B_n$ истеъмолчиларга таркатиладиган микдори ва хоказо. C_{ij} – лар эса 1 тонна махсулотни і ишлаб чикариш корхонасидан $j-$чи истеъмолчигача ташиш бахоси яъни тариф.

Шундай килиб транспорт масаласининг шартини берилган жадвалга асосланиб $x\ ij-$ларни ўз ичига олган куйидаги $n+m$ -- та тенгламалар системаси кўринишида ёзиш мумкин

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1,\\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2,\\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m.\end{array}\right\}\qquad (a)\\ \left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1,\\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{nn}=b_n.\end{array}\right\}\qquad (b)\end{array}\right\}\qquad (3.1)$$

$$x_{ij}\ge 0,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,m}$$

Транспорт харажатлари (максадли функция) эса куйидагига тенг:

$$\begin{array}{l} f=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\cdots+c_{2n}x_{2n}\\ \qquad +\cdots+c_{n1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\cdots+c_{mn}x_{mn}\end{array}\qquad (3.2)$$

Демак (3.1) чизикли тенгламалар системасида шундай $0-$ли ва мусбат ечимларини топиш керакки (3.2) максад функцияси минимум киймат кабул килсин.

(3.1) – чи тенгламалар системасини ва (3.2) тенгликни куйидаги кўринишда ихчам ёзиш мумкин

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\quad (i=\overline{1,m})\\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij}=b_i,\quad (j=\overline{1,n})\end{array}\right\}$$

(3.1’)

ва $$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\min\qquad (3.2)$$

Шуни хам айтиш кераким (3.1) тенгламалар системасининг хамма тенгламалари бир—бири билан чизикли боѓлик ёки чизикли боѓлик эмас бўлиши мумкин. Чизикли боѓлик булмаганлар сони $m+n-1$ дан кичик ёки тенг бўлади.

Таксимот услубини умумий холда алгоритмини тушунтириш анча оѓир.

1. Шимолий - ђарб бурчак услуби

«Шимолий - ђарб бурчак» усулини умумий коидаси куйидагилардан иборат. Энг аввал дастлабки берилганларнинг жадвалидан «Шимолий ђарбида жойлашган x_{11} ноъмалумнинг кийматини аниклаймиз».

$$x_{11} = \min(a_1, b_1)$$

Бу ерда икки хол бўлиши мумкин:

1) $a_1 \le b_1$ бўлса $x_{11} = a_1$ ва $x_{1j} = 0 \ (j = \overline{2,n})$; $в_1^1 = в_1 - a_1$;

2) $a_1 \ge b_1$ бўлса $x_{11} = a_{в1}$ ва $a_1^1 = a_1 - в_1$;А

Агар биринчи хол бажарилса биринчи кадамдан сўнг масаланинг ечимларидан ташкил топган матрица куйидаги кўринишда бўлади

$$\begin{pmatrix} x_{11} = a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_2 - a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}.$$

Энди иккинчи катордаги биринчи элементни топамиз.

Бу ерда хам икки хол бўлиши мумкин:

1) Агар $a_2 \ge b_1 - a_1$ булса $x_{21} = b_1 - a_1$ ва $x_{2j} = 0,\ j = \overline{2,m}$; $a_2^1 = a_2 - (b_1 - a_1)$

2) Агар $a_2 \le b_1 - a_1$ булса $x_{21} = a_2$, ва $b_1^1 = b_1 - a_1 - a_2$;

Агар бу ерда хам биринчи хол бажарилса, у холда иккинчи кадамдан сўнг янги матрица куйидаги кўринишда бўлади.

$$\begin{pmatrix} x_{11} = a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21} = b_1 - a_1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2^1 = a_2 - (b_1 - a_1) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & a_{3n} & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_1^1 = b_1 - a_1 - a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}$$

Бу жараён кадамба-кадам барча a_i ва b_j –лар нолга айлангунча давом эттирилади. Маълумки, хар бир x_{ij} –нинг киймати a_i ва b_j –ларнинг турли комбинацияларини айириш ёки кўшиш ёрдамида топилади.

2. Минимал харажатлар усули.

Минимал харажатлар усулининг коидаси куйидагича

1. Транспорт масаласи харажатларидан ташкил топган таъриф матрицаси белгилаб олинади

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. T –матрицанинг минимал элементини топамиз

$$\min\{c_{ij}\} = k.$$

Фараз килайликки бу элемент

$$C_{i_1 j_2} = k.$$

У холда

$$x_{i_1} \cdot x_{j_2} = \min(a_{i_1} \cdot b_{j_2}).$$

Берилганларга асосан куйидаги икки хол бўлиши мумкин:

1) $a_{i_1} \le b_{j_1}$,

2) $a_{i_1} > b_{j_1}$.

Биринчи холда i_1 сатрнинг барча элементлари $x_{i_1 j} = 0, \ (j \neq j_1)$ бўлади, бундай холда i_1 сатр элементларини ўчирамиз.

Иккинчи холда j_1 устуннинг барча элементлари $x_{ij_1} = 0, \ (i \neq i_1)$ ва бу холда барча j_1 устун элементлари ўчирилади.

Устун ва сатр элементларини ўчириш натижасида хосил бўлган янги матрицанинг устун ва сатрлар сони T матрицага нисбатан биттага камаяди. Иккинчи кадамда юкоридаги жараён янги матрица учун яна бажарилади. Шундай килиб кўйилган масаланинг бошланђич оптимал планини топиш учун минимал харажатлар усулида $n + m - 1 -$та кадамни бажариш керак.

Энди куйидаги масалани кўриб чикайлик.

Масала. Самарканд вилоятининг Жомбой ва Жума базасидан Катта Курђон, Иштихон ва Нарпай туманларига бир жинсли товарларни ташиш керак товарлар захираси Жомбой базасида 400 тонна, Жума базасида эса 600 тонна. Катта Курђон туманининг товарга 350 тонна, Иштихон туманиники 450 тонна ва Нарпай туманиники эса 200 тонна. Жомбой базасидан учта тумангача бўлган масофалар мос равишда 100 км, 60 км ва 110 км. Жума базасидан учта тумангача бўлган масофалар мос равишда 40 км, 70 км ва 50 км – га тенг. Туманларга товар ташишнинг оптимал вариантини топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига асосан куйидаги жадвални тузамиз.

Жадвал №1

Базалар	Базалардаги товар захиралари	**Туманлар**		
		Катта Курђон	Иштихон	Нарпай
Жомбой I	400$_{\text{Т}}$	100 x_{11}	60 x_{12}	110 x_{13}
Жума II	600$_{\text{Т}}$	40 x_{21}	70 x_{22}	50 x_{23}
Товарларга булган талаб	1000$_{\text{Т}}$	350$_{\text{Т}}$	450$_{\text{Т}}$	200$_{\text{Т}}$

Бу масалада базалар сони $m=2,$ Истеъмолчилар сони эса n= 3 та.

Шунинг учун махсулотларни таксимлагандан кейин тўлдириган катаклар сони $m+n-1=2+3-1=4-$та бўлиши керак.

1 – чи жадвалга асосланиб 2 – чи жадвални тузамиз.

Жадвал №2

Базалар	Базалардаги товар захиралари	**Туманлар ва уларнинг товар махсулотларига талаби.**		
		Катта Курђон 350 1	Иштихон 450 2	Нарпай 200 3
Жомбой I	$400_{\text{Т}}$	100 350	60 50	110 0
Жума II	$600_{\text{Т}}$ 2	40 0	70 400	50 200

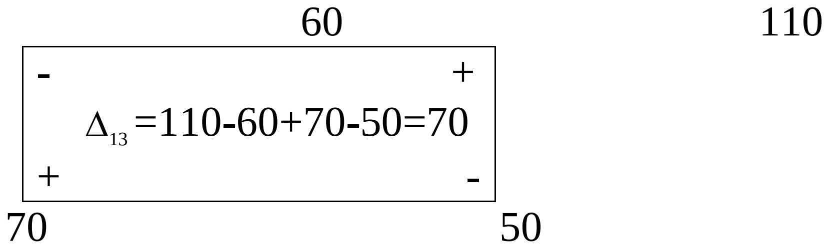
Транспорт харажатларини 2 – чи жадвалга асосланиб хисобласак

$$f_1 = 350 \cdot 100 + 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$$

$= 35000 + 3000 + 28000 + 10000 = 76000$ т/.км ни ташкил этади. 2 -- чи жадвалнинг оптималлигини текширамиз.

Бунинг учун бўш катакларга нисбатан занжирлар тузамиз. Бундай занжирлар Δ_{13} ва Δ_{21} –лардан иборат.

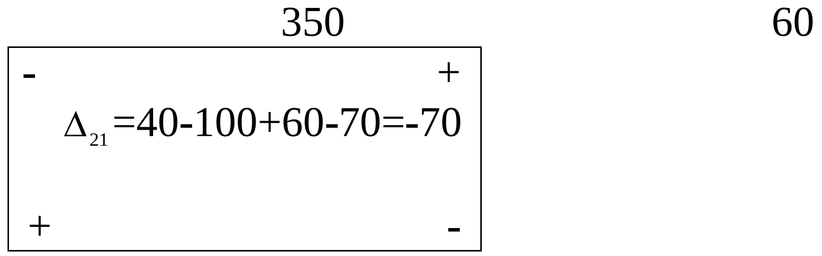
Δ_{13} -- занжир куйидаги кўринишга эга. Бўш катакни индексининг ишорасини мусбат ишора билан оламиз. Колган индекслар ишораси алмашиб туради.



Δ_{13}=110-60+70-50=70

Бу занжир мусбат, шунинг учун бошка бўш занжирни, яъни Δ_{21} –ни текширамиз.

Δ_{21} –занжирнинг кўриниши куйидагича бўлади.

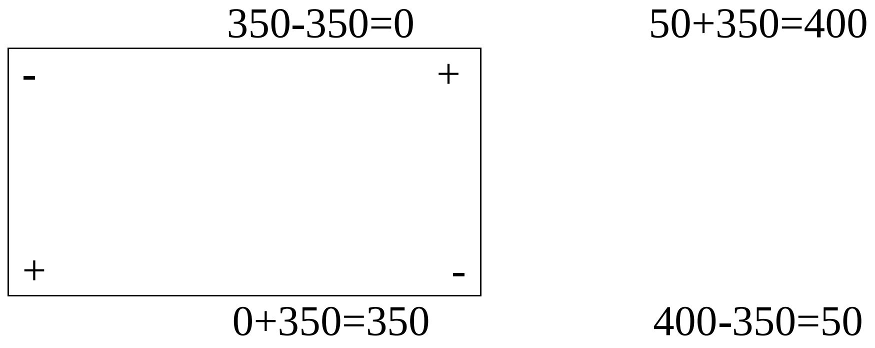


Δ_{21}=40-100+60-70=-70

400

Демак Δ_{21} –занжир манфий ишорага эга, шунинг учун бу занжирни яхшилаймиз. Манфий учларда жойлашган юкларнинг энг кичигини оламиз, яъни $\min\{350,400\}=350$.

Бундан кейин 350 -- ни манфий учлардаги юклардан айирамиз ва мусбат учларда турган юкларга кўшамиз.



Δ_{21} –занжирдаги ўзгаришларни хисобга олиб 3 – чи жадвални тузамиз.

Жадвал №3

Базалар	Базалардаги товар захиралари	**Туманлар ва уларнинг товар махсулотларга талаби.**		
		Катта Курђон 350 1	Иштихон 450 2	Нарпай 200 3
Жомбой I	400$_{\text{Т}}$	100 0 +	60 400	110
Жума II	600$_{\text{Т}}$ 2	40 350	70 50	50 200

3 – чи жадвалдаги программа бўйича транспорт харажатлари

$$f_2 = 100\cdot 0 + 400\cdot 60 + 110\cdot 0 + 350\cdot 40 + 50\cdot 70 + 200\cdot 50 =$$

$= 0 + 24000 + 0 + 14000 + 3500 + 10000 = 51500$ т км – ни ташкил этади.

2 – чи ва 3 – чи жадвалга жойлаштирилган программаларнинг фарки $f_1 - f_2 = 76000 - 51500 = 24500т$. км – ни ташкил этади. Демак иктисодий тежаш 24500 тонна .км – ни ташкил этади.

Энди 3 – чи жадвалдаги бўш катакларга нисбатан тузилган занжирларнинг ишорасини юкоридаги каби текшириб чиксак Δ_{11}, Δ_{13} –ларнини ишоралари мусбат экалигини кўрамиз.

Шунинг учун 3 – чи жадвалга жойлаштирилган программа оптимал программа бўлиб, бу программа бўйича: Катта Кўрђон тумани Жума базасидан 350 тонна юк олиши керак бўлиб транспорт харажатлари

$F_1 = 0 \cdot 100 + 350 \cdot 40 = 14000$ т • км – ни ташкил этади.

Иштихон тумани 400 тонна юкни Жомбой базасидан, 50 тонна юкни эса Жума базасидан олганда транспорт харажатлари

$F_2 = 400 \cdot 60 + 50 \cdot 70 = 24000 + 3500 = 27500$ т км – ни ташкил этади.

Нарпай тумани 200 тона юкни Жума базасидан олади ва транспорт харажатлари

$F_3 = 0 \cdot 110 + 200 \cdot 50 = 10000$ т • км – ни ташкил этади.

Жами транспорт харажатлари

$f_2 = F_1 + F_2 + F_3 = 14000 + 27500 + 10000 = 5150$ т • км – ни ташкил этади.

2 – чи жадвалга жойлаштирилган программа бўйича транспорт харажатлари туманлар бўйича:

Катта Кўрђон $f_1 = 100 \cdot 3500 = 35000$ т• к

Иштихон $f_2 = 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 = 3000 + 28000 = 31000$ т км

Нарпай $f_3 = 200 \cdot 50 = 10000$ т км;

Жами $f_1 + f_2 + f_3 = 76000$ т км.

Туманлар бўйича тежалган транспорт харажатлари:

Катта Кўрђон $f_1 - F_1 = 35000 - 14000 = 21000$ т км

Иштихон $f_2 - F_2 = 3100 - 27500 = 4500$ т км

Нарпай $f_3 - F_3 = 10000 - 10000 = 0$ т км

Шундай килиб 1 тонна юкни 1 км-га ташиш учун 100 сум маблађ сарфланганда туманлар бўйича иктисодий тежаш:

Катта Кўрђон $21000 \cdot 100 = 2100000 = 2_{\text{млн}}$ 100 минг сўм;

Иштихон $4500 \cdot 100 = 450000 = 450$ минг сўмни ташкил этади.

Жами вилоят бўйича иктисодий тежаш 3 – чи жадвалдаги программа бўйича 2 миллион 550 минг сўмни ташкил этади.

1 – чи жадвалга асосланиб куйидаги моделни тузиб олишимиз мумкин

$$\left.\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600, \\ &x_{11} + x_{21} = 350, \\ &x_{12} + x_{22} = 450, \\ &x_{13} + x_{23} = 200. \end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

$$f = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40x_{21} + 70 \cdot x_{22} + 50 \cdot x_{23}$$

Юкоридаги системани ечсак:

$$x_{11} = 0, \qquad x_{21} = 350,$$

$$x_{12} = 400, \qquad x_{22} = 50.$$

$x_{13} = 0, \qquad x_{23} = 200 -$ лар бўлади.

$f = 100 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 110 \cdot 0 + 40 \cdot 50 + 70 \cdot 50 + 50 \cdot 200 = 51500$ тонна км.

Юкоридаги оптимал программа математик модел ечимлари билан мос келди.

Шуни хам айтиш керакким масалалар ечганда Δ_{ij} ларни бир нечтаси манфий бўлади. У вактда манфий Δ_{ij} -- лар ичидан энг кичик занжир танланади ва у яхшиланади.

Агар занжирларда бир нечта ўзаро тенг манфий сонлар пайдо бўлса, у вактда биринчи (исталган) манфий занжир яхшиланади. Айрим вактда тўлдирилган катаклар сони $n + m - 1$ дан кам бўлади. Шунинг учун биронта катакка 0 кўйиб у катак юк билан таъминланади ва тўлдирилган катаклар сони $n + m - 1$ -- га тенг бўлади. Бўш катакга 0 кўйишда катакни шундай танлаш керакки, у катак билан тузилган барча загнжирларда Δ_{ij} -- лар мусбат бўлсин.

Минимал харажатлар усул билан масалалар ечишни талабаларнинг ўзларига тавсия киламиз.

§ 2. Транспорт масаласини потенциаллар усули билан ечиш.

Фараз килайлик транспорт масаласи куйидаги жадвал кўринишда берилган бўлсин

Ишлаб чикариш корхона-лари	Корхоналарда ишлаб чикарилган махсулотлар (тонна)	Истеъмолчилар ва уларнинг талаби				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
		b_1	B_2	b_3	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

Бу жадвал «шимолий-ђарб бурчак» усулдан фойдаланиб бошланђич таянч план бўлсин, x_{ij} – таксимланган юклар (захиралар) c'_{ij} – юклар бўлмаган, яъни тўлдирилмаган катаклар, c_{ij} – лар эса тўлдирилган катаклар бўлсин.

Бошланђич таянч планга асосан транспорт харажатлари

$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m3}x_{m3} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$ – га тенг бўлади.

1 – чи жадвалга $A_1, A_2, ..., A_m$ – корхоналарга мос равишда $u_1, u_2, ..., u_m$ – шартли варианталар киритамиз (потенциаллар) $B_1, B_2, ..., B_n$ – истеъмолчиларга мос равишда $v_1, v_2, ..., v_n$ – шартли варианталар (потенциалар) киритамиз. Демак A- корхонанинг потенциали (шартли вариантаси) u_i – микдор. B_j- истеъмолчининг потенциали (шартли вариантаси) v_j – микдор $\begin{pmatrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{pmatrix}$

Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

1 – чи режа

Кор-хона-лар	Корхонада ишлаб чикарилган махсулотлар (тонна)	Истеъмолчилар ва уларнинг талаби					
		B_1	B_2	B_3	…	B_n	
		b_1	b_2	b_3	…	b_n	u_i – вариант шарти
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	u_1
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}	u_2
A_3	a_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	…	c_{3n} x_{3n}	u_3
…	…	…		…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	u_m
v_j -	Шартли варианти	v_1	v_2	v_3	…	v_n	

u_i ва v_j сонларини шундай танлаб олиш керакки, уларнинг йиђиндиси тўлдирилган катакдаги тариф c_{ij} –га тенг бўлсин. У вактда юкоридаги жадвалга асосан куйидаги $n+m-1$–та, хозирча ноъмалум бўлган u_i ва v_j- ларга нисбатан чизикли тенгламалар системаси хосил бўлади

$$\left.\begin{array}{ll} u_1+v_1=c_{11}, & u_3+v_2=c_{32}, \\ u_1+v_2=c_{12}, & u_3+v_3=c_{33}, \\ u_1+v_3=c_{13}, & \\ u_2+v_3=c_{23}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2+v_3=c_{23}, & u_m+v_n=c_{mn}. \end{array}\right\}$$

Бу системада ноъмалумлар сони n + m - та. Шунинг учун улардан ихтиёрий биронтасини ихтиёрий кийматга тенглаштириб (масалан 0 – га) олиб колган u_i ва v_j- ларни бирин – кетин топамиз.

Энди бўш катаклар учун жадвалга асосланиб юкоридаги каби чизикли тенгламалар системасини тузиб оламиз.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + v_3 = c'_{13}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_1 + v_n = c'_{1n}, \\ u_2 + v_1 = c'_{21}, \\ u_2 + v_2 = c'_{22}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_m + v_1 = c'_{n1}, \\ u_m + v_2 = c'_{m2}. \end{array}\right\} \ c'_{ij} - \text{ларга билвосита тарифлар дейилади.}$$

u_i ва v_j- ларнинг кийматларини куйиб билвосита тарифларни -c'_{ij} – хисоблаб чикамиз

Агар биринчи программада куйидаги хамма айирмалар $c'_{ij} - c_{ij} < 0$ бўлса, у вактда бу режага оптимал режа бўлади.

Агар айирмани бирон таси $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ булса у вактда оптимал ечим хали топилмаган бўлади.

Демак 1 – чи программани яхшилаш керак.

Бунинг учун $\max\{(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\}$ топиб оламиз ва занжирни таксимот усули билан ўзгартирамиз.

Натижада янги режа хосил бўлади.

Хосил бўлган режа учун транспорт харажатларини хисоблаб чикамиз.

2 – чи режага хам потенциаллар усулини кўллаймиз. Потенциаллар усулини кўллаш жараёни барча $c'_{ij} - c_{ij} < 0$ бўлгунча давом эттирилади.

Шундай килиб потенциаллар усули ёрдамида бошланђич таянч режадан бошлаб, оптимал ечимга якинрок бўлган янги таянч режага ўтамиз ва чекли сондаги алмаштиришлардан (итерациялардан) сўнг масаланинг оптимал ечимини топамиз.

Потенциаллар усулининг алгоритми куйидагилардан иборат:

1. Шимолий - ђарб бурчак ёки минимал харажатлар усулини кўллаб бошланђич таянч режа (биринчи базисли ечим) топилади.

2. Ишлаб чикарувчилар ва истеъмолчиларнинг потенциаллари хисобланади (u_i ва v_j-лар).
3. $c'_{ij}-$билвосита тарифлар топилади.
4. Хамма $c'_{ij}-c_{ij}$ айирмалар хисобланилади. 1) Агар $c'_{ij}-c_{ij}\le 0$ бўлса, тузилган режа оптимал режа бўлади ва бу режага асосан транспорт харажатлари хисобланади. 2) $c'_{ij}-c_{ij}>0$ бўлса у вактда буларнинг ичидан $\max\{(c'_{ij}-c_{ij})>0\}-$ни топиб олиб бу занжирни яхшилаймиз. Яъни янги базисли ўзгарувчи x_{kl} – ни киритамиз янги таянч режа тузамиз.

Масала. Берилган бўлсин таксимот усулидаги масаланинг биринчи таянч режаси. Бу жадвалга шартли вариантларни киритиб куйидаги кўринишда ёзамиз.

2 – чи жадвал.

База-лар	Базалардаги товар захираси (тонна)	Туманлар ва уларни товарларга талаби 1 – чи таянч режа (1 тн. хисоби).			
		Катта Курђон 350	Иштихон 450	Нарпай 200	
A_1	400	100 350	60 50	110	u_1
A₂	600	40	70 400	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_1=76000$т.км – транспорт харажати.

Тўлдирилган катаклар учун куйидаги системани тузамиз.

$$\left.\begin{aligned}u_1+v_1&=100,\\ u_1+v_2&=60,\\ u_2+v_2&=70,\\ u_2+v_3&=50,\end{aligned}\right\}$$

бу системада 5 – та ноъмалум бор. Шунинг учун номаълумлардан бирontасини 0 – га тенглаштирамиз, фараз килайлик $u_1=0$ бўлсин. У вактда система куйидаги ечимларга эга

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= 100, \\ v_2 &= 60, \\ u_2 &= 10, \\ v_3 &= 40. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Бўш катаклар учун u_i ва v_j потенциалларга асосланиб куйидаги системани тузамиз.

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_3 &= c'_{13}, \\ u_2 + v_1 &= c'_{21}. \end{aligned}\right\}$$

бу системага

(А) -- ечимларни кўйсак, билвосита тарифлар келиб чикади.

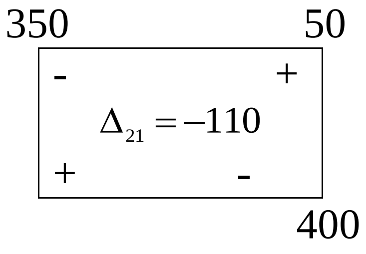
$c'_{13} = 40, \quad c'_{21} = 110$

Энди $c'_{ij} - c_{ij}$ – айирмаларни хисоблайлик

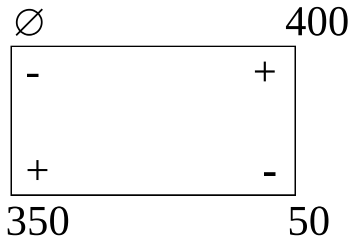
$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0,$

$c'_{21} - c_{21} = 110 - 40 = 70 > 0,$

$c'_{21} - c_{21} = 70$ >0 бўлгани учун бу занжирни яхшилаймиз. Олдин занжирнинг кўринишини чизиб оламиз



Бу занжирдаги юкларни кайтадан §1 да таксимлаган эдик. Унинг кўриниши куйидагича



Юкоридаги узгаришларга асосланиб таянч режанинг жадвалини тузамиз

3 – жадвал.

База-	Базалардаги	Истеъмолчилар ва уларнинг талаб

лар	юк захираси	Катта Кўрђон 350	Иштихон 450	Нарпай 200	u_i
A_1	400	100	60 400	110	u_1
A_2	600	40 350	70 50	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_2 = 51500$т км. – транспорт харажатлари.

Тўлдирилган катаклар учун куйидаги системани u_i ва v_j -- потенциалларни кўллаб тузамиз.

Юкоридаги каби ни $u_1 = 0$ деб олсак

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 60, \\ u_2 + v_1 &= 40, \\ u_2 + v_2 &= 70, \\ u_2 + v_3 &= 50. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= 60, \\ u_2 &= 10, \\ u_1 &= 30, \\ v_3 &= 40. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Бўш катаклар учун $u_i + v_i = c'_{ij}$ – ларни хисоблаймиз

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= c'_{11}, \\ u_1 + v_3 &= c'_{13}, \end{aligned}\right\}$$

U_i ва V_j ларни (B) дан бу системага кўйсак $c'_{11} = 30, c'_{13} = 40$ келиб чикади.

Энди $c'_{ij} - c_{ij}$ - айирмаларни хисоблайлик.

$$c'_{11} - c_{11} = 30 - 100 = -70 < 0,$$
$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0.$$

Бу режа оптимал режа хисобланади, чунки $c'_{ij} - c_{ij} < 0$.

Оптимал ечимлар (тонна хисобида)

$$x_{11} = 0, \qquad x_{21} = 350$$
$$x_{12} = 400, \quad x_{22} = 50$$
$$x_{13} = 0, \qquad x_{23} = 200$$

Бу ечим учун

$f_{\text{таянч режа}} = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40 \cdot x_{21} + 70 \cdot x_{22} + 50 \cdot x_{23} = 51500$ т.км,

$f_1 - f$ таянч =76000-51500=24500 т.км.

Топшириклар

Куйидаги транспорт масалаларини ечинг. (3.1 - 3.25).

Масала. Вилоятнинг учта A_1, A_2 ва A_3 корхоналарида бир жинсли махсулотлар ишлаб чикарилиб, ишлаб чикарилган махсулотларни бешта B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 истеъмолчиларга жўнатиш керак. A_1, A_2 ва A_3 корхоналарда мос равишда a_1, a_2, a_3 тонна бир жинсли ишлаб чикарилган махсулотни B_1, B_2, B_3, B_4 ва B_5 истеъмолчиларга мос равишда b_1, b_2, b_3, b_4 ва b_5 тонна юкларни жўнатиш керак.

Ишлаб чикариш корхоналаридан истеъмолчиларгача бўлган масофалар куйидаги T матрицада берилган

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

Ишлаб чикариш корхоналаридан махсулотларни истеъмолчиларга ташиш харажатларининг минимал вариантини топинг:

3.1.

$$\begin{array}{ll} & b_1 = 220, \\ a_1 = 330, & b_2 = 170, \\ a_2 = 270, & b_3 = 150, \\ a_3 = 350 & b_4 = 150, \\ & b_5 = 200. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 34 \end{pmatrix}.$$

3.2.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 260, & b_2 = 70, \\ a_2 = 150, & b_3 = 130, \\ a_3 = 200, & b_4 = 110, \\ b_1 = 100. & b_5 = 200. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 12 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 68 & 62 \end{pmatrix}.$$

3.3.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 200, & b_2 = 130, \\ a_2 = 350, & b_3 = 100, \\ a_3 = 300, & b_4 = 190, \\ b_1 = 270, & b_5 = 110. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 20 & 10 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}.$$

3.4.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 250, & b_2 = 135, \\ a_2 = 300, & b_3 = 120, \\ a_3 = 200, & b_4 = 150, \\ b_1 = 135, & b_5 = 210. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.5.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 300, & b_2 = 150, \\ a_2 = 350, & b_3 = 190, \\ a_3 = 200, & b_4 = 150, \\ b_1 = 110, & b_5 = 250. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

3.6.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 170, & b_2 = 110, \\ a_2 = 250, & b_3 = 160, \\ a_3 = 230, & b_4 = 90, \\ b_1 = 150. & b_5 = 140. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \\ 49 & 26 & 27 & 16 & 38 \\ 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \end{pmatrix}.$$

3.7.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 200, & b_2 = 110, \\ a_2 = 250, & b_3 = 100, \\ a_3 = 200, & b_4 = 120, \\ b_1 = 130. & b_5 = 190. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \end{pmatrix}.$$

3.8.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 300, & b_2 = 195, \\ a_2 = 200, & b_3 = 200, \\ a_3 = 350, & b_4 = 140, \\ b_1 = 145. & b_5 = 170. \end{array} \qquad T = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \end{pmatrix}.$$

3.9.

$a_1 = 200,$ $b_2 = 135,$

$a_1 = 250,$ $b_3 = 120,$

$a_3 = 300,$ $b_4 = 150,$

$b_1 = 135.$ $b_5 = 270.$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 4 & 8 & 13 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.10.

$a_1 = 270,$ $b_2 = 200,$

$a_3 = 330,$ $b_3 = 150,$

$a_3 = 350,$ $b_4 = 220,$

$b_1 = 210.$ $b_5 = 170.$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 4 & 11 & 2 & 10 \\ 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.11.

$a_1 = 200,$ $b_2 = 100,$

$a_2 = 200,$ $b_3 = 100,$

$a_3 = 250,$ $b_4 = 130,$

$b_1 = 140.$ $b_5 = 120.$

$$T = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 35 & 31 & 29 \\ 35 & 42 & 33 & 32 & 39 \\ 22 & 23 & 25 & 32 & 35 \end{pmatrix}.$$

3.12.

$a_1 = 250,$ $b_2 = 325,$

$a_2 = 450,$ $b_3 = 125,$

$a_3 = 200,$ $b_4 = 100,$

$b_1 = 250.$ $b_5 = 100.$

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 70 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.13.

$a_1 = 225,$ $b_2 = 190,$

$a_2 = 175,$ $b_3 = 80,$

$a_3 = 200,$ $b_4 = 130,$

$b_1 = 100.$ $b_5 = 100.$

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.14.

$a_1 = 210,$ $b_2 = 220,$

$a_2 = 450,$ $b_3 = 200,$

$a_3 = 290,$ $b_4 = 170,$

$b_1 = 150.$ $b_5 = 210.$

$$T = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 28 & 27 & 30 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 47 \\ 19 & 27 & 32 & 32 & 20 \end{pmatrix}.$$

3.15.

$a_1 = 330,$
$a_2 = 450,$
$a_3 = 270,$
$b_1 = 220.$

$b_2 = 230,$
$b_3 = 200,$
$b_4 = 210,$
$b_5 = 190.$

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \\ 37 & 30 & 15 & 19 & 37 \end{pmatrix}.$$

3.16.

$a_1 = 270,$
$a_2 = 420,$
$a_3 = 330,$
$b_1 = 210.$

$b_2 = 230,$
$b_3 = 200,$
$b_4 = 210,$
$b_5 = 130.$

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \\ 36 & 30 & 15 & 19 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

3.17.

$a_1 = 300,$
$a_2 = 250,$
$a_3 = 300,$
$b_1 = 250.$

$b_2 = 190,$
$b_3 = 150,$
$b_4 = 130,$
$b_5 = 130.$

$$T = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.18.

$a_1 = 250,$
$a_2 = 300,$
$a_3 = 310,$
$b_1 = 260.$

$b_2 = 190,$
$b_3 = 150,$
$b_4 = 130,$
$b_5 = 130.$

$$T = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.19.

$a_1 = 300,$
$a_2 = 320,$
$a_3 = 230,$
$b_1 = 190.$

$b_2 = 160,$
$b_3 = 120,$
$b_4 = 180,$
$b_5 = 200.$

$$T = \begin{pmatrix} 32 & 31 & 22 & 20 & 25 \\ 20 & 11 & 19 & 18 & 18 \\ 26 & 30 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

3.20.

$a_1 = 260,$
$a_2 = 290,$
$a_3 = 300,$
$b_1 = 140.$

$b_2 = 150,$
$b_3 = 125,$
$b_4 = 215,$
$b_5 = 220.$

$$T = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 23 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 11 & 6 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.21.

$a_1 = 200,$
$a_2 = 350,$
$a_3 = 300,$
$b_1 = 170.$

$b_2 = 140,$
$b_3 = 200,$
$b_4 = 195,$
$b_5 = 145.$

$$T = \begin{pmatrix} 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.22.

$a_1 = 290,$
$a_2 = 260,$
$a_3 = 300.$

$b_1 = 140,$
$b_2 = 200,$
$b_3 = 190,$
$b_4 = 150,$
$b_5 = 170.$

$$T = \begin{pmatrix} 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.23.

$a_1 = 140,$
$a_2 = 210,$
$a_3 = 100,$
$b_1 = 100.$

$b_2 = 140,$
$b_3 = 75,$
$b_4 = 60,$
$b_5 = 75.$

$$T = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 15 & 23 & 23 & 19 & 17 \\ 13 & 21 & 24 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.24.

$a_1 = 150,$
$a_2 = 200,$
$a_3 = 100,$
$b_1 = 90.$

$b_2 = 150,$
$b_3 = 75,$
$b_4 = 60,$
$b_5 = 75.$

$$T = \begin{pmatrix} 13 & 21 & 24 & 13 & 12 \\ 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 15 & 23 & 23 & 19 & 17 \end{pmatrix}.$$

3.25.

$a_1 = 280,$
$a_2 = 440,$
$a_3 = 330,$
$b_1 = 180.$

$b_2 = 210,$
$b_3 = 200,$
$b_4 = 240,$
$b_5 = 220.$

$$T = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 21 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

IV -- БОБ

Бутун сонли программалаш

Бизга берилган бўлсин куйидаги $n-$ноъмалумли $m-$та чизикли тенгламалар системаси

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \cdots x_n \geq 0$$

ва максадли функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Бу ерда $x_i -$ишлаб чикарилган махсулотлар бирлиги. x_i $-$ўзгарувчилар хар кандай мусбат сон бўлиши мумкин.

Чизикли программалашнинг кўпгина масалаларини ечганда x_i $-$ўзгарувчиларга бутун сонли бўлиш шарти куйилади. Бундай масалаларга бутун сонли программалаш масалалари деб аталади. Бутун сонли программалаш, материалларни оптимал бичиш, транспорт масалаларини маршурутларга оптимал таксимлаш, бўлинмайдиган махсулот ишлаб чикарувчи корхоналарнинг ишини оптимал планлаштириш каби масалаларни ечишда кўлланилади. Юкоридагиларни яхши англаб олиш учун куйидаги масалани куриб чикамиз.

1. Маркетолог хакидаги масала.

Фараз килайликки A_i шахарда яшовчи маркетолог $n-$та $A_1, A_2, ..., A_n$ шахарларда бир мартадан бўлиб, минимал вакт ичида A_i шахарга кайтиб келиши керак бўлсин. Бу масаланинг математик моделини тузиш учун савдогарнинг A_i шахардан A_j шахарга бориши учун сарф килган вактини $t_{ij} (i, j = \overline{1,n})$ билан хамда унинг хар бир A_i шахардан A_j шахарга бориши кўрсатгичини x_{ij} билан белгилаб олсак, у вактда маркетолог A_i шахардан A_j шахарга борса x_{ij}=1, бормаса x_{ij}=0 -- га тенг.

Юкоридаги масаланинг математик моделини куйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (j = \overline{1,n}). \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (i = \overline{1,n}). \quad (4.2)$$

$$x_{ij}=0, \text{ ёки } x_{ij}=1. \quad (4.3)$$

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}. \quad (4.4)$$

Бутун сонли программалаш масалаларидаги x_{ij} -- ларнинг хаммаси учун бутун бўлишлик шарти куйилса, бундай масалалар тўлик бутун сонли программалаш масалалари, агар уларнинг маълум бир кисми учун бу шарт кўйилса, кисман бутун, сонли программалаш масалалари дейилади.

Агар (4.3) кўринишдаги шартлар бутун сонли программалаш масалаларидаги ўзгарувчиларга кўйилган бўлса, у вактда бундай масалага Буль программалаш масаласи дейилади.

Бутун сонли программалаш масалаларни ечиш учун унинг хусусиятларини этиборга олувчи усуллар яратилган. Улардан бири америка олими Р. Гомори томонидан яратган бўлиб оптимал ечимни берувчи энг аник усул хисобланади.

Р. Гомори усул куйидагидан иборат.

Олдин чизикли программалаш масаласи симплекс усул билан ечилади.

Агар $x_i (i = \overline{1,n})$ ечим бутун сонли бўлса, у бутун сонли программалаш масаласининг хам ечими бўлади.

Фараз килайликки p_{i-1} –чи масала симплекс усул билан ечилган ва унинг ечими x_{i-1} бутун бўлиш шартини каноатлантирмайди. Юкоридагиларни хисобга олиб куйидагиларни белгилаб олайлик:

$\{a\} - x_i = a$ ечимнинг каср кисми;

k –охирги симплекс жадвалдаги эркли ўзгарувчиларнинг индекси

$s - \{a_{s0}\}$ –ларнинг жадвалдаги энг каттаси жайлашган сатр.

У вактда Р. Гомори x_i номалумларнинг бутун бўлишлик шартини эътиборга олувчи ва "кесувчи тенглама" деб аталувчи кўшимча тенглама тузади.

Бу холда тўлик бутун сонли масалани ечиш учун Гоморининг I -- чи кесимини куйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

$$\{a_{s0}\} - \sum_{k} \{a_{sk}\} x_k \le 0. \qquad (4.5)$$

Кисман бутун сонли масалани ечиш учун Гоморининг II -- чи кесимини (бу кесимни тўлик бутун сонли масалани ечиш учун хам кўлласа бўлади) куйидаги ёзиш мумкин

$$\{a_{s0}\} - \sum \{a_{sk}\} x_k \le 0, \qquad (4.6)$$

бу ерда a_{sk} -- коэффициентлар куйидаги нисбатлардан топилади.

