

**Колесников И.К., Халиков А.А., Каримов Р.К.**

# **ОСНОВЫ РАДИОСВЯЗИ**

Ташкент – 2006

## УДК 621.372.011. (076.5)

Учебное пособие по предмету “Электромагнитные поля и волны”  
ТашИИТ; Колесников И.К., Халиков А.А., Каримов Р.К. Ташкент, 2006,

Учебное пособие по курсу “Электромагнитные поля и волны” предназначен для обучения бакалавров направлений 5522200 – Телекоммуникация, 5522000 – Радиотехника, 5522100 – Телевидение, радиосвязь и радиовещание, 5440300 – Астрономия, 5440100 – Физика. Учебное пособие предназначено также для подготовки специалистов в профессиональных колледжах по специальностям: 020005 – Электромеханик по эксплуатации устройств оперативной технологической связи, электромеханик многоканальной связи, 020006 – Электромеханик по ремонту радиотелеаппаратуры, радиомеханик стационарной и поездной радиосвязи, электромеханик по ремонту и эксплуатации устройств радиорелейной связи. Оно содержит все темы, предусмотренные программой этого предмета. В первой части учебного пособия рассматривается теория электростатического поля, излагается теория стационарного электрического поля, исследуются магнитные поля постоянных токов, даются выводы основных уравнений электродинамики – уравнений Максвелла. Во второй части учебного пособия рассматриваются вопросы возбуждения радиоволн СДВ, ДВ, КВ, УКВ, дециметрового и сантиметрового поддиапазонов, а также особенности их распространения и приёма.

Одобрено заседанием редакционно-издательского совета института.

Составители: И.К. Колесников, к.т.н., доц.,  
А.А. Халиков, д.т.н., проф.,  
Р.К. Каримов, к.т.н., доц.,

Кафедра “Электрическая связь и радио”; ТашИИТ;

Рецензенты: Х.Б. Сапаев, д.т.н., проф., кафедра “Электрическая связь и радио”; ТашИИТ;  
В.К. Соколов, д.т.н., проф., кафедра “Теория электрических цепей”; ТУИТ;  
П.М. Тошходжаев, преподаватель высшей категории зав.кафедрой “ТЭЦ и Ус” Ташкентского профессионального колледжа связи

## Предисловие

Учебное пособие по курсу “Электромагнитные поля и волны” предназначен для обучения бакалавров направлений 5522200 – Телекоммуникация, 5522000 – Радиотехника, 5522100 – Телевидение, радиосвязь и радиовещание, 5440300 – Астрономия, 5440100 – Физика. Учебное пособие предназначено также для подготовки специалистов в профессиональных колледжах по специальностям: 020005 – Электромеханик по эксплуатации устройств оперативной технологической связи, электромеханик многоканальной связи, 020006 – Электромеханик по ремонту радиотелеаппаратуры, радиомеханик станционной и поездной радиосвязи, электромеханик по ремонту и эксплуатации устройств радиорелейной связи.

Учебное пособие состоит из двух частей: первая часть “ Электродинамика ”, вторая часть “ Распространение радиоволн ”.

В первой части рассматриваются электромагнитные явления, которые используются в различных областях радиотехники. Формируются основные законы, и выясняются их физическое содержание, рассматриваются методы исследования и расчета, электромагнитных полей. Исходя из методических соображений, курс построен по принципу перехода от более простых разделов к более сложным.

В начале излагается теория электростатического поля, даются определения физических величин, характеризующих поле, приводятся методы расчета электростатических полей. Затем рассматривается стационарное электрическое поле в проводящей среде. Формируются законы постоянного тока в дифференциальной форме.

Далее исследуются магнитные поля постоянных токов. Приводятся методы расчёта магнитных полей.

Даются выводы основных уравнений электродинамики - уравнений Максвелла и приводятся методы расчётов электромагнитных полей. Рассматриваются условия возбуждения и распространения электромагнитных волн в неограниченной среде и направляющих системах.

Во второй части курса рассматриваются вопросы излучения, распространения и приема радиоволн УКВ диапазона, главным образом дециметрового и сантиметрового поддиапазонов, где удаётся обеспечить высокую помехозащищенность, большую пропускную способность, необходимую надёжность.

При изложении теоретических вопросов главное внимание уделено формированию исходных данных, анализу конечных результатов и физическому истолкованию.

Сложные формулы приводятся без подробных промежуточных выкладок

Это обусловлено желанием охватить в сжатом виде широкий круг вопросов.

# ЧАСТЬ 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

## ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### Введение

В основе теории электромагнетизма лежит представление об электромагнитном поле. В простейшем случае термин "поле" употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику. В этом случае говорят о "поле температур" материальной среды или, например, о "поле скоростей" частиц жидкости, газа. В сущности, при этом просто определяются какие-то функции координат, и, быть может, времени: температура, скорость и т.п. Подобно этому об электрическом поле можно говорить как о "поле сил"; каждый раз имеется в виду сила, которая будет действовать на положительный единичный точечный заряд, если его поместить в пространство, где действует поле. Понятие поля в этих примерах имеет лишь некоторое описательное значение. Электромагнитное поле характеризуется некоторыми векторными функциями координат и времени. В философском смысле электромагнитное поле следует рассматривать как одну из форм существования материи. Хотя проявление электромагнитных сил в природе люди наблюдали с давних времен, научные понятия в этой области сложились сравнительно недавно. К ним, разумеется, нельзя относить первые представления древних.

В 1784 - 1789 г. были опубликованы работы Шарля Кулона об электрических и магнитных взаимодействиях. Найденный позднее закон Ампера о взаимодействии токов и другие закономерности этого рода идейно близки закону Кулона: действие одного объекта на другой, как полагали исследователи, происходит без всякого участия промежуточной среды, мгновенно. Это так называемый *принцип дальнего действия*, т.е. действия на расстоянии, вошедший в науку вместе с механикой Ньютона.

С именем Майкла Фарадея (1791-1867г.) связано зарождение *принципа ближнего действия*, согласно которому взаимодействие осуществляется через посредство среды (в частности вакуума), являющейся "вместилищем" электромагнитного процесса; при этом возникает вопрос о времени передачи взаимодействия. Исключительный вклад в науку было суждено внести Джеймсу Клерку Максвеллу (1831-1879 г.). В современной физике уравнения Максвелла являются фундаментальными законами теории электромагнетизма. Максвеллу принадлежит теоретический вывод о существовании электромагнитных волн - вместе с гипотезой об электромагнитной природе света. Этот вывод явился результатом анализа, отправной точкой которого

были физические идеи Фарадея. Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории и их экспериментальное исследование было осуществлено Генрихом Герцем (1857-1894 г.). Герц превзошел многое из того, что мы относим теперь к радиотехнической электродинамике. Радиотехника явилась опытной базой теории электромагнетизма, основывающейся на уравнениях Максвелла, а также стимулятором ее дальнейшего развития. Вместе с радиотехникой появилось понятие радиоволн в природных условиях над Землей и в космосе. Проблема излучения и приема электромагнитной энергии, переносимой радиоволнами, привела к теории антенн.

В первых опытах длина радиоволн измерялась метрами. В начале века, когда радиосвязь приобрела уже практическое значение, использовались главным образом длинные волны (длиной порядка километра). Но, начиная с двадцатых годов, в радиотехнической практике осваиваются волны все более короткие. Возникшая в военное время радиолокация дала этому процессу мощный толчок - в технику вошли волны дециметровые, сантиметровые, а затем и миллиметровые. Эта практика изменила многое, как в самой радиотехнике, так и в ее теоретических основах. Дело в том, что ранее размеры элементов радиоаппаратуры оставались намного меньше длины волны. Благодаря этому основные представления электротехники и используемая ею теория цепей были пригодны как аппарат расчетов, а радиотехническая аппаратура во многом напоминала электротехническую аппаратуру. Но такое положение не могло сохраниться, когда понадобилось создавать радиотехнические элементы, сравнимые по размерам с длиной волны. Что касается элементов радиоаппаратуры на сантиметровых и миллиметровых волнах, то принципы их построения далеки от старых электротехнических образцов. Примечательно, например, использование различных волноводов в виде полых металлических труб, диэлектрических стержней и т.п., а также аналогично построенных резонаторов вместо так называемых колебательных контуров, включающих емкостные и индуктивные элементы. Для понимания принципов действия, сознательного применения и конструирования подобных устройств необходимо знание теории электромагнетизма, базирующейся на уравнениях Максвелла.

Благодаря широкому применению оптических квантовых генераторов - лазеров - в радиотехническую практику вошли чрезвычайно короткие волны; размеры соответствующей аппаратуры всегда очень велики в сравнении с длиной волны. В этой области электродинамическая теория пересекается с оптикой.

Задачи теории электромагнетизма, порождаемые радиотехнической практикой, нередко настолько сложны, что только появление современных ЭВМ делает эту теорию средством проектирования аппаратуры, уже автоматизированной.

При изучении электромагнитного поля мы будем рассматривать вначале отдельно неизменное во времени электрическое поле и его взаимодействие с неподвижными заряженными телами, по которым проходит постоянный ток. После освоения методов расчета электростатических и магнитостатических полей переход к рассмотрению законов электромагнитного поля и распространение электромагнитных волн будет менее трудным.

## § 1.1. Электрический заряд

Подобно понятию гравитационной массы тела в механике Ньютона, понятие заряда в электродинамике является первичным, основным понятием.

Электрический заряд – это физическая величина, характеризующая свойство частиц или тел вступать в электромагнитные силовые взаимодействия.

Электрический заряд обычно обозначается буквами  $q$ ,  $Q$ . Совокупность всех известных экспериментальных фактов позволяет сделать следующие выводы:

Существует два рода электрических зарядов, условно названных положительными и отрицательными.

Заряды могут передаваться (например, при непосредственном контакте) от одного тела к другому. В отличие от массы тела электрический заряд не является неотъемлемой характеристикой данного тела. Одно и то же тело в разных условиях может иметь разный заряд.

Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются. В этом также проявляется принципиальное отличие электромагнитных сил от гравитационных сил. Гравитационные силы всегда являются силами притяжения.

Электрический заряд можно считать бесконечно делимым и пользоваться понятием плотности заряда. Если заряд " $q$ " распределен в пространстве, то объемная плотность заряда:

$$\text{Соответственно заряд:} \quad \rho = \frac{dq}{dv}; \quad (1.1)$$

$$q = \int_v \rho dV. \quad (1.2)$$

Если заряд " $q$ " распределен по поверхности " $S$ ", то поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad (1.3)$$

то заряд можно определить:

$$q = \int_S \sigma dS. \quad (1.4)$$

Линейная плотность заряда:

$$\tau = \frac{dq}{dl}, \quad (1.5)$$

где  $dl$  - элемент линии, вдоль которой распределен заряд.

$$q = \int_1 \tau dl. \quad (1.6)$$

## § 1.2. Электрическое поле. Закон Кулона

Одним из фундаментальных законов природы является экспериментально установленный закон сохранения электрического заряда.

В изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех тел остается постоянной:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = \text{const}. \quad (1.7)$$

Закон сохранения электрического заряда утверждает, что в замкнутой системе тел не могут наблюдаться процессы рождения или исчезновения зарядов только одного знака.

С современной точки зрения, носителями зарядов являются элементарные частицы. Все обычные тела состоят из атомов, в состав которых входят положительно заряженные протоны, отрицательно заряженные электроны и нейтральные частицы – нейтроны. Протоны и нейтроны входят в состав атомных ядер, электроны образуют электронную оболочку атомов. Электрические заряды протона и электрона по модулю в точности одинаковы и равны элементарному заряду  $e$ .

$$e = 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

В нейтральном атоме число протонов в ядре равно числу электронов в оболочке. Это число называется атомным номером. Атом данного вещества может потерять один или несколько электронов или приобрести

лишний электрон. В этих случаях нейтральный атом превращается в положительно или отрицательно заряженный ион.

Заряд может передаваться от одного тела к другому только порциями, содержащими целое число элементарных зарядов. Таким образом, электрический заряд тела – дискретная величина:

$$q = \pm ne \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

Физические величины, которые могут принимать только дискретный ряд значений, называются квантованными. Элементарный заряд  $e$  является квантом (наименьшей порцией) электрического заряда. Следует отметить, что в современной физике элементарных частиц предполагается существование так называемых кварков – частиц с дробным зарядом  $\pm \frac{2}{3}e$

и  $\pm \frac{1}{3}e$ . Однако, в свободном состоянии кварки до сих пор наблюдать не удалось.

В обычных лабораторных опытах для обнаружения и измерения электрических зарядов используется электрометр – прибор, состоящий из металлического стержня и стрелки, которая может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис.1). Стержень со стрелкой изолирован от металлического корпуса. При соприкосновении заряженного тела со стержнем электрометра, электрические заряды одного знака распределяются по стержню и стрелке. Силы электрического отталкивания вызывают поворот стрелки на некоторый угол, по которому можно судить о заряде, переданном стержню электрометра.

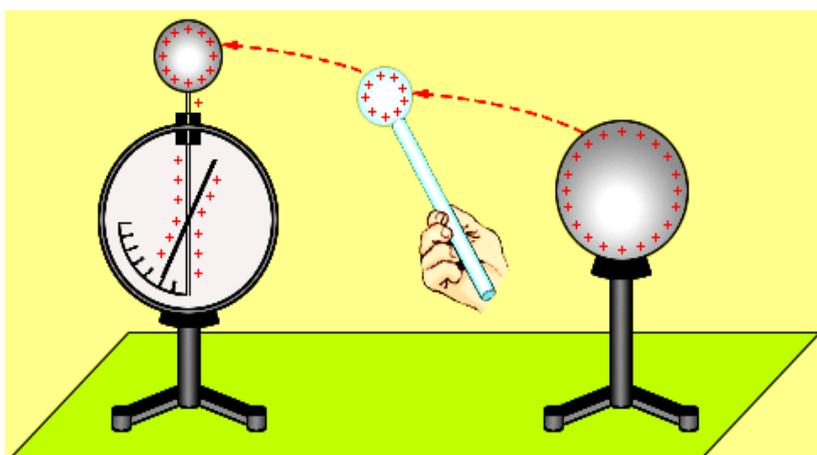


Рис.1. Перенос заряда с заряженного тела на электрометр

Электрометр является достаточно грубым прибором; он не позволяет исследовать силы взаимодействия зарядов. Впервые закон взаимодействия неподвижных зарядов был установлен французским физиком Ш. Кулоном (1785 г.). В своих опытах Кулон измерял силы притяжения и отталкивания

заряженных шариков с помощью сконструированного им прибора – крутильных весов (рис. 2), отличавшихся чрезвычайно высокой чувствительностью. Так, например, коромысло весов поворачивалось на  $1^\circ$  под действием силы порядка  $10^{-9}$  Н.

Идея измерений основывалась на блестящей догадке Кулона о том, что если заряженный шарик привести в контакт с точно таким же незаряженным, то заряд первого разделится между ними поровну. Таким образом, был указан способ изменения заряда шарика в два, три и т. д. раз. В опытах Кулона измерялось взаимодействие между шариками, размеры которых много меньше расстояния между ними. Такие заряженные тела принято называть точечными зарядами.

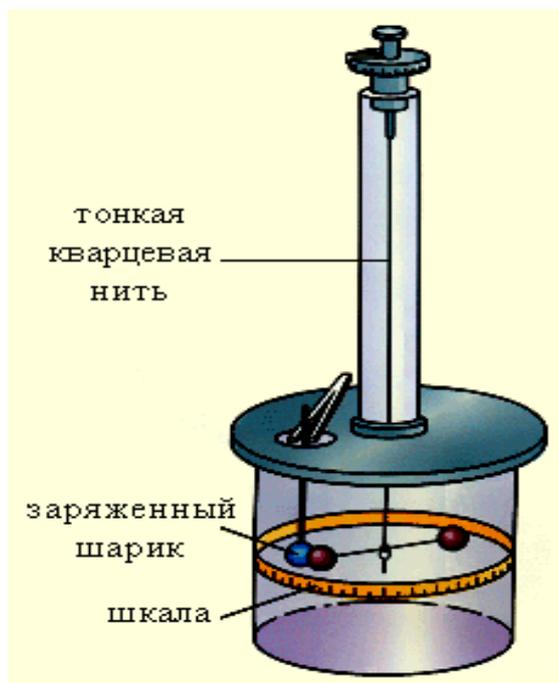


Рис.2. Прибор Кулона

Точечным зарядом называют заряженное тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

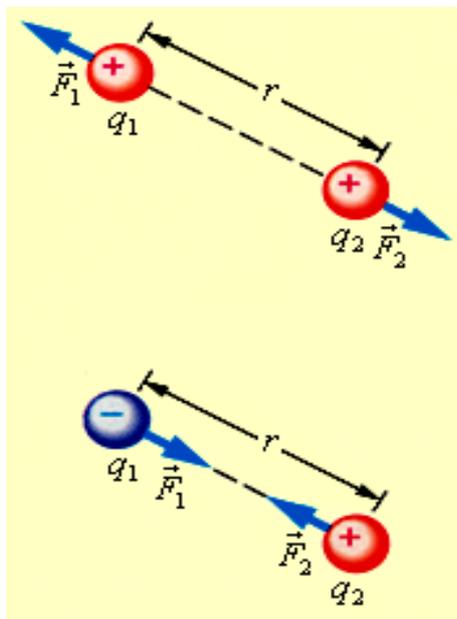


Рис.3. Силы взаимодействия одноименных и разноименных зарядов

На основании многочисленных опытов Кулон установил следующий закон: Силы взаимодействия неподвижных зарядов в вакууме прямо пропорциональны произведению модулей зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}. \quad (1.9)$$

Силы взаимодействия подчиняются третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (1.10)$$

Они являются силами отталкивания при одинаковых знаках зарядов и силами притяжения при разных знаках (рис. 3). Взаимодействие неподвижных электрических зарядов называют электростатическим или кулоновским взаимодействием. Раздел электродинамики, изучающий кулоновское взаимодействие, называют электростатикой. Закон Кулона справедлив для точечных заряженных тел. Практически закон Кулона хорошо выполняется, если размеры заряженных тел много меньше расстояния между ними.

Коэффициент пропорциональности  $k$  в законе Кулона зависит от выбора системы единиц. В Международной системе СИ за единицу заряда принят кулон (Кл).

Кулон – это заряд, проходящий за 1 с через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А. Единица силы тока (ампер) в СИ является наряду с единицами длины, времени и массы основной единицей измерения.

Коэффициент  $k$  в системе СИ обычно записывают в виде:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.11)$$

Где  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$  – электрическая постоянная.

Опыт показывает, что силы кулоновского взаимодействия подчиняются принципу суперпозиции.

Если заряженное тело взаимодействует одновременно с несколькими заряженными телами, то результирующая сила, действующая на данное тело, равна векторной сумме сил, действующих на это тело со стороны всех других заряженных тел.

Рис. 4 поясняет принцип суперпозиции на примере электростатического взаимодействия трех заряженных тел.

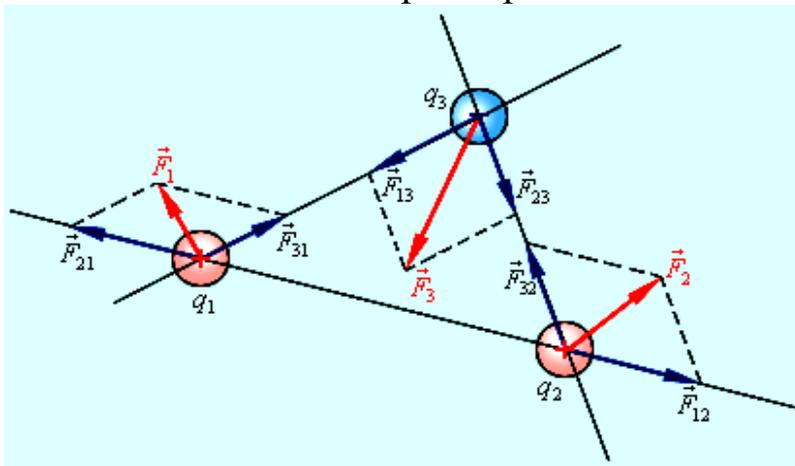


Рис.4. Принцип суперпозиции электростатических сил

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}, \vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}, \vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}.$$

### § 1.3. Напряженность электрического поля

По современным представлениям, электрические заряды не действуют друг на друга непосредственно. Каждое заряженное тело создает в окружающем пространстве электрическое поле. Это поле оказывает силовое действие на другие заряженные тела. Главное свойство электрического поля – действие на электрические заряды с некоторой силой. Таким образом, взаимодействие заряженных тел осуществляется не непосредственным их воздействием друг на друга, а через электрические поля, окружающие заряженные тела.

Электрическое поле, окружающее заряженное тело, можно исследовать с помощью так называемого пробного заряда – небольшого по величине точечного заряда, который не вносит заметного перераспределения исследуемых зарядов.

Для количественного определения электрического поля вводится силовая характеристика - напряженность электрического поля.

Напряженностью электрического поля называют физическую величину, равную отношению силы, с которой поле действует на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку пространства, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.12)$$

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  – векторная физическая величина. Направление вектора совпадает в каждой точке пространства с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд.

Электрическое поле неподвижных и не меняющихся со временем зарядов называется электростатическим.

Если с помощью пробного заряда исследуется электрическое поле, создаваемое несколькими заряженными телами, то результирующая сила оказывается равной геометрической сумме сил, действующих на пробный заряд со стороны каждого заряженного тела в отдельности. Следовательно, напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов в данной точке пространства, равна векторной сумме напряженностей электрических полей, создаваемых в той же точке зарядами в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \vec{E}_n. \quad (1.13)$$

Это свойство электрического поля означает, что поле подчиняется принципу суперпозиции.

В соответствии с законом Кулона, напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$  на расстоянии  $r$  от него, равна по модулю

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}. \quad (1.14)$$

Это поле называется кулоновским. В кулоновском поле направление вектора  $\vec{E}$  зависит от знака заряда  $Q$ : если

$Q \geq 0$ , то вектор  $\vec{E}$  направлен по радиусу от заряда, если  $Q < 0$ , то вектор  $\vec{E}$  направлен к заряду.

Для наглядного представления электрического поля используют силовые линии. Эти линии проводятся так, чтобы направление вектора  $\vec{E}$  в каждой точке совпадало с направлением касательной к силовой линии (рис. 5). При изображении электрического поля с помощью силовых линий, их густота должна быть пропорциональна модулю вектора напряженности поля.

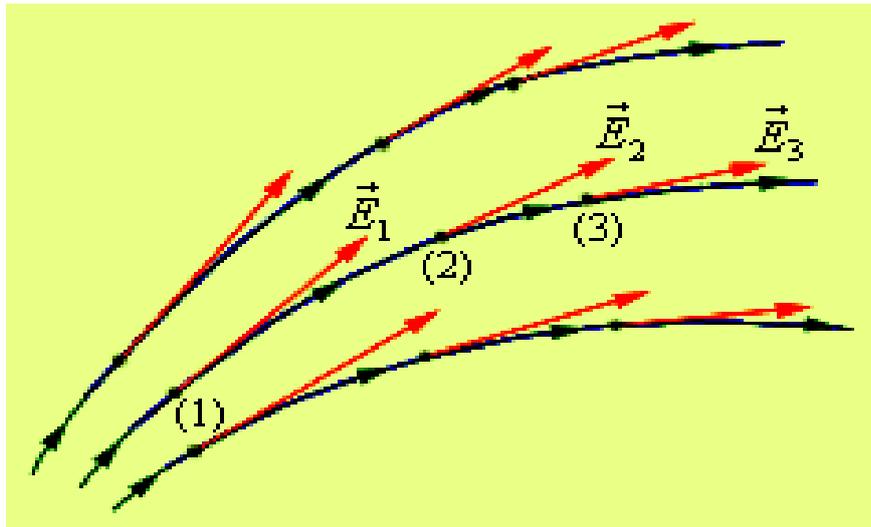


Рис.5. Силовые линии поля.

### § 1.4. Силовые линии электрического поля

Силовые линии кулоновских полей положительных и отрицательных точечных зарядов изображены на рис.6. Так как электростатическое поле, создаваемое любой системой зарядов, может быть представлено в виде суперпозиции кулоновских полей точечных зарядов, изображенные на рис. 6 поля можно рассматривать как элементарные структурные единицы («кирпичики») любого электростатического поля.