1) x_k –лар бутун сон бўлмаслиги талаб килинмаган холда

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, \ \text{агар} \quad a_{sk} \ge 0. \\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1-\{a_{so}\}}\{a_{sk}\}, \ \text{агар} \quad a_{sk} < 0. \end{cases}$$

2) x_k – ларга бутун сон бўлиши талаб килинган холда

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, \ \text{агар} \quad \{a_{sk}\} \le \{a_{so}\ \}, \\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1-\{a_{so}\}}(1-\{a_{sk}\}, \ \text{агар} \quad \{a_{sk} > \{a_{so}\}. \end{cases}$$

Тўлик ёки кисман бутун сонли масалаларни ечиш учун кетма - кет жадвалларни алмаштириш жараёнларни бажариш куйидаги тартибда амалга оширилади:

1) p_{i-1} масала ечилиб x_{i-1} оптимал ечимлар топилади:

2) Агар x_{i-1} ечимлар бутун сонли бўлса симплекс жадваллар тузиш тўхтатилади;

3) Агар p_{i-1} масалада x_{i-1} ечимлар бутун сонли бўлмаса, у вактда Гоморининг I – чи ёки II кесимлари тузилади;

4) p_{i-1} масалага 3) холдаги шартлар тўлдирилиб p_i масала тузилади ва
яъна 1) холни бажаришга тўђри келади.

§ 1. Тулик бутун сонли масалалар

1. Куйидаги шартларда бутун сонли масалани ечинг:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + y_1 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 = 6. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$$

хамма $x_k (k = 1{,}2)$ – бутун сон $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$ $F = x_1 + 4x_2 \to \max$.

Ечиш. Масалани дастлаб бутун сонли ечимлари бўлишини талаб килмасдан симплекс усул билан чикамиз.

1 -- чи симплекс жадвал

№	c_δ	Базисли ўзгарувчилар	Ўзгармаслар устуни a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	y_1	2	-1	2	1	0	1
2.	0	y_2	6	3	2			3
3.		F	$F = 0$	-1	-4	0	0	

2 -- чи симплекс жадвал

№	c_{δ}	Базисли ўзгарувчилар	Узгармаслар устуни a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	4	x_1	1	-1/2	1	1/2	0	
2.	0	y_1	4	2	0	-1	1	
3.		F	$F = 4$	-3	0	2	0	

3 -- чи симплекс жадвал

№	c_{δ}	Базисли ўзгарувчилар	Узгармаслар устуни a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	
2.	1	x_1	1	1	0	-1/4	1/4	
3.		F	$F = 7$	0	0	5/4	3/4	

3 – чи симплекс жадвалдан кўриниб турибдики $\overline{\overline{P}}$ масалани оптимал ечимлари x_1=1, x_2=3/2, y_1=0, y_2=0 тенг. Бу ечимлар ичида x_2=3/2 - каср сон. Шунинг учун юкоридаги 3 -- чи ва 4 -- холларни кўллаб $\overline{\overline{P_1}}$ чи масалани тузамиз. 3 – чи симплекс жадвалда ягона 1 -- сатрда каср ечимлар бор (1 чиси $-a_{i0}$, $s=1$).

У вактда Гоморининг биринчи кесимини куйдагича ёзамиз

$$\left\{\frac{3}{2}\right\}-\left(\left\{\frac{3}{8}\right\}y_2+\left\{\frac{1}{8}\right\}y_2\right)\le 0 \text{ ёки}$$

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{8}y_1+\frac{1}{8}y_2\right)\le 0.$$

Бу тенгсизликга базисли ўзгарувчи y_3 - ни киритиб куйидаги тенглама кўринишида ёзамиз.

$$\frac{3}{8}y_1+\frac{1}{8}y_2-y_3=\frac{1}{2}.$$

Бу тенгламани олдинги 2 – чи тенгламалар сафига бирлаштириб ёзсак, у вактда $\overline{P_1}$ - масала хосил бўлади.

Охирги симплекс жадвал $\overline{P_1}$ масаласи учун куйидаги кўринишда бўлади.

4 -- чи симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	Узгармаслар устуни a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1.	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	0	4	12
2.	1	x_1	1	1	0	-1/4	1/4	0	0	0
3.		y_3	1/2	0	0	3/8	1/8	-1	4/3	4
4.		F	$F=7$	0	0	5/4	3/4	0	0	0

$\frac{3}{8}y_1+\frac{1}{8}y_2-y_3=\frac{1}{2}-$тенгламада y_3 ўзгарувчи базисли ўзгарувчи бўлиши мумкин, лекин уни олдидаги коэффициенти манфий сон. Шунинг учун p_1-чи масала учун тузилган 4 – чи жадвалдаги ечимлар оптимал ечимлар бўла олмайди. (y_3=-1/2). Демак 4 -- чи симплекс жадвални яна алмаштириш (яхшилаш) керак.

4 - чи жадвални 3 - чи сатрини калитли сатр деб танлаб (3- чи ва 4 - чи шартларни кўллаб) $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$ топамиз. У вактда $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$ жойлашган учинчи устун калитли устун бўлади.

Агар бундай устун топилмаса, у вактда калитли устун деб танланган сатрдаги энг кичик элементга эга бўлган устун танлаб олинади (яъни $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$).

Бундан кейин y_3 ни базига киритиб 5 -- чи симплекс жадвални тузиш мумкин. Бу ерда танланган сатр ва устун юкоридаги талабга жавоб беради.

5 -- чи симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	Узгармаслар устуни a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	1		
2.	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3		
3.		y_1	4/3	0	0	1	1/3	-8/3		
4.		**F**	16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Бу жадвалдаги ечимлар хам оптимал ечимлар бўлиб куйидагиларга тенг;

x_1=4/3, x_2=1, y_1=4/3, y_2=0, y_3=0.

Лекин бу ечим хам бутун сонли эмас. Шунинг учун P_2 -- чи масалани тузишга киришамиз.

Мос кесимлар куйидагича бўлади.

$$\left\{\frac{4}{3}\right\}-\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}y_2+\left\{\frac{-2}{3}\right\}y_3\right)\le 0.$$

Бу ерда

$\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$ ва $\left\{\frac{-2}{3}\right\}=\frac{-2}{3}-\left[\frac{-2}{3}\right]=\frac{-2}{3}-(-1)=\frac{1}{3}$ бўлгани учун кесувчи тенгламанинг кўриниши куйидагича бўлади.

$$\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3-y_4=\frac{1}{3},$$

у вактда 5 -- чи жадвалдаги 4 -- чи сатрни бу тенгламага асосан ёзсак куйидаги жадвал хосил бўлади

5’ -- чи симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	Узгармаслар устуни	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
			a_{i0}	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	0	0	4	
2.	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	-1/3	0	4	1
3.	0	y_1	4/3	0	0	1	1/3	-8/3	0	1	
4.		y_4	1/3	0	0	0	1/3	1/3	-1		
5.		F	F=16/3	0	0	0	1/3	10/3			

Бу жадвалдан калитли устун, калитли сатр ва калитли сонни топиб алмаштирсак (яхшиласак) куйидаги жадвал хосил бўлади.

6 -- чи симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	Узгармаслар устуни	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
			a_{i0}	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	1	0		
2.	1	x_1	1	1	0	0	0	-1	1		
3.	0	y_1	1	0	0	1	0	-3	1		
4.		y_2	1	0	0	0	1	1	-3		

5.	Индекс сатри.	F	$F=5$	0	0	0	0	3	1		

Индекси сатрида хамма сонлар бутун сонлар бўлгани учун бу жадвал оптимал ечимни беради:

$x_1=1,\ x_2=1,\ y_1=1,\ y_2=1,\ y_3=0,\ y_4=0$ ва

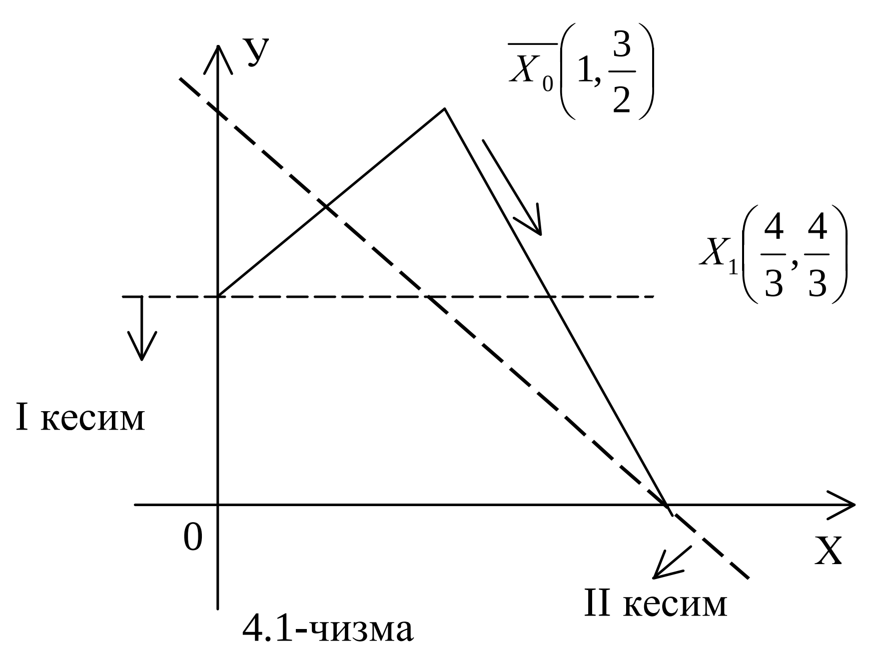
$f_{\max}=1x_1+4x_2+0\cdot y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3+0\cdot y_4=$

$=1\cdot 1+4\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=5.$

$f_{\max}=5.$

Агар индекс сатрида манфий сонлар бўлганда симплекс жадваллар тузиш давом эттирилarди.

Масалани геометрик изохи куйидаги кўринишда бўлади. Олдин P_0 масалани оптимал ечими шаклни чизамиз.



4.1-чизма

p_1 – чи масалани ечганда 1 -- чи кесимни куйидаги тенгсизлик оркали киритган эдик:

$\frac{3}{8}y_1+\frac{1}{8}y_2\geq\frac{1}{2}.$ Бу тенгсизликка дастлабки тенгсизликларни кўллаб y_1 ва y_2 ларни кискартирсак $x_2\leq 1$ келиб чикади. Шунинг учун бу тенгсизликка $x_2=1$ тўђри чизик келади. $x_2=1$ чизик бутун сонли бўлмаган оптимал ечимларни $x_0(1;\frac{3}{2})$ ажратади, лекин хамма бутун сонли ечимлар сохасини (0; 1), (1; 1), (1; 0), (2; 0) -- саклаб колади. P_1-чи масалада янги оптимал ечимлар: $\bar{x}_1(4/3, 1, 0, 4/3)$ сохаси хосил бўлади. Энди $\frac{1}{3}y_3+\frac{1}{3}y_4\geq\frac{1}{2}-II-$чи кесимни киритиб P_2-чи масалани тузамиз. Бу масаладан юкоридаги каби базисли ўзгарувчиларни кискартирсак $x_1=x_2\leq 2$ хосил бўлади. Янги соха бутун сонли оптимал соха бўлади (чизма 4.1 – га каранг).

Топшириклар

Куйидаги масалаларнинг тўлик бутун сонли ечимларини топинг ва геометрик изохини (мумкин бўлган жойда) беринг (бу ерда $x_k\geq 0$).

4.1.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2\geq 6, \\ 3x_1+2x_2\leq 36, \\ x_2\leq 13. \end{array}\right\}$$
$$F=3x_1+3x_2\to\max.$$

4.2.

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2\leq 8, \\ x_1+4x_2\leq 10. \end{array}\right\}$$
$$F=3x_1+4x_2\to\max.$$

4.3.

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2\leq 5, \\ x_1+4x_2\leq 2. \end{array}\right\}$$
$$F=x_1+x_2\to\max.$$

4.4.

$$\left.\begin{array}{l} x_1+3x_2+x_3=12, \\ 3x_1-8x_2+x_4=24. \end{array}\right\}$$
$$F=x_1\to\max.$$

4.5.

4.6.

$$\left.\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3=9,\\&-4x_1+7x_2+x_4=4,\\&5x_1-6x_2+x_5=6.\end{aligned}\right\}$$
$$F=x_1\to\max.$$

$$\left.\begin{aligned}&x_1-2x_2+x_4=3,\\&x_2+x_3-2x_4=5,\\&3x_1+x_4+x_5=4.\end{aligned}\right\}$$
$$F=2x_1-2x_2+3x_3-3x_4\to\max.$$

4.7.

$$\left.\begin{aligned}&x_1+2x_2-x_3+3x_4=6,\\&x_2+x_3-x_4=4,\\&2x_1+x_3+x_4=8.\end{aligned}\right\}$$
$$F=x_1-x_2+x_3-x_4\to\max.$$

4.8.

$$\left.\begin{aligned}&x_1+x_2+x_3+x_4=5,\\&x_2+x_3+x_4-x_5=2,\\&x_3-x_4+x_5=1.\end{aligned}\right\}$$
$$F=x_1+2x_2+x_3\to\min.$$

4.9.

$$\left.\begin{aligned}&2x_1+x_2+x_3=5,\\&2x_1+3x_2+x_4=9.\end{aligned}\right\}$$
$$F=2x_1+2x_2+10\to\max.$$

4.10.

$$\left.\begin{aligned}&2x_1+x_2+x_3=6,\\&2x_1+3x_2+x_4=9.\end{aligned}\right\}$$
$$F=x_1+x_2\to\max.$$

4.11.

$$\left.\begin{aligned}&x_1+x_4+6x_6=9,\\&3x_1+x_2-4x_3+2x_6=2,\\&x_1+2x_2+x_5+2x_6=6.\end{aligned}\right\}$$
$$F=x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6\to\min.$$

4.12.

$$\left.\begin{aligned}&3x_1+2x_2+x_3=8,\\&x+4x_2+x_4=10.\end{aligned}\right\}$$
$$F=3x_1+4x_2.$$

§ 2. Кисман бутун сонли программалаш

Куйида шартларда кисман бутун сонли масалани ечинг.

$$\left.\begin{aligned}&3x_1+x_2\le 9,\\&0{,}16x_1+x_2\le 1{,}9.\end{aligned}\right\}\qquad f=x_1+8x_2\to\max.$$
$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0$$

ва x_k $-$бутун сонли $(k=1,2,.,)$.

Ечиш. Бу масала тўлик бутун сонли масала эмас, чунки системадаги иккинчи тенгсизликни каноник кўринишга келтирсак куйидаги тенглама хосил бўлади $0{,}16x_1+x_2+y_2=1{,}9$. Бу тенгламада y_2 нинг бутун кийматларида x_1 ва x_2 бутун сонли кийматларни кабул килмайди. Шунинг учун бу масалага кисман бутун сонли масала дейилади. Масалани ечиш учун олдин P_0 масалани симплекс усулни кўллаб ечамиз.

Биринчи симплекс жадвал

№	$\overline{C}_\sigma$	Базисли ечимлар	Узгармаслар устуни a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	y_1	9	1	1	1	0	9
2.	0	y_2	1,9	0,16	1	0	1	1,9
3.	индекс сатри		$F=0$	-1	-8	0	0	

Бу жадвалнинг индекс сатрида манфий сонлар бўлгани учун симплекс услубни кўллаб иккинчи симплекс жадвални тузамиз.

Иккинчи симплекс жадвал.

№	c_δ	Базисли ечимлар	Узгармас устуни a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	y_1	7,1	2,84	0	1	-1	
2.	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	
3.	индекс сатри	F	$F=15{,}2$	0,28	0	0	8	

Иккинчи сатрда манфий сонлар йўк. Демак 1 – чи алмаштиришдан (яхшилашдан) кейин оптимал ечимлар куйидагидан иборат

x_1=0, x_2=1,9; y_1=7,1, y_2=0.

Оптимал ечим ичида y_1=7,1 бутун сонли ечим эмас. Шунинг учун p_1-чи масалани тузиш керак. (6.6) – чи формуладан фойдаланиб 2 – чи сатрга асосланиб (*s*=2) P_1-чи масала учун Гоморининг кесимини тузамиз. У вактда жадвалдан куйидаги хосил бўлади

$$\{a_{20}\}-(a_{21}x_1+a_{24}y_2)\geq 0.$$

Юкорида кўрдикки x_1 -- бутун сонли ўзгарувчи ва $\{a_{21}\}<\{a_{20}\}$ бўлгани учун, $\{a_{21}\}=\{a_{21}\}$=0,16. (4.7)

(4.7) – чи тенгликдан фойдаланиб $a_{24}-$ни топамиз (1 – чи кесимдан фойдаланиб).

y_2 -- га бутун сонли бўлиши талаб килинмагани ва $a_{24}>0$ бўлгани учун юкоридаги кесимдан фойдалансак, бу кесим куйидагича бўлади: $a_{24}=1,\ 0{,}16x_1+y_2-y_3=0{,}9.$

Бу тенгламани юкоридаги жадвалга киритсак p_1-чи масала чикади.

P_1 –чи масалада симплекс жадвалларни икки марта алмаштиргандан кейин оптимал ечим куйидагича бўлади:

x_1=8/3, x_2=1; y_1=0, y_2=71/150. Оптимал ечим ичида 1 чи сатрдаги x_1=8/3 бутун сон эмас. Шунинг учун юкоридаги коидалардан фойдаланиб янги кесимни тузиб бутун оптимал ечимни топамиз

P_1 –чи масала учун тузилган симплекс жадваллар куйидагича:

1 -- чи симплекс жадвал

№	$\overline{C}_\sigma$	Базисли ўзгарувчилар	Узгармас устуни a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	0	y_1	7,1	2,84	0	1	-1	0	0
2.	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	0	1,9
3.	0	y_3	0,9	0,16	0	0	1	-1	0,16
4.	индекс сатри		F =15,2	0,28	0	0	8	0	

2 -- чи симплекс жадвал

№	$\overline{C}_\sigma$	Базисли ўзгарувчилар	Ўзгармаслар устуни a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	0	y_1	8	3	0	1	0	-1	8/3
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0
3.	0	y_2	0,9	0,16	0,16	0	0	1	90/16
4.	индекс сатри		F =8	-1	0	0	0	8	

3 -- чи симплекс жадвал

№	$\overline{C}_\sigma$	Базисли ўзгарувчилар	Ўзгармаслар устуни a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	-1/3	
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	
3.	0	y_2	71/150	0	0	-4/75	1	71/75	

4.	индекс сатри	F	F =32/3	0	0	1/3	0	23/3	

3 – чи жадвалнинг 1 – чи сатридан кўринадики x_1=8/3 оптимал ечим бутун сонли эмас.

Шунинг учун 1 – сатрга асосланиб Гоморининг кесимини тузамиз

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} - (a_{13}y_1 + a_{15}y_3) \geq 0, \text{ бу ерда}$$

$$a_{12} = \frac{1}{3}, \quad a_{15} = \frac{\left\{\frac{8}{3}\right\}}{1 - \left\{\frac{8}{3}\right\}}\{a_{15}\} = \frac{2}{3}.$$

Юкоридагилардан куйидаги тенглама келиб чикади.

$$y_1 + 2y_3 - y_4 = 2.$$

Бу тенгламани 3 – чи жадвалга киритсак P_2 масала хосил бўлади.

P_2 -- чи масалани симплекс усул билан ечамиз.

1 -- чи симплекс жадвал

№	$\overline{C}_\sigma$	Базис ўзгарувчилар	Ўзгармас-лар устуни a_{i0}	1	8	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1.	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	0	0	8
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	0	0	0
3.		y_3	71/150	0	0	-4/75	1	71/75	0	0
4.		y_4	2	0	0	1	0	2	-1	2
4.	Инд. сатр		F =32/3	0	0	1/3	0	23/3	0	0

2 -- чи симплекс жадвал

№	$\overline{C}_\sigma$	Базис ўзгарувчилар	Ўзгармаслар устуни a_{i0}	1	8	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1.	1	x_1	2	1	0	0	0	-1	1/3	0

2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0	0
3.		y_3	0,58	0	0	0	1	0,84	-4/75	0
4.		y_4	2	0	0	1	0	2	0	0
4.	Инд. сатр		F =10	0	0	0	0	7	1/3	0

Иккичи симплекс жадвалдан кўринадики кисман оптимал ечимлар куйидагига тенг.

x_1=2, x_2=1 y_3=0,58, y_4=2, y_1=0, y_2=0.

Бу ечим ичида y_3=0,58, лекин бу ечимни хам тўлик бутун сонга келтириш мумкин. Хусусан системадаги 2 – чи тенгсизликни 100 га кўпайтириб базисли ўзгарувчи киритсак куйидаги тенглама хосил бўлади. $16x_1 + 100x_2 + y_3 = 190$. Бу тенгламадан кўриниб турибдики y_3, бутун бўлганида x_1 ва x_2 лар бутун кийматларида бутун киймат кабул килиши мумкин.

Топшириклар.

Куйидаги шартларда кисман бутун сонли масалани ечинг ($x_k \geq 0$ шарт бажарилганда).

4.13.

$$\left.\begin{aligned} -2{,}9x_1 + 6x_2 \leq 17{,}4, \\ 3x_1 - x_2 \leq 1. \end{aligned}\right\}$$

x_1 ва x_2 бутун сон.,

$F = 6x_1 + x_2 \to \max$.

4.14.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 24. \end{aligned}\right\}$$

x_1 бутун сон.,

$F = x_1 \to \max$.

4.15.

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5x_1 + x_2 \leq 1{,}75, \\ x_1 + 0{,}3x_2 \leq 1{,}5. \end{aligned}\right\}$$

x_1 ва x_2 бутун сон.,

$F = 0{,}25x_1 + x_2 \to \max$.

4.16.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4. \end{aligned}\right\}$$

x_2 бутун сон.,

$F = x_1 + x_2 \to \max$.

4.17

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 3{,}5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1{,}5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4. \end{aligned}\right\}$$

x_2 бутун сон.,

$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$.

V БОБ

Параметрли программалаш

Халк хўжалигини бошкариш ва режалаштириш жараёнида иктисодда куйидаги хусусиятларга эга булган масалаларга дуч келади:

1) Изланаётган микдорларнинг жуда кўп параметрларга бођликлиги.
2) Ечилаётган масала чексиз ечимга эга бўлиб, улардан оптимал ечимини танлаб олиш.

Оптималаштириш масалаларини чизикли программалаш усуллари билан тўлик ечиш учун бу масалаларда катнашаётган коэффициентлар аник кийматларни кабул килади деб фараз килинади. Лекин амалда кўпчилик масалаларда бу коэффициентларнинг такрибий кийматлари ёки уларнинг мавжуд бўлиш оралиђи маълум бўлади. Шунинг учун чизикли программалаш масаласининг оптимал ечими хар бир катнашаётган коэффициентнинг мавжуд бўлиш оралиђида ўзгаришига канчалик бођликлигига, яъни масаладаги коэффициентларнинг ўзгариши унинг ечимлар тўпламига кандай таъсир килишини аниклаш масаласи талаб этилади.

Ана шундай кўйилган масалаларни хал килиш параметрик программалашнинг предметини ташкил этади.

§ 1. Параметрик программалаш масалаларининг иктисодий ва геометрик талкини

Чизикли программалашнинг асосий масаласини кўриб чикайлик

$$AX = B, \text{ бу ерда } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$X \geq 0, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad F(X) = CX \to \max.$$

Келтирилган масалада A матриցанинг a_{ij} элементлари, B ва C векторларнинг таркибий кисмлари кандайдир t параметрга бођлик ўзгариши мумкин. Бундай масалаларга параметрик программалаш масалалари дейилади.

Агар факат C векторнинг таркибий кисмлари t параметрга бођлик бўлса, яъни $C' = C' + C''t,\qquad t \in [\alpha, \beta]$ берилган масала максад функцияси параметрга бођлик масала дейилади.

Агар B векторнинг таркибий кисмлари t параметрга бођлик бўлса, яъни $B = B' + tB'',\qquad t \in [\alpha', \beta']$ у вактда бу масалага озад хади параметрга бођлик бўлган масала дейилади. Бу ерда $\alpha, \beta,\quad \alpha', \beta'$ ихтиёрий хакикий сонлар.

Демак t параметрнинг ўзгариш сохасида F - максад функциянинг максимум (минимум) кийматини топиш керак.

Агар бордию максадли функциянинг коэффициентлари ва озод хаднинг таркибий кисмлари t -- параметрга чизикли бођлик бўлса, у вактда куйидаги шартларда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b'_i + b''_i t \quad (i = \overline{1,m}),\quad (5.1)$$

$$X_i \geq 0,\quad (i = \overline{1,n}).\qquad (5.2)$$

Максад функцияси

$$F = \sum_{i=1}^{n} (c'_i + c''_i t) x_i \qquad (5.3)$$

нинг максимум (минимум) кийматини $t \in [a, b]$ ораликда топиш керак.

Юкорида курилган масалаларни умумлаштирувчи масалага параметрик программалашнинг умумий масаласи дейилади. Бошкача айтганда

Куйидаги шартларда

$$\sum_{i=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij} t) x_i = b'_j + b''_j t \quad (j = \overline{1,m})$$

$$X_j \geq 0,\quad (i = \overline{1,n})$$

t нинг $[\alpha; \beta]$ ораликда ўзгариш сохасида $F = \sum_{i=1}^{n} (c'_i + c''_i t) x_i$ нинг максимум (минимум) кийматини топишга параметрик программалашнинг умумий масаласи дейилади.

Юкоридаги каби масалаларни чизикли программалаш усуллари билан ечиш мумкин.

Келгусида бундай масалаларни тўла ўрганамиз.

Энди (5.1) – (5.3) масаланинг геометрик талкинини кўрамиз.

Фараз килайликки (5.1) системанинг мусбат ечимлар тўплами (каварик ечимлар тўплами: кўп бурчак, кўпёкли – учларининг координаталари тўплами) бўш тўплам бўлмасин ва бу нукталар сони бирдан ортик бўлсин. У вактда берилган t параметрнинг $[\alpha, \beta]$ да жойлашган каварик тўпламдаги кўпёклининг учларини координаталарида

(5.3) максадли функцияни максимум кийматга эриштирадиган нуктанинг координаталарини топишга тўђри келади.

Бу нуктани топиш учун t га $t = t_0$ киймат бериб масалани чизикли программалашнинг геометрик услуби билан ечамиз. Бу ерда икки хил хол бўлиши мумкин:

1. Кўпёкли учларини координаталарини биронтасида $F-$оптимал киймат кабул килади.
2. $t = t_0$ -- да ечиш мумкин бўлмаслиги аникланади.

Агар биринчи шарт бажарилса у вактда $F-$максадли функцияни максимум кийматга эга бўладиган нуктани топамиз.

Энди t ни янги кийматини $t = t_1$ кийматини оламиз ва яъна юкоридаги каби ечишни давом эттирамиз. Чекли кадамлардан кейин t параметрни $[\alpha, \beta]$ кийматларида $F-$максадли функцияни оптимал режаси топилади.

Юкоридаги коида ва формулалардан фойдаланиб куйидаги масалаларни ечамиз.

Масала 5.1. Корхонада икки тур махсулот ишлаб чикариш учун уч хил хом ашё ишлатилади. Хар бир ишлаб чикарилган махсулотга кетадиган хомашё меъёри ва хом ашё захираси куйидаги жадвалда берилган.

Хом ашё хиллари	Хар бир ишлаб чикарилган буюмга кетадиган хом ашё меъёри		Хом ашё захираси
	1 тур	2 тур	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Шу билан бирга биринчи тур махсулотларни реализация килганда нархи 2 сўмдан 12 сўмгача, иккинчи хил махсулотларни реализация килганда нархи 13 сўмдан то 3 сўмгача ўзгариб, бу ўзгаришлар куйидаги тенгликлар билан аникланади $c_1 = 2 + t,\ c_2 = 13 - t,\quad 0 \le t \le 10.$

Ишлаб чикарилган махсулотларнинг нархи юкоридаги кўрсатилган ораликларда ўзгарганда ишлаб чикаришдан максимум даромад олиш режасини топинг?

Ечиш. Фараз килайликки биринчи тур махсулот x_1 бирлик, иккинчи тур махсулот x_2 бирлик ишлаб чикариш керак бўлсин. У вактда $t \in [0, 10]$ораликда ўзгарганда куйидаги шартларда

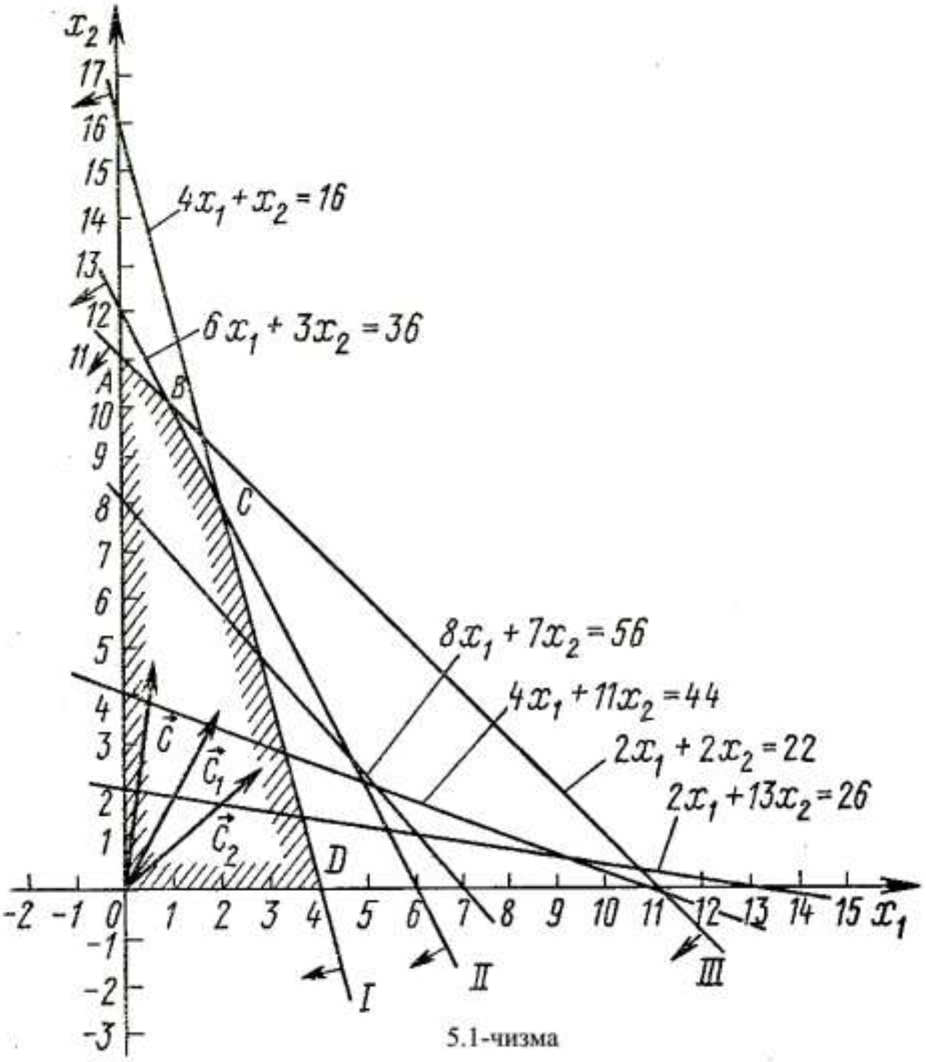
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36. \end{cases} \qquad (5.4)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (5.5)$$

$$F(x_1,x_2)=(2+t)x_1+(13-t)x_2 \qquad (5.6)$$

(5.6) – нинг максимум кийматини топиш талаб этилади. Энди (5.4) -- (5.6) масаланинг ечимини топиш учун (5.4) системага асосланиб ечимлар тўпламини изохловчи кўпбурчак шаклини чизамиз. (Чизма 5.1.)

Агар $[0,10]$ ораликда t ни кийматини $t=0$ деб олиб $2x_1+13x_2=k$, (бу ерда, $k=0,1,2,...,26)$ шаклини чизсак ва уни $\overline{C}(2;13)$ вектор бўйича *OABCD* кўпбурчак томон харакатлантирсак бу тўђри чизик *A*(0;11) нуктада кўпбурчакка уринади.



5.1-чизма

Шундай килиб $t=0$ бўлганда биринчи кадамда $x_1=0, \quad x_2=11$ оптимал ечим бўлади.

Бу ечимга асосан биринчи тур махсулот нархи $2+0=2$ сўмни, иккинчи тур махсулот нархи эса 13 – 0=13 сўмни ташкил этади. Оптимал режада максад функциясининг киймати.

$F_{1\max}=(2+0)\cdot 0+(13-0)\cdot 11=13\cdot 11=146$ сўм

бўлади.

Агар $t=2$ деб олсак сатх чизиђи куйидаги кўринишда бўлади.

$(2+2)x_1+(13-2)x_2=4x_1+11x_2=k, \quad k-$га кийматлар бериб $\overline{C}(4;11)$ вектор бўйича силжитсак $k=44$ бўлганда $OABCD$ кўпбурчакка $A(0;11)$ нуктада уринади. Демак A нуктада $F-$максадли функция максимум кийматга эга бўлади ва $x_1=0, \quad x_2=11-$лар оптимал ечимлар бўлади. Бу ечимга асосан биринчи тур махсулот нархи 2 + 2=4 сумни, иккинчи тур махсулот нархи 13 – 2=11 сўмни ташкил этади.

Демак $F_{\max}=(2+2)\cdot 0+(13-2)\cdot 11=121$ сўм.

Юкоридаги 5.1-чизмадан кўриниб турибдики махсулотларни ишлаб чикариш $t-$нинг хар кандай кийматида оптимал бўлади, токи тўђри чизик $2x_1+2x_2=22$, $\dfrac{2+t}{2}=\dfrac{13-t}{2}$ тўђри чизикга параллел бўлса. Бу шарт бажарилади агарда $t=5{,}5-$ бўлса, $t-$нинг бу кийматида AB кесманинг исталган нуктаси оптимал режани беради.

Шундай килиб $t-$нинг куйидаги ораликдаги $t\in[0;5{,}5]$ барча кийматларида $x_1=0, \quad x_2=11$ оптимал ечим бўлади ва максадли функциянинг максимум киймати

$F_{1\max}=143-11t$ тенг.

Энди $t-$нинг кийматини 5,5 дан катта килиб олсак, масалан $t=6$ бўлганда берилган масаланинг ечимини топиш учун $(2+6)x_1+(13-6)x_2=k$ тўђри чизикни тузамиз (бу ерда $k=0{,}1{,}2{,}...$).

Мисол учун $k=56$ бўлганда бу тўђри чизик куйидаги кўринишда бўлади. $8x_1+7x_2=56$.

Бу тўғри чизикни $\overline{C}(8;7)$ вектор бўйича силжитсак $OABCD$ кўпбурчак билан энг четки $B(1;10)$ нуктада уринади. Шундай килиб $t=6$ бўлганда учинчи кадамда $x_1 = 2+6=8$ сўм, $x_2 = 13-6=7$ сўм оптимал ечим бўлади ва ишлаб чикариш натижасида максад функция

$F_{\max} = 8\cdot 1 + 7\cdot 10 = 78$ сўмга тенг.

5.1-чизмадан кўриниб турибдики $B(1,10)$ нуктанинг координаталари $t>5{,}5$ кийматида оптимал ечим бўлади, токи $2x_1 + 13x_2 + (x_1 - x_2)t = k$ тўғри чизик $6x_1 + 3x_2 = 36$ тўғри чизикга параллел бўлгунча.

Бу шарт бажарилади агар $\frac{2+t}{6} = \frac{13-t}{3}$ бўлса, яъни $t=5{,}5-$ га тенг булганда $t-$нинг бу кийматида AB кесманинг исталган нуктаси оптимал режани беради.

Шундай килиб $t\in[5{,}5;8]$ ораликда $t-$нинг барча кийматларида $x_1 = 1;$ $x_2 = 10$ ечим оптимал режа бўлади. Шу билан бирга $t\in[5{,}5;8]$ оралиғида AB кесманинг барча координаталари оптимал ечим бўлади, яъни $F_{2\max} = (2+t)1 + (13-t)10 = 132-9t$ га тенг.

Юкоридаги каби $t\in[8;10]$ оралиғида $x_1 = 2;$ $x_2 = 8$ оптимал ечимни топамиз. (5.1 –чизмага каранг). Демак биринчи тур махсулотнинг бахоси 10 сўмдан 12 сўмгача, иккинчи тур махсулотнинг бахоси 3 сўмдан 5 сумгача ўзгаради, биринчи тур махсулотлар 2 бирлик, иккинчи тур махсулотлар 12 бирлик ишлаб чикарилади.

Шу билан бирга $t\in[8;10]$ ораликдаги кийматларида ишлаб чикарилган махсулотларнинг нархи

$F_{3\max} = 108-6t$ га тенг.

Шундай килиб масалани геометрик талкинидан куйидаги оптимал ечимларни топдик:

1) $t\in[0;5{,}5]$ ораликда $x_1 = 0;$ $x_2 = 11,$ $F_{1\max} = 143-11t;$

2) $t\in[5{,}5;8]$ ораликда $x_1 = 1;$ $x_2 = 10,$ $F_{2\max} = 132-9t;$

3) $t\in[8;10]$ ораликда $x_1 = 2;$ $x_2 = 8,$ $F_{3\max} = 108-6t.$

§ 2. Максад функцияси параметрга боғлик бўлган масалаларни ечиш

§ 1 да кўриб чикилган (5.1) – (5.3) масалалар берилган бўлсин. $[\alpha;\beta]$ ораликда t параметрни биронта $t=t_0$ кийматни олиб, бу масалани симплекс усул – билан ечамиз. Бу ерда икки хол бўлиш мумкин:

1) $t=t_0$ нуктада масала оптимал режага эга бўлади;

2) $t=t_0$ масалани ечиш мумкин эмаслиги аникланади.

Фараз килайликки биринчи хол бажарилган бўлсин. У вактда охирги симплекс жадвални $(N+1)$ (индекис сатридан) сатридан $J_i(t_0)=J'_i+t_0 \quad J''_i$ ни ёзиб оламиз. Бундан куйдагиларни топамиз:

$$T_0=\begin{cases}\max\left(-\dfrac{J'_i}{J''_i}\right), \text{ агар } J''_i>0 \\ -\infty, \qquad \text{агар } J''_i\le 0.\end{cases} \quad \text{мавжуд бўлса}$$

$$T=\begin{cases}\min\left(-\dfrac{J'_i}{J''_i}\right), \text{ агар } J''_i<0 \\ \infty, \qquad \text{агар жами } J''_i\ge 0.\end{cases} \quad \text{мавжуд бўлса}$$

У вактда $T_0\le t\le T-$да берилган масала (барча t лар учун) $t=t_0$ кийматда бир хил оптимал режага эга бўлади.

Агар $t=t_0$ кийматда масалани ечиш мумкин бўлмаса ва охирги симплекс жадвални $N+1$ сатрида уни ечими $J_k=J'_k+t_0J''_k$, $(x_{ik}<0, \quad i=\overline{1,m})$ сонга тенг бўлса: У вактда:

1) $J''_k=0$ бўлганда берилган масалани исталган t учун ечиш мумкин эмас.
2) Агар $J''_k<0$ бўлса, берилган масалани $t<t_1=-\dfrac{j'_k}{j''_k}-$ ларнинг барчаси учун ечиш мумкин эмас.
3) Агар $J''_k>0$ бўлса, берилган масалани барча $t>t_1-$ лар учун ечиш мумкин эмас.
4) Биринчи кадамда t нинг ўзгариш сохасини аниклаймиз, юкоридаги кадамни $t\in[\alpha,\beta]$ ораликда t -- ни бошка кийматини олиб яъна симплекс услубни кўллаймиз.
5) Чекли алмаштиришлар натижасида масаланинг оптимал режасини топамиз ёки масалани ечиш мумкин эмаслигини аниклаймиз.

Масала 5.2. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=12,\\ x_1-x_2+x_4&=10,\\ -x_1+x_2+x_5&=6.\end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

$$x_1\ge 0,\, x_2\ge 0,\, x_3\ge 0,\, x_4\ge 0,\, x_5\ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=2x_1+(3+4t)x_2$ максадли функцияни (5.8).

$t\in(-\infty,+\infty)$ ораликда t нинг барча кийматлари учун максимум кийматини топинг.

Ечиш. Берилган ораликда t параметрнинг исталган кийматини олишимиз мумкин.

Олдин дастлабки берилганларга асосланиб биринчи симплекс жадвални тузамиз.

1 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	Узгармас коэффициентлар устуни	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_3	12	1	1	1	0	0
2.	0	x_4	10	1	-1	0	1	0
3.	0	x_5	6	-1	1	0	0	1
4.	индекс сатри		$F=0$	-2	$-3-4t$	0	0	0

Бу жадвалга асосланиб иккинчи симплекс жадвални тузамиз.

2 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	$C(t)$ Узгармас коэффициентлар устуни	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_3	6	2	0	1	0	-1
2.	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3.	$3+4t$	x_2	6	-1	1	0	0	1
4.	индекс сатри		$F=18+24t$	$-5-4t$	0	0	0	$3+4t$

2 – чи жадвални.

индекс сатрида манфий микдорлар бўлгани учун 3 – чи симплекс жадвални тузамиз.

3 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ўзгарувчилар	$C(t)$ Узгармас коэффициентлар устуни	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	3	1	0	1/2	0	-1/2
2.	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3.	$3+4t$	x_2	9	0	1	1/2	0	1/2
4.	индекс сатри		$F=33+36t$	0	0	$2{,}5+2t$	0	$0{,}5+2t$

Бу жадвалга $t=0$ кийматни индекс сатридаги t нинг ўрнига қўйсак x_1=3, x_2=9, x_3=0, x_4=0, x_5=0 оптимал ечим бўлади ва максадли функция $F_{1\max}=2\cdot3-(3+4\cdot0)\cdot9=6+27=33$ кийматга эга бўлади.

Энди F_1 нинг кийматига асосланиб t нинг кийматини топамиз.

3 – чи симплекс жадвалнинг индекс сатр элементлари мусбат бўлиши учун $2{,}5+2t\geq0$ ва $0{,}5+2t\geq0$ бўлиши керак. Бу тенгсизликлардан $t\geq-0{,}25$ келиб чикади. Демак $t\in[-0{,}25;+\infty)$ ораликда t нинг барча кийматларида x_1=3, x_2=9, x_3=0, x_4=0, x_5=0 ечим оптимал ечим бўлади ва $F_{1\max}=33+36t$ га тенг.

Иккинчи кадамда t -- нинг –0,25 – дан кичик кийматини олиб 3 – чи симппекс жадвалнинг индекс сатридан x_5 -- ни базисли ечимлар сафига ўтказамиз у вактда x_4 кўшимча ўзгарувчилар сафига ўтади. Натижада 4 – чи симплекс жадвал хосил бўлади (3 – чи симплекс жадвални алмаштиргандан кейин).

4 – симплекс жадвал

№	$c\delta$	Базисли ўзгарув-чилар устуни	$C(t)$ Узгармас коэффи-циентлар устуни	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	11	1	0	0,5	0,5	0
2.	0	x_5	16	16	0	0	1	1
3.	$3+4t$	x_2	1	0	1	0,5	-0,5	0
4.	индекс сатри		$F=25+4t$	0	0	$2{,}5+2t$	$-0{,}5-$	0

Бу жадвалга асосан x_1=11, x_2=1, x_3=0, x_4=0, x_5=16 ечим $2{,}5+2t\geq0$ ва $-0{,}5-2t\geq0$ бўлганда берилган масала учун оптимал ечим бўлади. Демак $t\in[-1{,}25;\ -0{,}25]-$да $F_{\max}=25+4t$ бўлади. Учинчи кадамда t < – 1,25 бўлганда x_3 индекс сатридаги киймати манфий бўлади. Шунинг учун симптекс усулни кўллаб 4- чи жадвалдан 5 – чи жадвалга ўтамиз.

5 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базисли ечимлар	$c(t)$ Узгармас коэффи-циентлар устуни	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	10	1	-1	0	1	0
2.	0	x_5	16	0	0	0	1	1

3.	0	x_3	2	0	2	1	-1	0
4.	индекс сатри		$F=20$	0	$-5-4t$	0	2	0

Бу жадвалда базис ечим: x_1=10, x_2=0, x_3=4, x_4=0, x_5=16 оптимал ечимлар бўлади ва $t\in(-\infty,\ \ -1{,}25]-$да $F_{3\max}=20;$

Шундай килиб юкоридаги жадваллардан куйидаги оптимал режани ёзиш мумкин:

1) $t\in[-\infty,\ \ -1{,}25]$ ораликда x_1=10, x_2=0, x_3=2, x_4=0, x_5=16. $F_{\max}=20;$
2) $t\in[-1{,}25,\ \ -0{,}25]$ ораликда x_1=11, x_2=1, x_3=0, x_4=0, x_5=16. $F_{\max}=25+4t;$
3) $t\in[-0{,}25,\ \ +\infty)$, ораликда x_1=3, x_2=9, x_3=0, x_4=16, x_5=0. $F_{\max}=33+36t.$

Масала 5.3. Корхонада уч тур махсулот ишлаб чикариш учун уч хил хомашё ишлатилади. Хар бир ишлаб чикарилган махсулот бирлигига кетадиган хомашё меъёри ва нархи, хомашё захираси куйидаги жадвалда берилган.

Хомашё хиллари	Хар бир ишлаб чикарилган буюмга кетадиган хомашё меёри		
	1 тур буюм	2 тур буюм	3 тур буюм
1	18	15	12
2	6	4	8
3	5	3	3
Хар бир ишлаб чикарилган махсулот нархи (сўм)	9	10	16
Хамошё захираси	360 кг	192 кг	180 кг

Шу билан бирга ишлаб чикарилган махсулотларни тўла сотиш таъмин этилган. Ишлаб чикаришни шундай режасини тузингки ишлаб чикарилган махсулотларни сотишга таркатганда киймат жихатидан максимум даромад олинсин. Шу билан бирга нарх- навонинг ўзгаришини хисоб олиб оптимал режанинг турђунлигини тахлили берилсин.

Ечиш. Фараз килайлик биринчи тур махсулот x_1 бирлик, иккинчи тур махсулот x_2 бирлик, учунчи тур махсулот x_3 бирлик ишлаб чикарилган керак бўлсин.

У вактда масаланинг математик моделини ушбу кўринишда ёзса бўлади.

Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} &18x_1+15x_2+12x_3\le 360,\\ &6x_1+4x_2+8x_3\le 192,\\ &5x_1+3x_2+3x_3\le 180.\end{aligned}\right\}\quad (5.9)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0 . \qquad (5.10)$$

$F=9x_1+10x_2+16x_3$ функция максимум кийматини топинг.

(5.9) тенгсизликлар системасига y_1, y_2, y_3 базис ўзгарувчилар киритиб тенгламалар системаси кўринишига келтирамиз.

$$\left.\begin{aligned} &18x_1+15x_2+12x_3+y_1\le 360,\\ &6x_1+4x_2+8x_3+y_2\le 192,\\ &5x_1+3x_2+3x_3+y_3\le 180.\end{aligned}\right\}\quad (5.11)$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,$$
$$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ge 0.$$

У вактда (5.10) максадли функция куйидаги кўринишни олади

$$F=9x_1+10x_2+16x_3+0\cdot y_1+0\cdot y_2+0\cdot y_3 \quad (5.12)$$

Бунда $x_1=0, x_2=0, x_3=0$ деб олсак $F=0$ бўлади.

(симплекс усулга каранг).

(5.11) – (5.12) ларга асосланиб биринчи симплекс жадвални тузамиз ва симплекс жадвалларни кетма – кет алмаштириб масаланинг оптимал ечимларини топамиз.

1 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базис ўзгарув-чилар	Узгармас коэффи-циентлар устуни	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	0	y_1	360	18	16	12	1	0	0
2.	0	y_2	196	6	4	8	0	1	0
3.	0	y_3	180	5	3	3	0	0	1
4.	индекс сатри		$F=0$	-9	-10	-16	0	0	0

2 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базис ўзгарув-чилар	Узгармас коэффи-циентлар устуни	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	0	y_1	72	9	9	0	1	-3/2	0
2.	16	x_3	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3.	0	y_3	180	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4.	индекс		$F=384$	3	-2	0	0	2	0

	сатри								

3 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базис ўзгарув-чилар	Узгармас коэффи-циентлар устуни	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	10	x_2	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2.	16	x_3	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3.	0	y_3	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4.	индекс сатри		$F = 400$	5	0	0	2/9	5/3	0

Бу жадвалдан кўриниб турибдики биринчи тур махсулотлар x_1=0 дона, иккинчи тур махсулотлар x_2=8 дона, учинчи тур махсулотлар x_3=20 дона ишлаб чикарилади.

Бу режа оптимал режа бўлиб даромад $F_{1\max} = 9\cdot 0 + 10\cdot 8 + 16\cdot 20 + 0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + 0\cdot 96 = 80 + 320 = 400.$ сўмни ташкил этади.

Энди юкоридаги оптимал режага асосланиб ишлаб чикарилган махсулот турлари бахосининг ўзгариш чегараларини аниклаймиз.

Олдин биринчи тур махсулотдан бошлаймиз. Фараз килайликки биринчи тур махсулотни киймати c_1 = 9 сўм эмас, яъни $c_1 = (9 + t_1)$ сўм бўлсин.

Бу ерда t_1 параметр $t_1 \in (9;\quad \infty)$ ораликда ўзгариши мумкин. у вактда юкоридаги оптимал режага асосланиб масаланинг шартига кўра $F = (9 + t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3$ максад функциясини максимум кийматини топиш талаб этилади. Максад функцияни бу кийматини хисобга олиб 3 – чи симплекс жадвални шундай ёзиш мумкин.

4 – симплекс жадвал

№	C_σ	Базис	Узгармас	9+t_1	10	16	0	0	0

		ўзгарув-чилар	коэффи-циентлар устуни	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	10	x_2	8	1	1	0	1/2	-1/6	0
2.	16	x_3	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3.	0	y_3	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4.	**Индекс сатри**		$F = 400$	5-t_1	0	0	2/9	5/3	0

Бу жадвалдан кўриниб турибдики x_1=0, x_2=8, x_3=20 ечимлар параметрик программалашнинг оптимал режаси бўлади, агарда $5-t_1 \geq 0$ бўлса ($t \leq 5$). Демак биринчи тур махсулотнинг киймати $c_1 \leq 14$ сўм бўлса, x_1=0, x_2=8, x_3=20 оптимал ечим бўлади. Ишлаб чикариш корхонаси биринчи тур махсулотнинг киймати 14 сўмдан ошмаслигидан манфаатдор эмас. Шу билан биринчи тур махсулотнинг киймати ўзгарганда, иккинчи ва учунчи тур махсулотнинг киймати берилган масаланинг шартларида ўзгармайди деб хисоблаймиз. Худди шундай иккинчи тур махсулотларнинг киймати $8 \leq c_2 \leq 20$ ораликда ўзгарганда масаланинг дастлабки шартларида иккинчи тур махсулотнинг киймати $x_2 = 8$ сўм, учунчи тур махсулотнинг киймати 20 сўмни ташкил этади ва бу режа оптимал режа бўлади. Лекин шуни хам айтиш керакким кўрсатилган режа оптимал бўлишига карамасдан c_2 $-$нинг хар хил кийматларида максадли функция хар хил кийматлар кабул килади. Агар учинчи тур махсулотнинг нархи $8 \leq c_2 \leq 20$ ораликда ўзгарганда хам иккинчи тур махсулотнинг нархи 8 сўм, учунчи тур махсулотни нархи 20 сўмни ташкил этади ва бу режа оптимал режа бўлади. Шундай килиб берилган масала максад функциянинг битта коэффициентига параметр киритиб оптимал режани сезгирлик даражасини тахлил килдик.

Худди шундай оптимал режани сизгирлик даражасини хамма тур махсулотларнинг кийматлари ўзгарганда хам тахлил килиш мумкин.

§ 3. Озод хадлари параметрга бођлик бўлган масалаларни ечиш

Берилган бўлсин (5.1) – (5.3) масала. Бу масалани ечиш учун юкоридаги каби t параметрнинг кийматини $t \in [\alpha, \beta]$ ораликда $t = t_0$ сонга тенглаштириб чизикли программалаш усулини кўллаб масаланинг ечилишини кўрсатамиз. Бу ерда хам икки хол бўлиши мумкин:

1) $t = t_0$ кийматда масала оптимал режага эга;

2) $t = t_0$ кийматда масалани ечиш мумкин эмаслиги аникланади.

Биринчи холда $T_0 \le t \le T$ ораликда t нинг барча кийматларида топилган режа оптимал режа бўлади, бу ерда

$$T_0 = \begin{cases} \max\left(-j'_i / j''_i\right), & \text{агар } j''_i > 0, \\ -\infty, & \text{агар } j''_i \le 0. \end{cases} \quad \text{мавжуд бўлса,}$$

$$T = \begin{cases} \min\left(-j'_i / j''_i\right), & \text{агар } j''_i < 0, \\ \infty, & \text{агар } j''_i \ge 0. \end{cases} \quad \text{мавжуд бўлса,}$$

J'_i ва J''_i лар куйидаги $J_i = J'_i + t_0\ J''_i$ оптимал режани таркибий кисмлари бўлиб, t_0 -- га бођликдир.

Агар $t = t_0$ кийматда берилган масалани ечиш мумкин бўлмаса, у вактда бу ерда икки хол бўлиши мумкин:

1) Максад функция оптимал режалар тўпламида чегараланмаган.

2) Берилган система мусбат ечимларга эга эмас.

Биринчи холда масала $t \in [\alpha, \beta]$ ораликда t нинг исталган кийматида ечимга эга эмас.

Иккинчи холда системанинг $t[\alpha, \beta]$ ораликда t нинг кайси кийматларида биргаликда мавжуд бўлмаган кийматларини аниклаймиз ва уни масаланинг аникланиш сохасидан чикариб ташлаймиз. Шундан кейин t -- ни бошка кийматини $t \in [\alpha, \beta]$ ораликда олиб яна симплекс усулни кўллаймиз ва чекли алмаштиришлар натижасида масаланинг оптимал режасини топамиз ёки масалани ечиш мумкин эмаслигини аниклаймиз.

Шундай килиб (5.1) – (5.3) масалани ечиш учун куйидаги жарёнларни амалга оширамиз:

1.t -- параметрни биронта аник t_0 кийматини $[\alpha, \beta]$ ораликда олиб чизикли программалаш услубини кўллаб масаланинг оптимал режасини топамиз ёки масалани ечиш мумкин эмаслигини кўрсатамиз.

2. Параметр $t \in [\alpha, \beta]$ нинг кайси кийматларида бир хил оптимал режага эга бўлишини ёки ечиш мумкин эмаслигини аниклаймиз ва t -- ни бу кийматларини $[\alpha, \beta]$ ораликдан чикарамиз.

3.$[\alpha, \beta]$ ораликнинг колган кисмидан t нинг биронта кийматини олиб масалани оптимал режасини топамиз. Буни ечиш учун иккиламчи симплекс усулни кўллаймиз.

4. Чекли алмаштиришлар натижасида t параметрни кайси тўпламлар кийматида бир хил оптимал режага эга бўлишини ёки бўмаслигини $[\alpha, \beta]$ ораликда аниклаймиз.

Масала 5.4. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 10 - 6t. \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

$$F = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 \quad (5.14)$$

функциянинг $t \in (-\infty \quad +\infty)$ ораликка максимум кийматини топинг.

Ечиш. $(-\infty \quad +\infty)$ ораликда t параметрни исталган кийматини олиб чизикли программалаш усулларини кўллаб масалани ечамиз. Фараз килайлик $t = 0$ бўлсин, у вактда куйидаги симплекс жадвални тузиш мумкин.

Жадвал 1 га асосланиб масаланинг оптимал ечимини топамиз.
Биринчи жадвалдан кўриниб турибдики
$x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0 \quad t = 0$ бўлганда берилган масаланинг оптимал режаси бўлади.

1 – чи жадвал

№	G_σ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	3	-2	5	0	-4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	5	x_3	$12 + t$	1	1	1	0	0
2.	0	x_4	$8 + 4t$	2	-1	0	1	0
3.	-4	x_5	$10 - t$	-2	2	0	0	1
4.			$F = 20 + 29t$	10	-1	0	0	0
1.	5	x_3	$7 + 4t$	2	0	1	0	-1/2
2.	0	x_4	$13 + t$	1	0	0	1	1/2
3.	-2	x_2	$5 - 3t$	-1	1	0	0	1/2
4.	индекс сатри		$F = 25 + 26t$	9	0	0	0	1/2

Юкоридаги ечимлар тўплами оптимал ечим бўлади, агарда $7 + 4t \geq 0, \quad 13 + t \geq 0, \quad 5 - 3t \geq 0$ бўлса, яъни

1) $t \geq -\frac{7}{4}$
2) $t \geq -13$
3) $t \leq \frac{5}{3}$ бўлса.

Шундай килиб $t \in \left[-\frac{7}{4}, \ \frac{5}{3} \right]$ ораликда $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ бўлса оптимал режа $F_{1\max} = 25 + 26t$ бўлади.

Энди $t > \frac{5}{3}$ бўлган кийматларида берилган масала оптимал ечимга эгами ёки йўклигини текширайлик. $t > \frac{5}{3}$ бўлганда $5 - 3t < 0$ бўлгани учун $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ оптимал режа бўла олмайди. Шунинг учун $t \geq \frac{5}{3}$ бўлганда янги режага ўтиш керак. Лекин янги режага ўтиш учун олдин x_2 – базис ўзгарувчи жойлашган сатр элементларини текширамиз.

Бу сатр элементлари ичида манфий сон $x'_{21} = -1$ бўлгани учун янги таянч режага ўтамиз (агар бу сатрда манфий сон бўлмаганда янги таянч режага ўтиб бўлмас эди).

Бу ерда x_2 ўзгарувчини базис ўзгарувчилар сафидан чикариб, унинг ўрнига x_1 ўзгарувчини киритамиз ва янги таянч режага ўтамиз.

Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

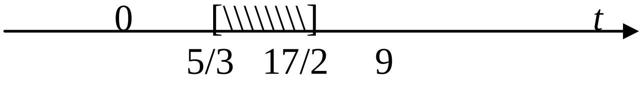
2 – жадвал

№	G_σ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	3	-2	5	0	-4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	5	x_3	$17 - 2t$	0	2	1	0	1/2
2.	0	x_4	$18 - 2t$	0	1	0	1	1
3.	3	x_1	$-5 + 3t$	1	-1	0	0	-1/2
4.	индекс сатри		$70 - t$	0	9	0	0	5

Демак 2 -- чи жадвалга асосан дастлабки масаланинг керакли режаси

$$x_1 = -5 + 3t, x_2 = 0, x_3 = 17 - 2t, x_4 = 18 - 2t, x_5 = 0.$$

бўлади, агарда барча t -- лар учун $-5 + 3t \geq 0, \quad 17 - 2t \geq 0, \quad 18 - 2t \geq 0$ бўлса. Бу тенгсизликларни ечсак $t \geq \frac{5}{3}, \quad t \leq \frac{17}{2}, \quad t \leq 9$ хосил бўлади. Шундай килиб $t \in \left[\frac{5}{3}, \ \frac{17}{2}\right]$ ораликда максад функцияси



$F_{\max} = 70 - t$ дастлабки масалани оптимал режаси бўлади.

Агар $t > \frac{17}{2}$ бўлса, $x_1 = -5 + 3t, \quad x_3 = 17 - 2t,$

$x_2 = 0, \quad x_3 = 18 - 2t, \quad x_5 = 0$ оптимал режа бўлмайди, чунки оптимал режа таркибида $x_3 = 17 - 2t$ манфий сонга тенг. Биринчи жадвалнинг x_{1j} сатрида манфий элементлар бўлмагани учун $t > \frac{17}{2}$ бўлганда масалани ечиш мумкин эмас.

Энди 1 -- чи жадвалдан $t < -\frac{7}{4}$ бўлганда масаланинг ечимини текширамиз.

Бу холда $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ оптимал режа бўла олмайди, чунки $x_3 = 7 + 4t$ манфий кийматга эга.

Шунинг учун t параметрнинг бу кийматларида оптимал режа мавжудлигини текшириш учун биринчи жадвалдан $x_3 -$ни базис ўзгарувчилар сафидан чикариб унинг ўрнига x_5 -- ни киритамиз. ($x_3 -$турган сатрда $x'_{15} - \frac{1}{2}$ манфий сон бўлгани учун бу жараённи бажариш мумкин).

Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

3 – жадвал

№	G_σ	Базис ўзгарув-Чилар	x_0	3	-2	5	0	-4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	-4	x_5	$-14 - 8t$	-4	0	-2	0	1
2.	0	x_4	$20 + 5t$	3	0	1	1	0
3.	2	x_1	$12 + t$	1	1	1	0	0
4.	Индекс сатри		$F = 32 + 30t$	11	0	1	0	0

Учинчи жадвалга асосан $x_1 = 12 + t, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 20 + 5t, x_5 = -14 - 8t$ ва t параметрнинг куйидаги шартларни $-14 - 8t \geq 0, \quad 20 + 5t \geq 0, \quad 12 + t \geq 0$ каноатлантирувчи барча кийматларида, яъни

$t_1 \leq -\frac{7}{4}$

$t_2 \geq -4$
$t_3 \geq -12$ бўлганда

оптимал режа бўлади.

Шундай килиб $t \in [-4;\ -\frac{7}{4}]$ ораликда берилган масаланинг ечимлари $x_1 = 0, x_2 = 12 + t, x_3 = 0, x_4 = 20 + 5t, x_5 = -14 - 8t$ бўлади ва $F_{\max} = 32 + 30t$

Учинчи жадвалдан кўриниб турибдики $t < -4$ бўлганда берилган масала ечимга эга эмас, чунки x_4 элемент жойлашган сатрда манфий элементлар йўк.

Демак,

1. агар $t \in (-\infty;\ \ -4]$ бўлса масала оптимал ечимга эга эмас;

2. агар $t \in [-4;\ -\frac{7}{4}]$бўлса масаланинг оптимал ечимлари $x_1 = 0, x_2 = 12 + t, x_3 = 0, x_4 = 20 + 5t, x_5 = -14 - 8t$ бўлиб, $F_{2\max} = 32 + 30t$ га тенг.

3. агар $t \in [-7;\ \frac{5}{3}]$ бўлса масаланинг оптимал ечимлари $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ бўлиб, $F_{0\max} = 25 + 26t$ га тенг.

4. агар $t \in [\frac{5}{3};\ \frac{17}{2}]$ бўлса масаланинг оптимал ечимлари $x_1 = -5 + 3t, x_2 = 0, x_3 = 17 - 2t, x_4 = 18 - 2t, x_5 = 0$ бўлиб, $F_{1\max} = 70 - t$ га тенг.

5. агар $t \in [\frac{17}{2},\ \ \infty)$ бўлса масалани ечиш мумкин эмас.

Масала 5.5. Корхонада уч тур махсулот ишлаб чикариш учун уч хил хомашё ишлатилади. Корхона биринчи хил хомашёдан 180 т, иккинчи хил хомашёдан 210 т ва учунчи хил хомашёдан 244 т таъмин этилган.

Хар бир ишлаб чикарилган махсулот бирлигига кетадиган хомашё меъёри ва нархи куйидаги жадвалда берилган.

4 – чи жадвал

Хомашё хиллари	Хар бир ишлаб чикарилган буюмга кетадиган хомашё меъёри

	1 тур буюм	2 тур буюм	3 тур буюм
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Хар бир ишлаб чикарилган махсулотнинг нархи (сўм)	10	14	12

Ишлаб чикаришнинг шундай режасини тузингки ишлаб чикарилган махсулотларни сотишга таркатганда киймат жихатидан максимум даромад олинсин.

Шу билан бирга хомашё микдорини хисобга олиб, оптимал режа турђунлигининг тахлили берилсин.

Ечиш. Фараз килайлик биринчи тур махсулот x_1 бирлик, иккинчи тур махсулот x_2 бирлик, учинчи тур махсулот x_3 бирлик ишлаб чикарилсин у вактда масаланинг математик моделини ушбу кўринишда ёзиш мумкин.

Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 244. \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \qquad (5.16)$$

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \qquad (5.17)$$

функциянинг максимум кийматини топинг.

Ечиш. Масалани симплекс усулни кўллаб ечамиз.

Ечиш жараёнининг хаммасини битта жадвал кўринишида ёзамиз.

5 – чи жадвал

№	G_σ	Базис ўзгарув-	x_0	10	14	12	0	0	0

		чилар		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	0	x_4	180	4	2	1	1	0	0
2.	0	x_5	210	3	1	3	0	1	0
3.	0	x_6	244	1	2	5	0	0	1
4.	Индекс сатри		$F_1 = 0$	-10	-14	-12	0	0	0
1.	14	x_2	90	2	1	1/2	½	0	0
2.	0	x_5	120	1	0	5/2	-1/2	1	0
3.	0	x_6	64	-3	0	4	-1	0	1
4.	Индекс сатри		$F_2 = 1260$	18	0	-5	7	0	0
1.	14	x_2	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
2.	0	x_5	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
3.	12	x_3	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4
4.	Индекс сатри		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Бу жадвалга асосан оптимал ечим $x_1 = 0, x_2 = 82, x_3 = 16, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0 -$ га тенг.

Бу ечимни (5.7) қўйсак қуйидаги хосил бўлади

$$F = 10 \cdot 0 + 14 \cdot 82 + 12 \cdot 16 = 1340 \text{ сўм.}$$

Демак бу режага асосан даромад $F_{\max} = 1340$ сўмни ташкил этади.

Энди бу режанинг турђунлиги тахлилини кўрсатамиз. Бунинг учун хом ашё хилларининг (хажмларининг) микдорларини ўзгартириб уни максад функцияга таъсирини кўриб чикамиз.

Олдин биринчи хил хом ашё хажмини t_1 тоннага ўзгартирамиз, яни биринчи хил хом ашё 180 + t_1 тонна бўлсин. Бу ерда $t -$ параметр. t_1 -- параметр умум холда $(-\infty, \ +\infty)$ ораликдаги кийматларни кабул килиши мумкин у вактда масаланинг шарти куйидагича бўлади. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 180 + t_1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 244. \end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \ . \qquad (5.19)$$

$$F = (x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \quad (5.20)$$

(5.20) -- функциянинг максимум кийматини шундай топингки $x_1 = 0, x_2 = 82, x_3 = 16$ оптимал ечим бўлсин. Бунинг учун (5.18) – (5.20) параметрик программалаш масаласини ечамиз.

Бешинчи жадвалнинг охирги кисмини куйидагича ёзиб оламиз.

6 – чи симплекс жадвал

№	G_σ	Базисли ўзгарув-чилар	x_0	10	14	12	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	14	x_2	b'_2	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
2.	0	x_5	b'_5	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
3.	12	x_3	b'_3	-3/4	0	1	¼	0	1/4
4.	индекс сатри		F'_0	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Олтинчи жадвал 5 -- чи жадвалдан x_0 вектор жойлашган устун элементлари билан фарк килади. x_0 векторнинг таркибий кисмларини b'_2, b'_5, b'_3 охирги жадвалдаги базисли векторлар x_2, x_5, x_3 бўйича ёйиб куйидагича ёзиш мумкин

$$B^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix}, \qquad (5.21)$$

бу ерда B^{-1} матрица B матрицага тескари матрица бўлиб x_2, x_5, x_3 векторларнинг дастлабки таркибий кисмларидан иборат.

Матрица B^{-1} 5 -- чи симплекс жадвалнинг X_4, X_5, X_6 векторлар жойлашган устун элементларидан иборат, x_0 вектор эса 5 -- чи жадвалнинг дастлабки x_0 жадвалида жойлашган устун элементларидан иборат.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 180 + t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix}$$

B^{-1} ва X_0 матрицаларни (5.21) формулага кўйсак куйидаги хосил бўлади.

$$X'_0 = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 + t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 + 5/8t_1 \\ 80 + 1/8t_1 \\ 16 - 1/4t_1 \end{pmatrix}.$$

Юкорида топилаган X'_0 вектор (5.15) – (5.17) масаланинг оптимал ечими бўлади.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 82 + 5/8t_1, \quad x_3 = 16 - 1/4t_1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 80 + 1/8t_1, \quad x_6 = 0.$$

ва $F_{\max} = 10 \cdot 0 + (82 + 5/8t_1) \cdot 14 + (16 - 1/4t_1) \cdot 12 = 1340 + 5\frac{3}{4}t_1.$

Демак юкоридаги ечим бўлса мусбат t параметрнинг барча кийматларида 7 оптимал режа бўлади.

$t_1 = 0$ бўлса $F_{\max} = 1340$ сўм бўлиб 5 -- чи симплекс жадвалнинг максад функциянинг микдори кийматига тўђри келади. Бу шуни кўрсатадики t_1 параметрнинг ўзгариши x_i оптимал ечимга тасир килади. Мисол учун $t_1 = 16$ га тенг деб олсак, ишлаб чикаришнинг оптимал режаси $x_1 = 0, \quad x_2 = 92, \quad x_3 = 12$ га тенг бўлади ва иккинчи тур буюм 92 бирлик, учинчи тур буюм 12 бирликга тенг бўлади.

Бу холда

$F_{\max} = 92 \cdot 14 + 12 \cdot 12 = 1432$ сўмни ташкил килади.

Агар иккинчи хил хомашё микдорини энг кўпи билан 80 тоннага камайтирсак у вактда режа оптимал режа бўлади, ва иккинчи тур махсулотдан 82 бирлик, учинчи тур махсулотдан 16 бирлик ишлаб чикарилади.

Бу холда $F_{\max} = 14 \cdot 82 + 12 \cdot 16 = 1148$ сўмни ташкил этади. Кўрсатиш мумкинки учунчи хил хомашё микдорини ўзгартирсак $x_1 = 0, \quad x_2 = 82, \quad x_3 = 16$ таянч ечим ўзгаради. Яни бу ечим тургун ечим эмас.

Шундай килиб (5.15) – (5.17) масаланинг оптимал режаси хамда хомашёларнинг хажмини ўзгартирганда сезгирлик тахлилини кўрсатдик. Худди шундай оптимал режа сезгирлик тахлилини уч хил хомашё микдорини бир вактнинг ўзида ўзгартирганда хам кўрсатиш мумкин

§ 4. Озод хадлари ва максад функция параметрга боглик масалаларни ечиш

§ 1да куриб чиккан (5.1) – (5.3) масалалар берилган бўлсин. § 1 -- § 3 парагрифларда ечган параметрик программалаш масалаларини ечиш усулидан фойдаланиб куйидаги масалани ечамиз.

Масала 5.6. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= -18 + 10. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in (-\infty, +\infty).$$

$$F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8 - 5t)x_1 + (9 - 3t)x_2 + (-3 + 5t)x_3 - (2 + 4t)x_4 \to \max$$

кийматини топинг.

Ечиш. t параметрнинг кийматини ихтиёрий танлаб оламиз. Фараз килайликки $t=2$ бўлсин. Дастлабки берилганларга асосланиб масалани симплекс усул билан ечамиз.

1 – чи симплекс жадвал

№	G_δ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3+5t$	x_3	$24+2t$	1	-1	1	0
2.	$-2-4t$	x_4	$-18+10t$	-1	2	0	1
4.	Индекс сатри		$F=0$	$-8+5t$	$-9+3t$	$3-5t$	$2+4t$

2 – чи симплекс жадвал

№	G_δ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-2t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3+5t$	x_3	$24+2t$	1	-1	1	0
2.	$-2-4t$	x_4	$-18+10t$	-1	2	0	1
4.	Индекс сатри		$F=-36+$ $208t-100t^2$	$-11+10t$	$-6t-2t$	0	$2+4t$

3 – чи симплекс жадвал

№	G_δ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3+5t$	x_3	$15-7t$	1/2	0	1	1/2
2.	$9-3t$	x_2	$-9+5t$	-1/2	1	0	1/2
4.	Индекс сатри		$F_{\max}=-126+$ $168t-50t^2$	$9t-14$	0	0	$5+5t$

Учинчи симплекс жадвалдан кўриниб турибдики $t=2$ бўлганда $x_1=0,\quad x_2=-9+5t,\quad x_3=15-7t,\quad x_4=0$ берилган масаланинг оптимал ечими бўлади.

Бу ечим $9t-14\geq 0$ бўлганда, яъни $t\geq\frac{14}{9}$ кийматларда хам мусбат ечим бўлади. Шундай килиб $t\in[9/5,\quad 15/7]$ ораликда $t-$нинг барча кийматларида масаланинг оптимал ечимлари $x_1=0,\quad x_2=15-7t,\quad x_3=-9+5t,\quad x_4=0$ бўлганда $F_{\max}=-126+168t-50t^2$ га тенг.

Агар $t<\frac{9}{5}$ бўлса, яъни $-9+5t<0$ бўлса юкорида кўрсатилган ечим оптимал режа бўлмайди.

Шунинг учун $t<\frac{9}{5}$ бўлганда янги симплекс жадвал тузиш мумкин, чунки x_2 элемент жойлашган сатрда (3 -- чи симплекс жадвал) –1/2 манфий сон мавжуд. $x'_{21}=-1/2$ сонни калитли сон деб танлаб олиб янги симплекс жадвал тузамиз. Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

4 – чи симплекс жадвал

№	G_δ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3+5t$	x_3	$6-2t$	0	1	1	1
2.	$8-5t$	x_1	$18-10t$	1	-2	0	-1
4.	Индекс сатри		$F=126-$ $-134t+40t^2$	0	$-28+1$	0	$14t-9$

Тўртинчи жадвалдан кўриниб турибдики $6-2t\geq 0$ ва $18-10t\geq 0$ бўлганда (юкорида $t\geq\frac{14}{9}$ киматини кўрган эдик) $t\in[14/9,\quad 9/5]$ ораликдаги кийматларида $x_1=18-10t,\quad x_2=0,\quad x_3=6-2t,\quad x_4=0$ масаланинг оптимал ечими бўлиб, $F_{\max}=126-134t+40t^2$ га тенг.

Энди $t>\frac{15}{7}$ бўлганда масалани ечимларининг текширайлик. $t>\frac{15}{7}$ бўлса, $x_1=0,\quad x_2=-9+5t,\quad x_3=15-7t,\quad x_4=0$ ечим оптимал режа бўла олмайди, чунки $15-7t<0.$ Шу билан бирга x_3 турган сатрда манфий сон йўк бўлгани учун масалани ечиш мумкин эмас.

Шундай килиб биз масалани $t \in [14/9, \ +\infty)$ ораликда ечдик. Масалани тўла ечиш навбати $t \in [-\infty, \ 14/9)$ келди. Агар $t < \frac{14}{9}$ бўлса $-28+18t < 0.$ бўлади. Шунинг учун янги симплекс жадвалга ўтамиз.

5 – чи симплекс жадвал.

№	G_δ	Базис ўзгарув-чилар	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$9-3t$	x_2	$6-2t$	0	1	1	1
2.	$8-5t$	x_1	$30-14t$	1	0	2	1
3		$F = 294-298t+76t^2$		0	0	$28-18t$	$19-4t$

Бешинчи симплекс жадвалдан кўриниб турибдиким $t \in [-\infty, \ 14/9)$ ораликдаги $t-$нинг барча кийматларида $x_1 = 30-14t, \ \ x_2 = 6-2t, \ \ x_3 = 0, \ \ x_4 = 0$ оптимал ечим бўлиб $F_{\max} = 294-298t+76t^2$ га тенг.

Демак:

1. Агар $t \in [-\infty, \ 14/9]$ бўлса, масала оптимал режага эга бўлиб $x_1 = 30-14t, \ \ x_2 = 6-2t, \ \ x_3 = 0, \ \ x_4 = 0.$ ва

$$F_{2\max} = 294-298t+76t^2.$$ га тенг

2. Агар $t \in [14/9, \ 9/5]$ масала бўлса, оптимал режага эга бўлиб $x_1 = 18-10t, \ \ x_2 = 0, \ \ x_3 = 6-9t, \ \ x_4 = 0.$ ва

$$F_{1\max} = 126-134t+40t^2$$ тенг

3. Агар $t \in [9/5, \ 15/7]$ масала оптимал режага эга бўлиб $x_1 = 0, \ \ x_2 = -9+5t, \ \ x_3 = 15-7t, \ \ x_4 = 0.$

$$F_{0\max} = -126+168t-50t^2.$$ га тенг

Топшириклар

Куйидаги 5.7 – 5.14 параметрик программалаш масалаларини $t \in (-\infty, \ +\infty)$ ораликда оптимал режасини топинг.