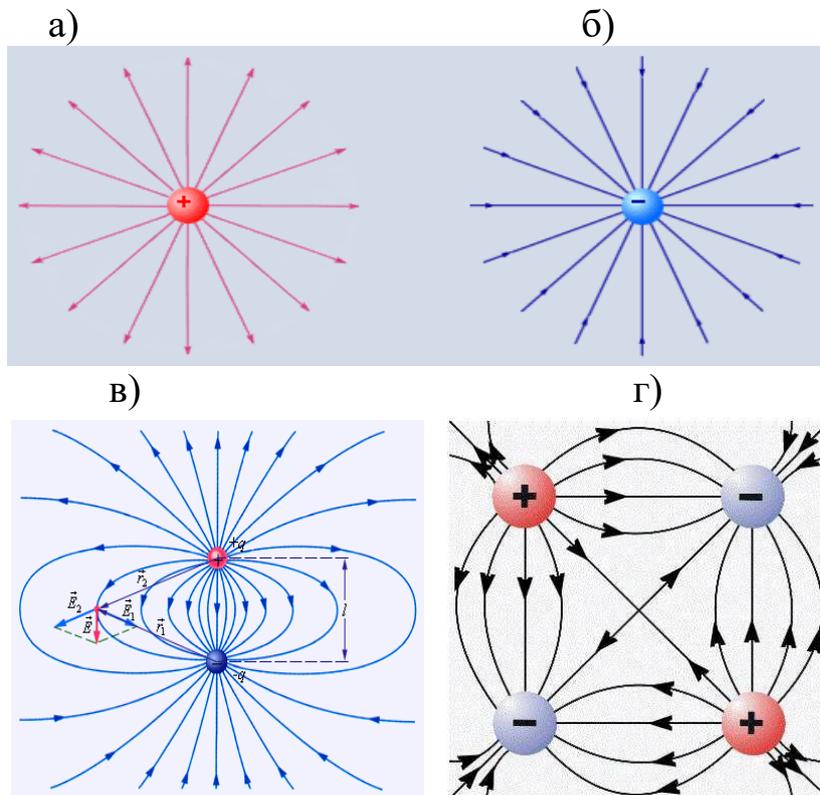


Рис.6. Силовые линии электростатического поля  
 а)положительного заряда; б)отрицательного;

в) двух разноимённых зарядов; г) четырех зарядов

### § 1.5. Электрический потенциал

Так как электрическое поле безвихревое, то можно найти скалярную функцию  $\varphi$ , скорость изменения которой, взятый со знаком "+" или "-", равен вектору напряженности  $E$ .

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = \pm E. \quad (1.15)$$

В теории поля выбирают знак "-". который указывает на то, что напряженность направлена в сторону убывания  $\varphi$ . Скалярная функция  $\varphi$  называется потенциальной функцией или просто потенциалом.

Потенциал любой точки:

$$\varphi = -\int \bar{E} d\bar{l} + const. \quad (1.16)$$

Постоянная интегрирования определяется заданием точки с нулевым потенциалом. В системе СИ  $[\varphi] = [V]$ .

Разность потенциалов:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{l}. \quad (1.17)$$

Разность потенциалов не зависит от формы пути интегрирования.

Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + const. \quad (1.18)$$

Потенциал поля неподвижных объемных, поверхностных и линейных зарядов:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \int_L \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}. \quad (1.19)$$

Зная потенциал, можно найти напряженность  $E$ .

В поле объемных зарядов вектор  $E$  везде конечен и непрерывен. В поле поверхностных зарядов  $E$  конечен всюду, но претерпевает разрыв на поверхности  $S$ , по которой распределен заряд. В поле линейных зарядов

вектор  $E$  обращается в бесконечность на линии  $L$ , вдоль которой распределен заряд.

Поверхность, во всех точках которой потенциал электрического поля имеет одинаковые значения, называется эквипотенциальной поверхностью или поверхностью равного потенциала.

Силовые линии электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальные поверхности кулоновского поля точечного заряда – концентрические сферы. На рис.7 представлены картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей некоторых простых электростатических полей.

В случае однородного поля эквипотенциальные поверхности представляют собой систему параллельных плоскостей.

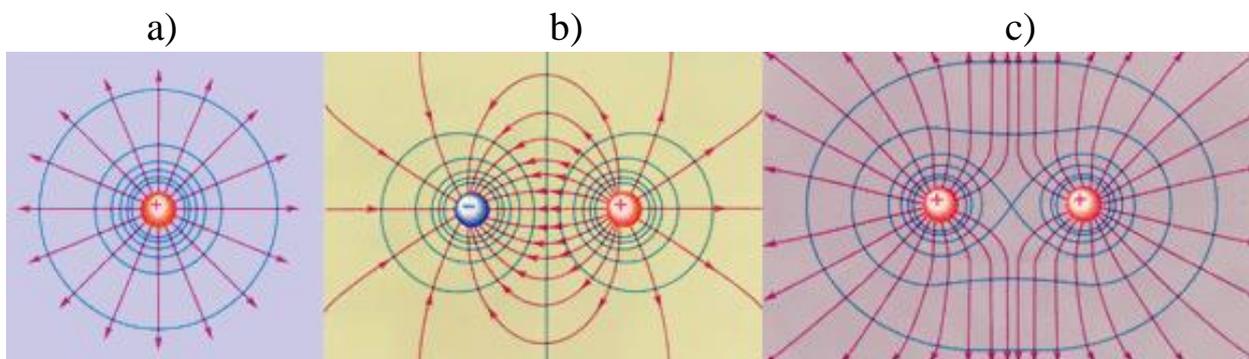


Рис.7. Эквипотенциальные поверхности (синие линии) и силовые линии (красные линии) простых электрических полей: а – точечный заряд; б – электрический диполь; с – два равных положительных заряда

## § 1.6. Проводники в электрическом поле

Вещество, внесенное в электрическое поле, может существенно изменить его. Это связано с тем, что вещество состоит из заряженных частиц. В отсутствие внешнего поля частицы распределяются внутри вещества так, что создаваемое ими электрическое поле в среднем по объемам, включающим большое число атомов или молекул, равно нулю. При наличии внешнего поля происходит перераспределение заряженных частиц, и в веществе возникает собственное электрическое поле. Полное электрическое поле  $\vec{E}$  складывается в соответствии с принципом суперпозиции из  $\vec{E}_0$  внешнего поля и внутреннего поля  $\vec{E}'$  создаваемого заряженными частицами вещества.

Вещество многообразно по своим электрическим свойствам. Наиболее широкие классы вещества составляют проводники и диэлектрики.

Основная особенность проводников – наличие свободных зарядов (электронов), которые участвуют в тепловом движении и могут

перемещаться по всему объему проводника. Типичные проводники – металлы.

В отсутствие внешнего поля в любом элементе объема проводника отрицательный свободный заряд компенсируется положительным зарядом ионной решетки. В проводнике, внесенном в электрическое поле, происходит перераспределение свободных зарядов, в результате чего на поверхности проводника возникают нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды (рис.8). Этот процесс называют электростатической индукцией, а появившиеся на поверхности проводника заряды – индукционными зарядами.

Индукционные заряды создают свое собственное поле  $\vec{E}'$  которое компенсирует внешнее поле  $\vec{E}_0$  во всем объеме проводника:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$  (внутри проводника).

Полное электростатическое поле внутри проводника равно нулю, а потенциалы во всех точках одинаковы и равны потенциалу на поверхности проводника.

Все внутренние области проводника, внесенного в электрическое поле  $\vec{E}_0$ , остаются электронейтральными. Если удалить некоторый объем, выделенный внутри проводника, и образовать пустую полость, то электрическое поле  $\vec{E}_0$  внутри полости будет равно нулю.

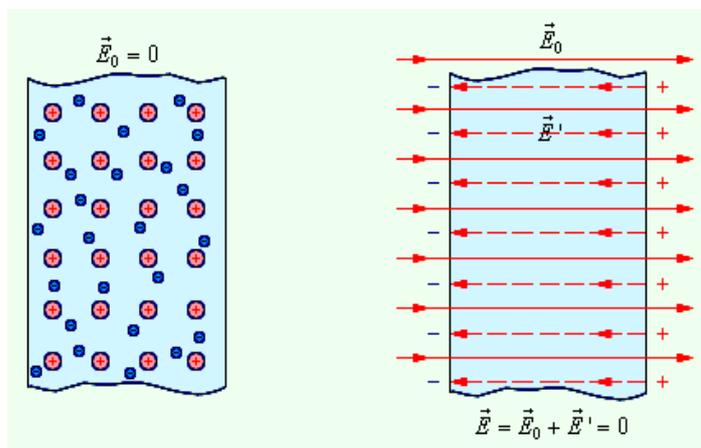


Рис.8. Электростатическая индукция

На этом основана электростатическая защита – чувствительные к электрическому полю приборы для исключения влияния поля помещают в металлические ящики (рис. 9.).

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

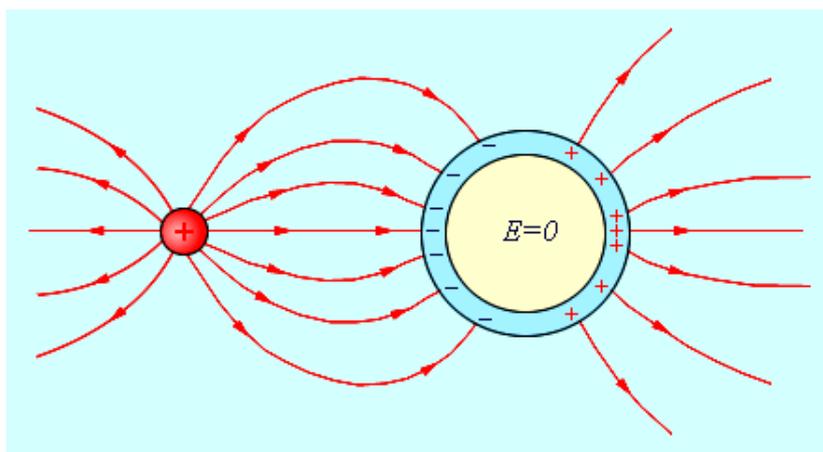


Рис.9. Электростатическая защита  
Поле в металлической полости равно нулю

В проводящей сфере (рис.10) под действием внешнего электрического поля с напряженностью  $E_0$  свободные электроны перемещаются к одной поверхности, которая получает отрицательный заряд.

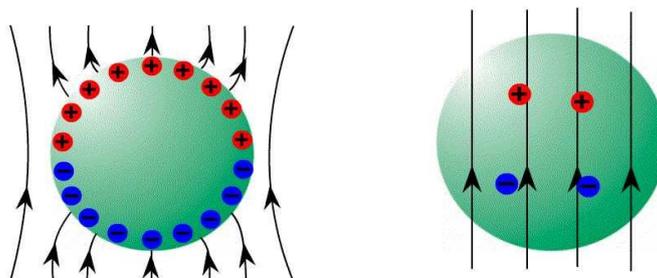


Рис.10. Проводящая сфера в электрическом поле

Явление смещения свободных заряженных частиц на поверхность проводника, помещенного в электрическое поле, называется электростатической индукцией. В результате разделения зарядов в проводнике создается внутреннее электрическое поле с напряженностью  $E$  направленное противоположно внешнему. Движение свободных электронов в проводнике при электростатической индукции существует кратковременно, но продолжается до тех пор, пока напряженность внешнего и внутреннего полей не станут равными.

При равенстве  $E_0 = E$  разделение зарядов в проводнике прекращается, так как результирующая напряженность электрического поля равна нулю.

Благодаря наличию в проводнике свободных заряженных частиц электростатическое поле в нем существовать не может.

Напряжение между двумя любыми точками проводящей сферы равно нулю, следовательно, потенциал его во всех точках один и тот же. Таким образом, проводник представляет собой эквипотенциальный объем, а его поверхность является эквипотенциальной поверхностью результирующего электрического поля.

Если в электрическое поле поместить проводник с полостью внутри, то и в этом случае заряженные частицы будут только на поверхности. Внутри металла и в полости электрическое поле отсутствует. Это свойство проводников используется для электростатического экранирования каких-либо устройств от действия внешнего электрического поля.

Так как поверхность проводника является эквипотенциальной, силовые линии у поверхности должны быть перпендикулярны к ней.

### § 1.7. Поляризация диэлектрика и электрическая индукция

Если подвесить на тонкой нити незаряженную стеклянную или янтарную палочку и поместить ее рядом с положительно заряженной сферой, то палочка установится так, что ее ось будет направлена по силовым линиям электрического поля (рис.11).

Получается, что на ближайшем к шару конце палочки появляется отрицательный заряд, противоположный по знаку заряду шара, а на другом ее конце появится заряд положительный.

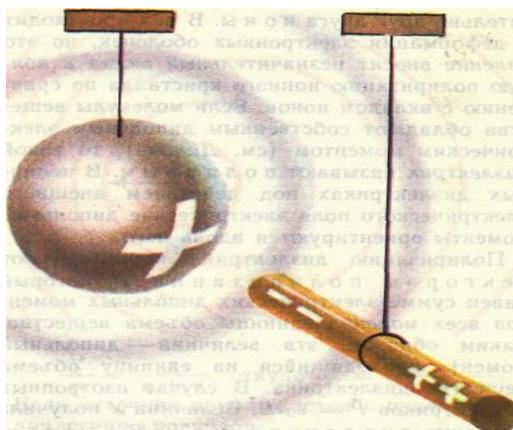


Рис.11. Изменение силовых линий при внесении диэлектрика в электрическое поле

Концы палочки становятся как бы электрическими полюсами. Поэтому рассматриваемое явление получило название поляризации.

Поляризация - важнейшая характеристика диэлектрика. Поляризация диэлектриков и индукция зарядов на проводнике – совершенно различные явления. Разрезав в электрическом поле проводник на две части, можно отделить разноименные электрические заряды, и, напротив, "разделить" поляризационные заряды диэлектрика невозможно.

В диэлектрике положительные и отрицательные заряды связаны друг с другом и могут смещаться только в пределах одной молекулы. Без электрического поля заряды разных знаков распределены по объему

диэлектрика равномерно. Под действием внешнего поля заряды, входящие в каждую молекулу, смещаются в противоположных направлениях. Это смещение проявляется в виде появления зарядов на поверхности диэлектрика, помещенного в электрическое поле, - поляризации. Поляризация протекает по-разному в зависимости от вида химической связи в вещества диэлектрика.

В ионных кристаллах, таких как каменная соль, в электрическом поле сдвигаются относительно друг друга ионы (рис.12).

Если молекулы вещества обладают собственными дипольными электрическим моментом, то такой диэлектрик называют полярным. В полярных диэлектриках под действием внешнего электрического поля электрические дипольные моменты ориентированы вдоль него.

Поляризацию диэлектрика характеризуют вектором поляризации  $P$ , который равен сумме электрических дипольных моментов всех молекул единицы объема вещества:

$$P = \varepsilon_0 K_0 E, \quad (1.20)$$

где  $K_0$  - диэлектрическая восприимчивость вещества (безразмерная величина)

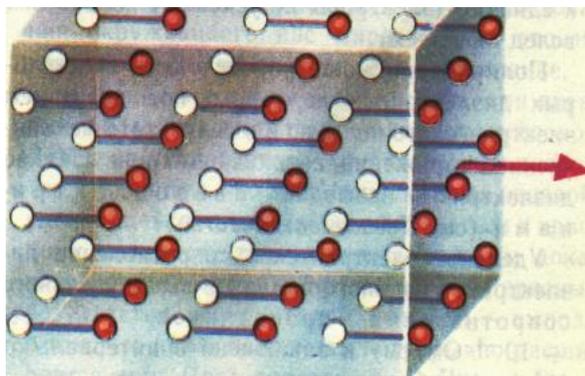


Рис.12. Сдвиг ионов под действием электрического поля в кристаллах.

Электрическое поле в диэлектрике описывается вектором электрической индукции:

$$D = \varepsilon_0 E + P. \quad (1.21)$$

Электрическое смещение – величина векторная. Как характеристика электрического поля не зависит от свойств среды, а определяется только зарядом свободных частиц.

В выражение (1.18) подставим численное значение вектора поляризованности. Согласно (1.17):

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 K_0 E. \quad (1.22)$$

В этой формуле величина  $E$  характеризует только электрическое поле в вакууме. Обозначается  $D_0$  и называется электрическим смещением в вакууме:

$$D_0 = \varepsilon_0 E . \quad (1.23)$$

Электрическое смещение связано с напряженностью электростатического поля соотношением:

$$D_0 = \varepsilon \varepsilon_0 E . \quad (1.24)$$

Из выражения (1.19) и (1.21) следует, что диэлектрическая проницаемость и электрическая восприимчивость вещества связаны соотношением:

$$E = 1 + K_e . \quad (1.25)$$

Диэлектрическая проницаемость характеризует ослабление внешнего электрического поля в диэлектрике поляризационными зарядами.

Размерность вектора поляризации и электрического смещения совпадают с размерностью поверхностной плотности заряда:

$$[P] = [D] = [кл/м^2]. \quad (1.25)$$

В отличие от проводников, в диэлектриках (изоляторах) нет свободных электрических зарядов. Они состоят из нейтральных атомов или молекул. Заряженные частицы в нейтральном атоме связаны друг с другом и не могут перемещаться под действием электрического поля по всему объему диэлектрика.

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле в нем возникает некоторое перераспределение зарядов, входящих в состав атомов или молекул. В результате такого перераспределения на поверхности диэлектрического образца появляются избыточные нескомпенсированные связанные заряды. Все заряженные частицы, образующие макроскопические связанные заряды, по-прежнему входят в состав своих атомов.

Связанные заряды создают электрическое поле  $\vec{E}'$ , которое внутри диэлектрика направлено противоположно вектору напряженности внешнего поля  $\vec{E}_0$ . Этот процесс называется поляризацией диэлектрика. В результате полное электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$  внутри диэлектрика оказывается по модулю меньше внешнего поля  $\vec{E}_0$ .

Физическая величина, равная отношению модуля напряженности внешнего электрического поля  $\vec{E}_0$  в вакууме к модулю напряженности  $\vec{E}$

полного поля в однородном диэлектрике, называется диэлектрической проницаемостью вещества.

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (1.26)$$

Существует несколько механизмов поляризации диэлектриков. Основными из них являются ориентационная и электронная поляризации. Эти механизмы проявляются главным образом при поляризации газообразных и жидких диэлектриков.

Ориентационная или дипольная поляризация возникает в случае полярных диэлектриков, состоящих из молекул, у которых центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Такие молекулы представляют собой микроскопические электрические диполи – нейтральную совокупность двух зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Дипольным моментом обладает, например, молекула воды, а также молекулы ряда других диэлектриков ( $\text{H}_2\text{S}$ ,  $\text{NO}_2$  и т. д.).

При отсутствии внешнего электрического поля оси молекулярных диполей ориентированы хаотично из-за теплового движения, так что на поверхности диэлектрика и в любом элементе объема электрический заряд в среднем равен нулю.

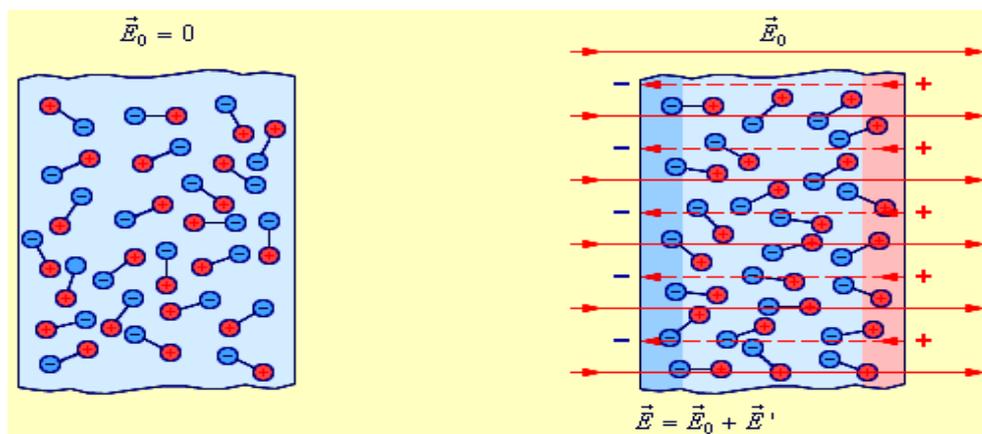


Рис.13. Ориентационный механизм поляризации полярного диэлектрика

При внесении диэлектрика во внешнее поле  $\vec{E}_0$  возникает частичная ориентация молекулярных диполей. В результате на поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные макроскопические связанные заряды, создающие поле (рис. 13.) направленное навстречу полю  $E_0$ .

Поляризация полярных диэлектриков сильно зависит от температуры, так как тепловое движение молекул играет роль дезориентирующего фактора.

Электронный или упругий механизм проявляется при поляризации неполярных диэлектриков, молекулы которых не обладают в отсутствие внешнего поля дипольным моментом. Под действием электрического поля молекулы неполярных диэлектриков деформируются – положительные заряды смещаются в направлении вектора  $\vec{E}_0$  а отрицательные – в противоположном направлении. В результате каждая молекула превращается в электрический диполь, ось которого направлена вдоль внешнего поля. На поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные связанные заряды, создающие свое поле  $\vec{E}'$  направленное навстречу внешнему полю  $\vec{E}_0$ . Так происходит поляризация неполярного диэлектрика (рис. 14).

Деформация неполярных молекул под действием внешнего электрического поля не зависит от их теплового движения, поэтому поляризация неполярного диэлектрика не зависит от температуры. Примером неполярной молекулы может служить молекула метана  $\text{CH}_4$ . У этой молекулы четырехкратно ионизированный ион углерода  $\text{C}^{4-}$  располагается в центре правильной пирамиды, в вершинах которой находятся ионы водорода  $\text{H}^+$ . При наложении внешнего электрического поля ион углерода смещается из центра пирамиды, и у молекулы возникает дипольный момент, пропорциональный внешнему полю.

Электрическое поле  $\vec{E}'$  связанных зарядов, возникающее при поляризации полярных и неполярных диэлектриков, изменяется по модулю прямо пропорционально модулю внешнего поля. В очень сильных электрических полях эта закономерность может нарушаться, и тогда проявляются различные нелинейные эффекты.

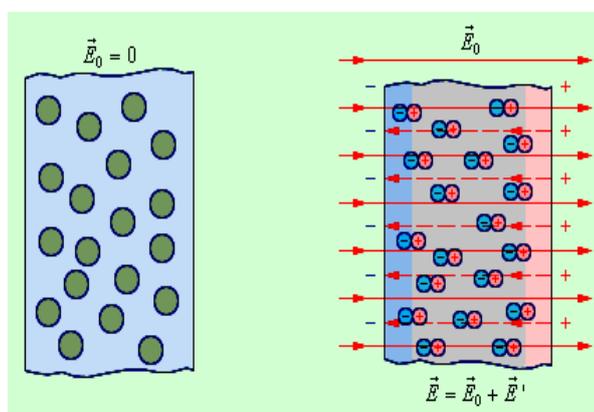


Рис. 14. Поляризация неполярного диэлектрика

В случае полярных диэлектриков в сильных полях может наблюдаться эффект насыщения, когда все молекулярные диполи выстраиваются вдоль силовых линий. В случае неполярных диэлектриков сильное внешнее поле, сравнимое по модулю с внутриатомным полем, может существенно деформировать атомы или молекулы вещества и изменить их электрические свойства. Однако, эти явления практически никогда не наблюдаются, так как для этого нужны поля с напряженностью  $(10^{10}–10^{12})$  В/м. Между тем, гораздо раньше наступает электрический пробой диэлектрика.

У многих неполярных молекул при поляризации деформируются электронные оболочки, поэтому этот механизм получил название электронной поляризации. Этот механизм является универсальным, поскольку деформация электронных оболочек под действием внешнего поля происходит в атомах, молекулах и ионах любого диэлектрика.

В случае твердых кристаллических диэлектриков наблюдается так называемая ионная поляризация, при которой ионы разных знаков, составляющие кристаллическую решетку, при наложении внешнего поля смещаются в противоположных направлениях, вследствие чего на гранях кристалла появляются связанные (нескомпенсированные) заряды. Примером такого механизма может служить поляризация кристалла NaCl, в котором ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$  составляют две подрешетки, вложенные друг в друга. В отсутствие внешнего поля каждая элементарная ячейка кристалла NaCl электронейтральна и не обладает дипольным моментом. Во внешнем электрическом поле обе подрешетки смещаются в противоположных направлениях, т. е. кристалл поляризуется.

При поляризации неоднородного диэлектрика связанные заряды могут возникать не только на поверхностях, но и в объеме диэлектрика. В этом случае электрическое поле связанных зарядов  $\vec{E}'$  и полное поле могут иметь сложную структуру, зависящую от геометрии диэлектрика. Утверждение о том, что электрическое поле в диэлектрике в  $\epsilon$  раз меньше по модулю по сравнению с внешним полем строго справедливо только в случае однородного диэлектрика, заполняющего все пространство, в котором создано внешнее поле. В частности:

Если в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  находится точечный заряд  $Q$ , то напряженность поля создаваемого этим зарядом в некоторой точке, и потенциал  $\varphi$  в  $\epsilon$  раз меньше, чем в вакууме:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\epsilon r^3}; \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\epsilon r}. \quad (1.27)$$

## § 1.8. Теорема Гаусса

Экспериментально установленные закон Кулона и принцип суперпозиции позволяют полностью описать электростатическое поле заданной системы зарядов в вакууме. Однако, свойства электростатического поля можно выразить в другой, более общей форме, не прибегая к представлению о кулоновском поле точечного заряда.

Введем новую физическую величину, характеризующую электрическое поле – поток  $\Phi$  вектора напряженности электрического поля. Понятие потока вектора аналогично понятию потока вектора скорости при течении несжимаемой жидкости. Пусть в пространстве, где создано электрическое поле, расположена некоторая достаточно малая площадка  $\Delta S$ . Произведение модуля вектора на площадь  $\Delta S$  и на косинус угла  $\alpha$  между вектором  $\vec{E}$  и нормалью к площадке называется элементарным потоком вектора напряженности через площадку  $\Delta S$  (рис. 15):

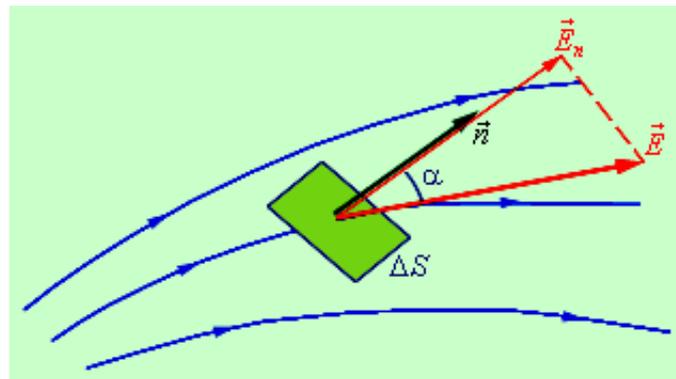


Рис.15. К определению элементарного потока  $\Delta\Phi$

$$\Delta\Phi = E\Delta S \cos \alpha = E_n\Delta S, \quad (1.28)$$

где  $E_n$  – модуль нормальной составляющей поля

Рассмотрим теперь некоторую произвольную замкнутую поверхность  $S$ . Если разбить эту поверхность на малые площадки  $\Delta S_i$ , определить элементарные потоки  $\Delta\Phi_i$  поля через эти малые площадки, а затем их просуммировать, то в результате мы получим поток  $\Phi$  вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность  $S$  (рис. 16.):

$$\Phi = \sum \Delta\Phi_i = \sum E_{ni} \Delta S_i. \quad (1.29)$$

В случае замкнутой поверхности всегда выбирается внешняя нормаль.

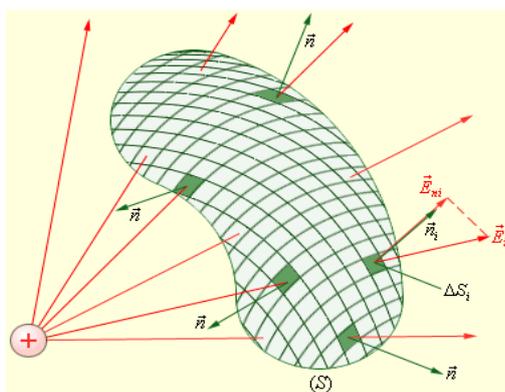


Рис.16. Вычисление потока  $\Phi$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$

Теорема Гаусса утверждает:

Поток вектора  $\vec{E}$  напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{внутр}}. \quad (1.30)$$

Для доказательства рассмотрим сначала сферическую поверхность  $S$ , в центре которой находится точечный заряд  $q$ . Электрическое поле в любой точке сферы перпендикулярно к ее поверхности и равно по модулю

$$E = E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}, \quad (1.31)$$

где  $R$  – радиус сферы. Поток  $\Phi$  через сферическую поверхность будет равен произведению  $E$  на площадь сферы  $4\pi R^2$ . Следовательно,

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (1.32)$$

Окружим теперь точечный заряд произвольной замкнутой поверхностью  $S$  и рассмотрим вспомогательную сферу радиуса  $R_0$  (рис. 17.).

Рассмотрим конус с малым телесным углом  $\Delta\Omega$  при вершине. Этот конус выделит на сфере малую площадку  $\Delta S_0$ , а на поверхности  $S$  – площадку  $\Delta S$ . Элементарные потоки  $\Delta\Phi_0$  и  $\Delta\Phi$  через эти площадки одинаковы. Действительно,

$$\Delta\Phi_0 = E_0 \Delta S_0, \quad \Delta\Phi = E \Delta S \cos \alpha = E \Delta S'. \quad (1.33)$$

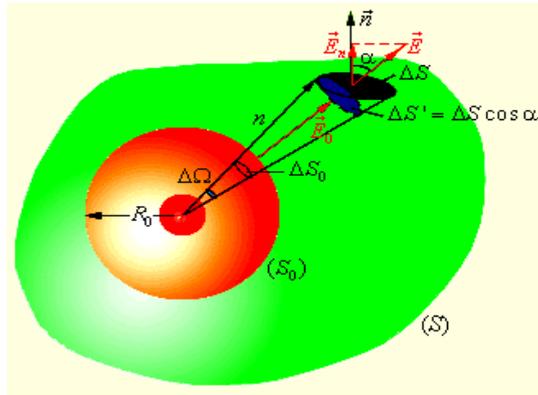


Рис.17. Поток электрического поля точечного заряда через произвольную поверхность S, окружающую заряд

Здесь  $\Delta S' = \Delta S \cos \alpha$  – площадка, выделяемая конусом с телесным углом  $\Delta\Omega$  на поверхности сферы радиуса  $r$ .

Так как

$$\frac{E_0}{E} = \frac{r^2}{R_0^2}, \quad \frac{\Delta S_0}{\Delta S'} = \frac{R_0^2}{r^2}. \quad (1.34)$$

следовательно  $\Delta\Phi_0 = \Delta\Phi$ . Отсюда следует, что полный поток электрического поля точечного заряда через произвольную поверхность, охватывающую заряд, равен потоку  $\Phi_0$  через поверхность вспомогательной сферы:

$$\Phi = E 2\pi r l = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.35)$$

Аналогичным образом можно показать, что, если замкнутая поверхность S не охватывает точечного заряда q, то поток  $\Phi = 0$ . Такой случай изображен на рис. 8. Все силовые линии электрического поля точечного заряда пронизывают замкнутую поверхность S насквозь. Внутри поверхности S зарядов нет, поэтому в этой области силовые линии не обрываются и не зарождаются.

Обобщение теоремы Гаусса на случай произвольного распределения зарядов вытекает из принципа суперпозиции. Поле любого распределения зарядов можно представить как векторную сумму электрических полей точечных зарядов  $\vec{E}_i$ . Поток  $\Phi$  системы зарядов через произвольную замкнутую поверхность S будет складываться из потоков  $\Phi_i$  электрических полей отдельных зарядов. Если заряд  $q_i$  оказался внутри поверхности S, то он дает вклад в поток, равный  $\frac{q_i}{\epsilon_0}$  если же этот заряд оказался снаружи поверхности, то вклад его электрического поля в поток будет равен нулю.

Таким образом, теорема Гаусса доказана.

Теорема Гаусса является следствием закона Кулона и принципа суперпозиции. Но если принять утверждение, содержащееся в этой теореме, за первоначальную аксиому, то ее следствием окажется закон Кулона. Поэтому теорему Гаусса иногда называют альтернативной формулировкой закона Кулона.

Используя теорему Гаусса, можно в ряде случаев легко вычислить напряженность электрического поля вокруг заряженного тела, если заданное распределение зарядов обладает какой-либо симметрией и общую структуру поля можно заранее угадать.

Примером может служить задача о вычислении поля тонкостенного полого однородно заряженного длинного цилиндра радиуса  $R$ . Эта задача имеет осевую симметрию. Из соображений симметрии, электрическое поле должно быть направлено по радиусу. Поэтому для применения теоремы Гаусса целесообразно выбрать замкнутую поверхность  $S$  в виде соосного цилиндра некоторого радиуса  $r$  и длины  $l$ , закрытого с обоих торцов (рис. 18.).

При  $r \geq R$  весь поток вектора напряженности будет проходить через боковую поверхность цилиндра, площадь которой равна  $2\pi r l$ , так как поток через оба основания равен нулю. Применение теоремы Гаусса дает:

$$\Phi = E 2\pi r l = \frac{\mu}{\epsilon_0}, \quad (1.36)$$

где  $\tau$  – заряд единицы длины цилиндра.

Отсюда:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (1.37)$$

где  $\tau$  – заряд единицы длины цилиндра.

Поэтому он применим и к полю длинной однородно заряженной нити.

Для определения напряженности поля внутри заряженного цилиндра нужно построить замкнутую поверхность для случая  $r < R$ . В силу симметрии задачи поток вектора напряженности через боковую поверхность гауссова цилиндра должен быть и в этом случае равен  $\Phi = E 2\pi r l$ .

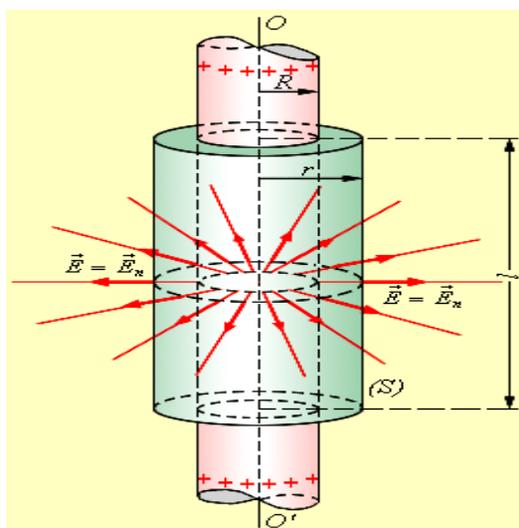


Рис.18. Вычисление поля однородно заряженного цилиндра.  
 $OO'$  – ось симметрии

Согласно теореме Гаусса, этот поток пропорционален заряду, оказавшемуся внутри замкнутой поверхности. Этот заряд равен нулю. Отсюда следует, что электрическое поле внутри однородно заряженного длинного полого цилиндра равно нулю.

Аналогичным образом можно применить теорему Гаусса для определения электрического поля в ряде других случаев, когда распределение зарядов обладает какой-либо симметрией, например, симметрией относительно центра, плоскости или оси. В каждом из таких случаев нужно выбирать замкнутую гауссову поверхность целесообразной формы. Например, в случае центральной симметрии гауссову поверхность удобно выбирать в виде сферы с центром в точке симметрии. При осевой симметрии замкнутую поверхность нужно выбирать в виде соосного цилиндра, замкнутого с обоих торцов (как в рассмотренном выше примере). Если распределение зарядов не обладает какой-либо симметрией и общую структуру электрического поля угадать невозможно, применение теоремы Гаусса не может упростить задачу определения напряженности поля.

Рассмотрим еще один пример симметричного распределения зарядов – определение поля равномерно заряженной плоскости (рис. 19).

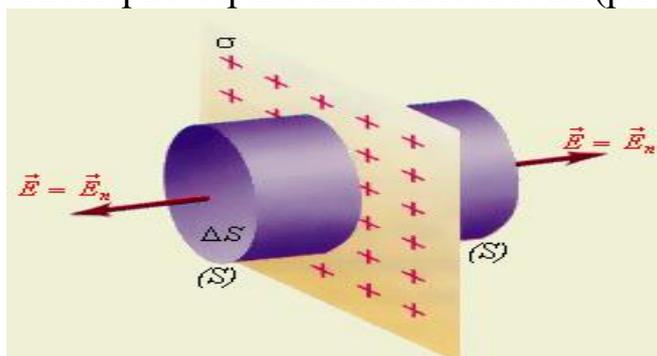


Рис.19. Поле равномерно заряженной плоскости

$\sigma$  – поверхностная плотность заряда  
 $S$  – замкнутая гауссова поверхность

В этом случае гауссову поверхность  $S$  целесообразно выбрать в виде цилиндра некоторой длины, закрытого с обоих торцов. Ось цилиндра направлена перпендикулярно заряженной плоскости, а его торцы расположены на одинаковом расстоянии от нее. В силу симметрии поле равномерно заряженной плоскости должно быть везде направлено по нормали. Применение теоремы Гаусса дает:

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \text{ или } E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (1.38)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда, т. е. заряд, приходящийся на единицу площади.

Полученное выражение для электрического поля однородно заряженной плоскости применимо и в случае плоских заряженных площадок конечного размера. В этом случае расстояние от точки, в которой определяется напряженность поля, до заряженной площадки должно быть значительно меньше размеров площадки.

### **§ 1.9. Работа при перемещении электрического заряда в электрическом поле. Энергия системы зарядов. Энергия электростатического поля**

Рассмотрим перемещение электрического заряда в однородном электрическом поле с напряженностью  $E$ .

Поле называется однородным, если во всех его точках вектор напряженности имеет одинаковую величину и направление, т.е.  $E = \text{const}$ .

Пусть поле создано двумя заряженными разноименными зарядами пластинами (рис. 20). Между пластинами поле однородное. Требуется переместить заряд из точки  $A$  в точку  $C$  через промежуточную точку  $B$ . Из механики известно, что:

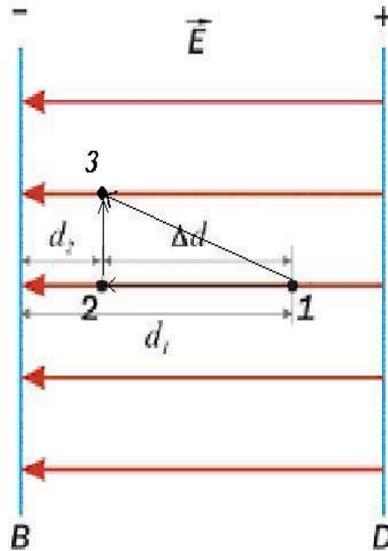


Рис.20. Перемещение заряда в электростатическом поле

$$A = FS \cos \alpha. \quad (1.39)$$

В электродинамике:

$$F = qE. \quad (1.40)$$

Тогда работа по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 равна:

$$A_{12} = qE(d_2 - d_1). \quad (1.41)$$

Работа по перемещению заряда из точки 2 в точку 3:

$$A_{23} = 0 \text{ т.к. } \cos \alpha = 0. \quad (1.42)$$

Итак

$$A_{12} = A_{13}. \quad (1.43)$$

$$A_{1231} = 0. \quad (1.44)$$

Работа сил электрического поля при движении электрического заряда по любой замкнутой траектории равна нулю.

Невыполнение этого условия означало бы, что имеется замкнутый путь, вдоль которого работа положительна.

В таком случае открылась бы возможность, не пополняя энергии электрического поля, получить неограниченную величину положительной работы, что противоречило бы закону сохранения энергии.

Работа, совершаемая силами поля при перемещении заряженной частицы между двумя точками, не зависит от выбранного пути, а определяется положением начальной и конечной точек пути.

Для двух неподвижных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  потенциальная энергия взаимодействия в среде равна:

$$W_{12} = q_1 q_2 / 4 \pi \epsilon \epsilon_0 r_{12}, \quad (1.45)$$

где  $r_{12}$  – расстояние между зарядами.

Используя понятие потенциала, эту формулу можно записать как

$$W_n = q_1 \phi_1. \quad (1.46)$$

( $\phi_1$  - потенциал поля второго заряда в точке, где находится первый заряд,  $\phi_1 = Kq_2/\epsilon r_{12}$ ).

Можно записать  $W$  и по другому:  $W = q_1 \phi_2$ ; здесь уже  $\phi_2$  - потенциал, создаваемый первым зарядом в точке нахождения второго.

Естественно можно записать:

$$W = 1/2 (q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2). \quad (1.47)$$

Для системы из  $n$  зарядов  $q_i$  потенциальная энергия равна:

$$W = 1/2 \sum_{i=1}^n q_i \phi_i. \quad (1.48)$$

(здесь  $\phi_i$  - потенциал поля в точке, где находится заряд  $q_i$ ).

Если заряд непрерывно распределен по объему и в каждой точке задана его объемная плотность  $\rho_k$ , то необходимо разбить объем на  $n$  малых частей  $\Delta V_k$ , внутри которых можно считать потенциал и плотность  $\rho_k$  постоянными. Тогда:

$$W = 1/2 \sum_{k=1} \rho_k \Delta V_k \phi_k. \quad (1.49)$$

Итак, мы получили общую формулу, описывающую энергию взаимодействия зарядов. Энергия системы взаимодействующих зарядов представляющих собой две одинаковые параллельные равномерно

заряженные пластины, площадью  $S$  каждая и поверхностной плотностью равна:

$$W = 1/2 \sigma\varphi S = 1/2 q\varphi, \quad (1.50)$$

Где  $q = \sigma S$  - общий заряд одной из пластин.

Перепишем формулу (1.32) в виде:

$$W = 1/2 q\varphi = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2 / 2)lS, \quad (1.51)$$

(здесь мы использовали  $\varphi = El$ , а  $q = S\sigma = SE$ ), что  $V = Sl$ ,

$D = E\varepsilon\varepsilon_0$ , то каждой единице этого объема соответствует энергия, равная

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 / 2 = ED/2. \quad (1.52)$$

Эту величину можно назвать плотностью энергии электростатического поля. Полная энергия в некоторой области пространства:

$$W = \int_V (\varepsilon\varepsilon_0 E^2 / 2) dv = \int_V (ED/2) dv. \quad (1.53)$$

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что носителем энергии является электрическое поле, причем энергия распределена во всем пространстве с объемной плотностью, определяемые формулой (44).

Там, где напряженность  $E$  отлична от нуля, силы поля могут совершать работу за счет энергии поля.

### § 1.10. Граничные условия в электростатическом поле

Рассмотрим границу двух непроводящих сред, диэлектрические проницаемости которых  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Пусть на границе имеется заряд с поверхностной плотностью (рис.21.).

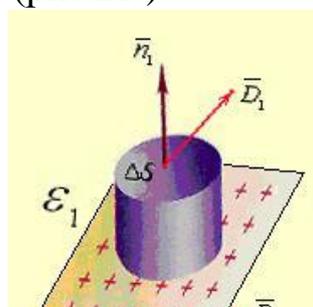


Рис.21. Проводящий цилиндр в электростатическом поле.

Проведем замкнутую цилиндрическую поверхность  $S$  так, чтобы одна ее половина была расположена в первом диэлектрике, другая во втором.

По теореме Гаусса:

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \sigma \Delta S . \quad (1.54)$$

Представим поток вектора  $\vec{D}$  в виде суммы трех потоков:

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_{\Delta S} \vec{D}_1 d\vec{s} + \int_{\Delta S} \vec{D}_2 d\vec{s} + \int_{S_{бок}} \vec{D} d\vec{s} . \quad (1.55)$$

Если площадка  $\Delta S$  невелика, то можно считать, что во всех точках этой площадки вектор  $\vec{D}$  имеет одну и ту же величину, тогда:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S} \vec{D}_1 d\vec{s} &= D_{1n} \Delta S \quad ; \\ \int_{\Delta S} \vec{D}_2 d\vec{s} &= -D_{2n} \Delta S \quad . \end{aligned} \quad (1.56)$$

Если высоту цилиндра уменьшать так, чтобы площадки  $\Delta S$  стремились к границе между диэлектриками, то поток через боковую поверхность будет стремиться к нулю, тогда:

$$\begin{aligned} D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S &= \sigma \Delta S ; \\ D_{1n} - D_{2n} &= \sigma \quad \text{или} \\ \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n} &= \sigma . \end{aligned} \quad (1.57)$$

Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе двух непроводящих сред претерпевает скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов, распределенных на границе.

$$\begin{aligned} \text{Если } \sigma = 0, \text{ то} \quad D_{1n} &= D_{2n} \\ \varepsilon_1 E_{1n} &= \varepsilon_2 E_{2n} . \end{aligned} \quad (1.58)$$

На границе двух непроводящих сред касательные составляющие вектора напряженности электрического поля равны:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \text{или} \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}. \quad (1.59)$$

На поверхности раздела двух сред потенциал непрерывен:  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Если одна из сред проводящая, то граничные условия изменятся.

Пусть первая среда - диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$ , вторая - проводник, тогда граничные условия запишутся:

$$\begin{aligned} E_2 = 0; \quad D_2 = 0; \quad \varphi_2 = \text{const}; \\ D_{1n} = D_{2n} = \sigma; \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 \varepsilon E_1 = \sigma; \\ E_{1\tau} = 0; \quad D_{1\tau} = 0; \end{aligned} \quad (1.60)$$

### § 1.11. Методы расчета электростатических полей

Расчет электростатических полей чаще всего сводится к определению напряженности поля  $E$  при заданном распределении зарядов, возбуждающих поле.

К методам относятся:

1. Метод наложения
2. Метод зеркальных отображений
3. Метод, основанный на применении теоремы Гаусса.
4. Метод конформных преобразований
5. Графические методы

**Метод наложения:** если распределение заряда в пространстве задано, то разделив этот заряд на бесконечно малые элементы  $\Delta q$  и считая их точечными, можно определить потенциал и напряженность по формулам:

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R}. \quad (1.61)$$

$$\Delta E = \frac{\Delta q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R^2}. \quad (1.62)$$

Складывая алгебраические величины  $\Delta \varphi$  можно определить потенциал

$$\varphi = \int \frac{\Delta q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R}. \quad (1.63)$$

Напряженность  $\vec{E}$  определится интегрированием:

$$E = \int dE . \quad (1.64)$$

или по формуле:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta r} . \quad (1.65)$$

**Метод зеркальных изображений:** если электрические заряды расположены вблизи границы двух или нескольких разнородных сред, то векторы поля можно определить, применив искусственный метод расчета, который носит название метода зеркальных изображений. Идея метода заключается в том, что вместо неоднородной среды рассматриваются среды однородные, влияние же неоднородности учитывается введением фиктивных зарядов. Определив векторы поля от совместного действия этих зарядов, записывают граничные условия основной задачи и, пользуясь ими, находят величину введенных фиктивных зарядов и искомые векторы поля.

Рассматривается как диэлектрическая с бесконечно большой проницаемостью ( $\varepsilon = \infty$ ).

Расчет электрического поля линейных зарядов, параллельных плоским поверхностям раздела двух сред, производится аналогично с заменой точечных зарядов линейными, т.е.  $q$  заменяется на  $q_1$ . Например, для случая плоской поверхности раздела двух диэлектрических сред:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau ; \quad \tau_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau . \quad (1.66)$$

С подобными задачами в технике приходится встречаться при расчетах емкости и взаимной емкости линий (одно и многопроводных), расположенных вблизи земли, стен зданий и т.п.

**Метод интегрирования уравнений поля:** электростатическое поле описывается уравнением Пуассона. Для декартовой системы координат:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon} , \quad (1.67)$$

где  $\rho$  - объемная плотность заряда.

Если нет объемных зарядов, электростатическое поле описывается уравнением Лапласа:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \quad . \quad (1.68)$$

Интегрирование должно быть выполнено с учетом граничных условий. Точка нулевого потенциала задается произвольно. В поле объемных зарядов напряженность поля  $\vec{E}$  должна быть конечной величиной.

**Примеры расчетов электростатических полей.** Задача 1.1: Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен по всему объему. Плотность заряда  $\rho$ . Найти электрическое поле внутри и вне шара. Построить график зависимости  $E=f(r)$ ,  $r$  – расстояние до точки  $O$  – центра шара.

Решение:

В начале воспользуемся симметрией задачи. Очевидно, что единственное выделенное направление в любой точке  $A$  пространства это направление радиуса  $OA$  (рис.12) по или против радиуса (в зависимости от знака заряда шара) должен быть направлен и вектор  $\vec{E}_A$ . кроме того, величина напряженности должна зависеть только от расстояния  $OA$ , которое мы обозначим через  $r$ .

Теперь применим теорему Гаусса. Рассмотрим два случая:

$r > R$ , т.е. точка  $A$  находится вне шара. Проведем через эту точку сферу радиусом  $r$  с центром в точке  $O$  (рис.22). В каждой точке сферы напряженность направлена по нормали к ней и равна по величине  $E_A$ . полный поток напряженности через сферу:

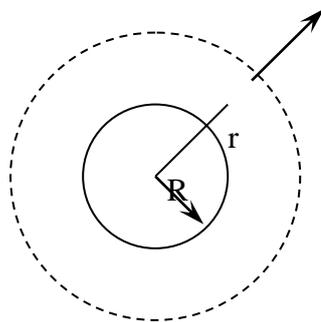


Рис.22. Шар радиусом  $R$ .

$$\Phi_E = E_A 4\pi r^2 \quad .$$

С другой стороны, по теореме Гаусса

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}$$

где

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \text{ - полный заряд шара.}$$

Отсюда

$$E_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ или } E_A = \frac{1}{r^2} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} .$$

$r < R$ . Точка А внутри шара. Проведем через эту точку сферу с центром в точке О. Тогда полный поток напряженности через эту сферу:

$$\Phi_E = E_A 4\pi r^2 .$$

По теореме Гаусса:  $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$ , отсюда  $E_A = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ .

Напряженность прямо пропорциональна расстоянию до центра. График приведен на рис.23.