5.7.

$$\left.\begin{aligned}&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,\\&-2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1.\end{aligned}\right\}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$

$$F = (t-1)x_1 + (4-t)x_2 + (t-2)x_3 + (2-t)x_4 + (2t-3)x_5 \to \max.$$

5.8.

$$\left.\begin{aligned}&x_1 - x_2 + x_3 = 28,\\&-x_1 + 3x_2 + x_4 = 20,\\&-1/2x_1 + 2x_2 + x_5 = 24.\end{aligned}\right\}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$

$$F = 6x_1 - (4+t)x_2 + (12-t)x_4 \to \max.$$

5.9.

$$\left.\begin{aligned}&x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 2t,\\&-2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + t,\\&3x_1 - x_2 + x_5 = 8 - 3t.\end{aligned}\right\}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$

5.10

$$\left.\begin{aligned}&x_1 - x_2 + x_3 = 1 - 2t,\\&2x_1 - x_2 + x_4 = 2 + t,\\&3x_1 + x_5 = 3 - t.\end{aligned}\right\}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$

$$F = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max.$$

5.11.

$$\left.\begin{aligned}&x_1 - x_2 + x_3 = 12,\\&2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + 8t,\\&-x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 - 12t.\end{aligned}\right\}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$

$$F = (2-3t)x_1 - 4tx_2 + (2+6t)x_4 \to \max.$$

5.12.

$$\left.\begin{aligned} &x_1+2x_2+x_3=4+6t,\\ &-x_1+3x_2+x_4=9-12t,\\ &x_1-x_2+x_5=8+9t. \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0,\ i=\overline{1,5}.$$

$$F=(2+t)x_1-(3-t)x_2+3(2+4t)x_5 \to \max.$$

5.13. Корхонада уч тур буюм ишлаб чикариш учун уч хил хомашё ишлатилади. Биринчи тур буюм ишлаб чикариш учун биринчи хил хомашёдан $a_1=1$ кг, иккинчи хил хомашёдан $a_2=1$ кг, учинчи хил хомашёдан $a_3=2$ кг ишлатилади. Иккинчи тур буюм ишлаб чикариш учун биринчи хил хомашёдан $b_1=2$ кг, иккинчи хил хом ашёдан $b_2=0$ кг, учинчи хил хомашёдан $b_3=1$ кг ишлатилади. Учунчи тур буюм ишлаб чикариш учун биринчи хил хомашёдан $c_1=0$ кг, иккинчи хил хомашёдан $c_2=1$ кг, учинчи хил хомашёдан $c_3=2$ кг ишлатилади.

Корхона биринчи хил хом ашёдан энг кўпи билан 20 кг, иккинчи хил хом ашёдан энг кўпи билан 42 кг учинчи хил хом ашёдан энг кўпи билан 36 кг таъмин этилган. Шу билан бирга ишлаб чикарилган буюмларнинг нархи $t-$параметрга боғлик ва мос равишда куйидагиларга тенг: $2+t, 12-t, 6+t \quad (t\in[0,10])$. $t-$параметрнинг $t\in[0,10]$ ораликда шундай кийматларини топинки ишлаб чикарилган махсулотларни сотишга таркатганда киймат жихатидан максимум даромад олинган.

5.14. Корхонада уч тур буюм ишлаб чикариш учун турли хил хомашё ишлатилади. Хом ашёлардан буюмларни ишлаб чикариш меъёри куйидаги A матрицада берилган

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 6\\ 5 & 5 & 2\\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Хомашё захираси ва хар бир ишлаб чикарилган махсулот бирлигидан сотиш натижасида тушадиган фойда куйидаги жадвалда берилган.

Хомашё хиллари	Хомашё захираси	Хар бир ишлаб чикарилган махсулотга кетадиган хомашё меъёри		
		1 тур	2 тур	3 тур
1 хил	200	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2 хил	120	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3 хил	180	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4 хил	138	x_{41}	x_{42}	x_{44}

Хар бир ишлаб чикарилган махсулотдан келадиган даромад (сўм хисобида)	25	28	27

Масаланинг бу шартида ишлаб чикарилган махсулотларни тўла сотиш таъмин этилган. Ишлаб чикаришнинг шундай режасини тузингки, ишлаб чикарилган махсулотларни сотишга таркатганда киймат жихатидан максимум даромад олинсин. Шу билан бирга даромад ва хом ашёни ўзгаришини хисобга олиб оптимал режанинг тахлили берилсин.

VI БОБ

Динамик программалаш

§ 1. Динамик программалаш масалаларининг умумий хусусиятлари

Чизикли программалаш масалаларини ечганда вактга бођлик бўлмаган статик ва иктисодий жараёнларни кўрган эдик. Масалаларнинг оптимал ечимларини топганда бу ечимлар вактга бођлик бўлмаган бир боскичли оптимал ечимлардан иборат деб хисобладик. Шунинг учун вактга бођлик бўлмаган бундай масалаларни бир боскичли масалалар деб атаймиз. Лекин кўп иктисодий масалаларни ечиш жараёнида бу масалалар ўз – ўзидан бир нечта боскичларга бўлинган бўлади. Шу билан бирга иктисодиётни ривожланиш жараёни айникса бозор иктисодиётига ўтиш даврида кўп омилларга бођликдир. Шунинг учун бундай масалаларнинг ечими ягона бўлмайди. Балки хар бир боскичга мос келувчи ечимлар тўпламидан иборат бўлади. Бу ечимлар тўпламидан энг макбуллини танлаб олишга оптимал стратегия дейилади.

Динамик программалаш иктисодиётда учрайдиган кўп масалаларни боскичма - боскич ечиш учун ишлатилади.

Бунга мисол сифатида куйидаги масалалар киради:
Юкларни оптимал жойлаштириш; энг киска йўлни аниклаш, тезликка бођлик бўлган масалаларда оптимал тезликни топиш; сармояларни оптимал жойлаштириш; оптимал режалаштириш масалалари.

Демак динамик программалаш куйидаги хусусиятга эга бўлган масалаларни ечади;

1. Кўп боскичли иктисодий жараённинг бирдан бир ягона ечимини эмас, хар бир кадамга мос келувчи ва асосий манфаатни кўзловчи ечимлар тўпламини топишга ёрдам беради;
2. Динамик программалаш услуб ва усуллари ёрдамида ечилаётган кўп боскичли масаланинг маълум бир боскичи учун топилаган ечими ундан олдинги боскичларда топилган ечимга бођлик бўлмайди. Унда факат шу боскични ифодаловчи омиллар назарга олинади;
3. Динамик программалаш ёрдамида кўп боскичли масалани ечиш жараёнида хар бир боскичида асосий максадни кўзловчи ечимни аниклаш керак, яна ечимлар тўплами орасида асосий максадга эришишга максимал улуш кўшувчи ечимни танлаб олишга тўђри келади.

Динамик программалашнинг асосий усул ва услублари америкалик математик Р. Беллман ва унинг шогирдлари томонидан асосланган бўлиб оптималлик принципига амал килади. Энди динамик программалаш услуб ва усуллари билан ечиладиган баъзи иктисодий масалаларни кўриб чикамиз.

§ 2. Юкларни оптимал жойлаштириш хакидаги масалалар.

Масала 6.1. Музхонага N хар хил хомашёларни жойлаштириш керак. Музхонага жами W тонна хомашёни жойлаштириш мумкин. Хомашёлар тўђрисида куйидаги маълумотлар мавжуд:

$P_i - i -$чи хил хомашёнинг ођирлиги

$V_i - i -$чи хил хомашёнинг бахоси (нархи)

$X_i -$Музхонага жойлаштириладиган $i -$чи хил хомашёнинг сони.

Музхонага хомашёларни шундай жойлаштирингки максимум кийматга эга бўлган хомашёлар жойлашсин.

Демак бу масалани умумий холда куйидаги кўринишда ёзиш мумкин.

Куйидаги шартларда

1. $\sum_{i=1}^{N} X_i\, P_i \le W$.
2. $X_i = 0,1,2,3,...$. (контейнерларга жойлашган хомашёлар сони ёки яшиклар сони)
3. $f(W) = \sum_{i=1}^{N} X_i\, V_i$ $-$нинг максимум кийматини топинг.

Масалада X_i $-$хомашёлар бутун кисмлардан иборат.

Агар 2-чи шарт бўлмаганда эди у вактда масалани чизикли программалаш масаласи кўринишда ечиш мумкин эди. Шунинг учун масалани куйидаги кўринишда ечамиз.

1. Олдин музхонага биринчи хил хом ашёларни жойлаштирамиз. Жойлаштирилган юкларнинг кийматини $f_1(W)$ деб белгиласак

$f_1(W) = \max\{X_i\, W\}$, (6.1) агарда куйидаги шартлар бажарилса.

1. $X_1\, P_1 \le W$ (6.2)
2. $X_1 = 0,1,2,3,...$

(6.2) тенгсизликдан $X_1 \le \frac{W}{P_1}$ бўлгани учун $f_1(W) = \left\{\frac{W}{P_1}\right\} V_1$ бўлади.

Бу функциянинг графиги 6.1-чизмада кўрсатилган. Шудай килиб музхона биринчи хил хомашё билан тўлдирилганда унинг кийматини топдик. Энди музхонага x_1 ва x_2 хил хомашёлар тўлдирилганда $f_2(W)$ нинг максимум кийматини топайлик.

Агар иккинчи хил хом ашёдан x_2 дона жойлаштирилган бўлса, у вактда музхонанинг хажмини хисобга олсак биринчи хил хомашёдан $W - X_2\, P_2$ тонна олиш мумкин ва унинг киймати $f_1(W - X_2\, P_2)$ сўмга тенг бўлади. Умумий киймат эса $X_2\, V_2 + f_1(W - X_2\, P_2)$ га тенг бўлади. Буларга асосланиб факат x_2 --нинг кийматини топсак бас. Шундай килиб музхонага жойлаштирилган биринчи ва иккинчи хил хомашёларнинг максимум киймати куйидагича бўлади

$f_2(W) = \max\{\, X_2\, V_2 + f_1(W - X_2\, P_2)\}$.

$0 < X_2 < \left\{\frac{W}{P_2}\right\}$

Кетма – кет юкоридаги усулни кўлласак

$$f_N(W) = \max\{X_N\, V_N + f_{N-1}\,(W - X_N\, P_N)\}.$$

$$0 < X_N < \left\{\frac{W}{P_N}\right\}$$

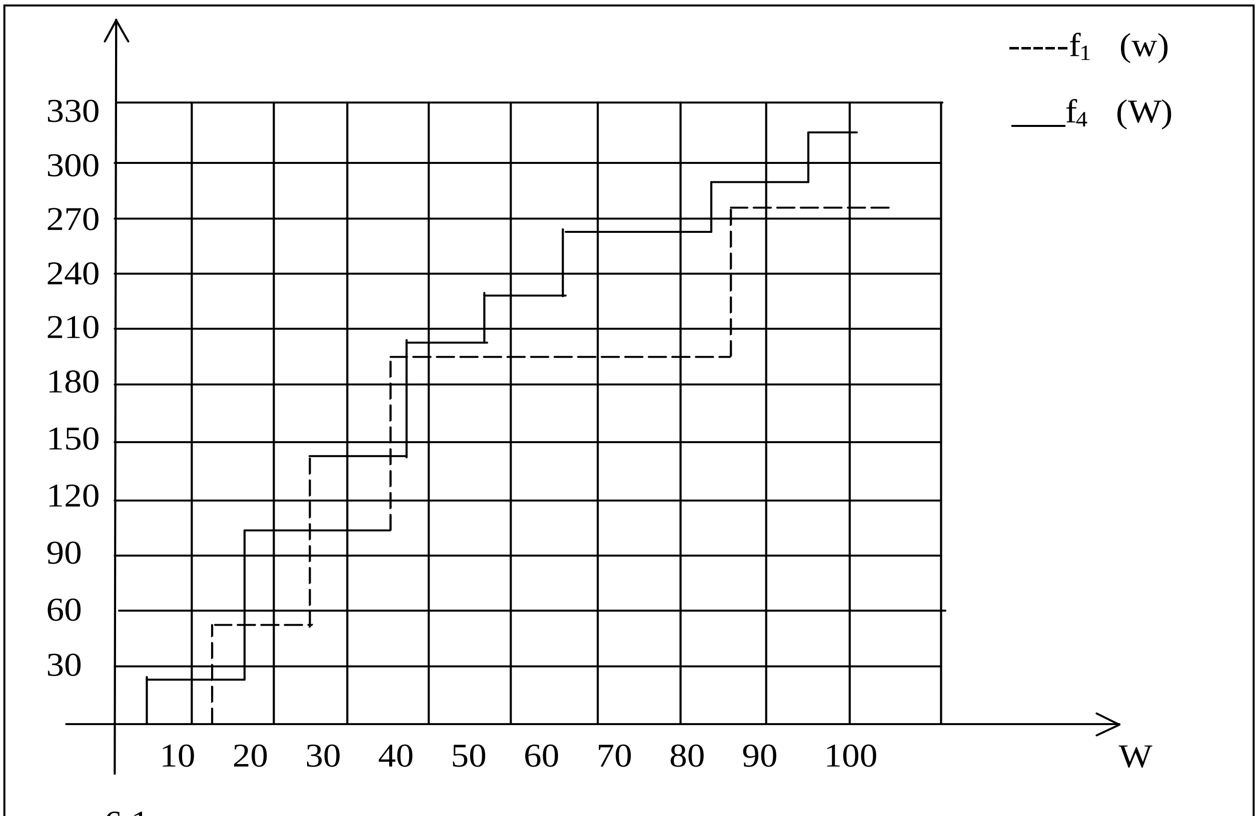
бўлади.

Бу ерда $f_N(W)-$музхонага жойлаштирилган $N-$хил юкларнинг максимум нархи

$X_N V_n - N-$чи хил жойлаштирилган махсулотнинг киймати

$f_{N-1}(W - X_N\, P_N)$ – умумий ођирлиги $W - X_N\, P_N$ тоннадан кўп бўлмайдиган $(N-1)$--хил юкларнинг максимум киймати.

Бу ерда $\left\{\frac{W}{P_i}\right\}$ сони $\frac{W}{P_i}$ дан ошмайдиган бутун сон.



6.1-чизма

Юкорида топилган рекуррент формулалардан кетма – кет $f_1(W), f_2(W),..., f_N(W)$ функцияларнинг кийматларини топиш мумкин.

Масала 6.2. Музхонасини умумий хажми $v = 83\,m^3$ бўлган фермага хажмлари $p_1 = 24\,m^3$, $p_2 = 22\,m^3$, $p_3 = 16\,m^3$, $p_4 = 10\,m^3$ бўлган контейнерлар билан юк олиб келинди.

Бу юкларнинг хар бир бирининг нархи мос равишда $v_1 = 96$ минг сўм, $v_2 = 85$ сўм, $v_3 = 50$ сўм, ва $v_4 = 20$ сўмни ташкил этади. Контейнерларни очмасдан саклаш мумкин. Музхонага контейнерларни шундай жойлаштириш керакки жойлашган юклар максимум кийматга эга бўлсин.

Ечиш. Масалани ечиш учун $f_N(W)$ ни N—нинг хар кандай кийматида хисоблашимиз керак:

$f_4(83)$ ни хисоблаш учун $f_3(83 - x_4 p_4)$ ни топиш керак. Шунинг учун пођонама пођона W нинг хар кандай кийматларида хар хил юкларни музхонага биттама - битта хисоблаб жойлаштирамиз.

Натижада куйидаги жадвал хосил бўлади.

6.1. жадвал

W	$f_1(W)$ – функция	x_1
0-23	0	0
24-47	96	1
48-71	192	2
72-87	288	3

Биринчи хил юкни жойлаштириш учун (x_1) 0-23 тоннага x_1 йўк. 24-47 тоннагача юкларни жойлаштирсак x_1=1 дона бўлади ва унинг киймати 96 минг сўмни ташкил этади 48-71 тоннагача юкларни жойлаштирсак x_1=2 дона бўлади киймати 192 минг сўмни ташкил этади. 72-87 тоннагача юкларни жойлаштирсак x_1=3 дона бўлади ва унинг киймати $f = 288$ минг сўмни ташкил этади.

Энди $f_2(W)$, $f_3(W)$ ва $f_4(W)$ функциялар учун жадваллар тузамиз.

6.2. жадвал

W	$f_2(W)$ – функция	x_2
0-21	0	0
22-23	85	1
24-45	96	0
46-47	181	1
48-69	192	0
70-71	277	1
72-87	288	0

6.3. жадвал

W	$f_3(W)$ – функция	x_3
0-15	0	0
16-21	50	1
22-23	85	0
24-37	96	0
38-39	135	1
40-45	146	1
46-47	181	0
48-63	192	0
64-69	242	1
70-71	277	0
72-87	288	0

6.4. жадвал

W	$f_4(W)$ – функция	x_4
0-9	0	0
10-15	20	1
16-21	50	0
22-23	85	0
24-33	96	0
34-37	116	1
38-39	135	0
40-45	146	0
46-47	181	0

48-57	192	0
58-63	212	1
64-69	242	0
70-71	277	0
72-81	288	0
81-87	308	1

Куйидаги

$$f_2(W) = \max\{ X_2\, V_2 + f_1(W - X_2\, P_2)\}.$$

$$0 < X_1 < \left\{\frac{W}{P_1}\right\}.$$

тенгликдан фойдаланиб $f_2(W)$ функцияни хисобланиш йўлини кўрсатамиз. x_2 -- микдор 0,1,2,3 кийматлар кабул килиши мумкин.

6.1. – жадвалдан фойдаланиб $\{X_2 \cdot 85 + f_1(70 - x_2 \cdot 22)\} = f_2(W)$ функцияни хисоблаймиз.

$x_2 = 0; \qquad f_1(70) = 192. \qquad f_2(W) = 192;$

$x_2 = 1; \qquad f_2(70) = 85 + f_1(48) = 277;$

$x_2 = 2; \qquad f_2(70) = 2 \cdot 85 + f_1(26) = 266;$

$x_3 = 3; \qquad f_2(70) = 3 \cdot 85 + f_1(4) = 255;$

Хисоблаш шуни кўрсатдики, x_2=1 бўлганда $f_2(70) = 277$ энг катта кийматга эга. Худди юкоридаги каби $f_3(W)$ ва $f_4(W)$ функцияларнинг кийматини хисоблаб 6.3; 6.4; жадвалларни тузиш мумкин.

6.4 жадвалга асосан $f_4(83) = 308$ минг сўмга тенг. Демак 4 хил коннейнирдан $x_4 = 1$ донасини муз хонага жойлаштириш мумкин. $P_4 = 10$ тонна бўлгани учун музхонага яна 83-10=73 тонна юк жойлаштириш талаб этилади. 6.3 ва 6.2 жадваллардан кўриниб турибдики $W = 73$ юкнинг сони $x_3 = 0; \quad x_1 = 0$ донага тенг. 6.1 жадвалдан кўринадики $x_3 = 3$ дона контейнер жойлаштириш мумкин. Демак

$$f_4 \max = 96 \cdot x_1 + 20 \cdot x_4 = 96 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 288 + 20 = 308 \text{ минг сўм.}$$

§ 3. Динамик программалаш усулларининг иктисодий масалаларни ечишдаги тахлили. Оптимал режалаштириш масаласи

Фараз килайлик вилоятда $n-$корхонани ўз ичига олган саноат бирлашмасининг $T-$йиллик режасини тузиш масаласи ўртага кўйилган бўлсин. Режалаштирилаётган $T-$даврнинг бошида бирлашмага K_0 микдорда маблађ ажратилган бўлсин. Бу маблађ $n-$та корхонага таксимланади. Таксимланаётган маблађ корхоналарда тўла ёки кисман ишлатилиши мумкин ва шунга караб маълум микдорда фойда (даромад) олиш мумкин. Кейинги кадамларда маблађлар корхоналараро кайта таксимланиши мумкин. Натижада куйидаги масала хосил бўлади. Корхоналараро K маблађни кадамба – кадам шундай таксимлаш ва кайта таксимлаш керакки бирлашманинг T йил давомида олган даромадлар йиђиндиси максимум кийматга эга бўлсин.

Хар бир ишлаб чикариш бошкарилувчи жараён хисобланади ва бу жараён ажратилаётган хомашё, маблађ, ускунуларнинг янгиланиш каби муаммоларга бођликдир. Бу муаммоларни хал килишни кадамба - кадам ташкил килишга бошкариш дейилади.

Демак t боскичдаги бошкариш

$U^t=(u_1^t,u_2^t,...,u_n^t)$

вектор функция каби ифодаланади. Бу ерда U_j^t $j(j=\overline{1,n})$ корхона учун кадамнинг бошида ажратилган хомашё, маблађ ва хоказоларнинг микдорини кўрсатувчи вектор.

Жами корхоналар бирлашмасининг T давр ичида бошкаришини $U=(u^1,u^2,...,u^T)$ вектор функция оркали ифодалаш мумкин.

Бирлашмадаги корхоналарнинг тараккиёт динамикасини ифодалаш учун уларнинг холат даражасини кўрсатувчи $X_i=(x_i^1,x_i^2,...,x_i^T)$ векторни киритамиз, бу ерда X_i^t $t(t=\overline{1,T})$ кадам бошида корхоналарнинг моддий ва молиявий ахвол даражасини кўрсатувчи кўрсаткич бўлиб, унинг таркибий кисмлари корхонадаги мехнат ресурслари, асосий фондлар молиявий ахвол даражасини кўрсатади, яъни $X_i^{\,t}=(x_{i1}^t,x_{i2}^t,...,x_{ik}^t)$.

Шундай килиб, юкоридагидан хулоса килиб айтиш мумкинки, бошкариш вектори U^t корхоналарнинг t кадамнинг бошидаги холатини кўрсатувчи вектордир, яъни

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Демак системанинг бошланђич халати X^0 берилган бўлади. Максадли функция сифатида корхоналар бирлашмасининг T давр ичида оладиган даромадлар йиђиндисини ифодалавчи

$Z = \sum_{i=1}^{T} Z^t \to \max$ функцияни киритамиз.

Хар бир t кадамнинг бошида системанинг X^t холат даражасига ва U^t бошкариш векторига маълум бир чегараловчи шартлар кўйилади. Бу шартлар бирлашмасини G билан белгилаймиз ва уни мумкин бўлган бошкаришлар тўплами деб атаймиз. Натижада куйидаги динамик программалаш масаласига эга бўламиз:

$$U^t \in G \qquad (6.1)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{T} Z^t \to \max. \qquad (6.2)$$

Хосил бўлган (6.1), (6.2) моделга ишлаб чикаришнинг динамик модели дейилади.

Масала 6.2. Катта талабга эга бўлган махсулотни ишлаб чикариш максадга корхоналарга капитал курилиш учун S – минг сўмлик маблађ ажратилган. Бу маблађдан i корхона X_i минг сўм ишлатганда $f_i(x_i)$ (эгри чизикли функция) кўринишдаги ўсишга эга бўлади.

Капитал курилишга ажратилаган маблађни корхоналар ўртасида шундай таксимлангки, корхоналар ишга тушганда максимал даромад берувчи махсулотлар ишлаб чикариш кобилиятига эга бўлсин.

Ечиш. Масаланинг математик моделини тузамиз. Демак куйидаги шартларда

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = S.$$

$$X_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,n})$$

$F=\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ функциянинг энг катта кийматини топиш керак. Агар $F=\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ функция каварик ёки ботик функция бўлса, у вактда бу масалани эгри чизикли программалашдаги Лагранжнинг кўпайтмалар усулини кўллаб ечиш мумкин. Агар F функция каварик ёки ботик бўлмаса, у вактда бу масалани динамик программалаш усулидан фойдаланиб ечамиз.

Хар бир корхонага ажратилган маблађни кадамба - кадам кандай самара беришини хисоблаб чикамиз ва буларнинг ичидан оптимал стратегияни танлаб оламиз.

Масала 6.3. Ишлаб чикариш жараёнини ташкил килиш учун корхонани янги ускуналар билан жихозлаш керак. Ускуналарни иш унимдорлиги вакт ўтишига бођлик бўлиб, унга кетадиган харажатлар куйидаги жадвал кўринишида берилган.

6.5. жадвал

	Ускуналарни ишлаш вакти (йил хисобида)					
	0	1	2	3	4	5
Бир йилда ишлаб чикарилган махсулотларнинг нархи (киймати) R(й) (минг сўм хисобида)	80	75	65	60	60	55
Ускуналарни таъмирлаш ва саклаш учун кетадиган харажатлар $Z(й)$ (минг сўм хисобида)	20	25	30	35	45	55

Корхонани янги ускуналар билан жихозлаш учун 40 минг сўм кетганини хисобга олиб, ускуналарнинг хизматини ўтаганларини хисобдан чикаришнинг беш йиллик режасини шундай тузинки корхона максимум умумий даромад олсин.

Ечиш. Бу масалани ечиш учун бошкарув жараёнини иккига бўлиб кўрамиз:

а) U_1 – ускуналарнинг ишлаб чикариш кобилиятини сакловчи ечимлар тўплами бўлсин;

b) U_2 – ишлаш кобилияти тамом бўлган ускуналарни алмаштирувчи ечимлар тўплами бўлсин.

Биринчи боскичда бешинчи беш йилликнинг бошидан, биринчи йилнинг бошига кадар ускуналарнинг холатини шартли оптимал бошкарувчи ечимлар тўпламини топамиз. Иккинчи боскичда Ишлаб чикариш харакатини биринчи йилни бошланиш кисмидан, бешинчи йилни бошланиш кисмигача, хар йил учун тузилган шартли оптимал ечимларга асосан ускуналарни алмаштириш беш йиллик оптимал режасини тузамиз.

Шартли оптимал ечимлар тўпламини тузиш учун олдин бу масалага мослаштириб Беллманнинг функционал тенгламасини тузиб оламиз.

Хар бир йил бошида ($K-$чи йил, $K=\overline{1,5}$) иккита холатдан биттаси бўлади: ускуналар керакми ёки йўкми?

У вактда k-чи (k=1, 2, 3, 4, 5) йилда корхонанинг даромади куйидагича бўлади

$$F_k\left(\breve{И}^{(k)}, U_k\right)_k = \begin{cases} R\left(\breve{И}^{(k)}\right) - Z\left(\breve{И}^{(k)}\right), U_1 \\ R\left(\breve{И}^{(k)}=0\right) - Z\left(\breve{И}^{(k)}=0\right) - C_n, U_2 \end{cases} \text{булганда,}$$

бу ерда $Й^{(k)}$ – ускуналарнинг k- чи йил бошидаги ишлаган йиллар сони (ёши), U_k – k-чи йил бошидаги бошкарув вектори; C_n – янги ускуналарни киймати, k=1,2,..., 5.

Шундай килиб, бу холда Беллманинг функционал тенгламаси куйидаги кўринишда бўлади

$$F_k\left(U^{(k)}\right) = \max_{\breve{И}} \begin{cases} R\left(U^{(k)}\right) - Z\left(\breve{И}^{(k)}\right) + F_{k+1}\left(\breve{И}^{(k+1)}\right), \\ R\left(\breve{И}^{(k)}=0\right) - Z\left(\breve{И}^{(k)}=0\right) - C_n + F_{k+1}\left(\breve{И}^{(k)}=1\right). \end{cases} \qquad (6.1)$$

Энди (6.1) тенгламани кўллаб дастлабки масаланинг ечимини топамиз. Беш йилликнинг бошида хамма ускуналар янги бўлгани учун $\breve{И}^{(1)}=0$ бўлади. Бешинчи йилнинг бошланишида эса ускуналардан фойдаланиш муддати 1, 2, 3, 4 бўлиши мумкин. Шунинг учун берилган системанинг мумкин бўлган холати куйидагича бўлади:

$$\breve{И}_1^{(5)}=1,\ \breve{И}_2^{(5)}=2,\ \breve{И}_3^{(5)}=3,\ \breve{И}_4^{(5)}=4.$$

Бу холатларнинг хар бирига мос равишда шартли оптимал ечимларни ва уларга мос бўлган $F_5\left(\breve{И}^{(5)}\right)$ функциянинг кийматларини аниклаймиз. Энди (6.1) тенгламадан фойдаланиб, $F_5\left(\breve{И}^{(k+1)}\right)=0$ ни хисобга олган холда куйидагини топамиз

$$F_5\left(\breve{И}^{(5)}\right) = \max \begin{cases} R\left(\breve{И}^{(5)}\right) - Z\left(\breve{И}^{(5)}\right), \\ R\left(\breve{И}^{(5)}=0\right) - Z\left(\breve{И}^{(5)}=0\right) - C. \end{cases} \qquad (6.2)$$

(6.2) – чи формулага $Й^{(5)}$=1 ва 6.5-жадвалдаги берилганларни кўйсак куйидаги хосил бўлади

$$F_5\left(Й_1^{(5)}\right)=\max\left\{\begin{matrix} R\left(Й_1^{(5)}=1\right)-Z\left(Й_1^{(5)}=1\right) \\ R\left(Й_1^{(5)}=0\right)-Z\left(Й_1^{(5)}=0\right)-C_n \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix}75-25\\80-20-40\end{matrix}\right\}=50, \qquad U^0=U_1$$

Демак, бу холда шартли оптимал ечим $U^0=U_1$ га тенг.

Худди шундай хисобларни 5 –чи йил бошида бошка холатлар учун хам бажарамиз.

$$F_5(U_2^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix}65-30\\80-20-40\end{matrix}\right\}=35, U^0=U_1,$$

$$F_5(U_3^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix}66-35\\80-20-40\end{matrix}\right\}=25, U^0=U_1,$$

$$F_5(U_4^{(5)})=\max\left\{\begin{matrix}60-45\\80-20-40\end{matrix}\right\}=20, U^0=U$$

Хосил булган бу кийматларни куйидаги жадвал куринишида ёзиш мумкин.

6.6 жадвал

Ускуналардан фойдаланиш муддати (йил)	$F_5(U^{(5)})$ функциянинг кийматлари (минг сум хисобида)	Шартли оптимал ечимлар U^0
1	50	U^0
2	35	U_1
3	25	U_2
4	20	U_3

Туртинчи йилнинг бошланишида ускуналардан фойдаланиш муддати 1,2,3 булиши мумкин. Шунинг учун берилган системанинг мумкин булган холати куйидагича булади:

$Й_1^{(4)}=1, Й_2^{(4)}=2, Й_3^{(4)}=3.$

Бу холатларнинг хар бирига мос равишда шартли оптимал ечимлар тупламини ва уларга мос булган $F_n(Й^{(4)})$ ускунанинг кийматларини юкоридаги каби 6.5 ва 6.6 жадвалдан фойдаланиб хисоблаймиз

$$F_4(Й_1^{(4)})=\max\left\{\begin{matrix}R(Й^{(4)}=1)-Z(Й^{(4)}=1)+F_5(Й^{(5)}=2)\\R(Й^{(4)}=0)-Z(Й^{(4)}=0)-C_n+F_5(Й^{(5)}=1)\end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix}75-25+35\\80-20-40+50\end{matrix}\right\}=85, U^0=U_1$$

$$F_4(Й_2^{(4)})=\max\left\{\begin{matrix}65-30+25\\80-20-40+50\end{matrix}\right\}=70, U^0=U_2,$$

$$F_4(Й_3^{(4)}) = \max\left\{\begin{matrix}60-35+20\\80-20-40+50\end{matrix}\right\} = 70, U^0 = U_2.$$

Хосил булган натижаларга асосланиб куйидаги жадвални тузамиз.

6.7

Жадвал

Ускуналарни фойдаланиш муддати (йил)-Й$^{(4)}$	F$_4$(Й$^{(4)}$) функциянинг киймати(минг сум хисобида)	Шартли оптимал ечимлари U^0
1	85	U_1
2	70	U_2
3	70	U_3

Учинчи йилнинг бошида ускуналардан фойдаланиш муддати 1,2 булиши мумкин. Шунинг учун берилган системанинг мумкин булган холати $U_1^{(3)} = 1, U_2^{(3)} = 2$ булади. Бу холатларнинг хар бирига мос равишда шартли оптимал чимлар тупламини ва уларга мос булган F$_3$(Й$^{(3)}$) функциянинг кийматларини юкоридаги каби (6.1) формуладан фойдаланиб хисоблаймиз

$$F_3(Й_1^{(3)}) = \max\left\{\begin{matrix}R(Й^{(3)}=1) - Z(Й^{(3)}=1) + F_4(Й^{(4)}=2),\\ R(Й^{(3)}=0) - Z(Й^{(3)}=0) - C_n + F_4(Й^{(4)}=1.\end{matrix}\right\};$$

$$F_3(Й_2^{(3)}) = \max\left\{\begin{matrix}R(Й^{(3)}=2) - Z(Й^{(3)}=2) + F_4(Й^{(4)}=3,\\ R(Й^{(3)}=0) - Z(Й^{(3)}=0) - C_n + F_4(Й^{(4)}=1)\end{matrix}\right\}$$

6.5 ва 6.6 жадвалдаги берилганлардан фойдаланиб куйидагиларни топамиз

$$F_3(Й_1^{(3)}) = \max\left\{\begin{matrix}75-25+70\\80-20-40+85\end{matrix}\right\} = 120, U^0 = U_1;$$

$$F_3(Й_2^{(3)}) = \max\left\{\begin{matrix}65-30+70\\80-20-40+85\end{matrix}\right\} = 105, U^0 = U_2.$$

Охирги тенгликдан куриниб турибдики $F_3(U_2^{(3)}) = 105$ да бошкарув шартли оптимал ечимлардан Й$_1$ ёки Й$_2$ кайсисини олмайлик ускуналарни ишлаш муддати беш йилликнинг учинчи йили бошида ишлаш муддати 2 йилни ташкил килгани учун мехнат унумдорлиги бир хил булади. Хосил булган натижаларни 6.8 жадвалга ёзиб оламиз.

6.8 жадвал

Ускуналарнинг ишлаш муддати (йил хисобида)	$F_3(\text{Й}^{(3)})$ функциянинг киймати (минг сум хисобида)	Шартли оптимал ечимлар
1	120	U_1
2	10	U_2

Беш йиллик иккинчи йилининг бошида ускуналардан фойдаланиш муддати 1 йил булади, Й$^{(2)}$=1. Бу ерда ускунани алмаштириш керакми деган савол туђилади. Бу саволга жавоб бериш учун куйидагиларни хисоблаймиз:

$$F_2(U_2^{(2)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\text{Й}^{(2)}=1) - Z(\text{Й}^{(2)}=1) + F_3(\text{Й}^{(3)}=2) \\ R(\text{Й}^{(2)}=0) - Z^{(3)}(\text{Й}^{(2)}=0) - C_n + F_3(\text{Й}^{(3)}=1) \end{Bmatrix} =$$

$$=\max\begin{Bmatrix} 75-25+105 \\ 80-20-40+120 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 155 \\ 144 \end{Bmatrix} = 155, U_1;$$

Бу натижага асосланиб куйидаги жадвални тузамиз.

6.9 жадвал

Ускуналарнинг ишлаш муддати (йил хисобида) Й $^{(2)}$ йил	$F_2(\text{Й}^{(2)})$ фунциянинг киймати (минг сум хисобида)	Шартли оптимал ечимлар
1	155	U_1

Масаланинг шартига кура беш йилликнинг бошида ускуналарни янги ускуналар билан алмаштириш шарт эмас. Демак, бошкарув вектори ёки шартли оптимал ечим U_1 булади.Корхонанинг даромади эса
х сум

Демак корхонанинг максимум даромади F$_1$(Й$^{(1)}$)=215 сумни ташкил килади. Шундай килиб корхона ускуналарини алмаштиришнинг оптимал режасини куйидаги жадвал оркали ифодалаш мумкин.

6.10 Жадвал

	Ускуналарни ишлаш йиллари				
	1 йилда	2 йилда	3 йилда	4 йилда	5 йилда

Масала-нинг оптимал ечимлари	Ускуналарни алмаштириш керак эмас	Ускуналарни алмаштириш керак эмас	Ускуналарни алмаштириш керак	Ускуналарни алмаштириш керак эмас	Ускуналарни алмаштириш керак эмас

Масала 6.4. Катта эхтиёжга эга булган махсулотни ишлаб чикариш учун учта корхона капитал курилишига С=700 минг сум маблађ ажратилган. Бу маблађдан учта корхонага мос x_i равишда x_1, x_2, x_3 минг сумдан ишлатганда капитал курилиш хажмини усишига мос равишда ишлаб чикарилган махсулотларни хажми усиши $F_i(x_i)$ сумни ташкил килади. Капитал курилишга ажратилган маблађни корхоналар уртасида шундай таксимлангки корхоналар ишга тушганда максимум даромад берувчи махсулотлар ишлаб чикариш кобилиятига эга булсин x_i ва $F_i(x_i)$ микдорлар куйидаги жадвалда берилган.

6.11 жадвал

Капитал курилишга ажратилган маблађнинг хажми x_i,(минг сум)	Капитал курилишга ажратилган маблађ хажмига махсулотлар ишлаб чикаришни усиш курсаткичи $F_i(x_i)$(минг хисобида).		
	1-корхона	2-корхона	3-корхона
0	0	0	0
10	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
50	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Ечиш. Масалани ечиш учун Беллманнинг узаро бођланиш рекурент формулаларини тузамиз. Бу масала учун узаро боѓланиш куйидаги функционал тенгламалар куринишида ёзиш мумкин:

$$\varphi_1(x) = \max_{0\le x_i \le x}\left[F_1(x_1)\right];$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0\le x_2 \le x}\left[F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\right]; \qquad (6.3)$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0\le x_{n-1} \le x}\left[F_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_n)\right].$$

(6.3) формулада $\varphi_i(x)(i=\overline{1,n-1})$ учта корхоналар 0 таксимланган х минг сум капитал маблаѓ натижасида усиш сурати(курсаткичи). Шунинг учун $f_n(x)$ нинг кийматини х=С=700 минг сум деб оламиз. Чунки учта корхона капитал курилишига С=700 минг сум ажратилган. (6.3) формулани 6.11 жадвал ёрдамида хисоблаб чиксак, у вактда биринчи корхона учун ажратилган шартли оптимал капитал маблаѓни аниклаш учун φ_1(х) ни х=0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 ва 700 кийматларида 6.11 жадвални куллаб хисоблаб чикамиз:

1. х=0, φ_1(0)=0. усиш йук яъни $U_1^0 = 0$
2. х=100, $\varphi_1(100) = \max\limits_{0\le x_1\le 100}\{0{,}30\} = 30, U_1^0 = 100$
3. х=200, $\varphi_1(200) = \max\limits_{0\le x_1\le 200}\{0{,}30{,}50\} = 50, U_1^0 = 200$
4. х=300, $\varphi_1(300) = \max\limits_{0\le x_1\le 300}\{0{,}30{,}50{,}90\} = 90, U_1^0 = 300$
5. х=400, $\varphi_1(400) = \max\limits_{0\le x_1\le 400}\{0{,}30{,}50{,}90{,}110\} = 110, U_1^0 = 400$
6. х=500, $\varphi_1(500) = \max\limits_{0\le x_1\le 500}\{0{,}30{,}50{,}90{,}110{,}170\} = 170, U_1^0 = 500$
7. х=600, $\varphi_1(600) = \max\limits_{0\le x_1\le 600}\{0{,}30{,}50{,}90{,}110{,}170{,}180\} = 180, U_1^0 = 600$
8. х=700, $\varphi_1(700) = \max\limits_{0\le x_1\le 700}\{0{,}30{,}50{,}90{,}110{,}170{,}180{,}210\} = 210, U_1^0 = 700$

Хисоблаш натижаларини ва шартли оптимал ечимларни куйидаги жадвалга ёзиб оламиз:

6.12 жадвал

Биринчи коронага ажратилган х капитал маблаѓнинг хажми (минг сум)	φ_i(х) максимум усиш курсаткичи (минг сум)	Биринчи корхонага ажратилган шартли оптимал маблаѓ (минг сум)
0	0	0
100	30	100
200	50	200

300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

6.11 ва 6.12 жадвалдаги натижаларга асосланиб иккинчи корхонага ажратилган капитал маблађнинг шартли оптимал хажмини хисоблаш учун $\varphi_2(x) = \max\limits_{0\le x_2 \le x}\left[F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\right]$ ни x=0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 ва 700 кийматларида хисоблаймиз.