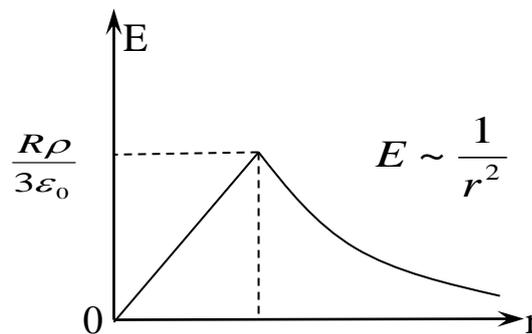
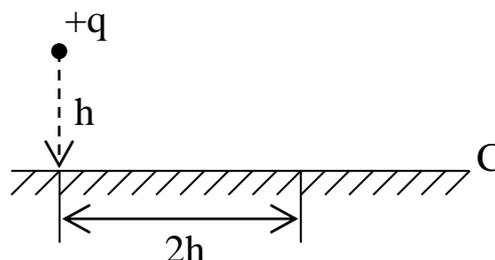


Рис.23. График протяжённости электрического поля

Задача 1.2: Точечный заряд  $q = 10^{-9}$  Кл. расположен в воздухе на расстоянии  $h = 10$  см от бесконечно плоской поверхности проводящей среды (рис.24).

Определить силу, с которой этот заряд притягивается к бесконечной плоскости. Определить поверхностную плотность заряда в точке С, индуктированного точечного зарядом на проводящей плоскости.



## Рис.24. Расположение точного заряда

Решение: Пользуясь методом электрических (зеркальных) изображений, исключим проводящую среду, а после, создаваемое распределенным зарядом, индуктированным на ее поверхности, заменим полем, создаваемым точечным зарядом  $-q$ , являющимся изображением заряда  $+q$  и расположенным под поверхностью проводящей среды на расстоянии  $h$  от нее (рис.25)

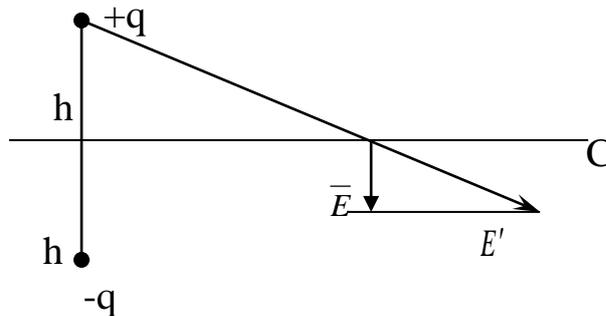


Рис.25. Расположение зарядов в проводящей среде

Линия на рис.29, изображавшая поверхность проводящей среды, на рис.30 изображает эквипотенциальную поверхность нулевого потенциала. При этом силу притяжения заряда  $q$  к проводящей поверхности можно заменить силой взаимодействия между двумя точечными зарядами  $+q$  и  $-q$  :

$$F = K \frac{q^2}{(2h)^2} = 2,25 * 10^{-7} \text{ Н} .$$

Для ответа на второй вопрос определим напряженность поля, создаваемого точечным зарядом  $q$  в точке С,

$$E = K \frac{q}{(h^2 + 4h^2)} .$$

Вертикальная составляющая:

$$E' = E \cos \alpha = K \frac{q}{(h^2 + 4h^2)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4h^2}} .$$

Вертикальная составляющая вектора напряженности электрического поля в точке С, создаваемая точечным зарядом  $-q$  не отличается по величине и направлению от уже найденного значения  $E'$ . Горизонтальные составляющие электрических полей в точке С, создаваемых зарядами  $+q$  и  $-q$  взаимно уничтожаются. Вектор результирующего поля в точке С, перпендикулярен эквипотенциальной поверхности и равен:

$$E = K \frac{2qh}{(h^2 + 4h^2)^{3/2}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h^2 5\sqrt{5}} = 160 \text{ В/м} .$$

Нормальная составляющая вектора  $E$  вблизи заряженной поверхности проводника равна

$E_n = E = \sigma / \epsilon_0$ , где  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда. Таким образом,

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{160}{4\pi * 9 * 10^9} = 1,42 * 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

**Задачи для самопроверки. 3.3.** Объемный заряд распределен равномерно с объемной плотностью  $\rho$  в части пространства, ограниченной шаровой поверхностью радиуса  $r$ . Вывести выражение для потенциала точек, находящихся на расстоянии  $R \leq r$  от центра шара.

Диэлектрическая проницаемость среды равна  $\epsilon_0$ . Потенциал бесконечно удаленной точки считать равным нулю.

Ответ:  $\varphi = \rho / 3\epsilon_0 (1,5r^2 - 0,5R^2)$

3.4. Электрическая ось с линейной плотностью заряда  $+\tau$  расположена в диэлектрике параллельно проводящей поверхности на расстоянии  $h$  от нее. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon$ . Определить напряженность поля  $\vec{E}$  в точке  $A$  с координатой  $x$  (рис.16)

Ответ:  $E = \frac{\tau h}{\pi \epsilon (h^2 + x^2)}$

3.5. Точечный заряд  $q_1$ , находится в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , а точечный заряд  $q_2$  – в диэлектрике с  $\epsilon_2$  (рис.26).

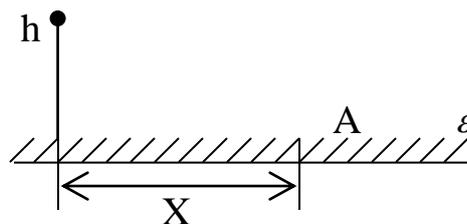
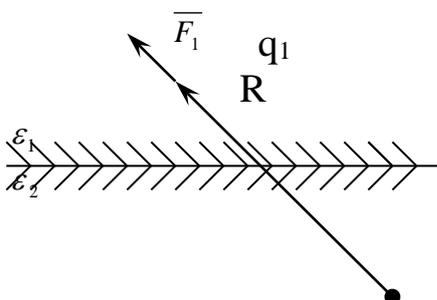


Рис.26. Расположение точечного заряда в диэлектрике

Расстояние между зарядами равно  $R$ . Определить силу  $F_1$ , с которой электрическое поле действует на заряд  $q_1$ :

Ответ:  $F = \frac{q_1 q_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)R^2}$



q<sub>2</sub>

Рис.27. Определение силы поля действующей на заряд

### § 1.12. Распределение потенциалов и зарядов в системе проводящих тел

Потенциал и заряд пропорциональны:

$$\varphi_{pm} = B_{pm} q_m$$

Если число проводов "n", пользуясь наложением, получим:

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \dots + \varphi_{pm} + \dots + \varphi_{pn} = \\ &= B_{p1}q_1 + B_{p2}q_2 + \dots + B_{pm}q_m + \dots + B_{pn}q_n. \end{aligned}$$

Если точку "p" выбрать на поверхности первого провода, то его потенциал:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= B_{11}q_1 + B_{12}q_2 + \dots + B_{1n}q_n; \\ \varphi_2 &= B_{21}q_1 + B_{22}q_2 + \dots + B_{2n}q_n; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n &= B_{n1}q_1 + B_{n2}q_2 + \dots + B_{nn}q_n. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Коэффициент  $B_{k1}$  численно равен потенциалу провода k, когда заряд провода 1 равен единице, а заряды остальных проводов равны нулю. Постоянные коэффициенты  $B$  называются потенциальными коэффициентами. Они всегда положительны. Если решить систему уравнений относительно зарядов:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2 + \dots + A_{1n}\varphi_n; \\ q_2 &= A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_2 + \dots + A_{2n}\varphi_n; \\ &\dots\dots\dots \\ q_n &= A_{n1}\varphi_1 + A_{n2}\varphi_2 + \dots + A_{nn}\varphi_n. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Постоянные  $A$  называются емкостными коэффициентами. Связь между потенциальными и емкостными коэффициентами следующая:

$$A_{k1} = \frac{\Delta_{k1}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{11} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & \dots & B_{21} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}; \tag{40}$$

алгебраическое дополнение:

$$\Delta_{K1} = (-1)^{K+1} \begin{vmatrix} B_{11} \dots B_{11} \dots B_{1n} \\ B_{21} \dots B_{21} \dots B_{2n} \\ \dots \\ B_{n1} \dots B_{n1} \dots B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Систему уравнений можно записать в виде:

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n);$$

$$q_2 = C_{22}\varphi_2 + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + C_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n);$$

$$q_n = C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) + \dots + C_{nn}(\varphi_n - \varphi_n),$$

где

$$C_{11} = A_{11} + A_{12} + A_{13} + \dots + A_{1n};$$

$$C_{12} = -A_{12}; \quad C_{13} = -A_{13}; \quad C_{1n} = -A_{1n};$$

$$C_{k1} = A_{k1} + A_{k2} + \dots + A_{kk} + A_{kn};$$

$$C_{k1} = -A_k; \quad C_{k2} = -A_{k2}; \quad C_{kn} = -A_{kn};$$

-называются частичными емкостями.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Охарактеризуйте понятие "электростатическое поле".
2. Как распределяются заряды по длине, площади и объему проводника?
3. Какой физический смысл придается напряженности электростатического поля?
4. Что такое электрическое смещение и какова его связь с напряженностью электростатического поля?
5. Каково основное свойство электростатического поля?
6. Каково свойство суперпозиции электростатических полей?
7. Напишите основной закон сохранения заряда.
8. Как зависит сила взаимодействия точечных зарядов от электрических свойств среды?
9. Чему равна работа, совершенная силами поля при перемещении заряда?
10. Каково основное свойство электростатического поля?
11. Какой физический смысл придается потенциалу электростатического поля?
12. Какая интегральная и дифференциальная связь существует между напряженностью  $E$  и потенциалом  $U$ ?
13. Какие поля называются потенциальными?

14. Что понимают под картиной поля?
15. В чем отличие свободных зарядов от связанных?
16. Каков смысл вектора  $P$  ?
17. Что послужило основанием для введения вектора  $D$  ?
18. Может ли различное распределение зарядов в пространстве создавать в определенной области пространства одинаковые силы?
19. Как ведут себя проводники, помещенные в электрическое поле?
20. Может ли при переходе через границу раздела двух сред с различными  $\epsilon$  полное значение  $E$  изменяться скачками?
21. Может ли при переходе через границу раздела двух сред с различными  $\epsilon$  полное значение  $D$  изменяться скачками?
22. Каков потенциал на граничной поверхности двух сред?
23. Каковы граничные условия, если одна среда проводящая, а другая - диэлектрик?
24. Какова энергия взаимодействия зарядов?
25. Как рассчитывается энергия и плотность энергии электростатического поля?
26. Каковы условия на границе раздела двух диэлектриков?
27. Как ведет себя потенциал при переходе через границу двух сред?
28. За счет чего совершают работу силы поля, где напряженность  $E$  отлична от нуля?
29. В чем заключается метод наложения для расчета электростатических полей?
30. Дайте обоснование методу зеркальных изображений.
31. Охарактеризуйте идею и этапы решения уравнений в частных производных методом разделения переменных.
32. В чем заключается метод сеток для расчета электростатических полей? Какое допущение при этом принято?
33. Что определяют потенциальные и ёмкостные коэффициенты и частичные ёмкости?
34. Можно ли пользоваться методом зеркальных изображений для расчета полей в нелинейных средах?
35. Эквивалентом, какого реального заряда является фиктивное зеркальное изображение точечного заряда?
36. Как решить задачу методом зеркальных изображений, если заданы два точечных заряда, расположенных по разные стороны плоскости раздела двух диэлектрических сред?
37. Дайте определение энергии заряженных тел.
38. Каково распределение энергии заряженных тел в пространстве?

## ГЛАВА 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

### § 2.1. Ток и плотность тока проводимости

Мерой тока служит предел отношения заряда  $\Delta q$ , проходящего сквозь заданную поверхность в течение некоторого времени  $\Delta t$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$  как к пределу:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

В (2.1) - ток величина скалярная  $[i]=[A]$

Плотностью тока называют векторную величину  $\delta$ , численное значение которой равно пределу отношения тока, протекающего через некоторую площадку, расположенную нормально к направлению движения зарядов, к величине площади этой площадки, когда она стремится к нулю, как к пределу

$$\delta = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S_n} = \frac{\Delta i}{\Delta S_n}. \quad (2.2)$$

Направление вектора  $\delta$  выбирается таким образом, чтобы оно совпадало с направлением движения положительных зарядов.

Ток и плотность тока связаны соотношением:

$$i = \int_S \vec{\delta} d\vec{S}. \quad (2.3)$$

Плотность тока в системе СИ  $[\delta]=[A/m^2]$

Иногда рассматривают поверхностные токи, которые протекают только по поверхности проводника.

$$\eta = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} = \frac{\Delta i}{\Delta l}. \quad (2.4)$$

В системе СИ  $[\eta]=[A/m]$

### § 2.2. Закон Ома в дифференциальной форме

Пусть у нас имеется однородный проводник – им может служить кусок однородного металла постоянного сечения, все точки которого имеют одинаковую температуру. Если на концах этого проводника поддерживается неизменная разность потенциалов  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , то в проводнике течет ток  $I$ , сила которого пропорциональна этой разности потенциалов:

$$I = G\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi}{R}, \quad (2.5)$$

где  $G$  – электропроводность участка,

$R = \frac{1}{G} = \frac{\Delta\varphi}{I}$  - электрическое сопротивление участка цепи.

Известно, что сопротивление металлического проводника пропорционально его длине  $l$ , обратно пропорционально площади его поперечного сечения  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (2.6)$$

Величина  $\rho$  - называется удельным сопротивлением вещества, из которого изготовлен проводник. Обратная величина:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (2.7)$$

называется удельной электропроводностью.

Преобразуем выражение для закона Ома на участке цепи. Для этого в формуле (2.5) выразим силу тока через плотность тока (2.2), сопротивление выразим через свойство проводника согласно (2.6), а разность потенциалов – через напряженность поля:

$$E = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{l}. \quad (2.8)$$

получим:

$$\bar{\delta}S = \frac{\bar{E}lS}{\rho l}, \quad (2.9)$$

или, после сокращений:

$$\bar{\delta} = \frac{E}{\rho} . \quad (2.10)$$

Выразив в этой формуле удельное сопротивление через удельную электропроводность согласно (2.7), получим:

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E} . \quad (2.11)$$

Таким образом, плотность тока пропорциональна напряженности поля в данной точке проводника. Это выражение носит название закона Ома в дифференциальной форме. Для того, чтобы в проводнике длительно проходил ток, необходимо наличие электрического поля, силы которого перемещают заряды. Такое поле, может быть создано, и будет поддерживаться процессами неэлектрического происхождения (химическими, термоэлектрическими и др.) и носит название стороннего электрического поля. Напряженность стороннего электрического поля:

$$\bar{E}_{стор} = \lim \frac{\bar{F}_{стор}}{q} . \quad (2.12)$$

Напряженность результирующего поля:

$$\bar{E}_{рез} = \bar{E} + \bar{E}_{стор} . \quad (2.13)$$

В формуле (2.11) фактически фигурирует напряженность кулоновского поля, поскольку это выражение было получено из закона Ома для однородного участка цепи, где действует кулоновское поле. Однако совершенно безразлично, какое поле действует на заряды - кулоновское, стороннее или суммарное. Отсюда следует, что если на данном участке цепи действует не только кулоновское, но и стороннее поле (неоднородный участок цепи), то плотность тока окажется пропорциональным напряженности суммарного поля:

$$\bar{\delta} = \gamma (\bar{E} + \bar{E}_{стор}) . \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) называют вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме.

### § 2.3. Закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме

Мощность тепловых потерь в проводнике равна произведению тока и напряжения  $P = U \cdot I$ .

Если рассматривать (рис.28.) в проводящей среде элемент объёма  $dV$ , то мощность тепловых потерь

$$dP = dIdU = \delta dSEdl = \delta EdV,$$

откуда:

$$\frac{dP}{dV} = \delta E = \gamma E^2 = \frac{\delta^2}{\gamma} \quad . \quad (2.16)$$

- дифференциальная форма закона Джоуля - Ленца.

Мощность тепловых потерь в объеме  $V$ :

$$P = \int_V \gamma E^2 dV . \quad (2.17)$$

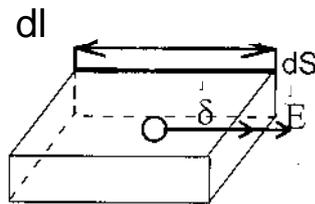


Рис.28. Элемент объема проводника с током

## § 2.4. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме

Замкнутая поверхность  $S$  (рис.29) охватывает узел цепи, к которому подходят токи  $I_1$  и  $I_2$  и из которого выходят токи  $I_3$  и  $I_4$ .

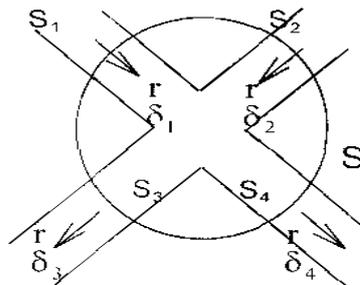


Рис.29. Узел электрической цепи

Согласно первому закону Кирхгофа в интегральной форме:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

**Выразим токи через плотность тока:**

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S_1} \vec{\delta} d\vec{S} & I_2 &= \int_{S_2} \vec{\delta} d\vec{S} \\ I_3 &= \int_{S_3} \vec{\delta} d\vec{S} & I_4 &= \int_{S_4} \vec{\delta} d\vec{S} \end{aligned} \quad . \quad (2.18)$$

или  $\int_{S_1+S_2} \vec{\delta} d\vec{S} = 0$ , так как вне площадок  $S_1, S_2, S_3, S_4$  плотность тока равна нулю, то можно распространить интеграл на всю замкнутую поверхность  $S$ , тогда:

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = 0. \quad (2.19)$$

Постоянный ток непрерывен. Линии  $\delta$  замкнуты.

Так как поверхность  $S$ , а следовательно, и объём  $V$  выбраны произвольно, то можно считать, что  $\text{div} \delta = 0$  - первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Плотность тока проводимости не имеет источников. Это уравнение называют ещё уравнением для постоянного тока. Постоянный ток имеет в различных сечениях неразветвлённой цепи одно и то же значение, так как в противном случае были бы такие участки, в которых заряд или увеличивается или уменьшается, а это невозможно.

Дивергенция плотности переменного тока может быть отлична от нуля, так как в цепях переменного тока могут быть участки, на которых заряды увеличиваются или уменьшаются (конденсатор в цепи переменного тока).

## § 2.5. Граничные условия

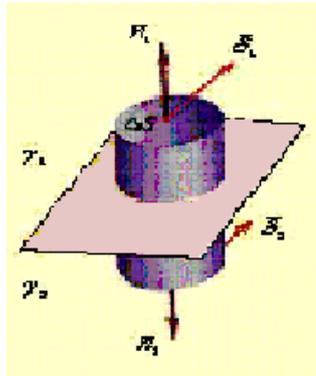


Рис.30. К выводу граничных условий

Рассмотрим границу двух проводящих сред, проводимости которых равны  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис.30.). Построим цилиндрическую поверхность  $S$ . Ток сквозь эту поверхность равен 0, так как она замкнутая:

$$\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{\delta}_1 d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{\delta}_2 d\vec{S} + \int_{S_{бок}} \vec{\delta} d\vec{S} = 0$$

Если высоту цилиндра уменьшить так, чтобы площадки  $\Delta S_1 = \Delta S_2$  совпали с граничной поверхностью, и учитывая, что  $\Delta S$  - небольшая, то  $\delta_{1n} \Delta S - \delta_{2n} \Delta S = 0$ ,  $\delta_{1n} = \delta_{2n}$ . Нормальная составляющая вектора плотности тока на границе двух сред непрерывна.

Если на границе этих сред нет сторонних сил, то касательные составляющие вектора напряжённости электрического поля также должны

быть равны у границы. Если векторы  $\delta$  и  $E$  (рис.31.) образуют с нормалью к границе угол  $\alpha_1$ , в первой среде и угол  $\alpha_2$  во второй, то:

$$\begin{aligned} E_1 \sin \alpha_1 &= E_2 \sin \alpha_1; \\ \delta_1 \cos \alpha_1 &= \delta_2 \cos \alpha_2; \\ E_{1\tau} &= E_{2\tau}, \quad \delta_{1n} \end{aligned} \quad (2.20)$$

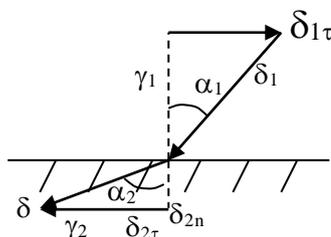


Рис.31. К выводу закона преломлений линий тока.

Так как  $\bar{\delta}_1 = \gamma_1 * \bar{E}_1$  и  $\bar{\delta}_2 = \gamma_2 * \bar{E}_2$ , то

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}. \quad (2.21)$$

## §2.6. Поле шарового электрода.

Для заземления электрической цепи её соединяют с помощью провода с металлическим проводником называемым заземлителем. Обычно заземлители делают сферическими или полусферическими. Металлический шар радиуса "а" находится в грунте с проводимостью  $\gamma$ . К шару при помощи изолированного провода подводится постоянный ток  $I$ , который возвращается в цепь на достаточном удалении от заземлителя. По условиям симметрии линии вектора плотности тока  $\delta$  вблизи заземлителя будут направлены радиально. На расстоянии  $R$  от центра шара плотность тока:

$$\vec{\delta} = \frac{I}{4\pi R^2} \cdot \bar{1}_R. \quad (2.22)$$

По закону Ома:

$$\bar{E} = \frac{\vec{\delta}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi R^2 \gamma} \cdot \bar{1}_R. \quad (2.23)$$

Эквипотенциальные поверхности будут концентрическими сферами. Напряжение между произвольной точкой  $M$  и точкой, которая находится на поверхности заземлителя:

$$U = \int_a^R E dR = \frac{I}{4\pi \gamma} \int_a^R \frac{dR}{R^2} = \frac{I}{4\pi \gamma a} \left(1 - \frac{a}{R}\right). \quad (2.24)$$

При  $R \rightarrow \infty$   $U \rightarrow U_0$

$$U_0 = \frac{1}{4\pi\gamma a} \quad (2.25)$$

- напряжение растекания (рис. 32)

$$r_p = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a} \quad (2.27)$$

- сопротивление растекания

На расстоянии  $R \approx 100a$   $U \approx U_0$

Для полусферического заземлителя:

$$r_p = \frac{1}{2\pi\gamma a} \quad (2.28)$$

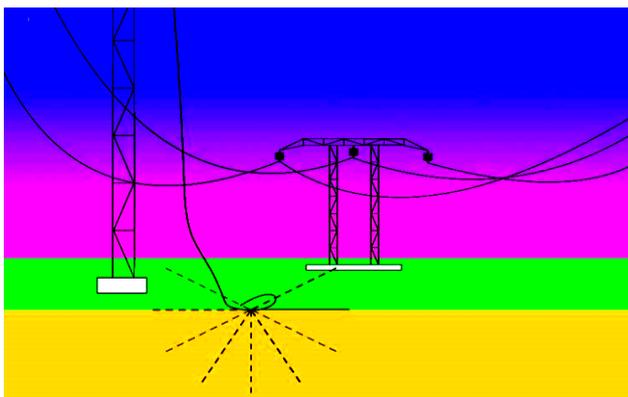


Рис.32. Растекание напряжения от оборванного провода

## § 2.7. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем

В области, в которой нет сторонних ЭДС, постоянный ток потенциален. Потенциал и напряженность тока в такой области связаны соотношением:

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right) \quad (2.29)$$

Так как постоянный ток непрерывен, поле не имеет источников

По закону Ома:  $\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$

**В среде с постоянной проводимостью:**

$$= \text{const}.$$

Подставив значение  $E$ , получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \quad (2.30)$$

Следовательно, для определения потенциала поля в рассматриваемой области необходимо решить уравнение Лапласа и учесть граничные условия. Электростатическое поле тоже описывается уравнением Лапласа. Поэтому, если две одинаковые граничные области, проводящая (без сторонних ЭДС) и диэлектрическая (без свободных зарядов) имеют на граничной поверхности одинаковое распределение потенциала, то внутри каждой из этих областей распределение потенциала будет также одинаковым. Это обстоятельство позволяет пользоваться формулами, полученными при расчете электростатических полей, для случая постоянного тока. При этом, ёмкость следует заменить проводимостью, " $\epsilon$ " заменить проводимостью " $\gamma$ ". Так, например, ёмкость кабеля

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{b}{a}} ; \quad (2.31.)$$

Произведя замену, можно легко получить

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\gamma}{\ln \frac{b}{a}} . \quad (2.32)$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Почему уравнение  $\delta \doteq \vec{\gamma}(E+E_{\text{стор}})$  называют обобщенным законом Ома, а также вторым законом Кирхгофа?
2. Что представляет Закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме?
3. В каком случае электрическое поле в проводящей среде не является потенциальным?
4. Каково условие непрерывности постоянного тока?
5. Расскажите о свойствах электрического поля в проводящей среде и приведите его основные уравнения.
6. Почему несправедливо уравнение  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$  для поля, в котором проводимость есть функция координат?

7. Как выбирается направление  $\vec{\delta}$ ?

8. Почему постоянный ток имеет в различных сечениях неразветвленной цепи одно и то же значение?

9. Почему для переменного тока  $\oint \vec{\delta} d\vec{s} \neq 0$ ?

10. В каком случае в проводнике будет длительно проходить ток.

11. Каковы граничные условия двух проводящих сред?

12. Что такое напряжение растекания и сопротивление растекания?

13. Как рассчитывается шаговое напряжение?