1. x=0, $\varphi_2 = 0, U_2^0 = 0;$
2. x=100, $\varphi_2(100) = \max\limits_{0\le x_2\le 100}\left\{\begin{matrix} 0+50 \\ 50+0 \end{matrix}\right\} = 50, U_2^0 = 100;$
3. x=200, $\varphi_2(200) = \max\limits_{0\le x_2\le 200}\left\{\begin{matrix} 0+50 \\ 50+30 \\ 80+0 \end{matrix}\right\} = 80, U_2^0 = 100;$
4. x=300, $\varphi_2(300) = \max\limits_{0\le x_2\le 300}\left\{\begin{matrix} 0+90 \\ 50+50 \\ 80+30 \\ 90+0 \end{matrix}\right\} = 110, U_2^0 = 200;$
5. x=400, $\varphi_2(400) = \max\limits_{0\le x_2\le 400}\left\{\begin{matrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ 150+0 \end{matrix}\right\} = 150, U_2^0 = 400;$
6. x=500, $\varphi_2(500) = \max\limits_{0\le x_2\le 500}\left\{\begin{matrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ 190+0 \end{matrix}\right\} = 190, U_2^0 = 500;$

7. x=600, $\varphi_2(600)=\max\limits_{0\le x_2\le 600}\begin{Bmatrix}0+180\\50+170\\80+110\\90+90\\150+50\\190+30\\210+0\end{Bmatrix}=220, U_2^0=100;$

8. x=700, $\varphi_2(700)=\max\limits_{0\le x_2\le 700}\begin{Bmatrix}0+210\\50+80\\80+170\\90+110\\150+90\\210+30\\22+0\end{Bmatrix}=250, U_2^0=200.$

Олган натижаларни ва корхонага ажратиладиган капитал маблађининг шартли оптимал хажмларини 6.13 жадвалга ёзамиз.

6.13 жадвал

Иккита корхонага ажратиладиган капитал маблађ хажми, x,(минг сум)	φ_2(x) максимум усиш курсаткичи (минг сум)	Иккинчи корхонага ажратиладиган шартли оптимал маблађ, x_2^0, (минг сум)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500

600	220	100
700	150	200

6.11 ва 6.13 жадвалга асосланиб $\varphi_3(x) = \max\limits_{0 \le x_3 \le x}\left[F_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\right]$ функциянинг кийматларини хисоблаймиз. Бу ерда корхоналар сони $n=3$ булгани учун хисоблашни факат x=700 минг сум учун бажарамиз

$$X=700,\ \varphi_3(700) = \max_{0 \le x_3 \le 700}\begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 100+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ 220+50 \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270, U_3^0 = 600.$$

Демак, максимум усиш курсаткичи φ_3(700)=270 минг сумни ташкил килади. Бу курсаткичга эришиш мумкин факатгина учинчи корхона 600 минг сум, биринчи ва иккинчи корхоналарга эса 100 минг капитал маблађ ажратилса. 6.13 жадвалдан куриниб турибдики иккинчи корхонага 100 минг сум ажратиш керак.

Топшириклар

Динамик программалаш усулларини куллаб куйидаги масалаларни ечинг. (6.5-6.8).

Масала.6.5. Туртта корхона куриш учун 200 минг сум сармоя ажратилган. Хар бир корхона узига ажратилган сармоянинг микдорига бођлик равишда турли микдордаги даромадга эришади. Бу даромадлар 6.14жадвалда курсатилган.

6.14 жадвал

Корхоналарга ажратиладиган сармоя микдори (минг сум)	Корхоналарнинг даромади			
	Z_1(x)	Z_2(x)	Z_3(x)	Z_4(x)

0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
20	90	85	92	68

Мавжуд сармояларни корхоналараро шундай таксимлаш керакки, натижада хамма корхоналарнинг олган даромадларининг йиђиндиси максимал булсин.

Масала 6.6. Ишлаб чикариш жараёнини ташкил килиш учун корхона янги ускуналар билан йил бошида жихозланган. Ишдан чиккан ускуналар уз вактида хисобдан чикарилиб, унинг урнига нархи 10 минг сумга тенг булган янги ускуналар кўйилади. Ускуналарнинг иш унумдорлиги вакт утишига бођлик булиб, унга кетадиган харажатлар куйидаги жадвалда курсатилган.

6.15 жадвал

	Ускуналарни ишлаш вакти (й), (йил хисобида)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
‘Й’ иш муддатига эга булган ускунани бир йилда ишлаб чикарилган махсулотларнинг нархи R(Й) (минг сум)	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Ускуналарни таъмирлаш ва саклаш учун кетадиган бир йиллик харажатлар, Z(Й), (минг сум)	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

Жадвалда берилган муддатга корхона ускуналарини алмаштиришнинг оптимал режасини тузинг.

Масала 6.7. 6.2 масалани шартига асосан капитал курилишга ажратилган маблађ С=100 минг сумни ташкил этади. Бу маблађни туртта корхоналарга таксимлашнинг оптимал режасини тузинг. Дастлабки берилганлар (x_i ва $F_i(x_i)$ кийматлар) 6.16 жадвалда берилган.

6.16 жадвал

Капитал курилишга ажратилган маблађнини хажми, x_i, (минг сум)	Капитал курилишга ажратилган маблађ хажмига асосан махсулотлар ишлаб чикаришнинг усиш курсаткичи $F_i(x_i)$(минг сум)			
	1-корхона	2-корхона	3-корхона	3-корхона
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Масала 6.8. Омборни умумий хажми W=90 м^3 . Фирмага хажмлари v_1= 24 м^3,v_2=19 м^3,v_3=16 м^3 булган контейнерлар билан юк олиб келинди. Бу контейнерларнинг хар бирининг нархи мос равишда c_1=960 сум, c_2=500 сум, c_3=250 сум. Омборга контейнерларни шундай жойлаштирингки юклар максимум кийматга эга булсин.

VII БОБ[1]

Чизиксиз программалаш

1. Чизиксиз программалаш масалаларининг иктисодий ва геометрик талкини

Фараз килайлик бизга юкларни оптимал жойлаштириш масалалари берилган бўлсин вактгача бундай масалаларни

ечганда хар бир ишлаб чикарилган махсулот максимал булиши учун ишлаб чикариш харажатларини узгармас деб хисоблаган эдик. Бундан кейин бу харажатларни узгарувчи (узгармас эмас) деб караймиз. Ишлаб чикариш харажатлари ишлаб чикарилган махсулотлар хажмига пропорционал эмас. Ишлаб чикарилган махсулотлар хажми x_i-чи корхона учун x_i, корхона харажатлари эса $f_i(x_i)$ функцияга тенг булади. Ишлаб чикариш куввати эса хар хил булиши мумкин (бутун сонли, каср сонли ва х.к.).

Натижада ушбу иктисодий масала келиб чикади.

Куйидаги шартлар:

1. $X_i \geq 0$ (мусбат микдорда махсулотлар ташилган);
2. $X_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ (ишлаб чикарилган махсулотлар тула истемолчиларга етказилган);
3. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = B_i$ j=1, m (хар бир истеъмолчи энг камида талабини кондирувчи махсулотлар хажмини олади);

бажарилганда

$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) + \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$ F (x) функцияни минимумини топинг.

F(x) максад функция ва юкоридаги шартлардан бирортаси чизиксиз булса, бундай масалалар чизиксиз программалаш масалаларига киради.

Шундай килиб чизиксиз программалашнинг масаласи таърифини куйидагича ёзиш мумкин:

Куйидаги шартлар бажарилганда

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, ..., x_n) <= b_j, (i = \overline{1,k}) \\ q_j(x_1, x_2, ..., x_n) <= b_j, (j = \overline{k+1,m}) \end{cases} \quad (7.1)$$

$F(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (7.2)

функциянинг максимум(минимум) кийматини топинг. Бу ерда f ва q$_i$ n - узгарувчили функциялар , b_i-берилган сонлар , $\{\geq, \leq, =\}$белгилардан масаланинг шартига кура факат биттаси булади ва шу билан бир каторда турли муносабатларга турли белгилар мос булиши мумкин.

(7.1) ва (7.2) шартларда чегаравий шартлар катнашмаса , у вактда бу масалага шартсиз оптималлаштириш масаласи дейилади. Чегаравий шартлар (7.1) шартга киритилган булиши мумкин ёки булмаса (7.1), (7.2) масала куйидагича берилган булиши мумкин

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i, (i = \overline{1,m}); \qquad (7.3)$$

$$x_i \geq 0 \quad , (j = \overline{1,n}); \qquad (7.4)$$

$$F(x)=f(x_1, x_2,\ldots, x_n) \rightarrow \max(\min) \qquad (7.5)$$

Номаълумларнинг манфий эмаслик шарти (7.4) катнашмаган масалаларга, бу шартларни осонлик билан киритиш мумкин.

E_n Евклид фазосида (7.1) система масаланинг мумкин булган ечимлари сохасини ифодалайди.

Агар (7.1), (7.2) масалани мумкин булган ечимлари сохаси аникланган булса, у вактда бу соханинг энг юкори (энг четки) ёки булмаса энг куйи нукталари $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=R$ гиперболик сиртнинг (мувозанат текислигининг) утган нукталарига мос келади.

Бу нукталар ечимлар сохасини чегара нукталарида ёки булмаса соханинг ички нукталарида хам жойлашган булиши мумкин.

Чизиксиз программалаш масалаларининг геометрик талкини куйидаги боскичлардан иборат:

1. (7.1) масаланинг мумкин булган ечимлар сохаси аникланади (агар бу ечимлар сохаси буш тупламни ташкил килса, у вактда масала ечимга эга эмас);
2. $f(x_1, x_2,\ldots, x_i)=R$ гиперболик сирт чизилади;
3. Энг юкори ва энг куйи гиперболик мувозанат сирти аникланади ёки булмаса $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ юкоридан (куйидан) чегараланмагани аникланади (бу холда масала ечимга эга эмас);
4. Гиперболик мувозанат текислиги утган энг четки, энг куйи уриниб утган нукта аникланади ва бу нуктада $F(x)=f(x_1, x_2,\ldots, x_i)$ киймати аникланади;

Масала 7.1. Куйидаги шартлар

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2&\le 24\\ x_1+2x_2&\le 15\\ 3x_1+2x_2&\le 24\\ x_2&\le 4 \end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (7.7)$$

бажарилганда

$$F(x)=x_2-x_1^2+6x_1 \qquad (7.8)$$

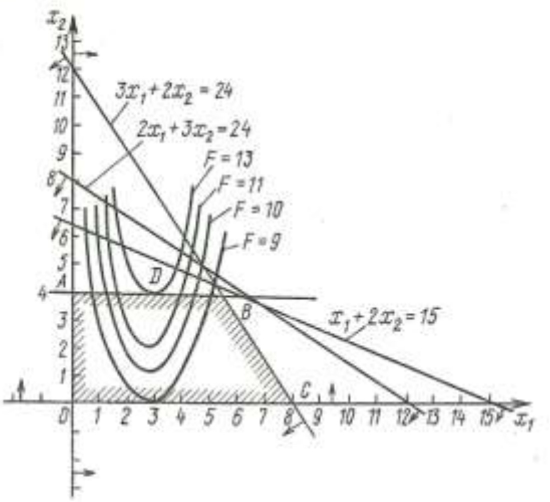
функциянинг максимум кийматини топинг

Ечиш. Олдин (7.6) системанинг аникланиш сохасини топамиз (Чизма 7.1.) Бу системанинг мумкин булган ечимлари сохаси OABC купбурчак булади. OABC купбурчакнинг кайси нуктасида (7.8) функция максимум киймат кабул килишини излаймиз. Бунинг учун $F=k= x_2-x_1^2 +6x_1$ мувозанат эгри чизиђидаги k-га кийматлар бериб чизамиз ва (7.8) эгри чизик параболадан иборат булиб k-га кийматларни усиб бориш тартибида: 9,10,11,13 берсак, бу парабола OX укидан борган сайин юкорига кутарилади. Натижада OABC купбурчагининг D нуктасида уринади. Демак D нуктада F(x) функция максимум кийматга эга булади.

$$\begin{cases} x_2-x_1^2+6x_1=13\\ x_2=4 \end{cases}$$

Бу истемани ечиб D нуктани топамиз D(3,4)

$$F_{D\max} = F_{D\max} = x_2-x_1^2+6x_1=4-9+6\cdot 3=13$$



7.1-чизма

Масала 7.2. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2\leq 7 \\ 10x_1-x_2\leq 8 \\ -18x_1+4x_2\leq 12 \end{array}\right\} \qquad (7.9)$$

$x_1, x_2 \geq 0$ (7.10)

бажарилганда

$F(x_1,x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$

функциянинг максимум ва минимум кийматларини топинг.

Ечиш: (7.9)-(7.10) масаланинг мумкин булган ечимлари сохаси ABC учбурчакдан иборат. Максад функция $F(x_1,x_2)=k$ деб олсак

$(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=к$ айлана хосил булади.

Бу айлананинг маркази E(3,4) нуктада булиб, радиуси $R=\sqrt{k}$ тенг.

Агар k-га кийматлар берсак $F(x_1,x_2)$ функциянинг кийматлари k усганда усади (k камайса $F(x_1,x_2)$ камаяди) ва D нуктада максадли функция ечимлари сохаси ABC учбурчакка уриниб, уриниш нуктасида минимал кийматга эга булади. D нукта координаталарини топиш учун куйидаги туђри чизикларнинг бурчак коэффицентларининг тенглигидан фойдаланамиз:

$10x_1$-x_2=8 ва айланага D нуктада утказилган уринма туђри чизик

$2(x_1-3)+2(x_2-4)x'_2=0$

Бу ердан

$x'_2=-(x_1-2)/(x_2-4)$

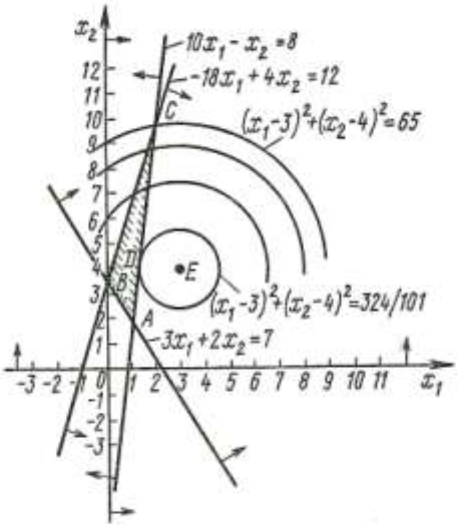
$x_2=10x_1+8$, к=10, x'_2=к=10 булгани учун куйидаги системани ечиб

$$\begin{cases} x_1+x_2=43 \\ 10x_1-x_2=8 \end{cases}$$

E(x_1^*, x_2^*) нуктанинг координаталарини топамиз:

x_1^*=123/101, x_2^*=422/101 .

Шундай килиб $F_{min}=(123/101-3)^2+(422/101-4)^2=324/101=3\frac{24}{101}$;



7-чизма

7.2 - чизмадан куриниб турибдики, агар (7.10) айлана радиуси k ни кийматларини ошириб борсак, у С нуктада максимум кийматга эга булади.

С нуктанинг координаталарини топиш учун куйидаги системани ечамиз:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases}$$

Натижада x_1^*=2 ; x_2^*=12 оптимал ечим булади, ва $F_{max}=f(2,12)=(2-1)^2+(12-4)^2=65.$

Демак F_{max}=65 максад функциянинг максимал кийматидир.

Масала: 7.3. Куйидаги шартлар

$$\left.\begin{array}{l} x_1, x_2 \ge 3, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 36. \end{array}\right\} \qquad (7.11)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (7.12)$$

бажарилганда

$$F(x_1,x_2)=12x_1+4x_2 \qquad (7.13)$$

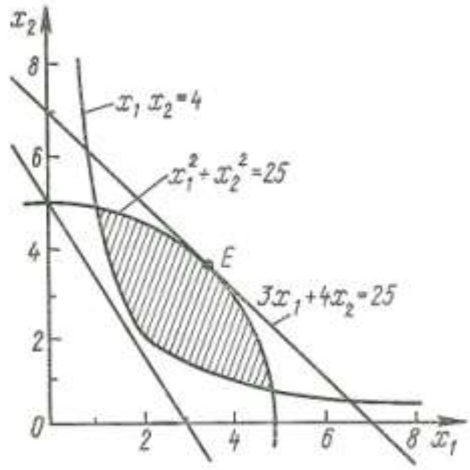
функциянинг максимум кийматини топинг

Ечиш. Бу масаланинг аникланиш сохаси 7.3 чизмада курсатилган. Чизмадан куриниб турибдики, максадли функция $x_1^2 + x_2^2 = 36$ максимум кийматга туђри чизик айланага уринган Е нуктада эришади. Е нуктанинг координаталарини топиш учун $12x_1+4x_2=k$ ва $x_1^2 + x_2^2 = 36$ айланага утказилган уринма туђри чизикларнинг бурчак коэфецентлари тенглигидан фойдаланамиз. Айлананинг тенгламасидан x_2 ни x_1 га нисбатан ошкормас функция деб олиб дифференциаллсак куйидаги хосил булади

$2x_1+2x_2 \cdot x'_2 =0$ бу ердан $x'_2 = -\frac{x_1}{x_2} =r=-3$

Демак уринма туђри чизикнинг тенгламаси $2x_1-6x_2=0$ ёки $x_1-3x_2=0$ булади.

Шундай килиб Е нуктанинг координаталарини топиш учун куйидаги системани



7.3-чизма

ечамиз

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ 9x_2^2 + x_2^2 = 36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ x_2 = \pm \dfrac{6}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Демак

$x_1^* = \frac{18}{\sqrt{10}}$, $x_2^* = \frac{6}{\sqrt{10}}$. оптимал ечим булиб,

$F_{\text{мах}}=\frac{18^2}{10}+\frac{6^2}{10}=36$ тенг.

Топшириклар

Чизиксиз программалаш масалаларини ечинг. (7.4-7.9)

Масала 7.4. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 \geq 4, \\ x_1^2+x_2^2 \leq 25. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=3x_1+4x_2$ функциянинг максимум кийматини топинг

Масала 7.5. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1+4x_2 \leq 12, \\ 2x_1+3x_2 \leq 24, \\ -3x_1+4x_2 \leq 12. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=x_1x_2$ -функциянинг максимум кийматини топинг

Масала 7.6. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2 \leq 12, \\ x_1-x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=9(x_1-5)^2+4(x_2-6)^2$ -функциянинг минимум кийматини топинг

Масала 7.7. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \\ x_1^2-2x_1+x_2^2-2x_2-34 \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=x_1x_2$ -функциянинг максимум кийматини топинг

Масала 7.8. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \\ x_1^2-4x_1+x_2^2-4x_2-68 \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=10x_1x_2$ -функциянинг максимум кийматини топинг.

Куйидаги масалаларнинг математик моделини тузинг (7.9-7.10).

Масала 7.9. Корхоналар тармокларини ривожлантириш учун 220 млн. сум маблађ ажратилган. Таксимлашнинг хар бир тури корхонага йил охирида аник даромад беришини хисобга олиб корхоналар уртасида ажратилган маблађни шундай таксимлангки, таксимланган капитал маблађ хар бир ишлаб чикариш тармођига йил охирида максимум даромад берсин (жадвал 7.1 каранг)

Жадвал 7.1

Корхо—налар	Капитал маблађнинг хажми (млн. сум)	Даромад λ (млн. сум)	Капитал маблађнинг хажми (млн. сум)	Даромад d (млн. сум)	Капитал маблађнинг хажми (млн.сум)	Даромад λ (млн. сум)
1	10 дан 30 гача	14.3	30 дан 60 гача	16.2	60 ва ундан куп	17.2
2	10 дан 40 гача	13.5	40 дана 70 гача	17.8	70 ва ундан куп	18.3
3	10 дан 50 гача	18.4	50 дан 60 гача	19.3	60 ва ундан куп	19.4

§2. Лагранжнинг купайтмалар услуби

Фараз килайлик бизга (7.1), (7.2) масалалар берилган булсин ва система (7,1)да факат тенгламалар катнашсин (номанфийлик шарти катнашсин). Шу билан бир каторда $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ функция ва улардан олинган хусусий хосилалари билан бирга узлуксиз булсин, яъни

$$g_i\,(x_1,x_2,\ldots x_n)= \ell_i,\ i=\overline{1,n} \qquad (7.14)$$

тенгламалар системасини каноатлантирувчи ва

$$F(x)=f(x_1,x_2,\ldots x_n) \qquad (7.15)$$

функцияга максимум (минимум) киймат берувчи ($x_1,x_2,\ldots x_n$) ечимлар тупламини топиш керак булсин. Математик анализда (7.14), (7.15) масофага шартли экстремум ёки оптималлаштиришнинг классик масаласи дейилади. Бу масалани ечиш учун X функцияга $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ узгарувчиларни киритамиз. Бу узгарувчиларга Лагранж купайтувчилари деб айтилади. Шундай килиб юкоридагиларга асосан Лагранж функциясини тузамиз.

$$F(X_1, X_2,..., X_n, \lambda_1, \lambda_2,...\lambda_m) = f(X_1, X_2,..., X_n) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[\text{в}_i - q_l(X_1, X_2,..., X_n)\right] \qquad (7.16).$$

Лагранж функциясидан куйидаги хусусий хосилаларни оламиз

$$\frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2},..., \frac{\partial F}{\partial X_m}, \text{ва}\, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2},..., \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \qquad (7.17)$$

ва куйидаги n+m номалумли n+m тенгламалар системасини

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0, (j = 1,\overline{m}); \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \text{в}_i - g_i(X_1, X_2,..., X_n) = 0(i = 1,\overline{m}), \end{aligned}\right\} \qquad (7.18)$$

$x_1,x_2,\ldots,x_n$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ ечимларни топамиз.

(7.18) системанинг хар кандай ечимлари шундай A($x_1,x_2,\ldots,x_n$) нуктани аниклайдиким, f($x_1,x_2,\ldots,x_n$) максад функция экстремумга эга булиши мумкин. Шундай килиб (7.18) системанинг ечимларида (7.15) функция экстремал кийматларга эга булиши мумкин. Кейинги текширишлар шартсиз экстремумларни текшириш каби олиб борилади.

Демак (7.14), (7.15) масалаларни Лагранжнинг кўпайтмалар усули билан экстремал нукталарни топиш куйидаги холларни уз ичига олади:

1. Лагранж функцияси тузилади;
2. Лагранж функциясидан x_j ва λ_i буйича хусусий хосилалар олиниб, нолга тенглаштирилади;
3. (7.18) системани ечиб f($x_1,x_2,\ldots,x_n$) максад функция экстремумга эга булиши мумкин булган нукталари топилади;

4. Экстремумга бўлиши мумкин булган нукталар ичидан экстремумга эга булган нукталарни топиб, максадли функциянинг бу нукталардаги киймати хисобланади.

Масала 7.11. Ишлаб чикариш корхонасининг режаси буйича 180 та буюм чикарилиши мўлжалланган. Бу буюмларни ишлаб чикариш учун икки хил технологик жараён ишлатилади. Биринчи технологик усулни куллаб x_1-дона буюмларни тайёрлаганда харажатлар $4x_1+x_1^2$ сумни, иккинчи хил жараён x_2 дона буюмларни тайёрлаганда эса харажатлар $8x_2+x_2^2$ сумни ташкил этади. Корхона режасини шундай тузинки икки хил усул билан ишлаб чикариш буюмларга кетган харажатлар минимал булсин.

Ечиш. Масаланинг шарти буйича $F(x)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2$ функциянинг минимал кийматини $x_1+x_2=180$, $x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$ шартлар бажарилганда топиш керак,

яъни $x_1+x_2=180$, (7.19)

$x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$ (7.20)

шартлар бажарилганда

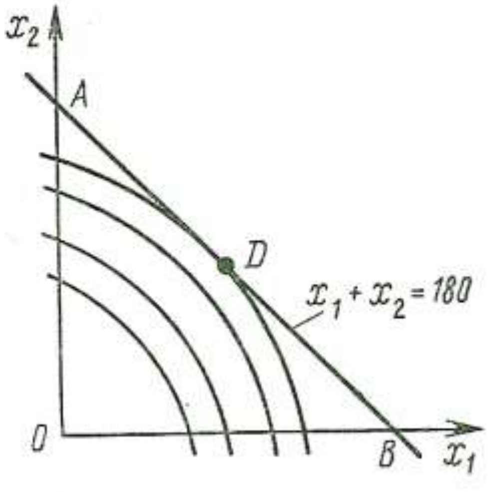
$F(x)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2=(x_1+2)^2+(x_2+4)^2-20\to \min$.
(7.21)

Олдин масалани геометрик усулни куллаб ечамиз. (7.21) функция, маркази (-2;-4) нуктада булган айланадан иборат. Бу масаланинг мумкин булган ечимлар сохаси $x_1+x_2=180$ туђри чизик ташкил килган АВ кесма устида жойлашган булиб, (7.4 чизма) сатх чизиђини маркази Е(-2;-4) нуктада жойлашган айланадан иборат. Ушбу

$(x_1+2)^2+(x_2+4)^2=C$ (7.22)

айлананинг $x_1+x_2=180$ туђри чизикка уринган D нуктада максад функция F(x) минимум кийматга эга булади.

(7.22) тенгламадаги С-га кийматлар бериб борсак, айлана $x_1+x_2=180$ туђри чизикка D нуктада уринади.



7.4-чизма

Айланага D нуктада утказилган уринма чизикнинг бурчак коэффициенти АВ туђри чизикнинг бурчак коэффициентига тенг булиб к=-1 тенг.

Агар айланинг тенгламасидаги x_2 –ни ошкормас функция деб, x_1 аргумент буйича хосила олсак куйидаги хосил булади.

$4+2x_1+8x_2^1+2x_2x_2^1=0$ ёки $x_2^1=-\frac{2+X_1}{4+X_2}$. x^1 хосила

Юкордагиларга асосан $к=x_2^1=-1$

Демак $-\frac{2+X_1}{4+X_2}=-1$ ёки $x_1-x_2=2$.

D нуктанинг координаталарни топиш учун куйидаги системани ечамиз

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 2, \\ X_1 + X_2 = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 91, \\ X_2 = 89 \end{cases}$$

Бу ердан оптимал ечимни $x_1^*=91$, $x_2^*=89$ га тенг. Шундай килиб биринчи хил технологик жараён билан $x_1^*=91$, иккинчи технологик жараён билан $x_2^*=89$ дона буюм ишлаб чикарилганда максад функция энг кам киймат кабул килади ва харажатлар $F_{min}=4\cdot91+91^2+8\cdot89+89^2=17278$ сумни ташкил этади.

Энди (7.19)-(7.21) масалани Лагранжнинг купайтмалар усулини куллаб ечамиз. Бунинг учун олдин Лагранж функциясини тузамиз

$F(x_1,x_2,\lambda)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2+\lambda(180-x_1-x_2)$

Энди

x_1, x_2, λ буйича хусусий хосилаларни топамиз ва хусусий хосилаларни нолга тенглаштирамиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.22)$$

Системадаги биринчи ва иккинчи тенгламалардан λ-ни топиб олиб тенглаштирсак куйидаги система хосил булади

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 180. \end{aligned}\right\}$$

Бу системани ечиб $D(x_1^*,x_2^*)$ нуктанинг кординаталарини топамиз: $x_1^*=91$, $x_2^*=89$.

Бу нукта экстремумга шубхали нукта хисобланади.

Иккинчи тартибли хусусий хосилаларни (7.22)-дан топамиз

$$\left.\begin{aligned} &A = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_1} = 2, \\ &B = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_2} = 0, \\ &C = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (8 + 2x_2 - \lambda)'_{x_2} = 2. \end{aligned}\right\}$$

Икки узгарувчи функция экстремуми хакидаги теоремага асосан

$$A=\frac{\partial^2 F}{\partial x_1}=2>0 \qquad ва \qquad \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0$$

булгани учун D(91;89) нуктада F (x_1,x_2) функция минимумга эга.

Масала 7.12. Куйидаги шартлар

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=2, \\ x_2+x_3=2. \end{array}\right\}$$

бажарилганда

$F=x_1x_2+x_2x_3$ функциянинг шартли экстремумга эга булган нуктасини топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига асосан Лагранж функцияси куйидаги куринишга эга

$F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)=x_1x_2+x_2x_3+\lambda_1(x_1+x_2-2)+\lambda_2(x_2+x_3-2)$

Бу функциядан 1-чи тартибли хусусий хосилаларни олиб нолга тенглаштирсак куйидаги система хосил булади:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_1}=x_2+\lambda_1=0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=x_1+x_2+\lambda_1+\lambda_2=0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3}=x_2+\lambda_2=0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=x_1+x_2-2=0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=x_2+x_3-2=0. \end{array}\right\}$$

Бу системадаги биринчи ва учунчи тенгламадан $\lambda_1=-x_2$, $\lambda_2=-x_2$. Шунинг учун

$$\left.\begin{array}{l} x_1-2x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2=2, \\ x_2+x_3=2. \end{array}\right\}$$

Бу системани ечсак $x_1=x_2=x_3=1$ булади. У вактда $f=1\cdot 1+1\cdot 1=2.$

Масала 7.13. Куйидаги шартда $x_1+x_2=7$, $f(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_3-3)^2$ функциянинг $0\leq x_1\leq 5$, $0\leq x_2\leq 10$ сохада шартли экстремумини текширинг.

Ечиш. Лагранж функциясини тузамиз.

$F(x_1,x_2,\lambda)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-\lambda(3-x_1-x_2)$

$F(x_1,x_2,\lambda)$ функциядан x_1,x_2,λ буйича хусусий хосилани олиб нолга тенглаштирсак куйидаги система хосил булади.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 2) - \lambda = 0,\\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 3) - \lambda = 0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= Z - x_1 - x_2 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Системанинг биринчи ва иккинчи тенгламаларидан λ-ни топиб тенглаштириб олсак, куйида хосил булади

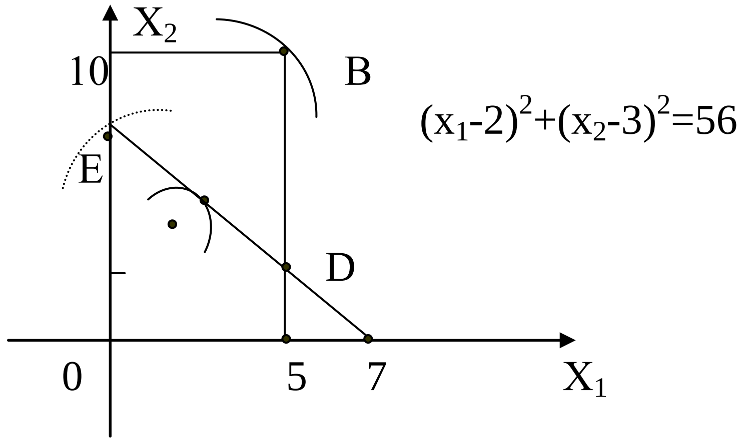
$2(x_1-2)=2(x_2-3)$.

Бу тенгламани системанинг учинчи тенгламаси билан биргаликда ечсак,

$$\begin{cases}2x_1 - 2x_2 + 2 = 0,\\ x_1 + x_2 - 7 = 0.\end{cases}$$

$x_1=3$ ва $x_2=2$ ечимлар топилади.

Масаланинг геометрик шаклини чизсак куйидаги 7.5 чизма хосил булади.



7.5-чизма

Системанинг аникланиш сохаси ОАВС ёпик соха. Шунинг учун глобаль ва локаль экстремумлар мавжуд. Бођланиш тенгламаси DE кесма ОАВС туртбурчак ичига жойлашган. Демак $F(x_1,x_2)$ функциянинг кийматларини DE кесмада ётган нукталарда таккослаб текширамиз. $(x_1-2)^2+(x_2-3)^2=k$ мувозанат чизиђи тенгламаси булиб маркази $O_1(2;3)$ нуктада жойлашган. Чизма 7.5 дан куриниб турибдики шартсиз экстремумга $O_1(2;3)$ ва B(5;2) нукталарда эришилади:

$F_{0_1\,\min}=(2-2)^2+(3-3)^2=0,\qquad f_{B\max}=(5-2)^2+(10-3)^2=9+49=58.$

Шу билан бир каторда $F_{0_1\,min}=0$ хам локаль хам глобаль минимум булади. $F_B=58$ эса глобаль максимум эга булади.

Агар факат DE туђри чизик устида ётган нукталарни куриб чиксак, шартли глобаль максимум E(0,7) нуктада эришилади ва $F_{Emax}=(0-2)^2+(7-3)^2=20$. G нуктанинг координаталарини топиш учун айланага уринма чизик тенгламасини тузамиз

$F^{1^1}_{X_2}(x_1,x_2)=2(x_1-2)+2(x_2-3)x_2^1-0$, $\quad 2(x_1-2)+2(x_2-3)\cdot(-1)=0$,

$x_2^1=k_{DE}=-1$ булгани учун $\quad 2x_1-2-2x_2+6=0$,

$2x_1-2x_2+2=0$.

ва куйидаги системани ечамиз:

$$\begin{array}{ll} & x_1-x_2+1=0 \\ + & \\ & x_1+x_2-7=0 \\ \hline & 2x_1-6=0 \\ & x_1=3,\ x_2=4. \end{array}$$

Демак G нуктанинг координаталари $x_1=3$, $x_2=4$ булиб, $F_{G\ min}$ $(3-2)^2+(4-3)^2=1+1=2$. Шундай килиб G стационар нуктанинг координаталарини топдик.

Куйидаги масалаларда (7.18)-(7.19) Лагранж усулини куллаб стационар нукталарни топинг ва шартли экстремумларни аникланг.

7.14 $F=x_1^2+x_2^2$, $\quad x_1+x_2=1$ булганда

7.15 $F=3x_1^2+2x_2^2-3x_1+1$, $\quad x_1^2+x_2^2=4$ булганда,

7.16 $F=2(x_1-1)^2+3(x_2-3)^2$, $\quad x_1+x_2\le 10$ сохада $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$ $x_1+x_2=6$ булади,

7.17 $F=x_1^2-x_2^2$ $\quad x_1^2+x_2^2\le 16$ сохада $x_1-x_2=4$ булганда,

7.18 $F=x_1+x_2$, $\quad 0\le x_1\le 6$, $0\le x_2\le 4$ сохада $(x_1-4)^2+(x_2-3)^2=4$ булганда,

7.19 $F=(x_1-3)^2+(x_2-5)^2$, $\quad x_1^2+x_2^2\le 10$ сохада $x_2-2x_1=5$ булганда.

Куйидаги масалаларда (7.20-7-24) Лагранж услубини куллаб шартли экстремумларни текшириб, стационар нукталарни топинг:

7.20 $F(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1$ булганда;

7.21 $F(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1+x_2+x_3=6$ ва $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=12$ булганда;

7.22 $F(x_1,x_2)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$ булганда;

7.23 $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$, $x_1+x_2+x_3+x_4=4$ ва $x_i \geq 0$, $i=\overline{1,4}$ булганда;

7.24 $F(x_1,x_2,x_3)= 2x_1+3x_2^2+x_3^2$, $x_1+x_2+x_3=8$ ва $x_i \geq 0$, $i=\overline{1,3}$ булганда;

§3 Каварик программалаш масалалари

Куйидаги шартларни

$q_i(x_1,x_2,\ldots x_n) \leq b_i \quad (i=1,m)$ (7.23)

$x_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,n})$ (7.24)

$F(x)=f(x_1,x_2,\ldots x_n) \rightarrow \max$ (7.25)

каноатлантирувчи чизиксиз программалаш масаласи берилган булсин. Бу ерда f ва q_i - $x_1,x_2,\ldots x_n$ узгарувчиларда бођлик функциялар. Юкорида курсатилган масалани ечиш учун биронта умумий усул йук. Шунинг учун f ва q_i функцияларга хар хил шартлар куйиб чизиксиз программалаш масалаларини керакли усуллар ёрдамида ечиш мумкин.

Хусусий холда (7.25) функцияга каварик (ботик) функция, (7.24) ва (7.23) каварик соха шартлари бажарилганда масалаларни ечиш мумкин.

Шунинг учун куйидаги айрим зарур таъриф ва теоремаларни исботсиз келтирамиз.

Таъриф 3.1. Агар $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ функция $G \subset E_n$ каварик тупламда аникланган булиб, ихтиёрий $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ нукталар ва $0 \leq \lambda \leq 1$ сон учун

$$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1) \qquad (7.26)$$

тенгсизлик уринли булса, $f(x)$ функция пастга каварик дейилади.

Таъриф 3.2. Агар f(x) функция $G \subset E_n$ каварик тупламда аникланган булиб, ихтиёрий $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ нукталар ва $0 \leq \lambda \leq 1$ сон учун

$$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1) \geq \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1) \qquad (7.27)$$

тенгсизлик уринли булса, f(x) функция юкорига каварик дейилади.

Таъриф 3.3. Агар $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ каварик (ботик) функция булиб $q_i(x)$, $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$ $(i=1,m)$ каварик булса, у вактда (7.23) – (7.25) масалага каварик программалаш масаласи дейилади.

Теорема 7.1. Каварик программалаш масаласининг исталган локаль максимум (минимуми) глобал максимум (минимум) булади.

Таъриф 3.4. L(x) функцияга (7.23) – (7.25) каварик программалаш масаласининг Лагранж функцияси дейилади, бу ерда

$$L(x)=L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=f(x_1,x_2,\dots x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i-q_i(x_1,x_2,\dots,x_n)], \qquad (7.28)$$

$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ – Лагранж купайтувчилари.

Таъриф 3.5. $(x_0,\lambda_0)=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0)$ нукта Лагранж функциясининг эгар нуктаси дейилади, агар барча $x_i \geq 0$ $(i=1,m)$ ва $\lambda_i \geq 0$ $(i=1,m)$ – лар учун $L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0) \leq L(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots,\lambda_m^0) \leq L(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ булса,

Каварик функцияларнинг айрим хоссалари:

1. G каварик тупламда $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ функция пастга каварик булса, ихтиёрий хакикий b сон учун $f(x) \leq b$, $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$ тенгсизликни каноатлантирувчи нукталар туплами каварик булади.

2. G каварик тупламда $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ функция юкорига каварик булса, b ихтиёрий сон булганда $f(x_1,x_2,\dots x_n) \geq b$ тенгсизликни каноатлантирувчи нукталар туплами каварик булади.

3. Иккита G_1 ва G_2 каварик тупламнинг кесишмаси хам каварик туплам булганлиги сабабли: G каварик тупламда аникланган $q_i(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ $(i=1,m)$ функциялар пастга (юкорига) каварик булиб b_i $(i=1,m)$ ихтиёрий сонлар булганда.

$q_i(x_1,x_2,\ldots,x_m) \le b_i$ $(q_i(x_1,x_2,\ldots,x_m) \ge b_i)$, $(i=\overline{1,m})$,
тенгсизликлар системасини каноатлантирувчи нукталар туплами пастга (юкорига) каварик туплам булади (1-чи ва 2-чи хоссаларга асосан).

4. G каварик тупламда аникланган $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(i=\overline{1,m})$ функция пастга (юкорига) каварик булса, уларнинг номанфий чизикли комбинациясидан иборат булган

$$q(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i (x_1,x_2,\ldots,x_m) \qquad (7.29)$$

функция хам пастга (юкорига) каварик булади.

5. G каварик тупламда аникланган $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция пастга (юкорига) каварик булиши учун у уз ичига олган номаълумларнинг ихтиёрий бири буйича, колганларининг белгилаб олган (мисол учун $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\ldots,\overline{x_n}$) кийматларида, пастга (юкорига) каварик булиши зарур ва етарлидир.

6. Агар $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $(i=\overline{1,n})$ функциялар G каварик тупламда аникланган каварик функциялар булса, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\max f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $(1\le i\le m)$ функция хам каварик булади. Агар камида битта $x\in G$ нуктада $q_i(x) > bi$ $(i=\overline{1,m})$ тенгсизлик бажарилса, яъни Слейтер шарти бажарилса, у вактда куйидаги теорема уринли булади. (Кун – Таккер теоремаси).

Теорема 3.1. $x=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\ge 0$ нукта (7.23) – (7.25) масаланинг оптимал ечими булиши учун бу нуктада

$$\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\ldots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots\lambda_m^0)}{\partial x_j} \le 0, \qquad (7.30)$$

$$x_j^0\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\ldots x_n^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0\ge 0, \qquad (7.31)$$

$$\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\ldots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots\lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} \ge 0, \qquad (7.32)$$

$$\lambda_i^o\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\ldots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\ldots\lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad \lambda_i^o \ge 0 \qquad (7.33)$$

$(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Масала 7.25. Куйдаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{array}\right\} \qquad (7.34)$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \qquad (7.35)$$

$$f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2 \qquad (7.36)$$

f-функциянинг максимум кийматини топинг.

Ечиш. $f(x_1,x_2)$ функция ботик функция, чунки $f_1(x_1,x_2)=2x_1+4x_2$ чизикли функциялар йиђиндисидан иборат (Шунинг учун уни ботик функция сифатида куриш мумкин) ва $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ функция эса манфий аникланган функция булиб ботик функция хисобланади. (7.34) система эса чизикли тенгсизликлар системасидан иборат.

Демак Кун – Таккер теоремасидан фойдаланса булади.

Бошлаб Лагранж функциясини тузамиз.

$L=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+\lambda_1 \; (8-x_1-2x_2)+\lambda_2(12-2x_1+x_2)$

Лагранж функцияси $L(x_1,x_2, \lambda_1,\lambda_2)$ га (7.30)-(7.33) шартларни кулласак, куйидагилар хосил булади.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + \lambda_2 \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (7.37)$$

ва

$$\left.\begin{array}{l} x_1\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ x_2\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ \lambda_2\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0. \end{array}\right\} \qquad (7.38)$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; \lambda_1 \ge 0, \;\; \lambda_2 \ge 0. \qquad (7.39)$$

(7.37) системани куйидаги куринишда ёзиб оламиз.

$$\left.\begin{aligned} 2X_1+\lambda_1+2\lambda_2 &\geq 2,\\ 4X_2+2\lambda_1-\lambda_2 &\geq 4,\\ X_1+2X_2 &\leq 8,\\ 2X_1-X_2 &\leq 12. \end{aligned}\right\} \qquad (7.40)$$

(7.40) системага кушимча мусбат базисли узгарувчилар киритиб куйидаги системани хосил киламиз (ϑ_1, ϑ_2,W_1,W_2)

$$\left.\begin{aligned} 2X_1+\lambda_1+2\lambda_2-\vartheta_1 &= 2,\\ 4X_2+2\lambda_1-\lambda_2-\vartheta_2 &= 4,\\ X_1+2X_2+W_1 &= 8,\\ 2X_1-X_2+W_2 &= 12. \end{aligned}\right\} \qquad (7.41)$$

$x_1\geq0$, $x_2\geq0$, $\lambda_1\geq0$, $\lambda_2\geq0$, $\vartheta_1\geq0$, $\vartheta_2\geq0$,$W_1\geq0$,$W_2\geq0$. (7.42)

(7.41) тенгликни хисобга олиб куйидагини ёзиб олиш мумкин:

$\vartheta_1x_1=0$, $\vartheta_2x_2=0$, $W_1\lambda_1=0$, $W_2\lambda_2=0$. (7.43)

Агар (7.41) системанинг базисли ечимларини (7.43) шартларни хисобга олиб ечсак Лагранж функциясининг эгарли нуктаси топилади ва шу билан масаланинг оптимал ечими аникланади. (7.41) системанинг базисли ечимларини топиш учун чизикли программалашнинг сунъий базис услубидан фойдаланамиз. Бу услубдан фойдаланиш учун системадаги биринчи ва иккинчи тенгламаларга кушимча z_1 ва z_2 мусбат узгарувчилар киритиб чизикли программалашнинг куйидаги масаласига келтирамиз

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+\lambda_1+2\lambda_2-\vartheta_1+z_1 &= 2,\\ 4x_2+2\lambda_1-\lambda_2-\vartheta_2+z_2 &= 4,\\ x_1+2x_2+W_1 &= 8,\\ 2x_1-x_2+W_2 &= 12. \end{aligned}\right\} \qquad (7.44)$$

$\overline{f}=-Mz_1-Mz_2\rightarrow\max$ (7.45)

$x_1\geq0$, $x_2\geq0$, $\lambda_1\geq0$, $\lambda_2\geq0$, $W_1\geq0$,$W_2\geq0$, $z_1\geq0$, $z_2\geq0$ (746)

(7.44) – (7.46) масалани ечиш пайтида хамма вакт (7.43) шартни хисобга олиб (7.44) системанинг ечимини топамиз.

Жадвал 7.1

№	Базис	C_o	P_o	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	M
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	Z_1	z_2
1	z_1	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	z_2	-M	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	w_1	O	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	w_2	O	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			-										
6			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0

Жадвал 7.2

№	Базис	C_o	P_o	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	z_1	-M	2	2	0	1	2	-1	1	0	0	1	0	
2	z_2	0	1	0	1	½	-1/4	0	0	0	0	0	¼	
3	w_1	0	6	1	0	0-	½	0	-	1	0	0	-1/2	
4	w_2	0	13	2	0	1	-1/4	0	1/4	0	0	0	¼	
5			0	0	0	½	0	0	½	0	1	0	0	
			-			0			-					
6			-2	-2	0		-2	1	1/4	0	0	0	1	
						-1								
									0					

Жадвал 7.3

№	Базис	C_o	P_o	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	z_1	0	1	1	0	1/2	1	-	0	0	0	1/2	0	
2	z_2	0	1	0	1	0	0	1/2	0	0	0	0	0	
3	w_1	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
4	w_2	0	11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	

5			0	0	0	0	0	0 0	0	0	0	0	0	

Бу жадвалга асосан ечим куйидагиларга тенг $x_1^0=1$, $x_2^0=1$, $w_1=5$; $w_2=11$, $\lambda_1^0=\lambda_2^0=v_1=v_2=0$.

Юкоридагиларга асосан

$x_1^0\vartheta_1=0$, $x_2^0\vartheta_2=0$, $\lambda_1^0 w_1=0$, $\lambda_2^0 w_2=0$, $(x_0, \lambda_0)=(1,1,0\ \ 0)$ нукта (7.23)-(7.25) масала учун тузилган Лагранж функцияси учун эгар нуктаси булади.

Демак $x_1=1$, $x_2=2$ (7.23)-(7.25) масаланинг оптимал киймати $F_{max}=2\cdot 1+4\cdot 1-1-2=3$ га тенг.

Масала 7.26. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб $x^0=(1;0)$ нукта куйидаги чизиксиз программалаш масаласининг ечими эканлигини курсатинг.

$$\left.\begin{array}{l} 4X_1+5X_2\le 8, \\ 2X_1+X_2\le 4. \end{array}\right\}$$

$$X_1\ge 0, X_2\ge 0.$$

$F_{min}=f(x)=x_1^2-2x_1+3x_2^2$

Ечиш. $X^0=(1,0)$ нуктада Слейтер шартлари бажарилади. (Шартлар катьий тенгсизликка айланади). Демак бу холда $\lambda_0=1$ деб кабул килишимиз мумкин.

Юкоридаги асосий масала шартларига асосланиб Лагранж функциясини тузамиз

$L(x_1,x_2, \lambda_1, \lambda_2)=x_1^2-2x_1+3x_2^2-\lambda_1(8-4x_1-5x_2)- \lambda_2(4-2x_1-x_2)$,

$$X_i\ge 0,\quad i=\overline{1,2},\quad \lambda_i\ge 0,\quad i=\overline{1,2}.$$

Кун-Таккер шартларининг бажарилишини текшириб чиксак:

$$\frac{\partial L(X_1^0, X_2^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)}{\partial X_1} = (2X_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2)x^0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial X_2} = (6X_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2)x^0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X_1^0, X^0)}{\partial \lambda_1} = (4X_1 + 5X_2 - 8)X^0 = -4 < 0,$$

$$\frac{\partial L(X_1^0, \lambda_2^0)}{\partial \lambda_2} = (2x_1 + x_2 - 4)x^0 = -2 < 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial x_1} \cdot X_1^0 = 0, \frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial x_2} X_2^0 = 0, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial \lambda^0{}_{T1}} \cdot \lambda_1^0 = 0 \Rightarrow (-4) \cdot 0 \to \lambda_1^0 = 0,$$

$$\frac{\partial L(X_2^0, X^0)}{\partial \lambda_2} \cdot \lambda_2^0 = 0 \Rightarrow (-2)\lambda_2^0 \Rightarrow 0 \Rightarrow \lambda_2^0 = 0.$$

Шундай килиб (X^0, λ^0)=(1,0;0;0) нукта Кун-Таккернинг хамма шартларини каноатлантиради. Демак (X^0, λ^0)=(1,0;0;0) нукта Лагранж функциясининг эгар нуктаси булади. Шунинг учун X^0 (1;0) нукта дастлабки берилган чизиксиз программалаш масаласини ечими булади ва

$f_{min}=1^2-2\cdot1+3\cdot0=-1$ га тенг.

Топшириклар

Масала 7.27. Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб X^0(0,8; 0,4) нуктанинг куйидаги каварик программалаш масаласининг ечими эканлигини курсатинг;

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$f_{max}=f_1(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$ (7.28)

Куйидаги каварик программалаш масалаларини ечинг

Масала 7.28.

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \le 12, \\ &3x_1 + x_2 \le 15, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$f(x_1,x_2)= x_1+4x_2+x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2\rightarrow\max$

Масала 7.29

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 7, \\ &x_2 \le 5, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$f(x_1,x_2)= x_1+8x_2-x_1^2-x_2^2\rightarrow\max$

Масала 7.30

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \le 12, \\ &-x_1 + x_2 \ge -8, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$f(x_1,x_2)=-2\, x_1+8x_2-x_1^2-x_2^2\rightarrow\max$

Масала 7.31

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ &x_2 \le 12, \\ &x_1 + 2x_2 \le 14. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$f(x_1,x_2,x_3)=0\cdot x_1+2x_2+3x_3- x_1^2-x_2^2-2x_3^2\ \max.$

§4. Квадратик программалаш масалалари

Квадратик программалаш масаласи каварик программалаш масаласининг хусусий бир холидир. Факат унинг математик моделидаги чегаравий шартлар чизикли тенглама ва тенгсизликлардан, максад функцияси эса умумий холда чизикли ва квадратик формаларнинг йиђиндисидан иборат булади:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} bi, \quad i = \overline{1,m} \qquad (7.47)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (7.48)$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \ldots d_{nn}x^2_{nn} \to \max \qquad (\min).$$

(7.49)

(7.47)-(7.49) квадратик программалаш масалаларини ечиш учун айрим зарур булган таъриф ва теоремаларни исботсиз келтирамиз.

Таъриф 4.1. Куйидаги куринишдаги

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \ldots d_{nn}x_n^2 + 2d_{12}x_1x_2 +$$

$$+2d_{13}x_{13} + \ldots + 2d_{n-1}x_{n-1} \qquad (7.50)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ узгарувчиларга нисбатан узгарувчи сонли функцияга квадратик форма дейилади.

(7.50) формани вектор куринишда ёзиш мумкин

$$f(x)=X^1DX, \qquad (7.51)$$

бу ерда

$$X^1=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ (d_{ij}=d_{ij}), \ i,j=\overline{1,n}.$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11}d_{12}\ldots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\ldots d_{2n} \\ ------ \\ d_{n1}d_{n2}\ldots d_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(7.49) квадратик функциянинг пастга (юкорига) каварик булиши (7.50) квадратик форманинг пастга (юкорига) булишига бођликдир.

Таъриф 4.2. X=0 дан бошка барча $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ лар учун $f(X)<0$ уринли булса, f(X) га манфий аникланган квадратик форма дейилади.

Таъриф 4.3. X=0 дан бошка барча $X=(x_1, x_2,\dots,x_n)$ лар учун $f(X)>0$ уринли булса, f(X) га мусбат аникланган квадратик форма дейилади.

Таъриф 4.4. Агар X^1DX квадратик форма номусбат аникланган булса, X^1DX квадратик форма номанфий аникланган дейилади.

Таъриф 4.5. Агар $X^1DX \le 0$ тенгсизлик барча $X\neq 0$ лар учун туђри булса ва X=0 учун $X^1DX=0$ бажарилса, X^1DX га номусбат аникланган квадратик форма дейилади.

Теорема 4.1. Агар $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$ квадратик формада барча тартибдаги

$$D_1=d_{11},\ D_2=\begin{vmatrix} d_{11}d_{12} \\ d_{21}d_{22} \end{vmatrix},\dots, D_n=\begin{vmatrix} d_{11}d_{12}\dots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\dots d_{2n} \\ d_{n1}d_{n2}\dots d_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i=\overline{1,n}$$

аникловчилар нолдан фаркли булса, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ квадратик формани куйидаги куринишда ёзиш мумкин:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\alpha_1 y_1^2+\alpha_2 y_2^2+\dots+\alpha_n y_n^2,$$

Бу ерда $\alpha_i=\frac{D_i}{D_1}, i=\overline{1,n}$

Демак, α_i коэффицентларнинг ишораси D_i аникловчиларнинг ишораларига бођлик булиб квадратик форманинг куринишини аниклайди ва куйидаги холлар булиши мумкин:

1. Агар $D_1,D_2,\dots,D_n$ аникловчиларнинг хар бири мусбат булса, f(X) квадратик форма мусбат аникланган булади.
2. Агар, D_i, $i=\overline{1,n}$ сонлар кетма-кетлигида ишоралар навбат билан алмашиб келса, α_i коэффицентлар манфий булса, f(X) форма манфий аникланган булади.
3. Агар D матриcанинг ранги r<n булса, хамда D_i, $i=\overline{1,n}$ аникловчилар мусбат ишорали булиб, колганлари нолга тенг булса, f(X) квадратик форма номанфий аникланган булади.

4. Агар D матрицанинг ранги r<n булиб, 1, D_i, $i=\overline{1,n}$ каторда ишоралар алмашиб келса хамда $D_{r+i}=0$ $i=\overline{1,n}$ булса, квадратик форма номусбат аникланган булади.
5. Агар, 1, D_i, $i=\overline{1,n}$ сонлар кетма-кетлигида ишоралар алмашмаса хамда манфий ишорали аникловчилар мавжуд булса, f(X) квадратик форманинг ишораси аникланмаган булади.

Масала 7.32. Куйидаги квадратик форманинг куриниши аниклансин:

$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2+2x_1x_2-3x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2$

Ечиш.

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & -1 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -4\end{pmatrix},\qquad D_1=-2$$

$$D_2=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=+2-1=1,\qquad D_3=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & -1 & 1\\ -\frac{3}{2} & 1 & -4\end{vmatrix}=-2\frac{3}{4};$$

Демак 1, D_1, D_2, D_3 яъни 1, -2, 1, $-2\frac{3}{4}$ сонлар кетма-кетлигида ишоралар навбат билан алмашгани учун $F(x_1, x_2, x_3)$ квадратик форма манфий аниклангандир.

Теорема 4.2. Номанфий F(X) =XDX квадратик форма E_n Евклид фазосида каварик функциядир. Агар квадратик форма мусбат аникланган булса, у катъий каварик функция булади.

Теорема 4.2. Номусбат F(X) =XDX квадратик форма E_n Евклид фазосида юкорига каварик функциядир. Агар квадратик форма манфий аникланган булса, у катъий юкорига каварик функция булади.

Шундай килиб квадратик программалаш масаласини таърифини куйидагича бериш мумкин.

Таъриф 4.6. Куйидаги шартларни

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j \le в_i \qquad (i=\overline{1,m}) \qquad (7.52)$$

$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n})$ (7.53)

каноатлантирувчи

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_kx_j \qquad (7.54)$$

функциянинг максимум (минимум) кийматини топишга квадратик программалаш масаласи дейилади. Бу ерда $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}$ $C_{kj}x_j$ – манфий (мусбат) – ярим аникланган квадратик форма.

(7.52)-(7.54) квадратик программалаш масаласини ечиш учун Лагранж функциясини куйидагича тузиб оламиз

$$L(X,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{kj}x_kx_j + \lambda_l\left(в_i - \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right) \qquad (i = \overline{1,m})$$

Агар $L(X,\lambda)$ функция $(X_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ эгар нуктага эга булса, яни куйида шартлар каноатлантирилса:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0, \quad (j = \overline{1,n}); \qquad (7.55)$$

$$X_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \quad (j = \overline{1,n}); \qquad (7.56)$$

$$X_j^0 \geq 0. \quad (j = \overline{1,n}); \qquad (7.57)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (7.58)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} = 0, \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (7.59)$$

$$\lambda_i^0 \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (7.60)$$

бу ерда $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ *ва* $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ Лагранж функциясидан олинган хусусий хосилаларнинг эгар нуктадаги кийматлари. Энди (7.55) ва (7.58) тенгсизликларга $\vartheta_j\left(i = \overline{1,n}\right)$ *ва* $W_i \quad (i = \overline{1,m})$ кушимча узгарувчилар киритиб (7.55)-(7.60) тенгсизликларни тенгламалар системаси куринишига келтирамиз

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + \vartheta_j = 0 \quad (j = \overline{1,n}); \qquad (7.61)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} - W_j = 0 \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (7.62)$$

$$X_i^0 \vartheta_j = 0 \quad (i = \overline{1,n}); \qquad (7.63)$$

$$\lambda_i^0 W_j = 0 \quad (i = \overline{1,m}); \qquad (7.64)$$

$$X_i^0 \geq 0, \vartheta_j \geq 0, W_i \geq 0 \left(j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}\right) \qquad (7.65)$$

Демак (7.52)-(7.54) квадратик программалаш масаласини хал килиш учун (7.61) ва (7.65) системаларнинг шундай манфий булмаган ечимларини топиш керакки, бу ечимлар (7.63) ва (7.64) шартларни албатта каноатлантирсин.

Бу ечимлар тупламини сунъий базислар услубидан фойдаланиб,

f(X, λ)=-$\sum_{i=1}^{m} M\lambda i$ функциянинг (7.61) – (7.64) шартларини каноатлантирувчи максимум (минимум) кийматларини топамиз.

Шундай килиб (7.52) – (7.54) квадратик программалаш масаласини ечиш учун куйидаги боскичларни бажариш керак

1. Лагранж функциясини тузамиз;
2. Эгар нуктаси мавжудлигининг зарур ва етарли шартларини Лагранж функцияси учун (7.61) – (7.65) куринишда ёзамиз.
3. Сунъий базис услубини куллаб, Лагранж функцияси учун эгар нуктасини мавжудлигини ёки мавжуд эмаслигини курсатамиз ва бу нуктанинг координаталарини топамиз.
4. Отимал ечимларини ёзиб оламиз ва оптимал режани тузамиз.

Юкоридаги формулалар ва коидаларнинг кулланишини 7.25 ечилган масалада куриш мумкин.

Топшириклар

Куйидаги квадратик программалаш масалаларини (7.32-7.45) ечинг:

7.32. Куйидаги квадратик программалаш масаласининг ечимларини Кун-Таккер шартларидан фойдаланиб топинг

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 + x_2 \le 9. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$f(X) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \to \max.$

7.33. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 2. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

$f_{\max} = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2$

7.34. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge 2. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$f_{\min} = 4x_1^2 + 3x_2^2$

7.35. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$f_{\max} = 5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1.x_2 - x_2^2$

7.36. $3X_1 + 2X_2 \le 16$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$f_{\max} = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$

7.37. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$

$f_{\max} = 32x_1 + 120x_2 - 4x^2_1 - 15x_2^2$

7.38. $\left.\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ &x_1 + 2x_2 \leq 4. \end{aligned}\right\}$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$f_{max} = -x_1 - 2x_2 + x_2^2$

7.39. $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$,

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

$f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$

7.40. $\left.\begin{aligned} &3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ &-x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{aligned}\right\}$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$

7.41. $\left.\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \leq 6, \\ &x_1 + 2x_2 \leq 10. \end{aligned}\right\}$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$f_{max} = 2x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2$

7.42. $\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12, \\ &2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6. \end{aligned}\right\}$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$,

$f_{min} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2$

7.43. $\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 = 8, \\ &x_2 + x_3 = 4. \end{aligned}\right\}$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$,

$f_{max} = x_1 - x_2^2 - 2x_1 x_2$

7.44. $\left.\begin{aligned} &0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 4, \\ &0 \leq x_3 \leq 6. \end{aligned}\right\}$

$f_{min} = (x_1 + x_2 + x_3)^2$

7.45. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$,

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$,

$f_{max} = x_1 - x_2^2 - x_3^2$

§5. Чизиксиз программалаш масалаларини градиент усули ёрдамида ечиш

Шу вактдгача чизиксиз программалаш масалаларини симплекс усулни куллаб ечган эдик. Лекин симплекс усул чекли имкониятга эга булганлиги учун чегаравий шартлари ва максад фукнциясининг таркибий кисми мураккаб булган масалаларга куллаб булмайди. Шунинг учун бундай холларда квадратик ва каварик программалаш масалаларини ечиш учун градиент услубларини куллаш анча кулайлик яратади. Чизиксиз программалаш масалаларини градиент усулларини куллаб ечиш учун айрим зарур булган таъриф ва коидаларни келтирамиз.

Бизга n улчовли E_n Евклид фазоси берилган булсин. E_n фазосининг бирор сохасида $f(x)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функция узининг хусусий хосилалари билан биргаликда узлуксиз функциялар тупламини ташкил этсин. Бу функциялар тупламини C^1 билан белгиласак, E_n да $f\Xi C^1$ функциянинг градиенти проекцияларини куйидагича ёзиш мумкин

$$\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Демак E_n да $f Є C^1$ функциянинг градиенти проекциялари вектор устун булиб, у символик равишда куйидагича ёзилади.

g га df=$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{\ell}_1,\frac{\partial f}{\partial x_2}\overline{\ell}_2,\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{\ell}_n$

бу ерда $\overline{\ell}_1,\overline{\ell}_2,\ldots,\overline{\ell}_n$ ортлар.

Градиентни E_n да координата укларидаги проекциялари куйидагича ёзилади

$$\nabla f(X)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{\ell}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\overline{\ell}_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{\ell}_n\right)$$

f(X) функциянинг берилган X^0 нуктадаги градиентини куйидаги

$$\nabla f(X^0)=\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_1},\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_n}$$

куринишда ёзиш мумкин.

Берилган $X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ нуктада f(X) функциядан градиент йуналиши буйича олинган хосила энг катта кийматга эришади ва

$$\left|\nabla f(X^0)\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)^2}$$

га тенг булади ва градиент йуналиши энг тез усиш йуналишидир.

f(X) функциянинг E_n иши X^0 нуктасидаги градиенти $\nabla f(X^0)$ нуктадан утувчи юксаклик сирти (f(X)=const) га перпендикуляр булади.

$$-\nabla f(X^0)=\left(-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2},\ldots,-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)$$

вектор f(X) функциянинг X^0 нуктадаги энг тез камайиш йуналишини курсатади ва унинг X^0 нуктадаги антиградиенти дейилади.

Агар X нуктада f(X) функция учун $\nabla f(X)=0$ булса, у вактда
$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ нуктага стационар нукта дейилади.

Энди $f(X)\in C^1$ функциядан ихтиёрий йуналиш бўйича хусусий хосила олиш тушунчасини киритамиз.

Таъриф 5.1. Берилган $X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ нуктада $f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C^1$ функциядан $S(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ ($\|S\|=1$) йуналиш буйича олинган хосила деб куйидаги лимитга айтилади.

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(X^0+\lambda S\right)-f(X^0)}{\lambda}.$$

Агар f(X) функция $X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ нуктада дифференциалланувчи функция булса, ихтиёрий $S(\|S\|=1)$ учун $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ мавжуд булади хамда

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=(\nabla f(X^0),S)$ (7.66) уринли булади.

Хакикатан хам ихтиёрий чексиз кичик $\lambda>0$ учун куйидаги тенглик

$$f(X^0+\lambda S)-f(X^0)=(\nabla f(X^0),(X^0+\lambda S-X^0))+0(\|x^0+\lambda S-x^0\|).$$

бажарилади.

Бунда

$f(X^0+\lambda S)=f(X^0)+\lambda(\nabla f(X^0),S)+0(\|\lambda S\|)$

ва

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(X^0+\lambda S)-f(X^0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to+0}\frac{\lambda(\nabla f(X^0),S)+0(\|\lambda S\|)}{\lambda}=(\nabla f(X^0),S)$$

Бизга маълумки

$(\nabla f(X^0),S)=\|\nabla f(X^0)\|\|S\|\cos(\nabla f(X^0)\wedge,S)$.

Демак

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=\|\nabla f(X^0)\|\|S\|\cos(\nabla f(X^0)\wedge,S).$$

Шундай килиб бундан куринадиким, f(X) функциядан X^0 нуктада S йуналиш буйича олинган хосила

$\cos(\nabla f(X^0)\wedge,S)=1$

булганда максимал кийматга эга булади.

Демак, S йуналиш X^0 нуктадаги функция градиентининг $(\nabla f(X^0))$ йуналиш билан бир хил булганда $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ максимал кийматга эришади.

Масала 7.46. $f(x_1,x_2)=3x_1^2+12x_2^2$ функциядан $X^0=(3;4)$ нуктада $S=(1,1)$, $S(\|S\|=1)$ йуналиш буйича олинган хосила топилсин.

Ечиш.

$$\nabla(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)'$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}=6X_1,\frac{\partial f(X)}{\partial x_2}=24x_2$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}=6\cdot 3=18$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}=24\cdot 4=96$$

Демак, $\nabla f(X^0)=(18;96)$

(7.66) асосан

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$=(∇f($X^0$),S),

яни $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$=$(18,96)^1$,(1,1).

Бунда $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$=18+96=114.

Масала 7.47. f(X)=$4x_1^2+7x_2^2$ функциянинг X^0=(1;2) нуктадаги энг тез усиш йуналиши аниклансин.

Ечиш. f(X) функциянинг X^0 нуктадаги энг тез усиш йуналиши:

S=∇f(X^0).

∇f(X^0)= $\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)$,

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}$=8$x_{1,}$

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}$=14$x_2$

Демак S=∇f(X^0)=(8,1; 14;2)

S=(8;2)

йуналиш берилган f(X)=$4x_1^2+7x^2$ функциянинг X^0=(1;2) нуктадаги энг тез усиш йуналиш булади.

Масала 7.48. f(X) =$5x_1^2+10x_2^2$ функциянинг X^0=(2,3) нуктадаги $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\leq 0$ шартларни каноатлантирувчи барча S йуналишлари топилсин.

Ечиш. S=(X-X^0)=(x_1-2;x_2-3)

Шартга кура $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\leq 0$

(∇f(X^0),S)≤0

∇f(X^0)= $\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)$

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}$=$10x_1\big|_{x=2}$=20

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}$=20x$_2$ | x$_{2=3}$=60

∇f(X^0)=(20;60)

Демак,

$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ ((20;60), (x$_1$-2; x$_2$-3))≤ 0

20(x$_1$-2)+60(x$_2$-3) ≤ 0,

ёки

20x$_1$+60x$_2$-220≤ 0,

x$_1$+3x$_2$-11≤ 0

тенгсизликни каноатлантирувчи хар кандай нукталар туплами $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ нолдан катта булмаган киймат берувчи йуналишларни аниклайди.

Шуни хам айтиш керакки айрим вактларда бу йуналиш ичида мумкин булган ёки мумкин булмаган йуналишлар хам булиши мумкин.

Таъриф 5.2. Шундай $\bar{\lambda}$ сон мавжуд булиб, хар кандай λЄ[0, $\bar{\lambda}$] учун X^0+λSЄM уринли булса, X^{0}ЄM нуктадан бошланадиган йуналиш мумкин булган йуналиш дейилади.

Теорема 5.1 Агар M туплам

g$_i$(x) ≤ 0 $\left(i=\overline{1,m}\right)$ тенгсизликлар системаси оркали аникланган туплам булиб, X^{0}ЄM ва g$_i$(x)=0 шартни бажарувчи *i* индекслар туплами I(x) булса, у холда

(∇g(x^0),$_1$S)+ε≤0, (iЄi(x^0)) (7.66)

тенгсизликлар системасини баъзи ε >0 да каноатлантирувчи S йуналиш мумкин булган йуналиш булади.

Теорема 5.2. Агар X^0 ЄM нуктадаги S йуналиш мумкин булган йуналиш булса, у холда хар кандай $i \in i(X^0)$ учун

(∇g$_i$ (X^0),S)≤0 (7.67)

тенгсизлик уринлидир.

Юкоридаги градиент усулларидан фойдаланиб хар кандай чизиксиз программалаш масалалари ечилади ва умумий холда локаль экстремумларни топиш мумкин булади.

Шунинг учун градиент усулларини куллаб каварик программалаш масалаларини локаль экстремумларини топиш мумкин. Хар кандай локаль экстремум, бир вактнинг узида глобаль экстремум хам булади.

Градиент усулларини куллаб масалаларни ечиш жараёни биронта $X^{(к)}$ нуктадан бошлаб кетма-кет излаш натижасида дастлабки масаланинг ечими топилади.

Градиент усулларини иккита гурухга ажратиш мумкин:

1. Изланадиган $X^{(к)}$ нукталар мумкин булган ечимлар сохасидан четга чикмайдиган масалаларнинг ечиш усули;

2. Изланадиган $X^{(к)}$ нукталар мумкин булган ечимлар сохасида ва изланадиган ечим мумкин булган сохадан ташкарида булган масалаларни ечиш услублари.

Биринчи гурухга карашли масалаларни Франк-Вулф усули билан, иккинчи гурухга карашли масалаларни эса жарима функцияси усули ёки Эрроу – Гурвиц усули билан ечиш мумкин.

1. Франк –Вулф усули. Фараз килайликки куйидаги шартларда

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le в_i \quad (i=\overline{1,m}) \qquad (7.68)$$

$$x_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,n}) \qquad (7.69)$$

$$f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \qquad (7.70)$$

ботик функциянинг максимум кийматини топиш керак булсин.

Бу масаланинг хусусиятларидан бири тенгсизликлар системаси чизикли тенгсизликлардан иборат булганидадир. Шу хусусиятларидан фойдаланиб чизиксиз программалаш масалалар куринишига келтириш мумкин ва масалани кетма-кет алмаштиришлар ёрдамида ечиш мумкин.

(7.68)-(7.80) масалани ечиш жараёни масаланинг мумкин булган ечимлар сохасидан биронта $X^{(к)}$ нуктасини топишдан бошланади ва $X^{(к)}$ нуктада f(X) функциянинг градиенти топилади.

Энди $X^{(к)}$ нуктада f(X) функциянинг градиентини топамиз

$$\nabla f(X^{(к)}) = \left(\frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1}; \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2}; \ldots, \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} \right)$$

ва бунга асосан чизикли функцияни тузамиз

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)= \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} X_n \qquad (7.71)$$

Бундан кейин (7.68)-(7.69) шартларга асосан $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, функциянинг максимум кийматини топамиз. Фараз килайликки $Z^{(k)}$ нуктада F(X) функция максимум киймат кабул килсин. У вактда дастлабки масалани мумкин булган ечимининг координати $X^{(\text{к}+1)}$ нуктада булади:

$$X^{(\text{к}+1)}=X^{(\text{к})}+\lambda(Z^{(k)}-X^{(k)}), \qquad (7.72)$$

бу ерда $\lambda_\text{к}$ –ихтиёрий сон булиб, хисоблаш кадами деб айтилади ва $0\leq\lambda \leq 1$ га тенг.

$\lambda_\text{к}$- ихтиёрий сон булиб, уни шундай танлаш керакки f(X) функциянинг $X=X^{(\text{к}+1)}$ нуктадаги $\lambda_\text{к}$ бођлик булган киймати максимум киймат булсин, яъни $f_{max}=f(X^{(k+1)})$ булсин. Шунинг учун $\frac{df}{d\lambda_k}=0$ тенгламани ечиб, $\lambda_\text{к}$ илдизлари ичидан энг кичигини танлаб оламиз.

Агар бу изланадиган илдизлар бирдан катта булса, у вактда $\lambda_\text{к}=1$ деб оламиз ва шундан кейин $X^{(\text{к}+1)}$ нуктанинг координатларини хисоблаб максад функцияни бу нуктадаги кийматини топамиз. Шундан кейин янги $X^{(\text{к}+2)}$ нуктага утиш зарурми ёки йуклигини аниклаймиз. Агар зарур булса, у вактда $X^{(\text{к}+1)}$ нуктада максад функциясини градиентини хисоблаб чизикли программалаш масаласини ечиб, $X^{(\text{к}+2)}$ ечимларини топамиз. $X^{(\text{к}+2)}$ нуктани хам юкоридаги каби текширамиз.

Демак чекли кадамлар натижасида маълум аникликда дастлабки масалани ечимларини топиш мумкин Шундай килиб (7.68)-(7.70) масалани Фран-Вулф услуби билан ечиш жараёни куйидаги боскичларни уз ичига олади:

1. Дастлабки мумкин булган ечим топилади;
2. (7.70) функциянинг мумкин ечимини аникловчи нуктада градиенти хисобланилади.
3. (7.71) функцияни тузиб (7.68) ва (7.69) шартларда максимал киймати хисобланилади.
4. Хисобаш кадами $\lambda_\text{к}$ топилади.
5. (7.72) формула ёрдамида мумкин булган ечимини таркибий кисмлари янгидан топилади.
6. Кейинги мумкин булган ечимга утиш зарурлиги куриб чикилади. Агар зарур булса, иккинчи боскичга утилади. Агар зарур булмаса дастлабки масаланинг керакли ечими топилган хисобланилади.

Масала.7.49. Франк-Вулф услубини куллаб куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ 2x_1 - x_2 &\le 12. \end{aligned}\right\} \qquad (7.73)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (7.74)$$

$$f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2 \qquad (7.75)$$

$f(x_1,x_2)$ функциянинг максимум кийматини топинг.

Ечиш. $f(X_1,X_2)$ функциянинг градиентини топамиз

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = [2(1-x_1)\ ;\ 4(1-x_2)]$$

ва масаланинг мумкин булган дастлабки ечими деб $X^{(0)}=(0;0)$, топилган ечимининг аниклик сифатини эса $|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k+1)})|<\varepsilon$, бу ерда $\varepsilon=0{,}01$ деб оламиз. Энди бу ечимни кадамба-кадам яхшилаймиз

1. Алмаштириш (яхшилаш, узгартириш, янгилаш).

$X^{(0)}$ нуктада $f(x_1,x_2)$ функциянинг градиентини $x_1=0$; $x_2=0$ нуктада топамиз.

$$\nabla f(X^0)=(2;4).$$

Демак биринчи боскичда масалани куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ 2x_1 - x_2 &\le 12. \end{aligned}\right\} \qquad (7.76)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (7.77)$$

$$f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2 \qquad (7.78)$$

$f(x_1,x_2)$ функциянинг максимум кийматини топиш талаб этилади.

(7,76)-(7,78) масалани симплекс усул билан ечиб дастлабки оптимал режа $Z^0=(0,4)$ топилади.

Масаланинг мумкин булган ечимини (7.72) формула ёрдамида топамиз

$X^{(k)}=X^{(0)}+\lambda_1(Z^{(0)}-X^{(0)})$, бу ерда $0\le\lambda \le1$. (7.79)

$X^{(0)}$ ва $Z^{(0)}$ лар кийматларни (7.79) куйсак

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0+\lambda;0, \\ x_2^{(2)} &= 0+\lambda;4. \end{aligned}\right\} \qquad (7.80)$$

келиб чикади. Бу ердан λ_1ни топиш учун x_1 ва x_2 ларнинг кийматларини (7.78) га (7.80) дан топиб куйсак, куйидаги келиб чикади

$f(\lambda_1)=16\lambda_1-32\lambda_1^2$.

$f(\lambda_1)$ функциядан хосила олиб 0-га тенглаштирсак ва ечсак куйидаги хосил булади

$F^1(\lambda_1)=16-64\lambda_1=0$, $\lambda_1=\frac{1}{4}=0{,}25$.

$0\le\lambda_1\le1$ булгани учун, λ_1 нинг бу кийматини кадам деб кабул киламиз. У вактда $X^{(1)}=(0;1)$

$f(X^{(1)})=2$

$f(X^{(1)})-f(X^{(0)})=2>\varepsilon=0{,}01$.

II Алмаштириш. Дастлабки масаланинг $X^{(1)}$нуктадаги градиенти

$\nabla f(X^{(1)})=(2;0)$ булгани учун $f_2(x_1,0)=2x_1$ максадли функцияни (7.76) ва (7.77) шартларга асосан максимум кийматини топиш талаб этилади. Бу масалани симлекс усулни куллаб ечсак

$Z^{(1)} = (6{,}4;0{,}8)$ ечим келиб чикади.