**14. В чем сходство между электростатическим полем и электрическим полем в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами?**

**15. В чем различие между электростатическим полем и электрическим полем в диэлектрике, окружающем проводники с постоянными токами?**

16. Какие соотношения существуют между углом падения и углом преломления, если ток переходит из среды с большой проводимостью в среду с малой проводимостью.

**17. Одинаковы ли силовые и эквипотенциальные линии в электростатическом и в электрическом поле, и почему?**

18. Каким образом можно приспособить аналитическое решение задач электростатики для решения родственных задач в поле проводящей среды? Приведите примеры.

19. Составьте аналогии трем группам формул Максвелла для поля постоянного тока в проводящей среде.

20. Где отсутствует аналогия электрических полей в проводниках и диэлектриках?

## ГЛАВА 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 3.1. Магнитное взаимодействие токов

Магнитные явления были известны еще в древнем мире. Компас был изобретен более 4500 лет тому назад. Он появился в Европе приблизительно в XII веке новой эры. Однако только в XIX веке была обнаружена связь между электричеством и магнетизмом и возникло представление о магнитном поле.

Первыми экспериментами, показавшими, что между электрическими и магнитными явлениями имеется глубокая связь, были опыты датского физика Х. Эрстеда (1820 г.). Эти опыты показали, что на магнитную стрелку, расположенную вблизи проводника с током, действуют силы, которые стремятся повернуть стрелку. В том же году французский физик А. Ампер наблюдал силовое взаимодействие двух проводников с токами и установил закон взаимодействия токов.

По современным представлениям, проводники с током оказывают силовое действие друг на друга не непосредственно, а через окружающие их магнитные поля.

Источниками магнитного поля являются: движущиеся электрические заряды (токи). Магнитное поле возникает в пространстве, окружающем проводники с током, подобно тому, как в пространстве, окружающем неподвижные электрические заряды, возникает электрическое поле. Магнитное поле постоянных магнитов также создается электрическими микротоками, циркулирующими внутри молекул вещества (гипотеза Ампера).

Ученые XIX века пытались создать теорию магнитного поля по аналогии с электростатикой, вводя в рассмотрение так называемые магнитные заряды двух знаков (например, северный N и южный S полюса магнитной стрелки). Однако, опыт показывает, что изолированных магнитных зарядов не существует.

Магнитное поле токов принципиально отличается от электрического поля. Магнитное поле, в отличие от электрического, оказывает силовое действие только на движущиеся заряды (токи).

Для описания магнитного поля необходимо ввести силовую характеристику поля, аналогичную вектору напряженности  $\vec{E}$  электрического поля. Такой характеристикой является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  определяет силы, действующие на токи или движущиеся заряды в магнитном поле.

За положительное направление вектора  $\vec{B}$  принимается направление от южного полюса S к северному полюсу N магнитной стрелки, свободно устанавливающейся в магнитном поле. Таким образом, исследуя

магнитное поле, создаваемое током или постоянным магнитом, с помощью маленькой магнитной стрелки, можно в каждой точке пространства определить направление вектора  $\vec{B}$ . Такое исследование позволяет представить пространственную структуру магнитного поля. Аналогично силовым линиям в электростатике можно построить линии магнитной индукции, в каждой точке которых вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной. Пример линий магнитной индукции полей постоянного магнита и катушки с током приведен на рис.39.

Обратите внимание на аналогию магнитных полей постоянного магнита и катушки с током. Линии магнитной индукции всегда замкнуты, они нигде не обрываются. Это означает, что магнитное поле не имеет источников – магнитных зарядов. Силовые поля, обладающие этим свойством, называются вихревыми. Картину магнитной индукции можно наблюдать с помощью мелких железных опилок, которые в магнитном поле намагничиваются и, подобно маленьким магнитным стрелкам, ориентируются вдоль линий индукции.

Для того, чтобы количественно описать магнитное поле, нужно указать способ определения не только направления вектора  $\vec{B}$  но и его модуля. Проще всего это сделать, внося в исследуемое магнитное поле проводник с током и измеряя силу, действующую на отдельный прямолинейный участок этого проводника. Этот участок проводника должен иметь длину  $\Delta l$ , достаточно малую по сравнению с размерами областей неоднородности магнитного поля. Как показали опыты Ампера, сила, действующая на участок проводника, пропорциональна силе тока  $I$ , длине  $\Delta l$  этого участка и синусу угла  $\alpha$  между направлениями тока и вектора магнитной индукции (рис.33).

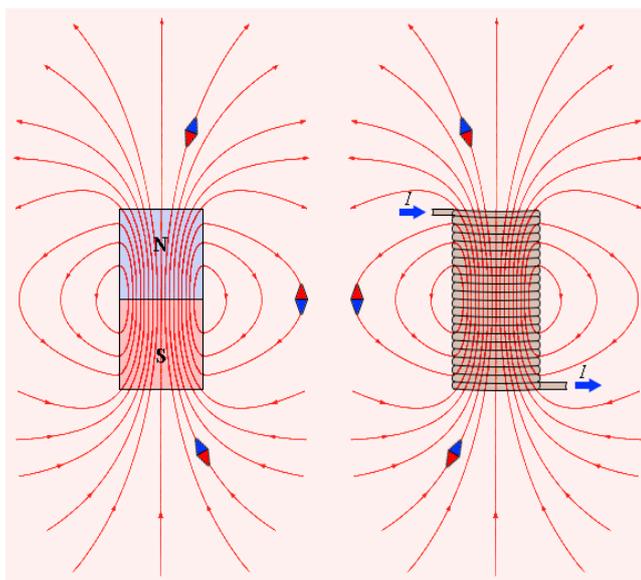


Рис.33. Линии магнитной индукции полей постоянного магнита и

катушки с током. Индикаторные магнитные стрелки ориентируются по направлению касательных к линиям индукции

$$F \sim I\Delta l \sin \alpha. \quad (3.1)$$

Эта сила называется силой Ампера. Она достигает максимального по модулю значения  $F_{\max}$ , когда проводник с током ориентирован перпендикулярно линиям магнитной индукции. Модуль вектора  $\vec{B}$  определяется следующим образом:

Модуль вектора магнитной индукции равен отношению максимального значения силы Ампера, действующей на прямой проводник с током, к силе тока  $I$  в проводнике и его длине  $\Delta l$ :

$$B = \frac{F_{\max}}{I\Delta l}. \quad (3.2)$$

В общем случае сила Ампера выражается соотношением:

$$F = IB\Delta l \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Это соотношение принято называть законом Ампера.

В системе единиц СИ за единицу магнитной индукции принята индукция такого магнитного поля, в котором на каждый метр длины проводника при силе тока 1 А действует максимальная сила Ампера 1 Н. Эта единица называется тесла (Тл).

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}. \quad (3.4)$$

Тесла – очень крупная единица. Магнитное поле Земли приблизительно равно  $0,5 \cdot 10^{-4}$  Тл. Большой лабораторный электромагнит может создать поле не более 5 Тл.

Сила Ампера направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  и направлению тока, текущего по проводнику. Для определения направления силы Ампера обычно используют правило левой руки: если расположить левую руку так, чтобы линии индукции  $\vec{B}$  входили в ладонь, а вытянутые пальцы были направлены вдоль тока, то отведенный большой палец укажет направление силы, действующей на проводник (рис.34).

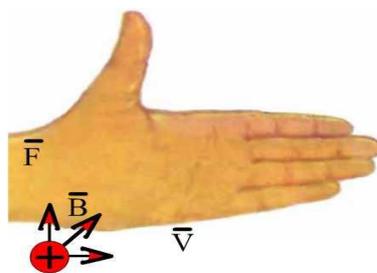


Рис.34. Правило левой руки.

Если угол  $\alpha$  между направлениями вектора  $\vec{B}$  и тока в проводнике отличен от  $90^\circ$ , то для определения направления силы Ампера  $\vec{F}$  более удобно пользоваться правилом буравчика. Воображаемый буравчик располагается перпендикулярно плоскости, содержащей вектор  $\vec{B}$  и проводник с током, затем его рукоятка поворачивается от направления тока к направлению вектора  $\vec{B}$ . Поступательное перемещение буравчика будет показывать направление силы Ампера  $\vec{F}$  (рис.35). Правило буравчика часто называют правилом правого винта.

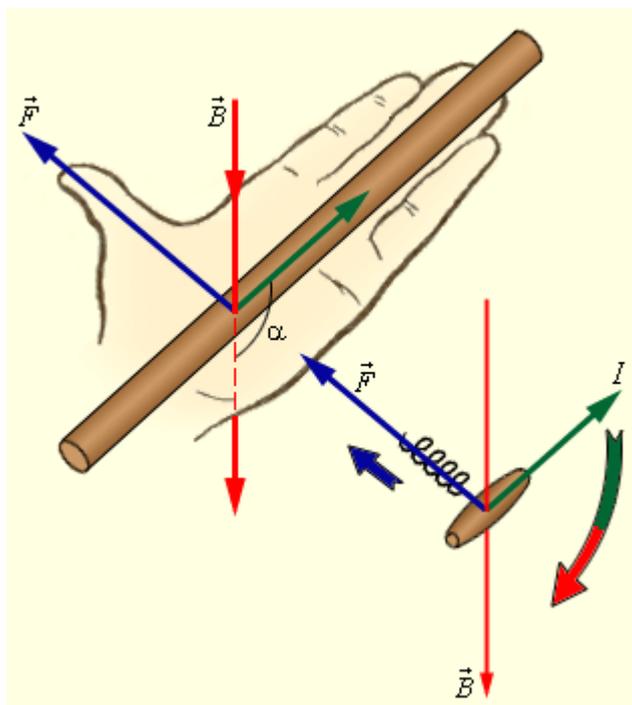


Рис.35. Правило левой руки и правило буравчика

Одним из важных примеров магнитного взаимодействия токов является взаимодействие параллельных токов. Закономерности этого явления были экспериментально установлены Ампером. Если по двум параллельным проводникам электрические токи текут в одну и ту же сторону, то наблюдается взаимное притяжение проводников. В случае, когда токи текут в противоположных направлениях, проводники отталкиваются.

Взаимодействие токов вызывается их магнитными полями: магнитное поле одного тока действует силой Ампера на другой ток и наоборот.

Опыты показали, что модуль силы, действующей на отрезок длиной  $\Delta l$  каждого из проводников, прямо пропорционален силам тока  $I_1$  и  $I_2$  в проводниках, длине отрезка  $\Delta l$  и обратно пропорционален расстоянию  $R$  между ними:

$$F = k \frac{I_1 I_2 \Delta l}{R} \quad (3.5)$$

В Международной системе единиц СИ коэффициент пропорциональности  $k$  принято записывать в виде:  $k = \mu_0 / 2\pi$ ,

где  $\mu_0$  – постоянная величина, которую называют магнитной постоянной. Введение магнитной постоянной в СИ упрощает запись ряда формул. Ее численное значение равно

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Н/А}^2.$$

Формула, выражающая закон магнитного взаимодействия параллельных токов, принимает вид:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 \Delta l}{R} \quad (3.6)$$

Отсюда нетрудно получить выражение для индукции магнитного поля каждого из прямолинейных проводников. Магнитное поле прямолинейного проводника с током должно обладать осевой симметрией и, следовательно, замкнутые линии магнитной индукции могут быть только концентрическими окружностями, располагающимися в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Это означает, что векторы  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  магнитной индукции параллельных токов  $I_1$  и  $I_2$  лежат в плоскости, перпендикулярной обоим токам. Поэтому при вычислении сил Ампера, действующих на проводники с током, нужно в законе Ампера положить  $\sin \alpha = 1$ . Из закона магнитного взаимодействия параллельных токов следует, что модуль индукции  $B$  магнитного поля прямолинейного проводника с током  $I$  на расстоянии  $R$  от него выражается соотношением

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (3.7)$$

Для того, чтобы при магнитном взаимодействии параллельные токи притягивались, а антипараллельные отталкивались, линии магнитной индукции поля прямолинейного проводника должны быть направлены по часовой стрелке, если смотреть вдоль проводника по направлению тока. Для определения направления вектора  $\vec{B}$  магнитного поля прямолинейного проводника также можно пользоваться правилом буравчика: направление вращения рукоятки буравчика совпадает с

направлением вектора  $\vec{B}$ , если при вращении буравчик перемещается в направлении тока (рис.36.).

Рис.37. поясняет закон взаимодействия параллельных токов. Магнитное взаимодействие параллельных проводников с током используется в Международной системе единиц (СИ) для определения единицы силы тока – ампера:

Ампер – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу магнитного взаимодействия, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

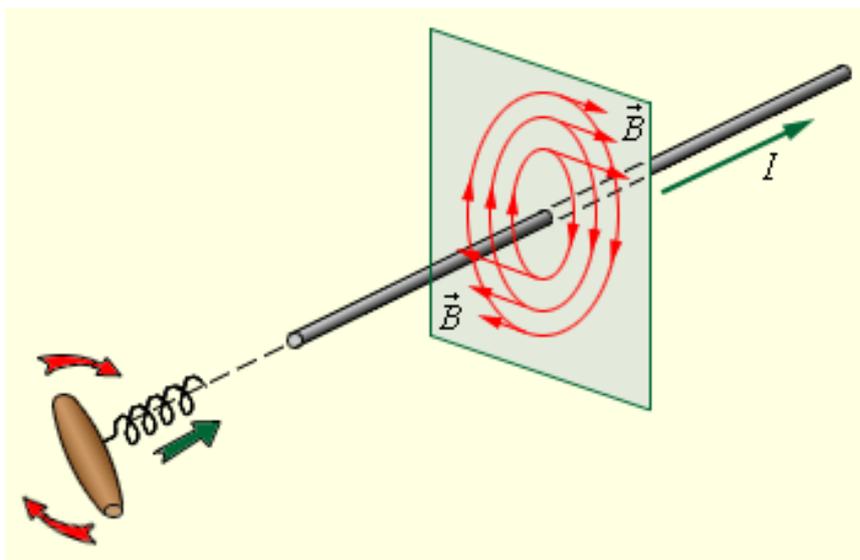


Рис.36. Магнитное поле прямолинейного проводника с током

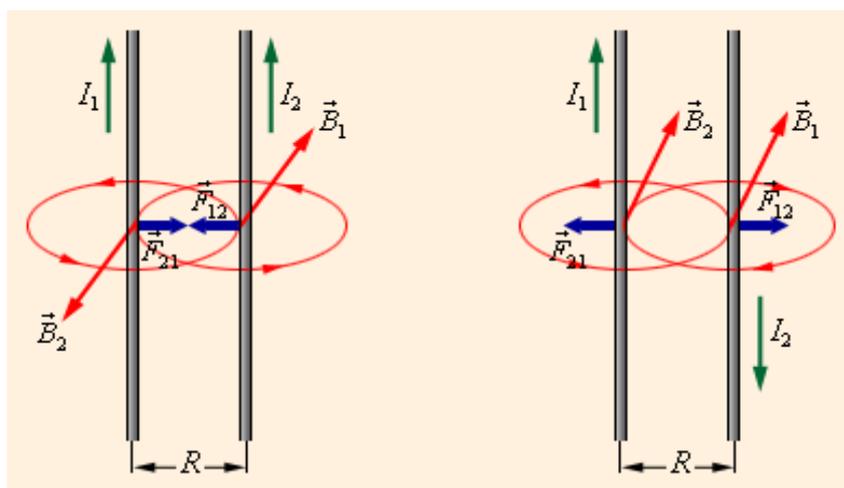


Рис.37. Магнитное взаимодействие параллельных и антипараллельных токов

Модель взаимодействия параллельных токов и силовых линий магнитного поля показана на рис.38.

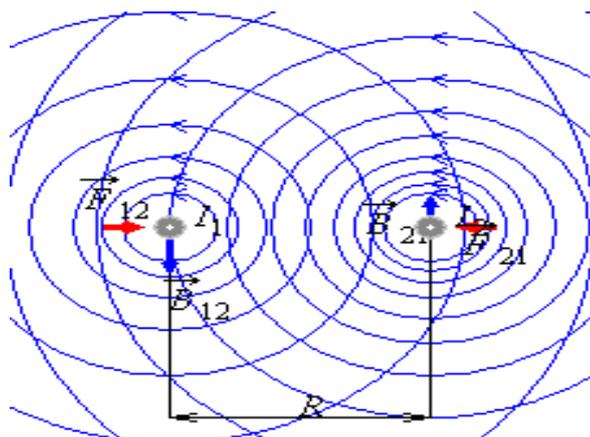


Рис.38. Модель взаимодействия параллельных токов

Рамка с током в магнитном поле поворачивается. На неё действует момент силы, отношения максимального момента силы поворота рамки в магнитном поле к току и площади рамки называется магнитной индукции. Модель рамки с током в магнитном поле показана на рис.39.

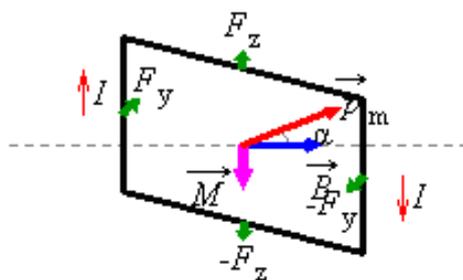


Рис.39. Модель рамки с током в магнитном поле

### § 3.2. Закон Био–Савара. Теорема о циркуляции

Магнитное поле постоянных токов различной конфигурации изучалось экспериментально французскими учеными Ж. Био и Ф. Саваром (1820 г.). Они пришли к выводу, что индукция магнитного поля токов, текущих по проводнику, определяется совместным действием всех отдельных участков проводника. Магнитное поле подчиняется принципу суперпозиции:

Если магнитное поле создается несколькими проводниками с током, то индукция результирующего поля есть векторная сумма индукций полей, создаваемых каждым проводником в отдельности.

Индукцию  $\vec{B}$  проводника с током можно представить как векторную сумму элементарных индукций  $\Delta \vec{B}$  создаваемых отдельными участками проводника. На опыте невозможно осуществить отдельный участок проводника с током, так как постоянные токи всегда замкнуты. Можно измерить только суммарную индукцию магнитного поля, создаваемого всеми элементами тока. Закон Био–Савара определяет вклад  $\Delta \vec{B}$  в

магнитную индукцию  $\vec{B}$  результирующего магнитного поля, создаваемый малым участком  $\Delta l$  проводника с током  $I$ .

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (3.8)$$

Здесь  $r$  – расстояние от данного участка  $\Delta l$  до точки наблюдения,  $\alpha$  – угол между направлением на точку наблюдения и направлением тока на данном участке,  $\mu_0$  – магнитная постоянная. Направление вектора  $\Delta \vec{B}$  определяется правилом буравчика: оно совпадает с направлением вращения рукоятки буравчика при его поступательном перемещении вдоль тока. Рис.40 иллюстрирует закон Био–Савара на примере магнитного поля прямолинейного проводника с током. Если просуммировать (проинтегрировать) вклады в магнитное поле всех отдельных участков прямолинейного проводника с током, то получится формула для магнитной индукции поля прямого тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (3.9)$$

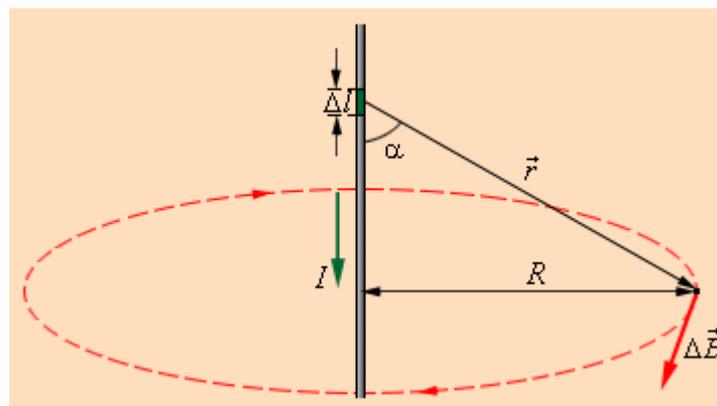


Рис.40. Иллюстрация закона Био–Савара

Закон Био–Савара позволяет рассчитывать магнитные поля токов различных конфигураций. Нетрудно, например, выполнить расчет магнитного поля в центре кругового витка с током. Этот расчет приводит к формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R}, \quad (3.10)$$

где  $R$  – радиус кругового проводника. Для определения направления вектора  $\vec{B}$  также можно использовать правило буравчика, только теперь его рукоятку нужно вращать в направлении кругового тока, а поступательное перемещение буравчика укажет направление вектора магнитной индукции.

Расчеты магнитного поля токов часто упрощаются при учете симметрии в конфигурации токов, создающих поле. В этом случае расчеты можно выполнять с помощью теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции, которая в теории магнитного поля токов играет ту же роль, что и теорема Гаусса в электростатике.

Поясним понятие циркуляции вектора  $\vec{B}$ . Пусть в пространстве, где создано магнитное поле, выбран некоторый условный замкнутый контур (не обязательно плоский) и указано положительное направление обхода контура. На каждом отдельном малом участке  $\Delta l$  этого контура можно определить касательную составляющую  $B_1$  вектора  $\vec{B}$  в данном месте, то есть определить проекцию вектора  $\vec{B}$  на направление касательной к данному участку контура (рис.41).

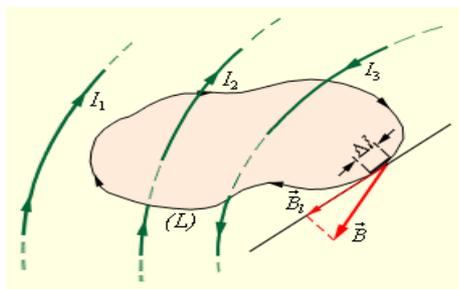


Рис.41. Замкнутый контур (L) с заданным направлением обхода. Изображены токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , создающие магнитное поле

Циркуляцией вектора  $\vec{B}$  называют сумму произведений  $B_1 \Delta l$ , взятую по всему контуру L:

$$\text{Циркуляция вектора } \vec{B} = \sum_{(L)} B_1 \Delta l. \quad (3.11)$$

Некоторые токи, создающие магнитное поле, могут пронизывать выбранный контур L в то время, как другие токи могут находиться в стороне от контура.

Теорема о циркуляции утверждает, что циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля постоянных токов по любому контуру L всегда равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на сумму всех токов, пронизывающих контур:

$$\sum_{(L)} B_1 \Delta l = \mu_0 \sum I_i. \quad (3.12)$$

В качестве примера на рис. 1.17.2 изображены несколько проводников с токами, создающими магнитное поле. Токи  $I_2$  и  $I_3$  пронизывают контур L в противоположных направлениях, им должны быть приписаны разные знаки – положительными считаются токи, которые связаны с выбранным

направлением обхода контура правилом правого винта (буравчика). Следовательно,  $I_3 > 0$ , а  $I_2 < 0$ . Ток  $I_1$  не пронизывает контур  $L$ .

Теорема о циркуляции в данном примере выражается соотношением:

$$\sum_{(L)} B_l \Delta l = \mu_0(I_3 - I_2). \quad (3.13)$$

Теорема о циркуляции в общем виде следует из закона Био–Савара и принципа суперпозиции.

Простейшим примером применения теоремы о циркуляции является определение магнитной индукции поля прямолинейного проводника с током. Учитывая симметрию в данной задаче, контур  $L$  целесообразно выбрать в виде окружности некоторого радиуса  $R$ , лежащей в перпендикулярной проводнику плоскости. Центр окружности находится в некоторой точке проводника. В силу симметрии вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной ( $B_1 = B$ ), а его модуль одинаков во всех точках окружности. Применение теоремы о циркуляции приводит к соотношению:

$$\sum_{(L)} B_l \Delta l = 2\pi R B = \mu_0 I, \quad (3.14)$$

откуда следует формула для модуля магнитной индукции поля прямолинейного проводника с током, приведенная ранее.

Этот пример показывает, что теорема о циркуляции вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  может быть использована для расчета магнитных полей, создаваемых симметричным распределением токов, когда из соображений симметрии можно «угадать» общую структуру поля.

Имеется немало практически важных примеров расчета магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции. Одним из таких примеров является задача вычисления поля тороидальной катушки (рис.42).