Энди $X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_2(Z^{(1)}-X^{(1)})$ аниклаймиз. Охирги тенгликни куйидагича ёзиш мумкин.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 6{,}4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} &= 1-0{,}2\lambda_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.81)$$

(7.81) ни (7.75) га куйсак λ_2 га нисбатан куйидаги тенглик хосил булади

$F(\lambda_2)=2+12{,}8\lambda_2-41{,}76\lambda_2^2$, бу ердан

$F^1(\lambda_2)=12{,}8-83{,}52\lambda_2$. $F^1(\lambda_2)$ ни 0-га тенглаштирсак

$\lambda_2\approx0{,}15$ хосил булади

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0{,}96, \\ x_2^{(2)} &= 0{,}97. \end{aligned}\right\}$$

$X^{(2)}=(0{,}96;0{,}97)$, $f(X^{(2)})=2{,}996$ булгани учун

$f(X^{(2)})-f(X^{(1)})=2{,}9966-2=0{,}9966>\varepsilon=0{,}01$ келиб чикади.

III. Алмаштириш. $X^{(2)}$ нуктада f(X) функциянинг градиентини хисоблаймиз.

$$\nabla f\,(X^{(2)})=(0{,}08;0{,}12)$$

Демак $F_3(X)$ функциянинг куриниши куйидагича булади

$F_3(x_1,x_2)=0{,}08x_1+0{,}12x_2$ (7.82)

(7.92) функциянинг (7.73) ва (7.74) шартларга асосан кийматини топамиз. Бу киймат куйидагича куринишига эга булади $Z^{(2)}=(6;0)$.

Юкоридагиларга асосан $X^{(3)}$ ни аниклаймиз

$X^{(3)}=X^{(2)}+\lambda_3(Z^{(2)}-X^{(2)})$

Натижада куйидагилар топилади

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=0{,}96+\lambda_3(6-0{,}96)=0{,}96+5{,}04\lambda_3, \\ x_2^{(3)}=0{,}97+\lambda_3(0-0{,}97)=0{,}97-0{,}97\lambda_3. \end{cases}$$

$F(\lambda_3)=2{,}9384+0{,}4032\lambda_2-27{,}3416\lambda_3^2$,

$F^1(\lambda_3)=0{,}4032-54{,}6832\lambda_3$,

$0{,}4032-54{,}6832\lambda_3=0$,

$\lambda_3=\frac{0{,}4032}{54{,}6832}\approx 0{,}007.$

Демак $X^{(3)}=(0{,}99528\ ;\ 0{,}96321)$

$F(X^{(3)})=2{,}99957$

$F(X^{(3)})=-F\,(X^{(2)})==2{,}99957-2{,}9966=0{,}00297<\varepsilon=0{,}01.$

Шундай килиб $X^{(3)}=(0{,}99528\ ;\ 0{,}96321)$ (7.83)-(7.85) масаланинг изланаётган ечими хисобланади ва бу ечим каварик программалаш масалаларини ечганда курган 7.26 масаланинг ечимига $X^x=(1\ ;\ 1)$-га анча якиндир Агар ε микдорга яна камрок киймат берсак $X^{(k)}=(1,1)$ ечимга янада якинрок максимал ечимни топиш мумкин.

2. Жарима функцияси услуби. Куйидаги шартларда

$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le в_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$

$x_i\ge 0, \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$

F (X) $=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ ботик функциянинг максимум кийматини топиш керак булсин.

Бу ерда $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ функциялар каварик функциялар тупламини ташкил килади.

Бундан кейин максад функциянинг максимум кийматини излаш урнига $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)+H(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функциянинг максимум киймати топилади, яъни

$$F(X)=f(X)+H(X)\rightarrow\max,\ X=(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Демак F(X) функция максад функция ва H(X) маълум чегаралар системаси билан аникланган жарима функцияси йиђиндисидан иборат.

H(X) жарима функциясини хар хил усуллар билан тузиш мумкин.

Купинчалик жарима функцияси куйидаги куринишда изланади

$$H(X)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)g_i(x),$$

бу ерда $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Шундай $$\alpha_i(x)=\begin{cases}0, агарда & в_i-g_i(x)\geq 0,\\ \alpha_i, агарда & в_i-g_i(x)\leq 0.\end{cases}$$

(7.83)

$x_i\geq 0$- узгармас сонлар булиб ођирлик коэффицентлари деб аталади.

Жарима функциясидан фойдаланиб кетма-кет бир нуктадан иккинчиси ва хоказо нукталарга кадамба-кадам давом этиб, бу жараён геракли ечимлар топилгунча давом этдирилади.

Шу билан бирга хар бир келгуси нуктанинг координатаси куйидаги формула ёрдамида топилади.

$$X_i^{(k+1)}=\max\left\{0;X_j^k+\left[\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_j}\right]\right\} \qquad (7.84)$$

(7.84) дан куриниб турибдики, агар келгуси нукта дастлабки масаланинг мумкин булган ечимлар сохасида булса, квадрат кавс ичидаги кушилувчи нолга тенг ва келгуси нуктани кординатаси максад топилади. Агар нукта мумкин булган ечимлар сохасидан ташкарида булса у вактда яна кайтадан ечимлар сохасига утишга туђри келади ва кайтадан узгартирилади.

Шундай килиб жарима функцияси усул каварик программалаш масалаларини ечиш жараёни куйидаги боскичларни уз ичига олади:

1. Дастлабки масалани мумкин булган ечимлари аникланади;

2. Хисоблаш кадами аникланилади;

3. Максадли функциядан хамма узгарувчилар буйича хусусий хосилалар ва мумкин булган ечимлар сохасини аникловчи функция топилади;

4. (7.84) формула ёрдамида мумкин булган янги ечим нукталари аникланади;

5. Топилган нукталарни координатлари берилган чегара шартларни каноатлантириши текширилади. Каноатлантирмаса келгуси боскичга утилади. Агар топилган нуктанинг координатлари мумкин булган ечимлар сохасида аникланса, у вактда келгуси мумкин булган ечимларига утиш зарурлиги урганилади. Агар зарур булса, масалани ечишнинг иккинчи боскичига утилади. Агар зарур булмаса топилган ечимлар дастлабки масаланинг керакли ечимлари хисобланилади.

6. Ођирлик коэффициентларининг кийматлари аникланади ва 4-чи боскичга утилади.

Масала .7.50. Куйидаги чегара шартларида

$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2\leq 18,$ (7.85)

$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0.$ (7.86)

$f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2\rightarrow$ (7.87)

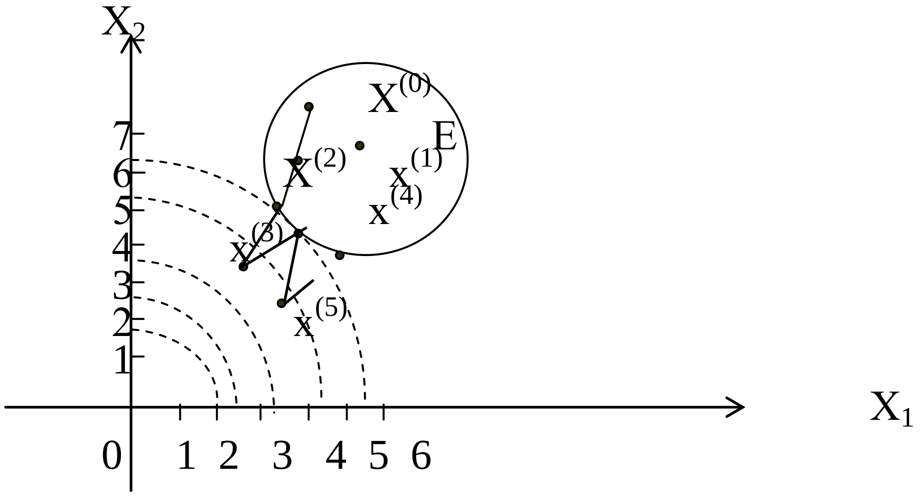
Ечиш. Максадли функция манфий аникланган квадратик форма булани учун, у ботик функциядир. Мумкин ечимларининг сохаси (7.85), (7.86) эса каварик сохадир. Демак (7.85)-(7.87) масала каварик программалаш сохасидир. Масалани ечиш учун жарима функциялар усулини куллаймиз. Олдин мумкин булган ечимлар сохасини аниклаймиз (Чизма 7.6). Олдин мувозанат чизиђини $f(x_1,x_2)=h$ чизиб оламиз. Мувозанат чизиђи маркази O(0;0) нуктада булган айланалардан иборатдир. Шу айланалар тупламидан биронтаси мумкин булган ечимлар сохасига уринади. Бу нуктада максад функцияси изланаётган максимум кийматга эга булади. X^0 нуктани аникланиш сохасидан олсак $X^0=(6,7)$ тенг булади. λ ни кийматини $\lambda=0,1$ олиб ва

$g(x_1,x_2)=18-(x_1-7)^2-(x_2-7)^2$ деб белгилаб, ундан x_1 ва x_2 узгарувчилар буйича биринчи тартибли хусусий хосилалар олсак куйидагилар хосил булади

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1; \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2; \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14;$$

Энди (7.84) формулани куллаб нукталар кетма-кетлигини тузиб чикамиз. Натижада тузилган нукталарнинг ичидан керак булган ечим топилади.



Чизма 7.6.

I Алмаштириш. $X^{(0)}$=(6,7) нукта мумкин булган ечимлар сохасида булгани учун (7.84) формуладаги квадрат кавс ичидаги ифода нолга тенг. Демак келгуси нуктанинг координатлари куйидаги формула ёрдамида хисобланилади

$$x_1^{(1)}=\max\left\{o; X_1^{(0)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1}\right\} = \max\{0; 6+0{,}1\cdot(-2)\cdot 6\} =$$

$$=\max\{0;\ 4{,}8\}=4{,}8,$$

$$x_2^{(1)}=\max\left\{o; X_2^{(0)} + \lambda\frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2}\right\} = \max\{0; 7+0{,}1\cdot(-2)\cdot 7\} = 5{,}4 \,.$$

Энди $X^{(1)}$=(4,8 ; 5,6) нуктанинг масаланинг ечимлар туплами сохасига кирадими ёки йуклигини текширамиз. g($X^{(1)}$)=18-4,84-1,96=11,2 булгани учун g($X^{(1)}$)=-54,4.

II. олмаштириш юкоридагиларга асосан куйидагиларни топамиз:

$x_1^{(2)}$=max{0; 0,48+0,1·(-2)·4,8}=3,48;

$x_2^{(2)}$=max{0; 0,56+0,1·(-2)·5,6}=4,48;

$g(X^{(2)})=18-9{,}9856-6{,}3504=1{,}664>0, f(x^{(2)})=-34{,}816.$

III Алмаштириш. Энди куйидагиларни хисоблаймиз:

$x_1^{(3)}=\max\{0;\ 0{,}384+0{,}1\cdot(-2)\cdot3{,}84\}=3{,}072;$

$x_2^{(3)}=\max\{0;\ 4{,}48+0{,}1\cdot(-2)\ 4{,}48\}=3{,}584;$

$g(x^{(3)})=18-15{,}429184-11{,}669056\approx-9{,}0981.$

IV. Алмаштириш $X^{(3)}$ нукта масаланинг мумкин булган ечимлар сохасига кирмайди.

Шунинг учун,

$$x_1^{(4)}=\max\{0;x_1^{(3)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\Big\}=$$

$=\max\{0;3{,}072+0{,}1\cdot[((-2)\cdot3{,}072)+$

$+\alpha((-2)\cdot3{,}072+14)]\}=\max\{0;2{,}4576+\alpha\cdot0{,}7856\}$

$$x_2^{(4)}=\max\{0;x_2^{(3)}+\lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2}+\alpha\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\Big\}=$$

$=\max\{0;3{,}584+0{,}1[(-2)\cdot3{,}584)+$

$+\alpha((-2)\cdot3{,}584+14)]\}=\max\{0;2{,}8672+\alpha\cdot0{,}6832\}.$

Бу ерда α сонни танлаш муамоси келиб чикади. α сонни шундай танлаш керакки $X^{(4)}$ нукта мумкин булган ечимлар сохасининг чегарасига якин булсин ва шу сохада жойлашган булсин.

Бу талабни $\alpha=1{,}9$ киймат кондиради.

$\alpha=1{,}9$ кийматда $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$ ларни хисоблаймиз:

$x_1^{(4)}=\max\{0;2{,}4576+1{,}9\cdot0{,}7856\}\approx3{,}950;$

$x_2^{(4)}=\max\{0;2{,}8672+1{,}9\cdot0{,}6832\}\approx4{,}165;$

$g(X^{(4)})=9{,}3025+8{,}037225\approx0{,}660;$

$f(X^{(4)})\approx-32{,}950.$

V. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз

$x_1^{(5)}=\max\{0;3{,}950+0{,}1\cdot(-2)\cdot3{,}950\}=$

$=\max\{0;3{,}950-0{,}790\}=\max\{0;3{,}18\}=3{,}18.$

$x_2^{(5)}=\max\{0;4{,}165+0{,}1\cdot(-2)\cdot4{,}165\}=3{,}332;$

$g(X^{(5)})=18-14{,}7456-13{,}454224\approx-10{,}2$

VI. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз

$x_1^{(6)}=\max\{0;3{,}18+0{,}1\cdot[(-2)\cdot3{,}18+1{,}9((-2)\cdot3{,}18+14)\}\approx3{,}987;$

$x_2^{(6)}=\max\{0;3,332+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,332+1,9\cdot((-2)\cdot 3,332+14)]\}\approx 4,059;$
$g(X^{(6)})=18-9,078169-8,649481\approx 0,272;$
$f(X^{(6)})\approx -32,372.$

VII. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз
$x_1^{(7)}=\max\{0;3,987+0,1\cdot(-2)\cdot 3,987\}\approx 3,189;$
$x_2^{(7)}=\max\{0;4,059+0,1(-2)\cdot 4,059\}\approx 3,247;$
$g(X^{(7)})=18-10,169721-10,543009\approx -2,713$
$f(X^{(7)})\approx -3,189^2-3,247^2\approx -10,24.$

VIII. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз
$x_1^{(8)}=\max\{0;3,189+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,189+1,9((-2)\cdot 3,189+14)\}\approx 3,999;$
$x_2^{(8)}=\max\{0;3,247+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,247+1,9\cdot((-2)\cdot 3,247+14)]\}\approx 4,027;$
$g(X^{(8)})=18-9,006001-8,856576\approx 0,137;$
$f(X^{(8)})\approx -32,185.$

XIX. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз
$x_1^{(9)}=\max\{0;3,999+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,99]\}\approx 3,199;$
$x_2^{(9)}=\max\{0;4,024+0,1\cdot[(-2)\cdot 4,024]\}\approx 3,219;$
$g(X^{(9)})=18-14,447601-14,29596\approx -10,744$
$f(X^{(9)})\approx -3,199^2-3,219^2\approx -10,22.$

X. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз
$x_1^{(10)}=\max\{0;3,199+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,199+1,9((-2)\cdot 319+14)]\}\approx 4,004;$
$x_2^{(10)}=\max\{0;3,219+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,219+1,9((-2)\cdot 3,219+14]\}\approx 4,012;$
$g(X^{(10)})=18-8,976016-8,928144\approx 0,096$
$f(X^{(10)})\approx -32,128;$

XI. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз
$x_1^{(11)}=\max\{0;4,004+0,1\cdot[(-2)\cdot 4,004]\}\approx 3,203;$
$x_2^{(11)}=\max\{0;4,012+0,1\cdot[(-2)\cdot 4,012]\}\approx 3,210;$
$g(X^{(11)})=18-14,417209-14,3641\approx -10,781$
$f(X^{(11)})\approx -3,203^2-3,210^2\approx -10,18$

XII. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз
$x_1^{(12)}=\max\{0;3,203+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,203+1,9((-2)\cdot 3,203+14)]\}\approx 4,005;$
$x_2^{(12)}=\max\{0;3,210+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,210+1,9((-2)\cdot 3,210+14]\}\approx 4,008;$
$g(X^{(12)})=-32,104$

$f(X^{(12)}) \approx -4{,}005^2 - 4{,}008^2 \approx -32{,}104;$

Агар X ва XII алмаштиришларни узаро таккосласак 10^{-1} аникликда бир-бирига тенг булади. Демак бу ечим охирги алмаштириш натижасида максимал ечим булади. Худди юкоридаги каби максад функция кийматларини f(X) ва g(X) функциялар градиентини $X^{(12)}=(4{,}005 ; 4{,}008)$ нуктада текшириб куриш мумкин; яъни

$\nabla f(X^{(12)})=(-8{,}01; -8{,}016)$; $\nabla f(X^{(12)})=(5{,}99; 5{,}984)$;

Мос координатларининг нисбатини хисобласак;

$$\frac{-8{,}01}{5{,}99} \approx -1{,}337, \qquad \frac{-8{,}016}{5{,}984} \approx -1{,}339$$

Бу координатлардан куриниб турибдики улар деярлик бир-бирига тенг. Демак $\nabla f(X^{(12)})$ ва $\nabla g(X^{(12)})$ векторлар деярлик параллел векторлардир. Шу билан бир каторда $X^{(12)}=(4{,}005 ; 4{,}008)$ нукта мумкин булган ечимлар сохаси чегарасига нихоят якин жойлашган, чунки $\nabla g(X^{(12)}) \approx 0{,}078$ булгани учун $x_1^{(12)}=4{,}005$ ва $x_2^{(12)}=4{,}008$ ечимларни масаланинг керакли ечимлари деса булади. Юкоридаги курсатилган алмаштиришларни давом этдириб ечимларни каттарок аникликда топиш мумкин.

Бу масалани геометрик талкини чизма 7.6-да хам куринади.

3. Эрроу – Гурвиц усули. Юкорида жарима функцияси усулини куллаб эгри чизикли программалаш масаласини ечдик. Лекин бу усулни куллаганда α_i-ларни кийматларини ихтиёрий танлаб олган эдик ва хар бир аникланган $X^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ нукта дастлаб мумкин булган ечимлар сохасидан анча узокланиб силжиган эди. Бу камчиликка Эрроу-Гурвиц усулини куллаганда урин колмайди. Бу усулга асосан хар бир келгуси кадам $\alpha_i^{(k)}$ куйидаги формула ёрдамида хисобланилади

$$\alpha_i^{(k)}=\max\{0; \alpha_i^{(k-1)}-\lambda g_i(X^{(k)})\} \quad \left(i=\overline{1,m}\right) \qquad (7.88)$$

$\alpha_i^{(k)}$- нинг дастлабки $\alpha_i^{(0)}$ киймати деб ихтиёрий мусбат сон олинади.

Масала 7.51. Эрроу –Гурвиц усулини куллаб (7.50) масалани ечинг: яъни куйидаги чегара шартларида

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2 \le 18, \qquad (7.89)$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \qquad (7.90)$$

$$F(x_1, x_2)=-x_1^2-x_2^2 \to \max.$$

Ечиш. Эрроу-Гурвиц усулини куллаб (7.50) масалани ечганда биринчи учта алмаштиришда λ=0,1 булганда ечимлар бир-бирига тўђри келади. Бу шуни кўрсатадики хар-бир топилган нукта мумкин бўлган ечимлар сохасида жойлашган бўлиб $X_i^{(K)}$ ларни кийматларини (7.83) ва (7.88) формулалар билан хисоблаганда бир-биридан фарк килмайди, яъни $X_I^{(K)}=0$ (k=$\overline{1,3)}$, бўлади.

IV. Алмаштириш . $g(X^{(3)})<0$ булгани учун келгуси $X^{(4)}$ нуктани (7.84) формула ёрдамида хисоблаймиз:

$x_1^{(4)}=\max\left\{0, x_1^{(3)}+\lambda\left[\frac{gf(X^{(3)})}{gx_1}+\alpha^{(4)}\frac{dg(X^{(3)})}{dx_1}\right]\right\}=\max\{0,3,072+0,1[(-\cdot 3,072+$

$+\alpha^{(4)}((-2)\cdot 3,072+14)]\}$.

$x_2^{(4)}=\max\left\{0; x_2^{(3)}+\lambda\left[\frac{df(X^{(3)})}{dx_2}+\alpha^{(4)}\frac{dg(X^{(3)})}{dx_2}\right]\right\}=$ $\max\{0;3,584+0,1[(-2)\cdot 3,584+$

$+\alpha^{(4)}((-2)\cdot 3,584+14)]\}$.

$\alpha^{(4)}$ -ни (7.88) формула ёрдамида хисоблаймиз:

$\alpha^{(4)}=\max\{0; \alpha^{(3)}-0,1\cdot g(X^{(3)})\}=\max\{0;0-0,1\cdot(-9,0981)\}\approx 0,91$

Демак $x_1^{(4)}\approx 3,172$; $x_2^{(4)}\approx 3,489$; $g(X^{(4)})\approx -8,981$.

V. Алмаштириш. Топилган $X^{(4)}=(3,172; 3,489)$ дастлабки берилган масаланинг мумкин булган ечимлар сохасига кирмайди. Шунинг учун (7.84) формула ёрдамида топамиз. Лекин олдин (7.88) формула ёрдамида куйидагини хисоблаймиз:

$\alpha^{(5)}=\max\{0; 0,91-0,1(-8,981)\}\approx 1,81$

$x_1^{(5)}=\max\{0; 3,172+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,172+1,81((-2)\cdot 3,172+14]\}\approx 3,923$.

$x_2^{(5)}=\max\{0; 3,489+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,489+1,81((-2)\cdot 3,489+14]\}\approx 4,062$

$g(X^{(5)})\approx -0,1$.

VI. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз:

$\alpha^{(6)}=\max\{0; 1,81-0,1\cdot(-0,1)\}\approx 1,82$

$x_1^{(6)}=\max\{0; 3,923+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,923+1,82((-2)\cdot 3,923+14]\}\approx 4,258$.

$x_2^{(6)}$=max{0; 4,062+0,1·[(-2)·4,062+1,82((-2)·4,062+14]}≈4,319

$g(X^{(6)})$≈1,294;

$f(X^{(6)})$≈-36,784.

VII. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз:

$x_1^{(7)}$=max{0; 4,258+0,1·[(-2)·4,258]}≈3,406.

$x_2^{(7)}$=max{0; 4,319+0,1·[(-2)·4,319]}≈3,455

$g(X^{(7)})$≈-7,484.

VIII. Алмаштириш. Куйидагиларни хисоблаймиз:

$\alpha^{(8)}$=max{0; 1,82-0,1(-7,484)}≈2,57;

$x_1^{(8)}$=max{0; 3,406+0,1[(-2)·3,406+2,57((-2)·3,406+14]}≈4,572;

$x_2^{(8)}$=max{0; 3,455+0,1·[(-2)·3,455+2,57((-2)·3,455+14]}≈4,586;

$g(X^{(8)})$≈6,278;

$f(X^{(8)})$≈-41,935.

IX. Алмаштириш. $x_1^{(9)}$, $X_2^{(9)}$, ва $g(X^{(9)})$ ларни топамиз:

$x_1^{(9)}$=max{0; 4,572+0,1[(-2)·4,572]}≈3,658,

$x_2^{(9)}$=max{0; 4,586+0,1[(-2)·4,586]}≈3,669,

$g(X^{(9)})$≈4,265.

X. Алмаштириш. $\alpha^{(10)}$, $x_1^{(10)}$, $x_2^{(10)}$, ва $g(X^{(10)})$ ларни топамиз:

$\alpha^{(10)}$=max{0; 2,57-0,1·(-4,265)}≈3,0

$x_1^{(10)}$=max{0; 3,658+0,1[(-2)·3,658+3,0·((-2)·3,658+14]}≈4,931;

$x_2^{(10)}$=max{0; 3,669+0,1·[(-2)·3,669+3,0((-2)·3,669+14]}≈4,934;

$g(X^{(10)})$≈9,451.

XI. Алмаштириш. $x_1^{(11)}$, $x_2^{(11)}$, ва $g(X^{(11)})$ ларни хисоблаймиз:

$x_1^{(11)}$=max{0; 4,931+0,1·[(-2)·4,931]}≈3,945;
$x_2^{(11)}$=max{0; 4,934+0,1[(-2)·4,934]}≈3,947;
$g(X_2^{(11)})$≈-0,654.

XII. Алмаштириш. $\alpha^{(12)}$, $x_1^{(12)}$, $x_2^{(12)}$, ва $g(X^{(12)})$, $f(X^{(12)})$ ларни топамиз:

$x_1^{(12)}$=max{0; 3,945+0,1·[(-2)·3,945+3,06((-2)·3,945+14]}≈5,026;
$x_2^{(12)}$=max{0; 3,947+0,1·[(-2)·3,947+3,06·((-2)·3,947+14]}≈5,026;
$g(X^{(12)})$≈10,207;
$f(x^{(12)})$≈-50,521.

XIII. Алмаштириш. $x_1^{(13)}$, $x_2^{(13)}$, $g(X^{(13)})$ ва $f(X^{(13)})$ ларни хисоблаймиз:

$x_1^{(13)}$=max{0; 5,026+0,1·[(-2)·5,026]}≈4,021;
$x_2^{(13)}$=max{0; 5,026+0,1·[(-2)·5,026]}≈4,021;
$g(X_2^{(13)})$≈0,251;
$f(X^{(13)})$≈-32,337.

Бу алмаштиришда топилган X=(4,021; 4,021) ечимларни керакли ечимлар деб хисобласа булади. Шуни айтиш керакки юкоридаги алмаштиришлар жараёнини давом эттирса дастлабки масаланинг ечимларини исталган аникликда топса булади.

Топшириклар

Куйидаги чизиксиз программалаш масалаларини (7.52-7.54) градиент усулларини куллаб ечинг.

7.52. Куйидаги функцияларнинг берилган нукталарда градиентларини топинг.

1) $Z=x^2y-2xy+\frac{x}{y}$, $X^{(0)}=(1;2)$
2) $Z=x_1^3-2x_1x_2$, $X^{(0)}=(0;1)$;
3) $Z=x_1^2+x_2^2$ $X^{(0)}=(2;0)$
4) $Z=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}$, $X^{(0)}=(1;0)$.

7.53. Куйидаги функцияларнинг мувозанат чизиђини ва градиентларини берилган нукталарда хисоблаб тузинг:

1) $Z=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$, $X^{(0)}=(4;5)$;

2) $Z=(x_1-2)^2-(x_2-3)^2$, $X^{(0)}=(6;4)$;

3) $Z=2(x_1-1)^2+3(x_2-2)^2$, $X^{(0)}=(3;3)$;

4) $Z=2x_1-x_2^2-x_2$, $X^{(0)}=(1;2)$;

7.54. Градиентлар усулини куллаб $Z=4x_1+2x_2-x_1^2-x_2^2+5$ функцияни алмаштириш жараёнини $X^{(0)}=(4;5)$ нуктадан бошлаб максимум кийматини топинг ва ечимни топишнинг геометрик талкинини курсатинг.

Франк-Вульф услубини куллаб 7.55 - 7.56 масалаларни ечинг.

7.55. Бошланђич нуктаси $X^{(0)}=(2;2)$ булганда куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2 \le 8, \\ 2x_2-x_2 \le 12. \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2$ функциянинг максимум кийматини топинг.

7.56. Бошланђич нуктаси $X^{(0)}=(0;0;0)$ нукта ва алмаштириш жараёнини курсатгичи $f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})<0{,}01$ булганда, куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{r} x_1+2x_2+x_3 \le 6, \\ 2x_1+x_2+x_3 \le 6. \\ x_3 \ge 3, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2x_3)=6x_2+6x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ функциянинг максимум кийматини топинг.

Жарима функцияси ва Эрроу-Гурвиц услубини куллаб 7.57-7.59 масалаларни ечинг.

7.57. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 \le 4, \\ x_2 \le 2. \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=4x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2$ функциянинг максимум кийматини топинг.

7.58. Куйидаги шартларда

$(x_1\text{-}5)^2+(x_2\text{-}5)^2\le 8, \qquad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

$F(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$ функциянинг максимум кийматини топинг.

7.59. Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2&\ge 2,\\ 2x_1+x_2&\le 4\\ x_1+x_2&\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

$F(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$ функциянинг максимум кийматини топинг.

VIII. Боб.

Уйинлар назарияси масалалари ва чизикли программалаш

§1. Уйинлар назариясининг иктисодий ва геометрик талкини

Бир-бирига зид, манфаатларнинг туknаш келишида энг оптимал (фойдали) йул танлаш назариясига уйинлар назарияси дейилади. Уйиннинг математик тушунчаси хар хил уйинлар тупламини караб чикишдан пайдо булган. Лекин унинг тадбик этилиш сохаси анча кенг булиб, бир-бирига зид манфаатлар туknашадиган хилма-хил холатлар тупламини уз ичига олади. Бу уйинлар тупламига куйидагилар мисол була олади: шахмат, шашка, карта уйинлари бошкалар. Уйинлар назариясига асос солган олим Фон Неймандир. Фон Нейман куйидаги масалани уртача куйади: агар n та $P_1,P_2,\ldots,P_n$ уйновчилар бирор Г уйинни уйнаётган булса, I-уйновчи бу уйинда ютиб чикиши учун кандай стратегияни танлаши керак?

Масалан иккита ракиб (биринчи P_1 ва иккинчи P_2 уйиновчи) булиб, улардан хар бири иш тутишининг йулини стратегияни иккинчисидан мустакил равишда танлаб олади.

Мисол учун ок доналар билан P_1 уйновчи шахматчининг стратегиясини танлаш биринчи юришни курсатиш ва P_2 кора доналарнинг мумкин булган биринчи, иккинчи, учинчи ва хаказо юришларига ок доналарнинг кандай жавоб беришини курсатиш демакдир; кора доналар билан уйновчининг стратегиясини танлаш ок доналарнинг мумкин булган хар бир юришига кора доналарнинг кандай жавоб беришини курсатиш демакдир. Шундай килиб, уйин натижалари факат танлаб олинган стратегияларгагина (ва эхтимол, натижаси уйинчиларга бођлик булмаган тасодифий синовларга) бођлик булган тупламга эга булади. Демак, агар уйин V натижа олган булса, иккинчи уйинчи биринчига f(v) сум тулайди ёки тескариси.

P_1 ўйинчи ютуђининг М(Х,У) математик кутилмаси мос равишда P_1-чи ва P_2-чи уйинчи танлаб олган Х ва У стратегияларгагина бођлик булади.

Юкоридагилардан асосан куринадики ўйинлар назарияси куйидаги масалаларни урганади:

1. P_1-чи уйинчи P_2-чи уйинчининг кандай йул тутишга бођлик булмаган холда имкон борича купрок ютук олиши учун, яъни $\min_y M\ (X_0,У)=\max_x\{\min_y M\ (x,y)\}$ булиши учун у кандай X_0 стратегия танлаб олиш керак;

2. P_2-чи уйинчи P_1-чи уйинчининг кандай йул тутишидан катъи назар имкон борича камрок юткизиши учун, яъни $\max_x M\ (X,У_0)=\min_y\{\max_x M\ (x,y)\}$ булиши учун у кандай $У_0$ стратегия танлаб олиш керак.

Хар бир уйинчининг стратегиялар сони чекли булган холдагина бу масалалар принципиал жихатдан ечилади. Бу ерда умуман хар бир уйинчи кандайдир аник бир стратегияни эмас, балки хар бир уйинни такрорлаганда P_1-чи уйинчи учун эхтимоллари $P_1, P_{2,}\dots, P_n$ булган $X_{1,}X_{2,}\dots, X_n$ стратегиялардан бирини, P_2-чи уйинчи учун эса эхтимоллари $q_1, q_2,\dots ,q_n$ булган $У_{1,} У_2,\dots,У_m$ стратегиялардан бирини танлаш фойдали булади.

$(P_1,P_2,\dots,P_n)$ ва $(q_1,q_2\dots,q_m)$ тупламларга уйинчиларнинг аралаш стратегиялари дейилади. $\{P_n\}$ ва $\{q_m\}$ тупламларни ва P_1-чи уйинчи ютуђининг математик кутулмасини топишга уйининг ечими дейлади.

Энди уйинлар назариясига оид айрим таъриф ва теоремаларни исботсиз келтирамиз.

1- таъриф. Хар кандай Г уйини ўйин матрицаси деб аталувчи

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица оркали аниклаш мумкин. Бу матрица P_1 уйинчи учун ютуклар матрицаси деб аталади.

2- таъриф. Уйиннинг микдорий натижасига ютук дейилади.

3-таъриф. Агар уйинга факат иккита таъраф (иккита шахс) катнашса, бундай уйинга жуфт уйин дейилади.

4-таъриф. Агар жуфт уйинда ютуклар нолга тенг булса, яъни биринчи уйинчининг ютуђи, иккинчи уйинчининг бой беришига тенг булса, бундай уйинга йиђиндиси нолга тенг уйин дейилади.

4-таъриф. Агар А ютук матрицаси n-та устун ва m-та сатрга эга булса, бундай уйинга $n \times m$ улчовли чекли ўйин дейилади.

5-таъриф. Ютук матрицаси топилган $\alpha = \max_i(\min_j \alpha_{ij})$ сонга уйиннинг куйи ютуђи дейилади (ёки максмин стратегияси дейилади).

6-таъриф. Ютук матрицасидан топилган $\beta = \min_i(\max_j \alpha_{ij})$ сонга уйиннинг юкори ютуђи киймати (ёки минмакс стратегияси дейилади).

7-таъриф. Агар $\max_i(\min_j \alpha_{ij}) = \min_j(\max_i \alpha_{ij}) = V$ булса, у вактда V-га уйиннинг ютук киймати дейилади.

8- таъриф. $\alpha=\beta$ ўйинга эгар нуктали ўйин дейилади.

9-таъриф. Эгар нуктали уйинда максимин ва минимаксни топишга оптимал стратегия дейилади.

10-таъриф. Агар $\alpha\neq\beta$ булса (эгар нуктага эга булмаса), у вактда соф стратегияни курсатувчи векторнинг таркибий кисмларига силжиган стратегия дейилади.

Теорема 8.1. Уйиннинг куйи ютуђи юкори ютуђидан катта була олмайди.

10-чи таърифдан куриниб турибдики соф стратегияни изох этувчи векторнинг таркибий кисмлари хар бир уйинчининг нисбий такрорланиш даражасини билдиради ва унинг йиђиндиси бирга тенг.

Агар биринчи уйинчининг силжиган стратегиясини $X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ ва иккинчи уйинчининг силжиган стратегиясини

Y=(y$_1$,y$_2$,…,y$_n$) деб белгиласак, у вактда $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ булади, бу ерда $x_i \geq 0, (i = \overline{1,m})$ $y_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$. Юкоридагиларга асосланиб биринчи уйинчининг оптимал стратегиясини X* иккинчи уйинчининг оптимал стратегиясини У* белгиласак, у вактда иккала ўйинчининг ўйин ютуђи куйидагича тенг булади.

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \quad \alpha_{ij} x_i^* \, y_j^*$$

Оптимал стратегия ва ўйин ютуђини аниклаш жараёнига уйиннинг ечими дейилади.

Теорема 8.2. Хар кандай йиђиндиси нолга тенг матрица уйини силжиган стратегияли ечимга эга.

Теорема 8.3. А матрицанинг V- уйин ютуђи U* ва Z* оптимал стратегия булиши учун куйидаги тенгсизликларнинг $\sum_{i=1}^{m} \alpha iju_i^* \geq \vartheta \quad (j = \overline{1,n}) \quad ва \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha ijz_j^* \leq \vartheta \quad (i = \overline{1,m})$ бажарилиши зарур ва етарлидир.

Теорема 8.4. Агар уйинчилардан биронтаси силжиган оптимал стратегияни кулласа, у вактда оптимал стратегияга (соф стратегия) кушилган иккинчи уйинчининг кандай частоталар билан уйинга киришидан катъий назар ютук киймати v-га тенг булади.

Масала 8.1. Куйидаги матрица $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ билан берилган уйин ечимини топинг ва геометрик талкинини беринг.

Ечиш. Олдин масаланинг эгар нуктага эга ёки йуклигини текширамиз

Бунинг учун куйидагиларни топамиз

min{2;5}=2, max{2;6}=6,

min{6;4}=4, max{5;4}=5,

Демак ўйиннинг куйи ютуђи α =max{2;4}=4, юкори ютуђи эса β= min{6;5}=5, α=4≠β=5 булгани учун $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ матрица билан берилган ўйин ечими силжиган оптимал стратегияга эга булиб, унинг ютуђи V куйидаги ораликда жойлашган 4≤v≤5.

Агар А уйинчининг стратегияси U (u_1, u_2) вектор билан берилган булса, у вактда 8.4 теоремага асосан В уйинчи B_1 ёки B_2 стратегияни куллаганда А уйинчининг уртача ютуђини киймати куйидаги тенгликлар билан белгиланади:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta \quad (B_1 \textit{стратегияни} \qquad \textit{куллаганда}) \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta \quad (B_2 \textit{стратегияни} \qquad \textit{куллаганда}) \end{cases}$$

Бу ўйинларнинг частоталарининг йиђиндиси эса

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Юкоридагиларга асосан куйидаги система хосил булади

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Бу системани ечсак u_1^*=0,4; u_2^*=0,6; v=4,4 ечим хосил булади.

Агар B_1 уйинчининг стратегияси $Z=(z_1^*, z_2^*)$ вектор билан берилган булса, у вактда 8.4 теоремага асосланиб куйидаги системани келтириб чикариш мумкин

$$\left.\begin{aligned} &2z_1^* + 5z_2^* = 4{,}4, \\ &6z_1^* + 4z_2^* = 4{,}4, \\ &z_1^* + z_2^* = 1. \end{aligned}\right\}$$

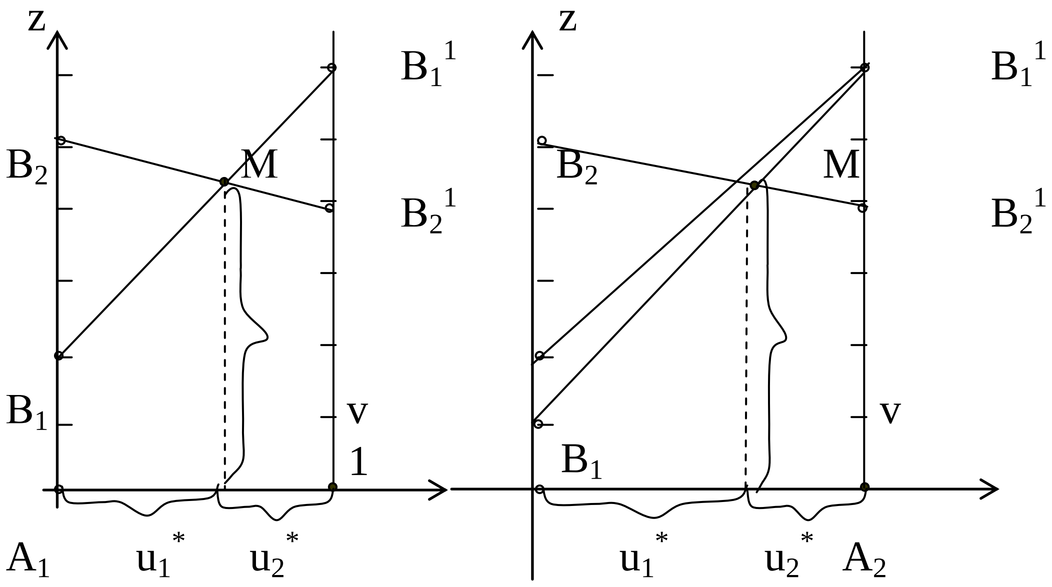
Системани ечсак куйидаги ечим хосил булади;

z_1^*=0,2; z_2^*=0,8.