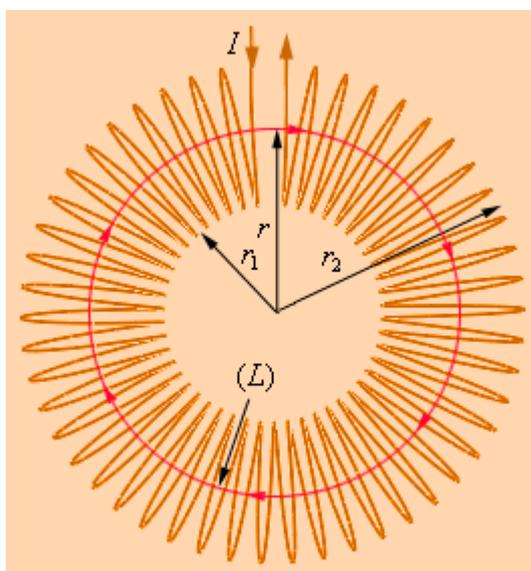


Рис.42. Применение теоремы о циркуляции к тороидальной катушке

Предполагается, что катушка плотно, то есть виток к витку, намотана на немагнитный тороидальный сердечник. В такой катушке линии магнитной индукции замыкаются внутри катушки и представляют собой концентрические окружности. Они направлены так, что глядя вдоль них, мы увидели бы ток в витках, циркулирующим по часовой стрелке. Одна из линий индукции некоторого радиуса  $r_1 \leq r < r_2$  изображена на рис. 42. Применим теорему о циркуляции к контуру  $L$  в виде окружности, совпадающей с изображенной на рис.43. линией индукции магнитного поля. Из соображений симметрии ясно, что модуль вектора  $\vec{B}$  одинаков вдоль всей этой линии. По теореме о циркуляции можно записать:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I N, \quad (3.15)$$

где  $N$  – полное число витков, а  $I$  – ток, текущий по виткам катушки. Следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}. \quad (3.16)$$

Таким образом, модуль вектора магнитной индукции в тороидальной катушке зависит от радиуса  $r$ . Если сердечник катушки тонкий, то есть  $r_2 - r_1 \ll r$ , то магнитное поле внутри катушки практически однородно. Величина  $n = N / 2\pi r$  представляет собой число витков на единицу длины катушки. В этом случае

$$B = \mu_0 I n \quad (3.17)$$

В это выражение не входит радиус тора, поэтому оно справедливо и в предельном случае  $r \rightarrow \infty$ . Но в пределе каждую часть тороидальной катушки можно рассматривать как длинную прямолинейную катушку. Такие катушки называют соленоидами. Вдали от торцов соленоида модуль магнитной индукции выражается тем же соотношением, что и в случае тороидальной катушки.

На рис.43. изображено магнитное поле катушки конечной длины. Следует обратить внимание на то, что в центральной части катушки магнитное поле практически однородно и значительно сильнее, чем вне катушки. На это указывает густота линий магнитной индукции. В предельном случае бесконечно длинного соленоида однородное магнитное поле целиком сосредоточено внутри соленоида.

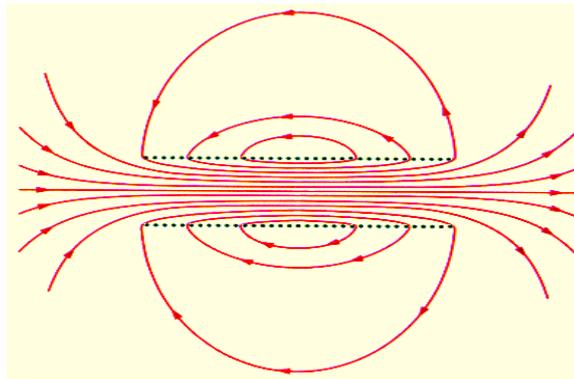


Рис.43. Магнитное поле катушки конечной длины

В центре соленоида магнитное поле практически однородно и значительно превышает по модулю поле вне катушки.

В случае бесконечно длинного соленоида выражение для модуля магнитной индукции можно получить непосредственно с помощью теоремы о циркуляции, применив ее к прямоугольному контуру, показанному на рис.44.

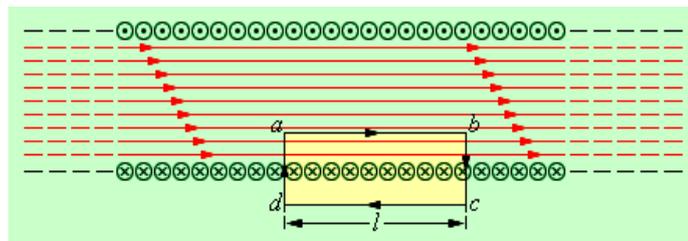


Рис.44. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля бесконечно длинного соленоида

Вектор магнитной индукции имеет отличную от нуля проекцию на направление обхода контура  $abcd$  только на стороне  $ab$ . Следовательно, циркуляция вектора  $\vec{B}$  по контуру равна  $Bl$ , где  $l$  – длина стороны  $ab$ . Число витков соленоида, пронизывающих контур  $abcd$ , равно  $n \cdot l$ , где  $n$  – число витков на единицу длины соленоида, а полный ток, пронизывающий контур, равен  $Inl$ . Согласно теореме о циркуляции,

$$Bl = \mu_0 Inl;$$

откуда

$$B = \mu_0 In.$$

Это выражение совпадает с полученной ранее формулой для магнитного поля тонкой тороидальной катушки.

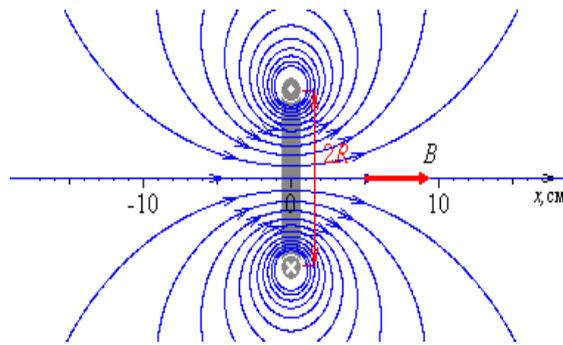


Рис.45. Модель магнитного поля кругового витка с током

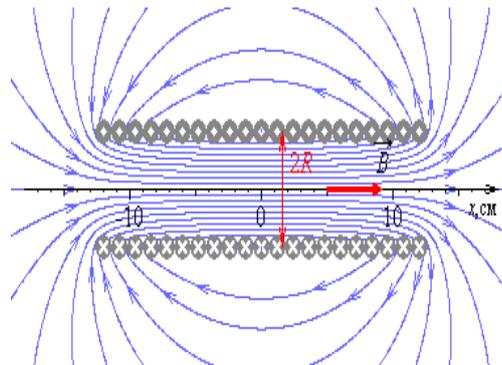


Рис.46. Модель магнитного поля соленоида

Сила Ампера, действующая на отрезок проводника длиной  $\Delta l$  с силой тока  $I$ , находящийся в магнитном поле  $B$ ,

$$F = IB\Delta l \sin \alpha, \quad (3.18)$$

может быть выражена через силы, действующие на отдельные носители заряда.

Пусть концентрация носителей свободного заряда в проводнике есть  $n$ , а  $q$  – заряд носителя. Тогда произведение  $qnvS$ , где  $v$  – модуль скорости упорядоченного движения носителей по проводнику, а  $S$  – площадь поперечного сечения проводника, равно току, текущему по проводнику:

$$I = qnvS. \quad (3.19)$$

Выражение для силы Ампера можно записать в виде:

$$F = qnS\Delta l v B \sin \alpha. \quad (3.20)$$

Так как полное число  $N$  носителей свободного заряда в проводнике длиной  $\Delta l$  и сечением  $S$  равно  $nS\Delta l$ , то сила, действующая на одну заряженную частицу, равна

$$F_L = qvB \sin \alpha. \quad (3.21)$$

Эту силу называют силой Лоренца. Угол  $\alpha$  в этом выражении равен углу между скоростью  $\vec{v}$  и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Направление силы Лоренца, действующей на положительно заряженную частицу, так же, как и направление силы Ампера, может быть найдено по правилу левой руки или по правилу буравчика. Взаимное расположение векторов  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{F}_L$  для положительно заряженной частицы показано на рис.47.

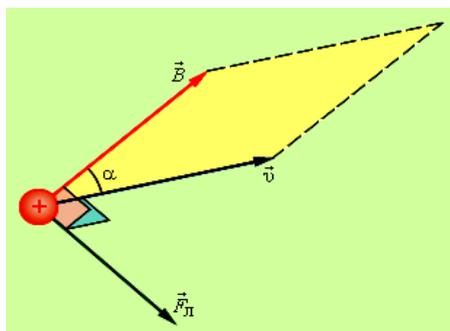


Рис.47. Взаимное расположение векторов  $\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{F}_L$   
Сила Лоренца направлена перпендикулярно векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$

При движении заряженной частицы в магнитном поле сила Лоренца работы не совершает. Поэтому модуль вектора скорости при движении частицы не изменяется.

Если заряженная частица движется в однородном магнитном поле под действием силы Лоренца, а ее скорость  $\vec{v}$  лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$  то частица будет двигаться по окружности радиуса

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (3.22)$$

Сила Лоренца в этом случае играет роль центростремительной силы (рис.48).

Период обращения частицы в однородном магнитном поле равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3.23)$$

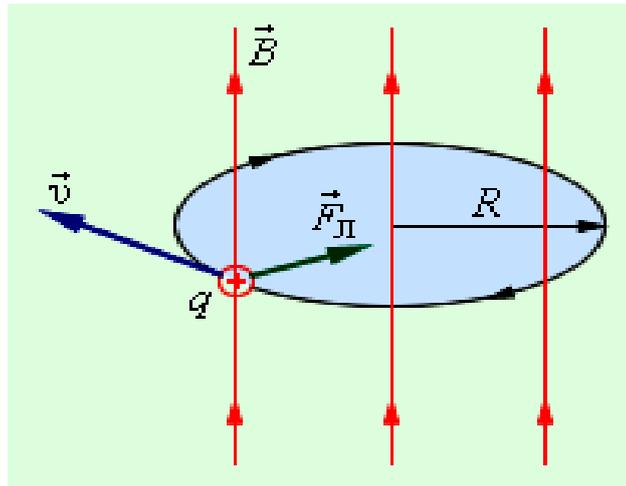


Рис.48. Круговое движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Это выражение показывает, что для заряженных частиц заданной массы  $m$  период обращения не зависит от скорости  $v$  и радиуса траектории  $R$ .

Угловая скорость движения заряженной частицы по круговой траектории называется циклотронной частотой.

$$\omega = \frac{v}{R} = v \frac{qB}{mv} = \frac{qB}{m} . \quad (3.24)$$

Циклотронная частота не зависит от скорости (следовательно, и от кинетической энергии) частицы. Это обстоятельство используется в циклотронах – ускорителях тяжелых частиц (протонов, ионов). Принципиальная схема циклотрона приведена на рис.49.

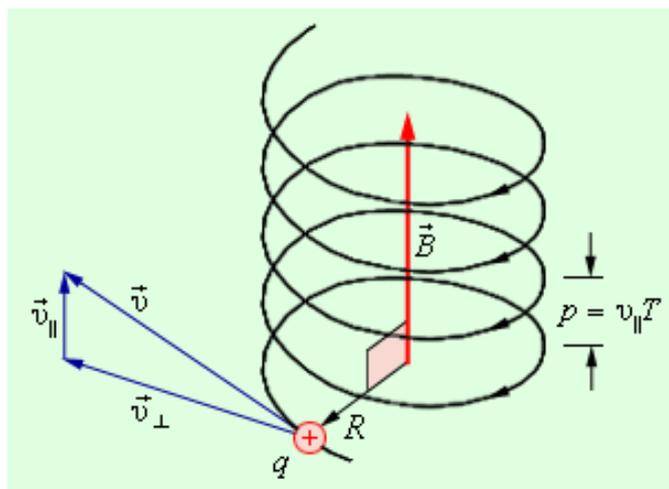


Рис.49. Движение заряженных частиц в вакуумной камере циклотрона

Между полюсами сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода в виде полых металлических

полуцилиндров (дуантов). К дуантам приложено переменное электрическое напряжение, частота которого равна циклотронной частоте. Заряженные частицы инжектируются в центре вакуумной камеры. Частицы ускоряются электрическим полем в промежутке между дуантами. Внутри дуантов частицы движутся под действием силы Лоренца по полуокружностям, радиус которых растет по мере увеличения энергии частиц. Каждый раз, когда частица пролетает через зазор между дуантами, она ускоряется электрическим полем. Таким образом, в циклотроне, как и во всех других ускорителях, заряженная частица ускоряется электрическим полем, а удерживается на траектории магнитным полем. Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергии порядка 20 МэВ.

Однородные магнитные поля используются во многих приборах и, в частности, в масс-спектрометрах – устройствах, с помощью которых можно измерять массы заряженных частиц – ионов или ядер различных атомов. Масс-спектрометры используются для разделения изотопов, то есть ядер атомов с одинаковым зарядом, но разными массами (например,  $^{20}\text{Ne}$  и  $^{22}\text{Ne}$ ). Простейший масс-спектрометр показан на рис.50. Ионы, вылетающие из источника S, проходят через несколько небольших отверстий, формирующих узкий пучок. Затем они попадают в селектор скоростей, в котором частицы движутся в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях. Электрическое поле создается между пластинами плоского конденсатора, магнитное поле – в зазоре между полюсами электромагнита. Начальная скорость  $\vec{v}$  заряженных частиц направлена перпендикулярно векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

На частицу, движущуюся в скрещенных электрическом и магнитном полях, действуют электрическая сила  $q\vec{E}$  и магнитная сила Лоренца. При условии  $E = vB$  эти силы точно уравниваются друг друга. Если это условие выполняется, частица будет двигаться равномерно и прямолинейно и, пролетев через конденсатор, пройдет через отверстие в экране. При заданных значениях электрического и магнитного полей селектор выделит частицы, движущиеся со скоростью  $v = E / B$ .

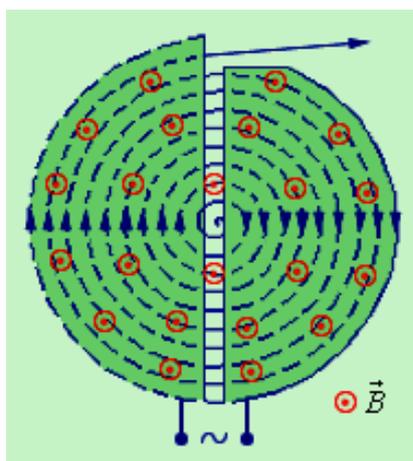


Рис.50. Селектор скоростей и масс-спектрометр.

Далее частицы с одним и тем же значением скорости попадают в камеру масс-спектрометра, в которой создано однородное магнитное поле  $\vec{B}$ . Частицы движутся в камере в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, под действием силы Лоренца. Траектории частиц представляют собой окружности радиусов  $R = mv / qB'$ . Измеряя радиусы траекторий при известных значениях  $v$  и  $B'$  можно определить отношение  $q / m$ . В случае изотопов ( $q_1 = q_2$ ) масс-спектрометр позволяет разделить частицы с разными массами.

Современные масс-спектрометры позволяют измерять массы заряженных частиц с точностью выше  $10^{-4}$ .

Если скорость частицы  $\vec{v}$  имеет составляющую  $v_{\parallel}$  вдоль направления магнитного поля, то такая частица будет двигаться в однородном магнитном поле по спирали. При этом радиус спирали  $R$  зависит от модуля перпендикулярной магнитному полю составляющей  $v^{\perp}$  вектора  $\vec{v}$  а шаг спирали  $p$  — от модуля продольной составляющей  $v_{\parallel}$  (рис.51).

Таким образом, траектория заряженной частицы как бы навивается на линии магнитной индукции. Это явление используется в технике для магнитной термоизоляции высокотемпературной плазмы, то есть полностью ионизированного газа при температуре порядка  $10^6$  К. Вещество в таком состоянии получают в установках типа «Токамак» при изучении управляемых термоядерных реакций. Плазма не должна соприкасаться со стенками камеры. Термоизоляция достигается путем создания магнитного поля специальной конфигурации.

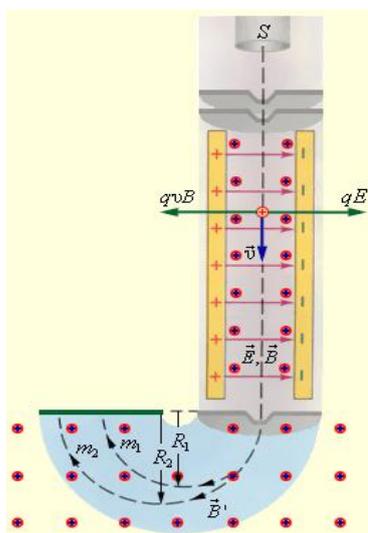


Рис.51. Движение заряженной частицы по спирали в однородном магнитном поле

В качестве примера на рис.52 изображена траектория движения заряженной частицы в магнитной «бутылке» (или ловушке).

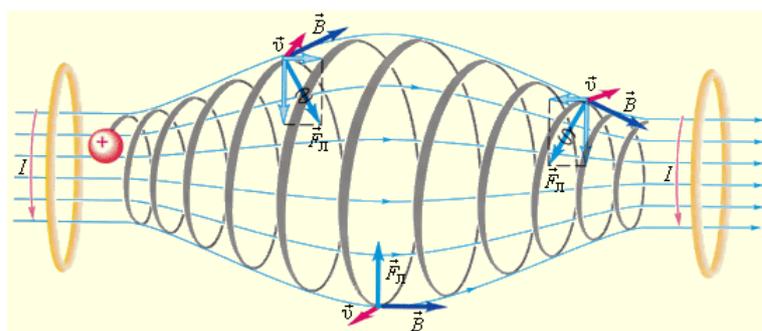


Рис.52. Магнитная «бутылка». Заряженные частицы не выходят за пределы «бутылки». Магнитное поле «бутылки» может быть создано с помощью двух круглых катушек с током

Аналогичное явление происходит в магнитном поле Земли, которое является защитой для всего живого от потоков заряженных частиц из космического пространства. Быстрые заряженные частицы из космоса (главным образом от Солнца) «захватываются» магнитным полем Земли и образуют так называемые радиационные пояса (рис.53), в которых частицы, как в магнитных ловушках, перемещаются туда и обратно по спиралеобразным траекториям между северным и южным магнитными полюсами за времена порядка долей секунды. Лишь в полярных областях некоторая часть частиц вторгается в верхние слои атмосферы, вызывая полярные сияния. Радиационные пояса Земли простираются от расстояний порядка 500 км до десятков земных радиусов. Следует вспомнить, что южный магнитный полюс Земли находится вблизи северного

географического полюса (на северо-западе Гренландии). Природа земного магнетизма до сих пор не изучена.

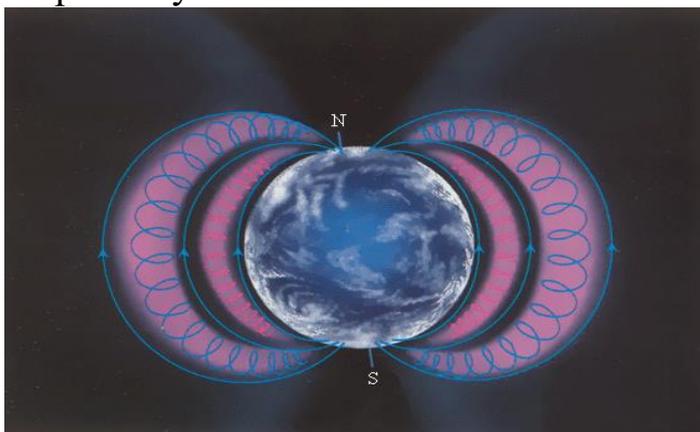


Рис.53. Радиационные пояса Земли

Быстрые заряженные частицы от Солнца (в основном электроны и протоны) попадают в магнитные ловушки радиационных поясов. Частицы могут покидать пояса в полярных областях и вторгаться в верхние слои атмосферы, вызывая полярные сияния.

Силовое воздействие магнитного поля сказывается при столкновении солнечного ветра (поток протонов и электронов Солнца) с магнитным полем Земли. Когда поток частиц, составляющих солнечный ветер приближается к Земле, то на расстоянии около 10 земных радиусов он встречает уже достаточно сильное магнитное поле и должен изменить направления своих потоков. На рисунке показано, к чему приводит столкновение солнечного ветра с земным магнитным полем. Траектории солнечного ветра искривляются и начинают обтекать поверхность, которую называют границей магнитосферы (Рис.54).

Земное магнитное поле тоже чувствует воздействие солнечного ветра, оно становится несимметричным, а в сторону удаления от Солнца вытягивается хвост из магнитных силовых линий, уходящих на бесконечность.

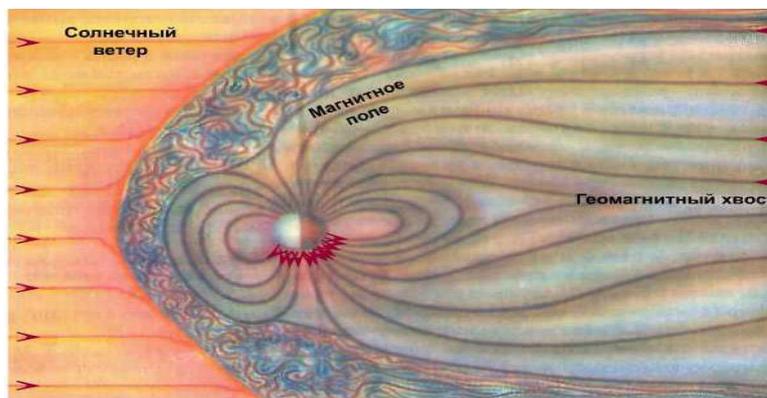


Рис.54. Силовое воздействие солнечного ветра на магнитное поле Земли

Между границей магнитосферы и регулярным магнитным полем Земли находится область, называемая магнитопаузой. В ней магнитное поле слабое, нерегулярно изменчивое и хаотически направленное.

Собственное макроскопическое поле вещества можно характеризовать вектором  $\vec{J}$ , который называется вектором намагниченности. Этот вектор определяет, насколько магнитная индукция в данной среде  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$  отличается от магнитной индукции в вакууме  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  при одной и той же напряжённости магнитного поля:

$$\vec{B} - \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}; \quad (3.25)$$

где

$$\vec{J} = K_M \vec{H},$$

$K_M$ - магнитная восприимчивость.

Тогда:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (1 + K_M) \vec{H} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (3.26)$$

Следовательно,  $\mu = 1 + K_M$ .

В системе СИ  $[\vec{H}] = [A/m]$   $[\vec{J}] = [A/m]$

### § 3.3. Граничные условия в магнитном поле

Для магнитного поля  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$  оно выводится путём составления линейного интеграла  $\oint H dl$  по плоскому контуру  $mnpq$  (рис.55.). Стороны  $pn$  и  $mq$  ничтожно малы по сравнению со сторонами  $mn$  и  $qp$ .

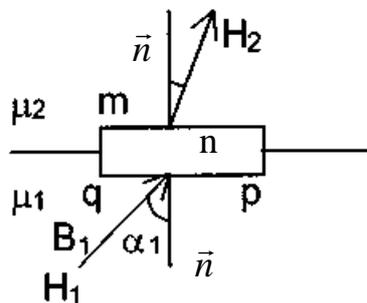


Рис.55. К выводу закона преломления в магнитном поле  
Длину стороны  $mn$  и  $qp$  обозначим  $dl$ . Тогда:

$$\begin{aligned} H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl &= 0; \\ H_1 \sin \alpha_1 &= H_{1\tau}; \quad H_2 \sin \alpha_2 = H_{2\tau}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Следовательно,  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ . Это условие не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый поверхностный ток.

В этом случае:

$$\begin{aligned} H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl &= \eta dl; \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} &= \eta. \end{aligned} \quad (3.28)$$

На границе раздела двух магнитных сред с разными магнитными проницаемостями тангенциальные составляющие векторов напряженностей магнитного поля претерпевают обрыв равный поверхностной плотности тока.

Для магнитного поля:  $B_{1n} = B_{2n}$  — это вытекает из принципа непрерывности магнитного потока

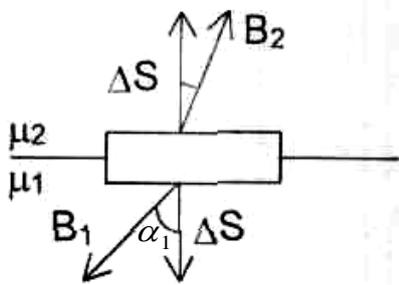


Рис.56. К выводу граничных условий в магнитном поле

Выделим на границе (рис.56.) небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора  $\vec{B}$  через нижнюю грань  $B_{1n} \Delta S$  и верхнюю грань.

$$\begin{aligned} B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S &= 0, \\ B_{1n} &= B_{2n}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

На границе раздела двух магнитных сред с разными магнитными проницаемостями нормальные составляющие вектора магнитной индукции равны.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (3.30)$$

Формула (3.30) показывает закон преломления магнитных силовых линий

### § 3.4. Энергия магнитного поля

Магнитный поток сквозь элементарную площадку  $dS$  равен:

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}. \quad (3.31)$$

Весь поток:

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (3.32)$$

Построим в контуре, ограничивающей площадку  $d\vec{S}$ , силовые трубки.

Так как в магнитном поле линии вектора  $\vec{B}$  всегда замкнуты, то силовые

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (3.33)$$

трубки получаются замкнутыми. Они заполняют весь объём  $V$ , занятый магнитным полем. Если обозначить ось трубки  $L$ , то:

Энергия:

$$\begin{aligned} dW_M &= \frac{Id\Phi}{2} = \frac{1}{2} \vec{B} d\vec{S} \oint_L \vec{H} d\vec{l} \quad \text{или} \\ W_M &= \int dW_M = \int \int_S \int_L \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} d\vec{l} d\vec{S} = \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV, \quad \text{то} \quad (3.34) \\ W_M &= \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV = \int_V \frac{\mu\mu_0 \vec{H}}{2} dV = \int_V \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0} dV. \end{aligned}$$

### § 3.5. Методы расчетов магнитных полей

Расчет магнитных полей чаще всего сводится к определению вектора  $\vec{H}$ . Величины токов и положение проводников, по которым эти токи протекают, должны быть заданы. Если рассматривается поле в неферромагнитной среде  $\mu\mu_0 \approx 4\pi 10^{-7}$  Гн/м.