Шундай килиб $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ матрица билан берилган уйин силжиган оптимал стратегияси U^*=(0,4; 0,6), Z^*=(0,4; 0,8) булиб, ютук киймати эса v=4,4 тенг.

Энди масаланинг геометрик талкинини берамиз. Бунинг учун u0z текслигида А уйинчининг силжиган стратегиясини U=(u_1,u_2) билан белгиласак, у вактда хусусий холда A_1(0;1) нукта A_1 стратегияни, A_2(0;1) нукта эса A_2 стратегиясини белгилайди ва х.к.

Агар A_1 ва A_2 нукталарга перпендикуляр чизиклар утказиб, бу чизикларга уйинчиларнинг ютукларини жойлаштириб чиксак куйидаги 8.1 чизма хосил булади.



8.1-чизма.

Агар А уйинчи A_2 стратегияни танлаганда В уйинчининг стратегияси B_1 булса, у вактда А уйинчининг ютуђи 6 га тенг, B_2 булганда эса 4 га тенг. Бу иккала сон A_2 нуктага урнатилган перпендикуляр устида ётган B_1^1 ва B_2^1 нукталарни аниклайди. B_1 ва B_1^1, B_2 ва B_2^1 нукталарни бирлаштирса иккита туђри чизик хосил булади. Бу туђри чизиклардан оu укигача булган масофалар хар кандай стратегияни танлагандаги уртача ютукни курсатади. Масалан, B_1 B_1^1 кесмадан оu укигача булган масофалар A_1 ва A_2 стратегияларнинг исталганини танлагандаги уртача ютуђи v_1(A_1 ва A_2 стратегияларни частоталарни мос равишда u_1 ва u_2-га тенг). В уйинчининг стратегияси эса B_1 га тенг булиб масофа $2u_1+6u_2=v_1$ га тенг. Худди шундай B_2 стратегияни куллаганда уртача ютук B_2, B_2^1 кесмадан оu укигача булган масофаларга тенг булиб, бу масофа $5u_1+4u_2=v_2$ га тенг. Шундай килиб $B_1MB_2^1$ синик чизикнинг ординаталари А уйинчининг хар кандай силжиган стратегияси минимал ютуђи булади. Бу минимал ютуђлар ичида М нуктанинг ординатасида максимум кийматга эга булади. Демак М нуктанинг ординаталари оптимал ечимлар булади. Оптимал стратегияси $u^*=(u_1^*;\ u_2^*)$ уйин ютуђини киймати эса v тенг. $M=(u_1^*;\ u_2^*)$

нуктанинг координаталарини топиш учун $B_1\, B_1^{\,1}$ ва $B_2\, B_2^{\,1}$ туђри чизикларнинг кесишиш нукталарини куйидаги учта тенгламалар системасини ечиб топамиз;

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

бу ердан $u_1^* = \frac{2}{5} = 0{,}4, \quad u_2^* = \frac{3}{5} = 0{,}6, \quad \vartheta = \frac{22}{5} = 4{,}4.$

Худди юкоридаги каби В уйинчининг оптимал стратегиясини топамиз. Бунинг учун куйидаги

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \frac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

системани ечиб $z_1^* = \frac{1}{5} = 0{,}2; \quad z_2^* = \frac{4}{5} = 0{,}8$ силжиган оптимал ечимларнинг топамиз. Натижада уйиннинг силжиган оптимал стратегияларини ечимлари

U^*=(0,4; 0,6) ва Z^*=(0,2; 0,8) булади. Уйин ютуђининг киймати эса v=4,4 га тенг.

Масала 8.2. Куйидаги матрица билан берилган уйиннинг ечимини топинг.

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

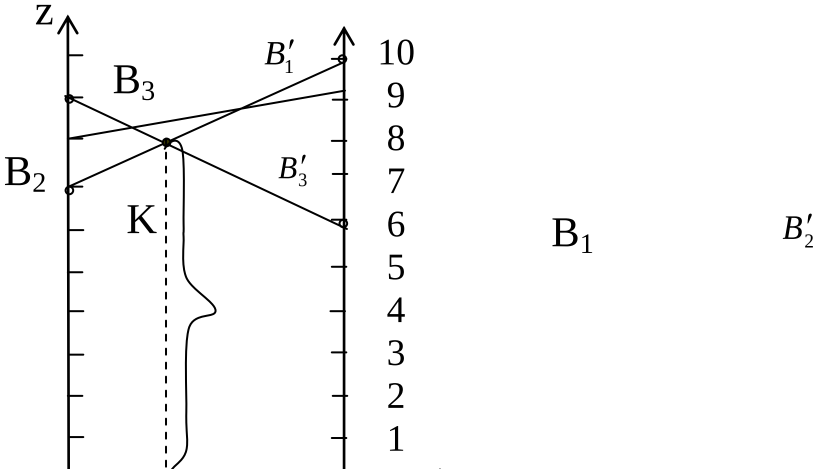
Ечиш. Олдин масаланинг эгар нуктага эга ёки йуклигини текширамиз.

Бунинг учун куйидагиларни топамиз

min {7 9 8 }=7, max {7 10}=10,

min {10 6 9 }=6, $\max\begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \end{Bmatrix}$=9,

max {8 9}=9.



v

0 0 u_1^* u

8.2-чизма.

Демак уйиннинг куйи ютуђи

α=max {7 6} =7, юкори ютуђи эса β= min {10 9 9}=9, α=7≠β=9 булгани учун А матрица билан берилган уйин ечими силжиган оптимал стратегияга эга булиб ютуђи V куйидаги ораликда жойлашган

$7<v<9.$

Агар А уйинчининг стратегияси U (u_1, u_2) вектор билан берилган булса, у вактда 8.4 теоремага асосан В уйинчи B_1 ёки B_2 ёки B_3 стратегияни куллаганда А уйинчининг уртача ютуђини киймати куйидаги тенгликлар билан белгиланади.

$$\left.\begin{array}{l} 7u_1^* + 10u_2^* = \vartheta, \\ 9u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 8u_1^* + 9u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = \vartheta. \end{array}\right\}$$

Бу системани ечсак куйидаги ечим хосил булади

$u_1^*=2/3$; $u_2^*=1/3$. $u^*=(2/3, 1/3)$, v=8. В уйинчининг стратегияси $Z^*=(z_1^*, z_2^*, z^*)$ вектор билан берилган булса, у вактда 8.4 теоремага асосланиб куйидаги системани келтириб чикариш мумкин.

$$\left.\begin{array}{l} 7z_1^* + 9z_2^* + 8z_3^* = 8, \\ 10z_1^* + 6z_2^* + 9z_3^* = 8, \\ z_1^* + z_2^* + z_3^* = 1. \end{array}\right\}$$

Бу системани ечсак куйидаги хосил булади:

$z_1^*=1/2=0,5$, $z_2^*=1/2=0,5$, $z_3^*=0$, $Z^*=(0,5;\ 0,5;\ 0)$ оптимал ечим.

Юкоридаги уйин ечимининг геометрик талкинини чизма 8.2 дан курсатиш мумкин: $B_1\ B^1$, $B_2\ B_2^1$ ва $B_3\ B^1$ туђри чизиклар силжиган оптимал стратегия булиб, $B_1K\ B_2^1$ синик чизик B уйинчининг ютуђини куйи чегарасини курсатади.

Шундай килиб 2×2 кўринишдаги уйин ечимларини топиш усулидан фойдаланиб 2×n ва n×2 куринишдаги уйинларни ечимларини топишни умумий холда куйидагича ёзиш мумкин:

1. Иккинчи (биринчи) уйинчининг стратегияларига мос булган туђри чизиклар чизилади;

2. Уйин ютуђининг куйи (юкори) чегаралари аникланади.

3. Иккинчи (биринчи) уйинчининг иккита стратегияси топилади ва уларга мос булган туђри чизиклар аникланади. Шу туђри чизикларнинг кесишиш нуктасини максимал (минимал) ординатага эга булган киймати топилади.

4. Уйин ютуђининг киймати ва оптимал стратегияси аникланади.

§2. Уйинлар назарияси масалаларини чизикли программалаш масалаларига келтириш

Фараз килайлик m × n куринишдаги матрица билан аникланган уйин берилган булсин

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \alpha_{m1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

§1 даги теорема 8.1 асосан P_1 уйинчининг оптимал стратегияси $U^*=(u_1^*,u_2^*,\ldots,u_m^*)$ га тенг булиб, уйин ютуђи V учун куйидаги тенгсизлик бажарилади

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}U_i^*\geq\vartheta \qquad (j=\overline{1,n}).$$

Масаланинг ечимини аниклаш учун ютук v>0 деб хисоблаймиз.

У вактда куйидаги хосил булади

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha ij \frac{u^*}{\vartheta} \geq 1. \qquad \left(j=\overline{1,n}\right)$$

Бу тенгсизликка $\frac{U_i^*}{\vartheta} = y_i^*$ алмаштириш киритсак

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i^* \geq 1 \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$, $y_i^* \geq 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ келиб чикади.

Агар $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ шартдан фойдалансак, куйидаги хосил булади

$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \frac{1}{\vartheta}$. Шарт буйича P_1 уйинчи максимум ютукга эришиш учун харакат килади, яъни 1/v микдорни минимум кийматини топишга интилади. Демак, p_1 уйинчининг оптимал стратегиясини топиш учун куйидаги шартларда $\sum_{i=1}^{m} \alpha ij y_i^* \geq 1 \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$, $y_i \geq 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$

$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ функциянинг минимум кийматини топиш керак.

Худди шундай P_2 уйновчи оптимал стратегиясини топиш учун куйидаги шартларда

$\sum_{j=1}^{n} \alpha ij x_j \leq 1 \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$, $x_i \geq 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$

$F = \sum_{j=1}^{n} x_i$ функциянинг максимум кийматини топиш керак

(бу ерда $x_i = \frac{z_i}{\vartheta}$). Шундай килиб, А уйин матрицаси билан берилган m×n куринишдаги бир жуфт уйинни чизикли программалаш масаласи билан алмаштириб куйидаги симметрик иккиланган масалалар куринишда ёзиш мумкин:

Берилган дастлабки масала. Куйидаги шартларни

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq 1 \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$, $x_j \geq 0$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$

каноатлантирувчи

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j$ функциянинг максимум кийматини топинг.

Иккиламчи масала Куйидаги шартларни

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \geq 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right),\ y_i \geq 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right)$$

каноатлантирувчи

$F(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j$ функциянинг минимум кийматини топинг.

Курсатилган иккиланган масалаларни ечимларидан фойдаланиб уйин стратегиясини ва ютуђини куйидаги формулалар билан аниклаймиз

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = \vartheta y_i^* \quad , \qquad z_j^* = \frac{z_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \vartheta x_j^*$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \qquad \left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right).$$

Демак P_i уйин ечимини чизикли программалаш усулларини куллаб, топиш жараёни куйидаги кетма-кетликда амалга оширилади:

1. Уйин матрицасига эквивалент булган бир жуфт иккиланган чизикли программалаш масаласи тузилади;
2. Бир жуфт иккиланган масаланинг оптимал режаси топилади;
3. Иккиланган бир жуфт масаланинг оптимал режаси билан оптимал стратегия ва уйин ютуђидан фойдаланиб уйиннинг ечим топилади.

Масала 8.3. Куйидаги матрица билан берилган уйиннинг ечими топилсин

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. Бу матрица эгар нуктага a_{32}=5 эга. Шунинг учун унинг ечими соф стратегия A_3 ва B_2 булади, яъни $\overline{X}=(0,0,1)$ ва $\overline{Y}=(0,1;\ 0)$ v=5 булганда.

Бу матрицага мос булган бир жуфт чизикли программалашнинг иккиланган масаласи куйидаги куринишда булади:

Даслабки масала:
Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 \geq 1. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.
$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$
функцияни минимум кийматини топинг

Иккиланган масала.
Куйидаги шартларда

$$\left.\begin{aligned} 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 1, \\ 4y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq 1, \\ 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq 1. \end{aligned}\right\}$$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$.
$f(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3$
функцияни максимум кийматини топинг

Иккиланган масалани симплекс усул билан ечсак куйидаги жадваллар хосил булади.

1-чи симплекс жадвал

4	I	II	III	I	1	1	0	0	0	Σ
	С$_6$		А$_{i0}$	у$_1$	у$_2$	у$_3$	у$_4$	у$_5$	у$_6$	
3	0	У$_4$	1	6	2	5	1	0	0	
2	0	у$_5$	1	4	3	7	0	1	0	
I	0	у$_6$	1	5	5	6	0	0	1	
			Z=0	-1	-1	-1	0	0	0	

Иккинчи симплекс жадвал

4	1	2	3	1	1	1	0	0	0	Текшириш устуни
	С$_6$			у$_1$	у$_2$	у$_3$	у$_4$	у$_5$	у$_6$	$6\frac{4}{5}$
3	0	у$_4$	3/5	4	0	13/5	0	0	-2/5	$4\frac{1}{5}$
2	0	у$_5$	2/5	1	0	17/5	0	0	-3/5	$3\ \frac{3}{5}$

I	1	y_2	1/5	1	1	6/5	0	0	1/5	3/5
Индекс сатри			Z=1/5	0	0	1/5	0	0	1/5	3/5

Демак индекс сатрида хамма катаклардаги сонлар мусбат булгани учун оптимал ечим куйидагича $y_1=0$, $y_2=\frac{1}{5}$, $y_3=0$, $y_4=\frac{3}{5}$; $y_5=\frac{2}{5}$ ва $Z_{max}=f_{min}=\frac{1}{5}$. Уйин ютуђи $\vartheta=\frac{1}{Z_{\max}}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$ булгани учун оптимал ечимлар $y_1^*=0$, $y_2^*=1$, $y_3^*=0$ га тенг. Шундай килиб B уйинчининг оптимал стратегияси $\overline{У^*}$ (0; 1;0) га тенг.

A уйинчининг ютуђини оптимал ечимларини, яъни дастлабки масалани оптимал ечимларини ўзгармаслар устунидан y_4, y_5, y_6 каршисидаги сонларни танлаб оламиз:

$x_1^*=0$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{5}$, оптимал стратегияси эга $\overline{X^*}$ (0; 0;1) га тенг булади.

Топшириклар

Масала 8.4-8.16. Куйидаги матрицалар билан берилган уйинларни ечимлари топилсин.

8.4. $A_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

8.5. $A_2=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

8.6. $A_3=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.7. $A_4=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.8. $A_5=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.9. $A_6=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

8.10. $A_7=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 5 & 4\\ 1 & 5\\ 3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ 8.11. $A_8=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\\ 0 & 6\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

8.12. $A_9=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\\ 3 & 6\\ 1 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ 8.13. $A_{10}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

8.14. $A_{12}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 9 & 3\\ 5 & 9\\ 6 & 9\end{pmatrix}$ 8.15. $A_{13}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 9\\ 7 & 7 & 8\end{pmatrix}$

8.16. $A_{14}=\begin{pmatrix}7 & 6 & 7 & 5\\ 6 & 7 & 9 & 8\\ 5 & 8 & 4 & 6\end{pmatrix}$ 8.17. $A_{11}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}$

Масала 8.17- Куйидаги жуфт симметрик масалалар учун матрицалар билан аникланган уйинни тузинг ва оптимал стратегияларини топинг:

8.17. $\begin{cases}30x_1+10x_2\le 1,\\ 20x_1+50x_2\le 1,\\ 25x_1+25x_2\le 1.\end{cases}$ $\begin{cases}30y_1+20y_2+25y_3\ge 1,\\ 10y_1+50y_2+25y_3\ge 1.\end{cases}$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$ $y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ge 0.$

$f(x_1,x_2)=x_1+x_2$ $\to\max$

$Z(y_1,y_2,y_3)=y_1+y_2+y_3\to\min$

8.18. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \le 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \le 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$.

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 \ge 1, \\ 2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 1. \end{cases}$$

$y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$ $y_3 \ge 0$.

$Z(y_1,y_2,y_3)=y_1+y_2+y_3 \to \min$

8.19. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 16. \end{cases}$$

$x_1,x_2,x_3 \ge 0$.

$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1+4x_2+x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \ge 4, \\ -4y_1 + y_2 + y_3 \ge 1, \end{cases}$$

$y_1,y_2,y_3 \ge 0$.

$Z(y_1,y_2,y_3)=12y_1+14y_2+16y_3 \to \min$

8.20. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \le 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 24. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1+7x_2+8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \ge 5, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 7, \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \ge 8. \end{cases}$$

$y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$.

$Z(y_1,y_2,y_3)=18y_1+16y_2+24y_3 \to \min$

Жавоблар.

I Боб.

1.26 $x_1=39{,}99$; $x_2=28{,}94$. $F=669{,}2$. $y_3=121{,}7$

1.27 $y_1=74$; $x_2=2\frac{9}{13}$; $x_1=63\ \frac{6}{13}$ $F=1288\frac{1}{13}$;

1.28 $x_2=105\frac{5}{7}$; $y_2=372\frac{6}{7}$; $y_3=350\frac{2}{7}$; $F=634\frac{2}{7}$;

1.29 $y_1=161$; $y_2=204$; $x_2=27$. $F=297$

1.30 $y_1=182$; $x_2=20{,}7$; $x_1=37{,}4$; $F=701$.

1.31 $x_1=36$; $x_2=18$; $y_2=411{,}5$; $F=400$.

1.32 $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $v_1=0$; $v_2=0$; $F_{min}=\frac{4200}{13}$

1.33 $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $v_1=0$; $v_2=0$; $F_{min}=232{,}9$

1.34 $y_1=1$; $x_1=49{,}83$; $x_2=21{,}9$; $y_3=366{,}2$; $F_{min}=372{,}77$

1.36 $x_1=0$, $x_2=0$; $x_3=0$; $v_1=14$; $v_2=0$; $F_{min}=335\frac{5}{9}$

1.38 $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $v_1=17{,}8$; $v_2=0$; $F_{min}=14{,}90$

1.39 $y_1=66{,}16$; $y_2=11{,}13$; $x_1^1=105{,}5$; $F=617{,}2$

1.40 $y_1=2925\frac{5}{3}$; $y_2=961$; $x_2=53$; $F=1024\frac{4}{3}$

II.Боб

2.1 $x_1=39{,}99$; $x_2=28{,}94$; $y_3=121{,}7$ $y_1=y_2=0$. $F=669{,}2$

2.2 $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=4$, $v_1=0$, $v_2=54$, $F_{min}=230$

2.3 $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=639/8$; $v_1=3$, $V_2=21/2$; $F_{min}=219/2$

2.4 $y_1=0$; $y_2=0$; $y_3=0$; $v_1=0$, $v_2=50$. $F_{min}=44$

2.5 $y_1=0$; $y_2=0$; $y_3=0$; $v_1=0$, $v_2=20$. $F_{min}=14$

2.6 $y_1=0$; $y_2=0$; $y_3=0$; $v_1=0$; $v_2=9$ $F_{min}=7/2$;

2.7 $y_1=0$; $y_2=0$; $y_3=0$, $v_1=0$; $v_2=7$. $F_{min}=8$

2.8 $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $v_1=0$, $v_2=1,2$; $F_{min}=4,3$.

2.9 $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $v_1=0$, $v_2=14$, $F_{min}=38,4$.

2.10 $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$, $v_1=0$, $v_2=12$, $F_{min}=32$

2.13 $y_1=0$ $y_2=0$; $y_3=0$; $v_1=0$, $v_2=12,8$. $F_{min}=11$

2.14 $y_1=0$; $y_2=0$; $y_3=0$; $v_1=0$, $v_2=12$; $F_{min}=4,3$

2.15 $y_1=0$, $y_2=0$; $y_3=0$ $v_1=14$; $v_2=0$ $F_{min}=22$

2.16 $y_1=0$, $y_2=0$; $y_3=0$; $v_1=1$, $v_2=0$. $F_{min}=4$.

III.Боб

3.1 $x_{12}=170$; $x_{15}=160$, $x_{21}=120$; $x_{23}=150$; $x_{31}=100$; $x_{34}=150$; $x_{45}=40$; $x_{36}=60$;
f=11570 т/км

3.2 $x_{11}=50$; $x_{14}=100$; $x_{21}=50$; $x_{25}=200$; $x_{31}=0$; $x_{32}=70$; $x_{33}=130$;
f=18990 т/км

3.3 $x_{14}=190$; $x_{15}=10$; $x_{21}=220$; $x_{22}=130$; $x_{31}=50$; $x_{33}=100$; $x_{35}=100$; $x_{35}=50$;
f=13320;

3.4 $x_{12}=100$; $x_{14}=150$, $x_{23}=120$; $x_{25}=180$; $x_{31}=135$; $x_{32}=35$; $x_{35}=30$;
f=24510

3.5 $x_{11}=60$; $x_{13}=190$; $x_{15}=70$; $x_{24}=150$; $x_{25}=200$; $x_{31}=50$; $x_{32}=150$;
f=14400

3.6 $x_{11}=150$; $x_{23}=160$; $x_{32}=90$; $x_{12}=20$; $x_{24}=90$; $x_{33}=6$; $x_{35}=140$;
f=19810

3.7 $x_{13}=80$; $x_{14}=120$; $x_{21}=130$; $x_{25}=120$; $x_{32}=110$; $x_{33}=20$; $x_{35}=70$;
f=15430

3.8 $x_{14}=140$; $x_{15}=160$; $x_{21}=145$; $x_{22}=55$; $x_{32}=140$; $x_{33}=200$; $x_{35}=10$;
f=20900;

3.9 $x_{11}=135$; $x_{13}=5$; $x_{14}=60$; $x_{22}=135$; $x_{23}=115$; $x_{34}=90$; $x_{35}=210$;
f=2920 т/км

3.11 $x_{11}=80$; $x_{15}=120$; $x_{23}=10$; $x_{24}=130$; $x_{26}=60$; $x_{31}=60$; $x_{32}=100$; $x_{33}=90$;
f=16000;

3.13 $x_{11}=100$; $x_{12}=125$; $x_{22}=65$; $x_{23}=80$; $x_{24}=30$; $x_{25}=100$; f=1510;

3.14 $x_{11}=70$; $x_{12}=140$; $x_{22}=80$; $x_{23}=200$; $x_{24}=170$; $x_{31}=80$; $x_{35}=210$;
f=13380.

3.15 $x_{11}=220$; $x_{12}=110$; $x_{22}=120$; $x_{23}=140$; $x_{25}=190$; $x_{33}=60$; $x_{34}=210$;
f=17380

3.16 $x_{11}=210$; $x_{12}=60$; $x_{23}=170$; $x_{24}=210$; $x_{26}=30$; $x_{32}=30$; $x_{35}=135$; $f=15340$.

3.17 $x_{11}=210$; $x_{13}=90$; $x_{22}=190$; $x_{23}=60$; $x_{31}=40$; $x_{34}=130$; $x_{35}=130$;

3.18 $x_{12}=190$; $x_{13}=60$; $x_{21}=210$; $x_{23}=90$; $x_{31}=50$; $x_{34}=130$; $x_{35}=130$; $f=15510$.

3.19 $x_{14}=180$; $x_{15}=120$; $x_{21}=160$; $x_{22}=160$; $x_{31}=30$; $x_{33}=120$; $x_{35}=80$; $f=15960$

3.20 $x_{11}=60$; $x_{14}=200$; $x_{22}=150$; $x_{23}=125$; $x_{34}=15$; $x_{31}=80$; $x_{35}=220$; $f=113375$

IV.Боб

4.1. X(3, 13), $F_{max}=48$.

4.2. X(1; 2), $F_{max}=11$.

4.3. X(0; 2) ёки X(1; 1), $F_{max}=2$.

4.4. X(9; 1), $F_{max}=9$.

4.5. X(5; 3) $F_{max}=5$.

4.6. X(0; 0; 11; 3; 1), $F_{max}=24$.

4.7. X(2; 2; 3; 1), $F_{max}=2$

4.8. X(1; 3; 0; 0; 1), $F_{min}=2$

4.9. X(0; 3; 2; 0) ёки X(1; 2; 1;1), ёки X(2; 1; 0; 2) $F_{max}=16$

4.10. X(0; 3; 3; 0) ёки X(1; 2; 2;1), ёки X(2; 1; 1; 2) ёки X(3; 0; 0; 3), $F_{max}=3$

4.11. X(1; 1; 1; 2; 1; 1), $F_{min}=3$

4.12. X(1; 2; 1; 1); $F_{max}=11$

4.13. X(0; 2), $F_{max}=2$

4.14. X(9; $\frac{3}{8}\leq X_2\leq 1$), $F_{max}=9$

4.15. X(1; 1), $F_{max}=\frac{5}{4}$

4.16. X(1,5; 1), $F_{max}=\frac{5}{2}$

4.17. X(0; 1; $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$) $F_{max}=10\frac{5}{6}$

V Боб.

5.7. X(0; 1; 0; 1; 0), $F_{max}=6-2t$, агарда $t\in(-\infty; -0,5]$

X($\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$; 0; 0; 0), $F_{max}=-\frac{19}{3}-\frac{4}{3}t$, агарда $t\in[-0,5;1,75]$

X(2; 0; 0; 0; 5), F_{max}=-17+12t, агарда t [$\frac{7}{4}$;∞)

5.8. X(28; 0; 0; 48; 38), F_{max}=744-48t агарда tЄ (-∞; 9]

X(52; 24; 0; 0; 2), F_{max}=312 агарда tЄ [9; +∞)

5.9. X(0; 0; 0; 1;-2t; 2+t; 3-t); F_{max}=1-2t, агарда tЄ (∞; -2]

X(0; 0; 1-2t; 2+t;3-t), F_{max}=-1-3t; агарда tЄ [-2; 0,5]

tЄ (0,5,+∞) ораликда масалани ечиб булмайди.

5.10. X(14-2t; 34-3t; 58-2t; 0; 0), F_{max}=198-19t, агарда tЄ (-∞; 7]; tЄ (7; +∞) да

эса масалаларни ечиб булмайди.

5.11. tЄ (-∞; -$\frac{1}{14}$) ораликда масалани ечиб булмайди;

X(0;5-6t; 17-6t;1+14t; 0) F_{max}=2+14t+108t^2, агарда tЄ [-$\frac{1}{4}$; $\frac{5}{6}$]

X(0; 0; 12; 6+8t;-10+12t), агарда tЄ [$\frac{5}{6}$;+∞).

5.12. Масалани tЄ (-∞; -$\frac{2}{3}$) ораликда ечиш мумкин эмас;

X(4+6t; 0; 0;13-6t; 4+3t), F_{max}=32+82t+42t^2, агарда tЄ [-$\frac{2}{3}$;- $\frac{4}{11}$];

X(0; 0; 4+6t; 9-12t; 8+9t), F_{max}=48+150t+108t^2, агарда tЄ [-$\frac{4}{11}$;- $\frac{3}{13}$]

X(0;2+3t; 0; 3-21t; 10+12t), F_{max}=54+185t+147t^2, агарда tЄ [-$\frac{3}{13}$, $\frac{1}{7}$]

X(0;3-4t; -2+14t; 0; 11+5t), F_{max}=57+177t+56t^2, агарда tЄ [$\frac{1}{7}$; $\frac{3}{4}$];

X(-9+12t; 0; 13-6t; 0; 17-36t), F_{max}=84+201t-24t^2, агарда tЄ [$\frac{3}{4}$; $\frac{13}{6}$];

tЄ ($\frac{13}{6}$; +∞) ораликда масалани ечиш мумкин эмас.

VI Боб

6.5 . $X^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x_4^*)=(120, 0, 0, 80)$.
$F_{max}=95+60=155$ минг сум.

6.6. Ускуналарни 3-чи ва 6-чи йиллар бошида олмаштириш керак.

6.7. 3-чи ва 4-чи корхонага 40 минг сумдан 2-чи корхонага эса 20 минг сум капитал маблаѓ ажратиш керак.

6.8. v_1 ва v_3 контейнерлардан 3 тадан жойлаштириш керак.
$F_{max}=3v_1\cdot c_1+v_3\cdot c_3=3\cdot 24+3\cdot 16\cdot 250=72\cdot 960+48\cdot 250=$
$=69120+1200=81120$ сум.

VII Боб

7.1. $x_1^*=3$, $x_2^*=4$, $F_{max}=13$.

7.2. $x_1^*=\frac{123}{101}$, $x_2^*=\frac{422}{101}$, $F_{min}=3\frac{24}{101}$.

7.3. $x_1^*=\frac{18}{\sqrt{10}}$, $x_2^*=\frac{6}{\sqrt{10}}$, $F_{max}=36$.

7.4. $x_1^*=4$; $x_2^*=3$, $F_{max}=25$.

7.5. $x_1^*=6$, $x_2^*=4$, $F_{max}=24$.

7.6. $x_1^*=5$, $x_2^*=4$, $F_{min}=16$.

7.7. $x_1^*=5{,}8$; $x_2^*=4{,}6$ $F_{max}=37$.

7.14. $F_{min}=0{,}25$, $x_1=0{,}5$ ва $x_2=0$ булганда, $F_{max}=1$, $x_1=0$, $x_2=1$ ёки $x_1^*=1$, $x_2^*=0$, булганда

7.15. $F_{min}=6{,}25$, $x_1^*=1{,}5$, $x_2^*=\pm 0{,}5\sqrt{7}$ булганда; $F_{max}=19$, $x_1^*=-2$, $x_2^*=0$
булганда

7.16. $F_{min}=4{,}8$, $x_1^*=2{,}2$, $x_2^*=3{,}8$ булганда; $F_{max}=77$, $x_1^*=6$, $x_2^*=0$
булганда

7.17. $F_{min}=-16$, $x_1^*=0$, $x_2^*=-4$ булганда; $F_{max}=16$, $x_1^*=4$, $x_2^*=0$ булганда

7.18. $F_{max}=6{,}5-0{,}5\sqrt{10}$, $x_1^*=3{,}5-0{,}3\sqrt{10}$, $x_2^*=3-0{,}2\sqrt{10}$ булганда; $F_{max}=8+\sqrt{3}$,
$x_1^*=4+\sqrt{3}$, $x_2^*=3$; булганда

7.19. $F_{min}=20$, $x_1^*=-1$; $x_2^*=3$; $F_{max}=72$, $x_1^*=-3$, $x_2^*=-1$ булганда

7.20. (3; 3; 3), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1);

7.21. (2, 2, 2);

7.22. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$;

7.23. (0; 0; 0; 4), (0, 0, 4, 0), (0, 4, 0, 0), (4, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1).

7.24. (2,18 ;1,45 ; 4,36), λ=8,73 булганда

7.28. $F_{min}=\frac{38}{15}=2\frac{8}{15}$; $x_1^*=\frac{8}{15}$, $x_2^*=\frac{17}{15}$ булганда

7.29. $F_{max}=\frac{65}{4}$; $x_1^*=\frac{1}{2}$, $x_2^*=4$ булганда

7.30. $F_{max}=16$, $x_1^*=0$, $x_2^*=4$ булганда

7.31. $F_{max}=\frac{17}{8}$, $x_1^*=0$, $x_2^*=1$, $x_3^*=\frac{3}{4}$ булганда

7.32. $F_{max}=96$, $x_1^*=2$, $x_2^*=4$ булганда

7.37. $F_{max}=230$, $x_1^*=2{,}5$, $x_2^*=3$, $x_3^*=0$, $x_4^*=6$ булганда

7.38. $F_{min}=-\frac{22}{9}$, $x_1^*=\frac{14}{9}$, $x_2^*=\frac{2}{3}$ булганда

7.39. $F_{min}=-\frac{273}{13}$, $x_1^*=\frac{4}{13}$, $x_2^*=\frac{33}{13}$ булганда

7.40. $F_{max}=1{,}75$ $x_1^*=1$, $x_2^*=0{,}5$, $x_3^*=4{,}5$, $x_4^*=8$ булганда

7.41. $F_{max}=0$, $x_1^*=x_2^*$, $0 \le x_1 \le \frac{10}{3}$ булганда

7.42. $F_{min}=-1$, $x_1^*=1$, $x_2^*=x_3^*=0$, булганда

7.43. $F_{max}=-12$ $x_1^*=x_2^*=4$, $x_3^*=0$ булганда

7.44. $F_{min}=0$ $x_1^*=x_2^*=x_3^*=0$ булганда

7.45. $F_{max}=6$ $x_1^*=x_3^*=0$, $x_2^*=3$ булганда

7.53. 1) (4 ; 8); 2) (8,-2), 3) (8 ; 6) ; 4) (0 ;-1)

7.54. $x^*=(2 ;1)$, $Z_{max}=10$, $x_0=-10$

7.55. $x^*=(1 ; 1)$, $F_{max}=3$,

7.56. $x^*=(0; 1{,}8; 2{,}4)$ $F_{max}=16{,}2$

7.57. $x^*=(2 ;2)$ алмашриш жараёни якинлашади

7.58. $x^*=(3 ;3)$ нуктага алмашриш жараёни якинлашади

7.59. Алмаштириш жараёни $X^*=(0{,}8; 0{,}4)$ нуктага якинлашади.

VIII Боб

8.4. $$\overline{X}^* = \left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right); \quad \overline{Y}^* = \left(\frac{1}{5},0,\frac{4}{5}\right)$$

8.5. $$\overline{X}^* = \left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right); \quad \overline{Y}^* = \left(0,0,\frac{1}{7},\frac{6}{7},0\right), \vartheta = \frac{39}{7}$$

8.6. $\overline{X}^* = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overline{Y}^* = \left(0,0,0,\frac{3}{4},\frac{1}{4},0\right), \vartheta = \frac{7}{2}$

8.7. $\overline{x}^*$=(1,0), $\overline{y}^*$=(0, 1, 0, 0, 0) V=3

8.8. $\overline{X}^* = \left(\frac{5}{14},\frac{9}{14}\right)$, $\overline{Y}^* = \left(0,\frac{2}{7},0,\frac{5}{7},0\right), \vartheta = \frac{4}{7}$

8.9. $\overline{X}^* = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0,0\right)$, $\overline{Y}^* = \left(\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right). \vartheta = \frac{11}{3}$

8.10. $\overline{X}^* = \left(0,\frac{4}{5},\frac{1}{15},0,0\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right), \vartheta = \frac{21}{3}$

8.11. $X^* = \left(\frac{1}{3},0,0,0,\frac{2}{3}\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, V=4;

8.12. $X^* = \left(\frac{7}{9},0,0,\frac{7}{9},0\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \vartheta = \frac{44}{9}$

8.13. $\overline{X}^* = \left(0,0,0,\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right), \vartheta = \frac{7}{6}$

8.14. $\overline{X}^* = \left(0,\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$, $\overline{Y}^* = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, V=7

8.15. $\overline{x}^*$=(0, 0, 1), $\overline{y}^*$=(0, 1, 0), V=7.

8.16. $\overline{X}^* = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{3}{4},0,0,\frac{1}{4}\right), \vartheta = \frac{13}{2}$

8.17. $X^* = \left(\frac{2}{65},\frac{1}{130}\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{3}{130},\frac{1}{65},0\right), \mu = \frac{1}{26}, \vartheta = \frac{1}{\mu}$=26.

8.18. $X^* = \left(\frac{3}{4},0,0;\frac{1}{4}\right)$; $\overline{Y}^* = \left(\frac{3}{14},0;0,\frac{1}{14}\right), \vartheta = \frac{7}{2}$;

Адабиёт

1. Абдуллаев О. Ахмедов Т. Зиёхужаева И. Хисоблаш техникасининг инженерлик ва иктисодий хисоблашларда ишлатилиши. –«Укитувчи нашриёти». Тошкент –1976.
2. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. –Ленинград: ЛГУ, 1976.

3. Акулич Н.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. –М: Высшая школа, 1986.
4. Баумоль У. Экономическая теория исследований операций. «Прогресс», М.,1985.
5. Вентцель Е.С. Элементи теории игр-М: физматгиз, 1969.
6. Гольштейн В.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. –М.:1966.
7. Гуревич Т.Ф., Лушук В.О. Сборник задач по математическому программированию. –М.: Колос, 1977.
8. Давидов Э.Г. Исследование операций. =М.: «Высшая школа» 1990.
9. Данциг Д. Линейное программирование его применение и обобщение. –М.: Прогресс. 1975.
10. Доморяд А.П. Математические игры и развлечения. –М.: физмат. из. 1961.
11. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. –М.: Наука, 1969.
12. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. –М.: Высшая школа, 1975.
13. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. – М.: Знание. 1968.
14. Козлова О.В., Брянский Г.А., Разу М. Л. Хозяйственные ситуации - М.:Экономика.1976.из.
15. Кузнецов Ю.Н.,Кузубов В.И., Волошенко А.Б. Математическое программирование. -М.: Высшая школа, 1976.
16. Крынский Х.З. Математика для экономистов. -М.: Изд. «Статистика»,1970.
17. Михалевич В.С., Кукса А.И. Методы последовательной оптимизации.- М:.Наука,1983.
18. Мулин Э. Теория Игр с примерами из математической экономике.-М:.Мир,1985.
19. Насриддинов Ђ.Н. Математик экономика элементлари .-Тошкент," «Укитувчи».1984.
20. Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирование. – М.:Изд. Иностранной литературы,1960.
21. Рейнфельд Н., Фогель У. Математическое

программирование. -М.:изд. Иностранной литературы,1960.

22. Сафаева К., Бекназарова Н.Р. Операцыяларни текширишнинг математик усуллари. 1кисм,-Тошкент, «Укитувчи»,1984.

23. Сафаева К., Бекназарова Н.Р. Операцияларни текширишнинг математик усуллари. 2кисм ,Тошкент, «Укитувчи»,1990.

24.Тарасевич., Гальперин В.М., Гребинников П.И., Леусский А.И. Макро Экономика. Издательство Санкт-Петербурский государственного университета экономики и финансов,1999.

25. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. –М.: Мир. 1967.

26. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. –М.: Изд.иност. л-ры, 1962.

27. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. –М.: Изд. «Сов Радио» 1974.

28. Юдин Д.Б., Юдин А. Д. Экстремальное модели в экономике. –М.: «Экономика» 1979.

Мундарижа

I Боб Чизикли программалаш