Если непосредственное определение  $\vec{H}$  связано с большими математическими трудностями, удобно вводить векторный потенциал. Определив векторный потенциал, можно найти напряжённость поля. При расчёте магнитных полей могут быть применены следующие методы: применение закона полного тока в интегральной форме; применение первого уравнения Максвелла; применение уравнений Пуассона и Лапласа для векторного потенциала; метод зеркальных изображений; метод конформных преобразований, графический метод расчёта.

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Дайте определение магнитного поля постоянного тока.

2. Какими интегральными величинами характеризуется магнитное поле?
3. Каков физический смысл векторов  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{H}$ ?
4. Какие поля называют вихревыми?
5. Запишите принцип непрерывности магнитного потока в интегральной форме.
6. Почему понятие  $\varphi_m$  не применимо к областям, занятым током?
7. Почему вектор-потенциал  $\vec{A}$  является более общей характеристикой поля, чем  $\varphi_m$ ?
8. Каков закон полного тока в дифференциальной и интегральной форме?
9. Какая связь существует между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  и для каких сред это соотношение справедливо?
10. Каков физический смысл закона непрерывности линий магнитной индукции в дифференциальной форме?
11. Каковы граничные условия в магнитном поле?
12. Изложите суть преобразования энергии магнитного поля в механическую энергию?
13. Какова энергия магнитного поля?
14. Чему равна энергия магнитного поля линейного контура с током?
15. Чему равна энергия магнитного поля в случае нескольких контуров с током?
16. Чему равна энергия магнитного поля, выраженная через векторный потенциал?
17. Какого типа соответствия могут быть в картинках магнитного и электростатического полей?
18. В каких случаях используют графические методы построения картины поля?
19. Каковы граничные условия для векторного потенциала?
20. Какое преимущество имеет выражение магнитного потока через векторный потенциал над выражением магнитного потока через магнитную индукцию?

## 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 4.1. Полный электрический ток

Электрический ток в проводящей среде представляет направленное движение электрических зарядов под действием сил поля. Такой ток называется током проводимости.

Согласно закону Ома:

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}. \quad (4.1)$$

Если заряженное тело или частицы движутся в непроводящей среде или в вакууме со скоростью  $\mathfrak{V}$ , то они образуют ток переноса:

$$\vec{\delta}_{пер} = \rho \vec{V}. \quad (4.2)$$

В молекулах диэлектрика, который вносится во внешнее электрическое поле, под воздействием сил поля связанные заряды будут смещаться и образуют ток поляризации:

$$\vec{\delta}_{поляр} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

где  $\vec{P}$  - вектор поляризованности.

Для сред, в которых  $P = \epsilon_0 K_3 E$ :

$$\vec{\delta}_{поляр} = \epsilon_0 K_3 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Все три перечисленные виды тока представляют собой перемещение электрических зарядов. Каждый из этих токов сопровождается магнитным полем.

Максвелл предложил назвать электрическим током изменение во времени электрического тока в вакууме

$$\vec{\delta}_{осм} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.5)$$

Отличие тока смещения в вакууме от других видов токов заключается в том, что он не вызывает тепловых потерь.

Полным электрическим током называется совокупность всех явлений, при которых образуется магнитное поле:

$$\vec{\delta}_{полн} = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{пер} + \vec{\delta}_{поляр} + \vec{\delta}_{осм}. \quad (4.6)$$

Сумму тока поляризации и тока смещения в вакууме называют

током смещения в диэлектрике:

$$\vec{\delta}_{см} = \vec{\delta}_{поля} + \vec{\delta}_{осм} = \varepsilon(1 + K_{\varepsilon}) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Плотность тока в этом случае:

$$\vec{\delta}_{полн} = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{см} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Ток переноса мы рассматривать не будем. В хорошо проводящей среде  $\vec{\delta} \gg \vec{\delta}_{см}$ , в диэлектрике с малыми потерями  $\vec{\delta}_{см} \gg \vec{\delta}$ . В проводящей среде токи проводимости и токи смещения соизмеримы.

## § 4.2. Первое и второе уравнение Максвелла

Задача расчета взаимодействия движущихся зарядов сводится к расчету электромагнитного поля. В электродинамике электромагнитное поле описывается уравнениями Дж. Максвелла. Для того чтобы познакомиться ними, необходимо определить понятия потока электрического и магнитного полей. Проще всего это сделать, используя аналогию с потоком жидкости сквозь площадку  $S$ , показанную на рис.4.1 За 1 сек. Площадки  $S$  достигнут частицы жидкости, расположенные от нее не дальше чем на расстоянии  $l = vt$ ; объем жидкости, который за это время протечет через площадку, равен:

$$V = vtS \cos \alpha. \quad (4.9)$$

Если рассматривать не жидкость, а поток заряженных частиц (электрический ток), то поток заряда, проходящий через площадку за 1 сек. – это и есть сила тока, равная  $I = \rho v S \cos \alpha$ , где  $\rho$  – плотность заряда (в единице объема в потоке).

Теперь по аналогии можно чисто формально определить поток электрического поля:

$$\Phi_E = ES \cos \alpha, \quad (4.10)$$

и магнитного поля:

$$\Phi_B = BS \cos \alpha. \quad (4.11)$$

Если магнитное и электрическое поле меняется от точки к точке на площадке, то в выражениях для потоков, как и в случае с жидкостью, нужно подставить среднее значение  $\bar{E}$  и  $\bar{B}$  на площадке.

Запишем первое уравнение Максвелла

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} (q_1 + q_2 \dots), \quad (4.12)$$

где  $\varepsilon_0$  - константа, называемая электрической постоянной.

Как бы мы не меняли расположение зарядов внутри выбранной нами поверхности, окружающей некоторый объем, поток электрического через эту поверхность остается одним и тем же. В электростатике это уравнение называется теоремой Гаусса, оно эквивалентно закону Кулона. Но в отличие от закона Кулона теорема Гаусса справедлива и в общем случае, когда заряды движутся.

Второе уравнение Максвелла описывает явление электромагнитной индукции, открытое М.Фарадеем.

Если поток магнитного поля, проходящий сквозь площадку, ограниченную замкнутым контуром (например гибкой проволочкой) изменяется во времени, то в этом контуре возникает Э.Д.С. индукции:

$$e = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (4.13)$$

Выражение для потока магнитного поля (4.11) включает три сомножителя:  $B S \cos \alpha$  и совершенно не важно, по какой причине поток через контур меняется со временем: изменяется ли магнитное поле, площадь контура или его ориентация, т.е.  $\alpha$  - в любом случае результат будет одинаковым. Не требуется, чтобы контур был проводящим; это может быть любой воображаемый контур. Другое дело, если на место этого контура поместить проводник – по проводнику под действием Э.Д.С. потечет электрический ток.

Э.Д.С. индукции – это работа, которую совершает электрическое поле при перемещении единичного положительного заряда по замкнутому контуру, т.е. произведение средней силы, действующей на заряд вдоль контура, на длину контура  $l$ . Но сила, которая действует на единичный положительный заряд, равна касательной к контуру составляющей вектора напряженности. Если обозначить эту составляющую  $E_\tau$  и заменить  $e$  на  $E_\tau l$ , то получится второе уравнение Максвелла:

$$E_\tau l = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (4.14)$$

Переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты и работа которого на замкнутом контуре уже не равна нулю. В общем случае полное электрическое поле складывается из поля, создаваемого электрическими зарядами, и вихревого электрического поля, возникающего от переменных магнитных полей. Направление ЭДС индукции определяется правилом правой руки. Если правую руку расположить так чтобы векторы магнитной индукции входили в ладонь, а большой отогнутый на  $90^\circ$  палец указывал направление движения проводника с током, то 4 вытянутых пальца укажут направление ЭДС индукции (рис. 57).

В замкнутом проводнике при изменении магнитного потока возникает индукционный ток за счёт ЭДС индукции. Направление индукционного тока соответствует правилу Ленца.

Индукционный ток имеет такое направление, что своим действием противодействует изменению основного потока.



Рис.57. К правилу правой руки.

#### **§4.3. Использование вихревого электрического поля в токамаке**

Стремясь осуществить управляемый термоядерный синтез, ученые разных стран изобретают и исследуют различные устройства для создания, нагрева и термоизоляции плазмы. Наиболее близко к условиям, требуемым для управляемого синтеза, удалось подойти с помощью установок, изобретенных физиками и названных «Токамак» - это название – сокращение русских слов: Торроидальная камера с магнитными катушками (рис.58). Токамак – это торроидальная вакуумная камера, на которую надеты катушки, создающие сильное (несколько тесла) торроидальное магнитное поле. Камера с катушками ставится на железное ярмо и служит как бы вторичным витком трансформатора. При изменении тока в первичной обмотке, намотанной на ярмо, в камере возникает вихревое электрическое поле, происходит пробой и ионизация рабочего газа, заполняющего камеру, и возникает торроидальный

плазменный шнур с продольным электрическим током. Этот ток нагревает плазму, а его магнитное поле вместе с полем катушек теплоизолирует плазму от стенок. С помощью вихревого электрического поля удалось нагреть плазму до 70 млн. градусов (Рис.65).

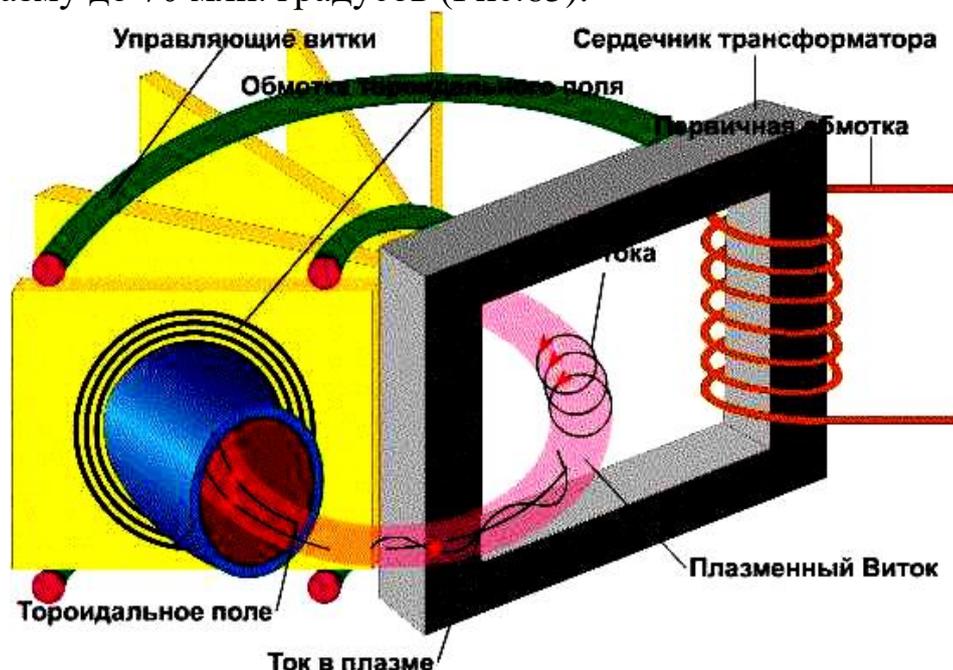


Рис. 58. Возникновение вихревого электрического поля в токомаке

#### § 4.4. Третье и четвёртое уравнение Максвелла

Третье уравнение Максвелла отражает тот факт, что в природе нет магнитных зарядов. Как известно из электростатики, силовые линии электрического поля начинаются на положительных и кончаются на отрицательных зарядах. Если мы проведём силовые линии магнитного поля, то они всегда будут замкнутыми, либо уйдут в бесконечность. Следовательно, сколько силовых линий входит внутрь замкнутой ограничивающей некоторый объём, поверхности, столько и выходит из неё, и поэтому полный поток магнитного поля через замкнутую поверхность всегда равен нулю.

Поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

$$\Phi_B = 0. \tag{4.15}$$

Магнитное поле создают движущиеся заряды, т.е. электрический ток, и это уравнение описывается четвёртым уравнением Максвелла. Запишем его так, как оно выглядит в магнитном поле постоянного тока. Оно

записывается произвольно замкнутого контура , только вместо касательной к контуру составляющей напряжённости электрического поля в правую часть будет входить касательная составляющая вектора индукции  $B\tau$ :

$$B\tau \ell = \mu_0 J, \quad (4.16)$$

где  $B\tau$  среднее значение касательной к контуру составляющей вектора  $B$  ;  $\ell$  - длина контура ;  $\mu_0$  – электрический ток сквозь поверхность ограниченную контуром .  $\mu_0$  - магнитная постоянная , равная  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

Гигантские волны в океане – цунами, обрушиваясь на берег приносят разрушения.

В отличие от обычных волн, где горбы и впадины повторяются в пространстве, следуя друг за другом, цунами может иметь только один горб, который перемещается на огромные расстояния практически без затухания. Этот пример дает представление о уединенной волне – солитоне. Уединенные волны могут распространяться в среде не меняя своей формы.

Вихревое магнитное поле обладает свойствами солитонов. Вихревое магнитное поле образуется при взаимодействии солнечного ветра с постоянным магнитным полем Земли.

Поток протонов и электронов вытекающих из солнечной короны в космос называется солнечным ветром. В солнечном ветре магнитное поле слабое. Поэтому заряженные частицы движутся по прямым, а магнитное поле при это не постоянно, оно перемещается вместе с потоком частиц, как бы уносится этим потоком на периферию Солнечной системы, образуя вихревое магнитное поле (Рис.59).

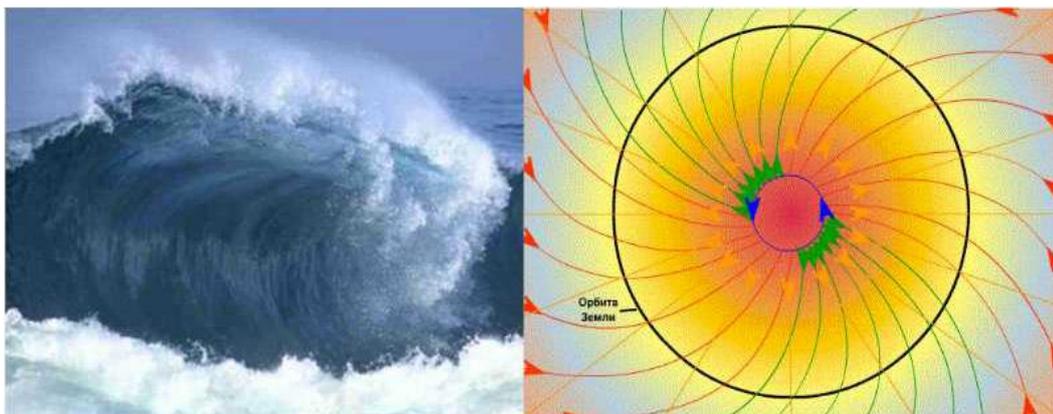


Рис.59. Образование вихревого магнитного поля

#### §4.5. Реальность существования электромагнитного поля

Описание взаимодействия тел с помощью представления о мгновенном распространении сил носит название теории дальнего действия. В этом случае мы должны считать, что энергия системы зарядов или токов может быть приписана полю лишь формально.

Представление о конечной скорости распространения взаимодействия предполагает, что заряд “чувствует” изменение поля, только если оно происходит в точках пространства, непосредственно окружающих заряд. Такое взаимодействие называется ближним действием.

Поле может существовать без источников. Оно производит вполне ощутимые физические действия, обладает энергией. Из представления о ближнем действии следует также, что поле обладает импульсом.

Итак, поле – такая же физическая реальность, как и тела. Оно реально существует вне нас и независимо от нас.

Поле – это форма существования материи. Поле распространяется в пространстве со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Поле занимает все пространство. Поэтому, для того чтобы задать его начальное состояние, надо задать значение поля в каждой точке пространства в некоторый – начальный момент времени.

Уравнения движения для полей должны нам дать возможность определить поле во всем пространстве во все последующие моменты времени.

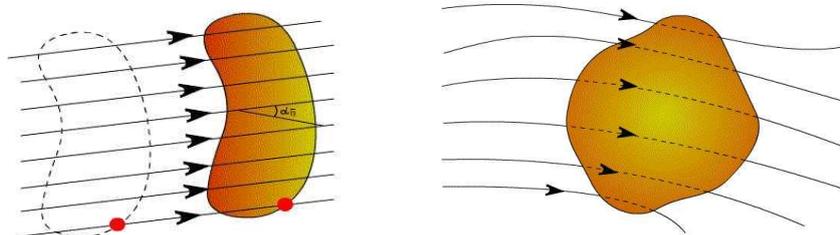
Написать уравнения движения для поля и главное, научиться их решать и понимать – задача очень трудная и с точки зрения математики, и с точки зрения физики.

Но хотя бы качественно и далеко не всех деталей сделать мы это должны.

#### § 4.6. Полная система уравнений электромагнитного поля

В электродинамике электромагнитное поле описывается 4 уравнениями Максвелла. Для того чтобы познакомиться с ними необходимо определить понятия потока электрического и магнитного полей.

Проще всего это сделать, используя аналогию с потоком жидкости сквозь площадку, показанную на рис.60. Поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность всегда равен 0.



## Рис.60. К выводу уравнений Максвелла

Прежде чем сформулировать уравнение движения полей, напомним важнейшие сведения об электрическом и магнитном полях. И, кроме того выберем из них те, которые верны как в случае постоянных, так и в случае переменных полей.

Перечислим основные законы и положения:

1. В пространстве вокруг заряженного тела существует электрическое поле. Это поле действует на другие заряженные тела.

2. Если область пространства, в которой находятся заряды ограничить поверхностью, то число силовых линий, проходящих через эту поверхность (поток напряжённости поля  $E$ , который мы обозначим  $\Phi_E$ ), будет пропорционально величине заряда, заключенного в этой области

$$\Phi_E = \sum E_n \Delta S_i = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} . \quad (4.17)$$

Это есть уже хорошо известная нам теорема Гаусса для статического поля.

Теорема Гаусса выполняется и для индуцированного поля. С одной стороны:

$$\sum_i q_i = 0 . \quad (4.18)$$

с другой стороны, его силовые линии замкнуты, и сколько их входит в какой-то объём, столько должно и выходить, т.е.

$$\sum_{\Delta S_i} E_n \Delta S_i = 0 . \quad (4.19)$$

Таким образом, теорема Гаусса выполняется для всех известных нам электрических полей.

1. Движущийся заряд, кроме электрического поля, создаёт и магнитное, это поле действует в свою очередь только на движущиеся заряды.

2. Силовые линии магнитного поля замкнуты или уходят на бесконечность, Поэтому поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\Phi_{si} = \sum B_n \Delta S_i = 0 . \quad (4.20)$$

3. Если движение заряда – ток – вызывает магнитное поле, то при из

менении потока магнитного поля через какой-либо контур, возникает электрическое поле .

Для ЭДС этого поля мы нашли выражение:

$$\sum E_{\Delta l} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{\Delta \ell \sum B_n \Delta S_i}{\Delta t} , \quad (4.21)$$

$\sum B_n \Delta S_i = 0$  , ведь поверхность , ограниченная контуром , не замкнутая).

В случае статического поля это соотношение соблюдается , так как для такого поля работа по перенесению заряда по замкнутой траектории равна нулю , т.е.

$$A = q \sum E d\ell = 0 . \quad (4.22)$$

В свою очередь , так как заряды не движутся , то и не создают магнитного поля :  $B = 0$ .

Для написания уравнения движения полей надо связать изменения потока с изменением магнитного поля

Итак ,

$$\sum E d\ell = - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_{ni}}{\Delta t} . \quad (4.23)$$

Изменяющееся магнитное поле рождает вихревое электрическое поле.

3. Магнитодвижущая сила для магнитного поля постоянных токов связана с током , пронизывающая контур соотношением:

$$\sum B \Delta \ell = \frac{I}{c^2} \cdot \frac{J}{\epsilon_0} , \quad (4.24)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с - скорость распространения сигнала в электрическом поле.

Теперь напишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \sum E_n \Delta S_i &= \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} ; & 3. \sum E \Delta \ell &= - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_{ni}}{\Delta t} ; \\ 2. \sum B_n \Delta S_i &= 0 ; & 4. \sum B \Delta \ell &= \frac{J}{c^2 \epsilon_0} . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Английский ученый Максвелл исходя из симметрии между электрическим и магнитным полем, предложил дополнить четвёртое уравнение. Оно стало выглядеть следующим образом.

$$\sum B \Delta \ell = \frac{1}{c^2} \cdot \left( \frac{J}{\epsilon_0} + \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t} \right), \quad (4.26)$$

где  $\frac{\Delta \Psi_E}{\Delta t}$  - изменение потока электрического поля, пронизывающий контур.

Если S - поверхность контура, то

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\Delta [\sum E_n i \Delta S_i]}{\Delta t} \quad \frac{1}{c^2} = \frac{\Delta E_n}{\Delta t} \quad \sum \Delta S_i. \quad (4.27)$$

Где суммирование производится по всем элементам поверхности S.

Величина  $\epsilon_0 \Delta E / \Delta t$  имеет размерность тока и эквивалентна обычному току в том смысле, что создаёт магнитное поле такое же, какое бы создавал реальный ток той же величины. Поэтому Максвелл назвал эту величину током смещения.

Окончательно система уравнений, записанная впервые Максвеллом, выглядит так:

$$\sum_{\text{позамкнутой поверхности}} E_n \Delta S_i = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}; \quad \sum_{\text{позамкнутому контуру}} E \Delta \ell = - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_{n_i}}{\Delta t};$$

$$\sum_{\text{позамкнутой поверхности}} B_n \Delta S_i = 0; \quad (4.28)$$

$$\sum_{\text{позамкнутому кругу}} B \Delta \ell = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} + \frac{1}{c^2} = \sum_{\text{поверхности натянутой на контур}} \Delta S_i \frac{\Delta E_{n_i}}{\Delta t}.$$

Если в некоторой области пространства заряды и токи равны нулю, то уравнения для E становятся полностью аналогичным уравнениям для B:

$$1. \sum E_n \Delta S_i = 0; \quad 3. \sum E d \ell = - \sum \Delta S_i \frac{\Delta B_n}{\Delta t};$$

$$\Delta E_n \quad (4.29)$$

$$2. \Sigma B_n \Delta S_i = 0;$$

$$4. \Sigma B \Delta \ell = \Sigma \Delta S_i \frac{I}{\Delta t}.$$

### § 4.7. Теорема Умова – Пойтинга

Теорема Умова – Пойтинга выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Она связывает изменение энергии в каком-либо объёме с потоком её через поверхность, ограничивающую этот объём.

Энергия магнитного поля определяется:

$$W_M = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 V = \frac{BHV}{2} = \frac{B^2 H}{2\mu}. \quad (4.30)$$

Энергия, запасаемая в единице объёма поля, называемая удельной энергией магнитного поля будет

$$W_M = \frac{W_M}{V} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}. \quad (4.31)$$

Энергия электромагнитного поля:

$$W_{\mathcal{E}} = \frac{D^2}{2} V = \epsilon_0 \epsilon \frac{E^2}{2} V = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (4.32)$$

Энергия в единице объёма поля, называется удельной энергией электрического поля:

$$W_{\mathcal{E}} = \frac{ED}{2} = \epsilon_0 \epsilon \frac{E^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (4.33)$$

Энергия электромагнитного поля:

$$W_{\mathcal{EM}} = W_{\mathcal{E}} + W_M = \frac{1}{2} \frac{ED}{2} V + \frac{1}{2} BHV. \quad (4.34)$$

$$W_{\mathcal{EM}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 V + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 V. \quad (4.35)$$

Поверхностная плотность потока энергии через поверхность единичной площади называется вектором Пойтинга

$$\Pi = [EH].$$

В системе СИ вектор Пойтинга измеряется

$$[\Pi] = [Вт/м^2].$$

Поток вектора Пойтинга, входящий в замкнутую поверхность  $S$ , равен сумме двух мощностей:

$$- \sum_{\Delta S_i} \Pi \Delta S_i = P_{мен} + \Delta W_{эм}/\Delta t. \quad (4.36)$$

Положительная нормаль к замкнутой поверхности и вектор  $\Delta S$  направлены в наружную сторону, поэтому для того чтобы поток вектора  $\Pi$ , входящий через поверхность  $S$  был положителен, вектор  $\Pi$  должен быть направлен внутрь объёма  $V$  (угол между  $\Pi$  и  $\Delta S$  должен быть тупым).

Первое слагаемое в уравнении Умова – Пойтинга (4.36) представляет собой мощность тепловых потерь, внутри объёма ограниченного поверхностью  $S$

$$P_{мен} = \sum V_i \gamma E^2 \Delta V. \quad (4.37)$$

Второе слагаемое соответствует изменению энергии электромагнитного поля в том же объёме.

$$P_{эм} = \Delta W_{эм}/\Delta t. \quad (4.38)$$

Мощность тепловых потерь всегда положительна. Мощность  $P_{эм}$  может быть и положительной и отрицательной. Если она положительна, то электромагнитная энергия внутри объёма увеличивается.

Если в объёме имеются источники, то теорему можно записать в виде:

$$P_{умс} = \sum_{\Delta S_i} \Pi \Delta S_i + \sum \gamma E^2 \Delta V + \Delta W_{эм}/\Delta t. \quad (4.39)$$

Мощность источников в объёме равна сумме мощностей: тепловых потерь, мощности изменения энергии электромагнитного поля в объёме к

мощности энергии, выходящий через граничную поверхность, рассмотренного объёма.

#### §4.8. Запаздывающие электродинамические потенциалы

Для неизменного во времени поля

$$\Delta\varphi = K \frac{\rho\Delta V}{\varepsilon R}, \quad (4.40)$$

в тоже время решение волновых уравнений для потенциала  $\varphi$  в пространстве, не занятом зарядами:

$$\varphi = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v), \quad (4.41)$$

$f_1(t - z/v)$  представляет собой падающую волну, распространяющуюся в направлении оси  $Z$ .

В сферической системе координат волновому уравнению удовлетворяет функция:

$$f(t - R/V) = K \frac{P(t - R/V) \Delta V}{\varepsilon}. \quad (4.42)$$

Результирующее значение потенциала получим, если просуммируем составляющие потенциала от зарядов, распределённых в объёме  $V$ :

$$\varphi = K \sum_{\Delta V_i} \frac{\rho(t - R/V) \Delta V_i}{R}. \quad (4.43)$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что электромагнитная волна распространяется со скоростью  $V$  расстояние  $R$  она пройдёт за время  $R/V$ . Поэтому значение составляющей потенциала  $\varphi$  в переменном электромагнитном поле в некоторой точке, удалённой от заряда на расстояние  $R$  в момент времени  $t$ , определяется значением заряда в момент времени  $(t - R/V)$ . Поэтому потенциал электромагнитного поля называют запаздывающим потенциалом.

Итак потенциал запаздывающий решение уравнений для потенциалов переменного электромагнитного поля, учитывающие конечную скорость

распространения электромагнитных взаимодействий. Изменение плотности зарядов и токов сказываются на изменении потенциалов через промежутки времени, необходимый для распространения поля от зарядов и токов до точки пространства, в которой определяются потенциалы.

Так как скорость распространения электромагнитной волны в диэлектрике очень велика ( $V=3 \cdot 10^8$  м/с), то запаздывание проявляется заметно только при значительных  $R$ . При малых  $R$  запаздывание настолько незначительно, что им практически можно пренебречь. Наиболее часто понятием запаздывающих потенциалов пользуются при изучении вопросов, связанных с излучением электромагнитной энергии.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Дать определения трех видов тока - проводимости, переноса и смещения.

2. Какой из трех видов тока - проводимости, переноса и смещения - может существовать в любой среде, а также в пространстве, свободном от вещества?

3. Расскажите о соотношении токов проводимости и смещения.

4. Какие величины определяют соотношение между токами проводимости и смещения?

5. Запишите I и II уравнения Максвелла и укажите их физический смысл.

6. Какое отличие тока смещения в вакууме от других видов тока?

7. Дать определение полного тока.

8. Какие виды токов присутствуют в хорошо проводящей среде; в диэлектрике с малыми потерями; в полупроводящей среде?

9. Чему равна скорость убывания плотности объемных зарядов?

10. Дайте определение вихревого магнитного поля?

11. Дайте определение переменного электромагнитного поля и запишите совокупность уравнений Максвелла.

12. Покажите, что из первого уравнения Максвелла следует принцип непрерывности полного тока, а из второго - принцип непрерывности магнитной индукции.

13. Чем объяснить, что во втором уравнении Максвелла, в отличие от первого, поставлен знак минус?

14. Какие уравнения в интегральной форме соответствуют 1-му и 2-му уравнениям Максвелла?

15. Прокомментируйте теорему Умова-Пойтинга для мгновенных значений величин.

16. Можно ли утверждать, что при постоянном токе электромагнитная энергия передается по проводам?

17. Поясните смысл преобразования, осуществляемого с помощью теоремы Остроградского - Гаусса.

18. Чем объяснить, что показания вольтметра в переменном электромагнитном поле зависит от того, как расположены провода от вольтметра до объекта измерения?

19. Чем возбуждается вихревое магнитное поле?

20. Чему равен запас энергии электромагнитного поля?

21. Как определяется поток вектора Пойтинга?

22. Запишите уравнения Максвелла в комплексной форме.

23. Поясните, в силу каких причин  $\epsilon$ ,  $\gamma$  и  $\mu$  могут оказаться комплексными числами?

24. Какие потенциалы электромагнитного поля являются запаздывающими?

25. Как записываются уравнения Даламбера?

26. Как можно записать решения уравнений Даламбера?

27. Как записать волновые уравнения?

28. Какое удобство комплексной формы записи основных уравнений поля?

29. Доказать теорему единственности решения уравнений Максвелла?

30. Как происходят изменения свободных объемных зарядов и токов, чтобы электромагнитная волна прошла определенное расстояние?

31. Какие условия необходимо соблюдать при решении волновых уравнений?

32. Чем отличаются волновые уравнения от уравнений Даламбера?

## ГЛАВА 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### § 5.1. Излучение электромагнитных волн

Всякая электрическая цепь, по которой протекает переменный ток, может излучать электромагнитные волны. Эти волны, распространяясь в диэлектрике, окружающем источник, несут с собой определённую энергию. Для промышленной частоты  $f=50$  Гц излучаемая мощность настолько незначительная, что ею пренебрегают. Мощность излучения необходимо учитывать, начиная с  $f=10^5$  Гц. Рассмотрим цепь синусоидального тока (рис.61 а).

Пусть ток в контуре 2 равен  $i$ , а напряжение на ёмкость  $U_c$

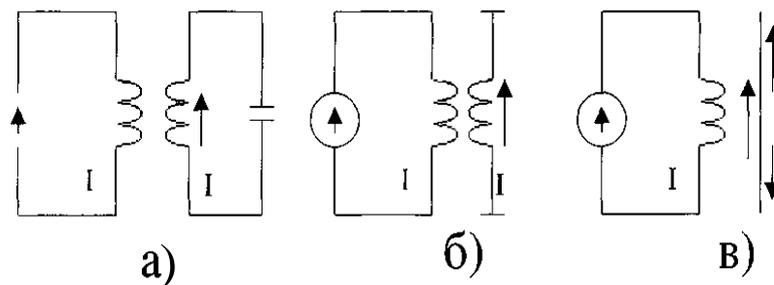


Рис.61. Переход от закрытого колебательного контура к открытому

Энергия магнитного поля  $W_M = \frac{L \cdot i^2}{2}$ , электрического поля  $W_E = \frac{CU^2}{2}$ . Часть энергии вместе с электромагнитной волной отрывается и распространяется со скоростью:

$$g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (5.1)$$

Контур 2 можно изменить (рис.61 б, в). Следовательно, прямолинейный провод длиной  $l$  может излучать электромагнитные волны. Такой провод назовем вибратором (антенной). Определим поле элементарного вибратора (рис.62).

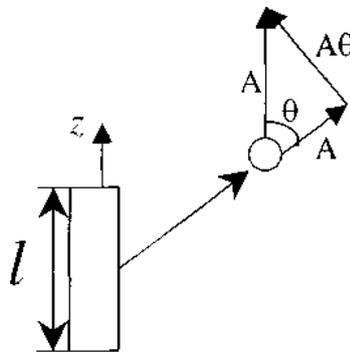


Рис.62. Элементарный вибратор

Начало координат поместим в середину провода. Ось  $z$  направим вдоль провода. Будем считать, что объёмных зарядов нет.

В сферической системе координат:

$$H_{\theta m} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0 R} \cdot \frac{\partial(H_{\psi m} R)}{\partial R} = \frac{I_m l \frac{\omega^3}{g^3} \sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \omega} e^{-j(\frac{\omega R}{g} + \frac{\pi}{2})} \left\{ -\frac{1}{\frac{\omega R}{g}} + \frac{j}{\frac{\omega^2 R^2}{g^2}} + \frac{1}{\frac{\omega^3 R^3}{g^3}} \right\} \quad (5.2)$$

$$H_{\psi m} = \frac{1}{j\omega\varepsilon\varepsilon_0 R \sin\theta} \cdot \frac{\partial(H_{\psi m} \sin\theta)}{\partial\theta} = \frac{2I_m l \frac{\omega^3}{g^3} \cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \omega} e^{-j(\frac{\omega R}{g} + \frac{\pi}{2})} \left\{ \frac{j}{\frac{\omega^2 R^2}{g^2}} + \frac{1}{\frac{\omega^3 R^3}{g^3}} \right\} \quad (5.3)$$

Формулы упрощаются в области  $R \ll \lambda$  (ближняя зона) и  $R \gg \lambda$  (дальняя или волновая зона).

Поле вибратора в ближней зоне:

$$\frac{1}{\frac{\omega R}{g}} \ll \frac{2}{\frac{\omega^2 R^2}{g^2}} \ll \frac{1}{\frac{\omega^3 R^3}{g^3}}. \quad (5.4)$$

Поэтому, пренебрегая малыми величинами и учитывая, что:

$$e^{-j\omega \frac{R}{g}} \approx 1; \quad (5.5)$$

Можно записать:

$$\begin{aligned} H_{\psi m} = H &= \frac{I_m l \sin\theta}{4\pi R^2}; \\ E_{Rm} &= \frac{2I_m l \cos\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \omega R^3} e^{-j\frac{\pi}{2}}; \\ E_{\theta m} &= \frac{I_m l \sin\theta}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \omega R^3} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Напряжённость магнитного поля элементарного вибратора в ближней зоне определяется также как в случае стационарного тока (закон Био-Савара). Фаза совпадает с фазой тока. Магнитное поле токов смещений и запаздывания не учитывается ввиду малости

$$\frac{\omega R}{g} = \frac{2\pi R}{\lambda}. \quad (5.7)$$

Мгновенные значения проекций векторов поля определяются:

$$\begin{aligned}
 H_{\psi m} = H &= \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi R^2} \sin(\omega t + \xi); \\
 E_{Rm} &= \frac{2I_m l \cos \theta}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \omega R^3} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sin(\omega t + \xi - \frac{\pi}{2}); \\
 E_{\theta m} &= \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \omega R^3} e^{-j\frac{\pi}{2}} \sin(\omega t + \xi - \frac{\pi}{2}).
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Вектор Пойтинга имеет две проекции.

Среднее значение каждой из этих проекций за период равен нулю. Средняя мощность магнитных и электрических полей равна нулю. В ближней зоне энергия пульсирует между источниками поля. Энергия излучения не учитывается. Границы ближней зоны зависит от частоты. Чем выше частота, тем ближе граница зоны к источнику.

Для  $f = 50$  Гц  $\lambda = 6000$  км зону до  $10^{10}$  Гц и выше  $\lambda \approx 0,3$  см. И всё пространство вокруг источника можно считать дальней.

Поле вибратора в дальней зоне. Дальняя зона  $R \gg \lambda$ , для этой области:

$$\frac{1}{\omega R} \gg \frac{2}{\omega^2 R^2} \gg \frac{1}{\omega^3 R^3}. \tag{5.9}$$

Для проекций векторов поля:

$$\begin{aligned}
 H_{\psi m} = H &= \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi \mathcal{R}} e^{-j(\frac{\omega R}{\mathcal{R}} - \frac{\pi}{2})}; \\
 E_{\theta m} = E_m &= \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{R}^2 R} e^{-j(\frac{\omega R}{\mathcal{R}} - \frac{\pi}{2})}; \\
 E_{Rm} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Мгновенное значение:

$$\begin{aligned}
 H_{\psi} = H &= \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi \mathcal{R}} \sin(\omega t - \frac{\omega R}{\mathcal{R}} + \frac{\pi}{2} + \xi); \\
 E = E_{\theta} &= \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi \mathcal{R} R} \sin(\omega t - \frac{\omega R}{\mathcal{R}} + \frac{\pi}{2} + \xi).
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение бегущих волн. Дальнюю зону называют волновой зоной. Чтобы найти скорость перемещения фазы - фазовую скорость:

$$\mathcal{G}_\phi = \frac{dR}{dt};$$

или:

$$\mathcal{G}_\phi = \mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ м/с}. \quad (5.12)$$

В дальней зоне скорость равна скорости распространения электромагнитной энергии. Длиной волны называют расстояние, на которое переместится фаза за период:

$$T = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{f}; \quad (5.13)$$

$$\lambda = \mathcal{G}_{cp} T = \frac{\mathcal{G}}{f} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{\mathcal{G}}}.$$

где  $\omega / \mathcal{G}$  - называют коэффициентом фазы или волновым числом. Волновое сопротивление:

$$Z_\varepsilon = \frac{E_m}{H_m} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx \frac{120\pi\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ Ом}. \quad (5.14)$$

Вектор Пойтинга имеет только одну проекцию:

$$\Pi = \Pi_R = \frac{I_m^2 t^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{G}^3 R^2} \left\{ 1 - \cos 2\left(\omega t - \frac{\omega R}{\mathcal{G}} + \frac{\pi}{2} + \xi\right) \right\}. \quad (5.15)$$

' $\Pi$ ' в дальней зоне всегда положителен. Энергия электрических и магнитных полей:

$$W_\mathcal{G} = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 (Z_B H)^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = W_M. \quad (5.16)$$

На рис. 63 изображены  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{\Pi}$ . Чертёж в дальней зоне:

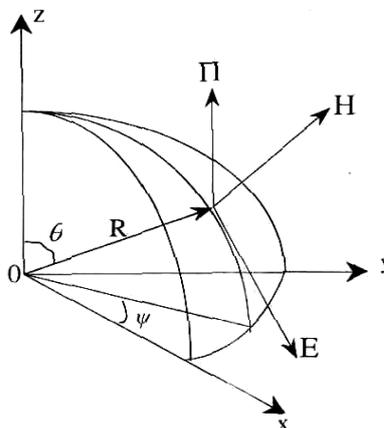


Рис.63. Распространение электромагнитных волн в дальней зоне

1. Поле распространяется в виде сферических волн с фазовой скоростью

$$g_{cp} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \text{ м/с}.$$

2. Вектора поля имеют по одной проекции, которые взаимноперпендикулярны, причём  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  касательные к эквифазной поверхности, а вектор  $\vec{\Pi}$  нормален к нему.

3. Фазы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  одинаковы; они отстают от фазы тока вибратора на угол:

$$\varphi = \frac{\omega \cdot R}{g} - \frac{\pi}{2}.$$

- который растёт пропорционально R.

4. Амплитуды  $E_m$ ,  $H_m$  пропорциональны  $\sin\Theta$  убывают обратно пропорционально расстоянию.

5. В любом объёме поля энергия  $W_{\Sigma} = W_m$ .

6. Через каждые  $t/2$  направление  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  меняются на обратные, направление  $\vec{\Pi}$  не меняется.

## § 5.2. Мощность и сопротивление излучения

Чтобы найти мощность, излучаемую генератором, воспользуемся теоремой Умова-Пойтинга. Проведем в волновой зоне сферическую поверхность S радиуса r (рис. 64).

В любой точке этой поверхности вектор Пойтинга направлен по нормали и модуль его равен:

$$\Pi = \frac{I_m^2 l^2 \omega^2 \sin^2 \Theta}{16\pi^2 \epsilon \epsilon_0 V^3 R^2} \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega r}{V} + \frac{\pi}{2} + \xi \right). \quad (5.17)$$

Поток вектора Пойтинга, входящий в поверхность, равен мощности излучения, соответствующей изменению энергии электромагнитного поля в объёме, ограниченном этой поверхностью. Так как проводимость среды  $\gamma$  равна нулю, а тепловые потери отсутствуют, то:

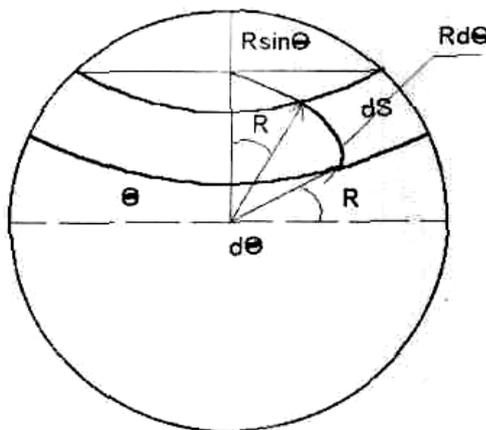


Рис.64. Сферическая поверхность в волновой зоне

$$-\oint_S \bar{P} d\bar{S} = P_{\text{изл}} = \frac{I_m^2 l^2 \omega^2 \sin^2 \Theta}{16\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 V^3 R^2} \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega r}{V} + \frac{\pi}{2} + \xi \right) \oint_S \sin^2 \Theta d\bar{S}. \quad (5.18)$$

Разобьем поверхность  $S$  на элементы  $dS$ , как это показано на рис.71. Мгновенное значение мощности излучения:

$$P_{\text{изл}} = \frac{I_m^2 l^2 \pi \omega^2}{12\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 V^3} \sin^2 \left( \omega t - \frac{\omega r}{V} + \frac{\pi}{2} + \xi \right), \quad (5.19)$$

Подставим:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon V} \cdot \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$$

И найдем среднее значение мощности излучения за период:

$$P_{\text{изл}} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{изл}} dt = \frac{80\pi^2 I_m^2 l^2 f^2}{\sqrt{\varepsilon} V^2} = \frac{80\pi^2 I_m^2 f^2}{\sqrt{\varepsilon} \lambda^2}. \quad (5.20)$$

Так как скорость распространения электромагнитной энергии  $V$  - величина большая, то мощность излучения следует учитывать только при больших частотах.

Отношение средней мощности излучения к квадрату действующего значения тока в антенне называют сопротивлением излучения:

$$P_{\text{изл}} = \frac{P_{\text{изл}}}{I^2} = \frac{80\pi^2 I_m^2 l^2 f^2}{\sqrt{\varepsilon} V^2} = \frac{80\pi^2 I_m^2 f^2}{\sqrt{\varepsilon} \lambda^2}. \quad (5.21)$$

Мощность и сопротивление излучения пропорциональны квадрату частоты.

Для воздуха  $\varepsilon \approx 1$ , следовательно:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{изл}} &= 80\pi^2 \frac{I_m^2 l^2}{\lambda^2} \\ R_{\text{изл}} &= 80\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \end{aligned} \right\}. \quad (5.22)$$

### § 5.3. Излучение рамочной антенны

Рассмотрим излучение рамочной антенны при синусоидальном токе. На достаточно большом расстоянии от антенны, при условии, что длина волны, значительно превышает периметр рамки, формы антенны на характер поля не влияют.

Поэтому пусть антенна представляет собой плоский, круглый виток радиуса  $a$ . Так как мы предположили, что  $\lambda \gg 2\pi a$ , то в один и тот же момент времени ток на любом отрезке контура будет одним и тем же.

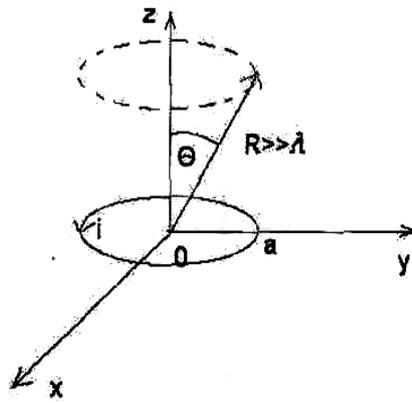


Рис.65. Излучение ЭМВ рамочной антенной

На рис. 65 расположен виток в плоскости XOY. Пусть ось Z проходит через центр витка.

Проекции векторов поля запишем в сферической системе координат, причем, координату  $\Theta$  будем отсчитывать от оси по часовой стрелке.

Так как поле симметрично относительно оси Z, то координата X в выражение векторов поля не войдет и производные проекции векторов поля по координате X будут равны нулю.

В дальней зоне при  $R \gg \lambda$  векторы поля будут иметь по одной проекции:

$$\vec{H}_m = \vec{H}_{om} = \frac{\pi^2 a^2 I_m \sin \Theta}{\lambda^2 R} \cdot e^{j(\frac{\omega R}{V} + \pi)}; \quad (5.23)$$

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{\varphi m} = \frac{\pi^2 a^2 I_m \sin \Theta}{\lambda^2 R} \cdot \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \cdot e^{-j \frac{\omega R}{V}}. \quad (5.24)$$

Мгновенные значения проекций векторов поля:

$$H_m = H_{\Theta} = \frac{\pi^2 a^2 I_m \sin \Theta}{\lambda^2 R} \cdot \sin(\omega t - \omega \frac{R}{V}); \quad (5.25)$$

$$E_m = E_{\varphi} = \frac{\pi^2 a^2 I_m \sin \Theta}{\lambda^2 R} \cdot \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \cdot \sin(\omega t - \omega \frac{R}{V}). \quad (5.26)$$

Полученные уравнения представляют собой бегущие сферические волны. Фазовая скорость волны:

$$V_{\phi} = V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ м/с}. \quad (5.27)$$

равна скорости распространения электромагнитной энергии в данной среде.

**Отношение амплитуд векторного поля:**

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} = \frac{120 \pi}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ м/с}. \quad (5.28)$$

Представляет собой волновое сопротивление среды  $Z_B$ , которое в данном случае число действительное.

Векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, касательной к эквифазной поверхности. По фазе они сдвинуты на  $\pi$  радиан (находятся в противофазе). Фазы векторов меняются пропорционально расстоянию от излучателя. Вектор Пойтинга имеет одну проекцию:

$$\Pi = \Pi_R = -E_\varphi H_R = \left( \frac{I_m \pi^2 a^2 \sin \Theta}{\lambda^2 R} \right)^2 \times \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \cdot \sin^2 \left( \omega t - \omega \frac{R}{V} \right). \quad (5.29)$$

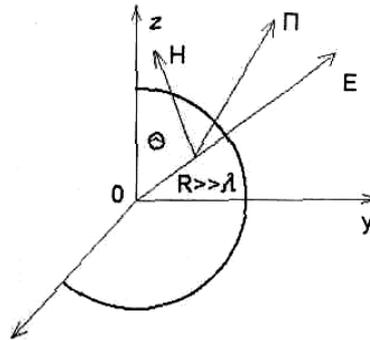


Рис.66. Направление векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{\Pi}$ .

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{\Pi}$  изображены на рис.66. В любом объеме поля  $V$ , в дальней зоне энергия электрического поля равна энергии магнитного поля:

$$W_\varepsilon = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 (-H \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}})^2}{2} dV = W_M. \quad (5.30)$$

Чтобы найти мощность излучения, воспользуемся теоремой Пойтинга:

$$P_{изл} = -\oint_S \vec{\Pi}_{cp} d\vec{S} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 \cdot I^2 \quad (5.31)$$

Сопротивление излучения:

$$R_{изл} = \frac{P_{изл}}{I^2} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 \quad (5.32)$$

Если среда, окружающая излучатель - воздух, то:

$$P_{изл} \approx 3 \cdot 10^5 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 I^2 \quad \text{Вт} ;$$

$$R_{изл} \approx 3 \cdot 10^5 \left( \frac{a}{\lambda} \right)^4 \quad \text{Ом} .$$

Эти выражения определяют мощность и сопротивления линейной антенны. Сравнивая эти величины с мощностью рамочной (круговой) антенны, следует отметить, что незамкнутые системы при прочих равных условиях излучают большую мощность.

### § 5.4. Плоские электромагнитные волны

Плоской электромагнитной волной называется волна, у которой поверхность равных фаз представляет собой плоскость.

Плоская волна называется однородной, если вектор поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  при соответствующем выборе направления осей координат зависят от одной пространственной координаты и времени. Следовательно, во всех точках эквифазной плоскости в один и тот же момент величина вектора  $\vec{E}$  (вектора  $\vec{B}$ ) одинакова.

Если зависимость векторов поля от времени синусоидальна или косинусоидальна, то волна называется монохроматической или гармонической.

Если плоская волна линейно поляризована, то направление вектора  $\vec{E}$  (и перпендикулярных к ним векторов  $\vec{H}$ ) во всём пространстве параллельны друг к другу. Рассмотрим однородную линейно поляризованную плоскую монохроматическую электромагнитную волну. Вектор  $\vec{E}$  имеет три взаимно перпендикулярные проекции:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{xm} \sin(\omega t + \psi_1) ; \\ E_y &= E_{ym} \sin(\omega t + \psi_2) ; \\ E_z &= E_{zm} \sin(\omega t + \psi_3) . \end{aligned} \quad (5.33)$$

т. к. волна поляризована, то  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi$ , а отношение амплитуд:

$$\frac{E_{ym}}{E_{xm}} = a = const ; \quad \frac{E_{zm}}{E_{xm}} = b = const. \quad (5.34)$$

Тогда направление  $\vec{E}$  во всех точках поля одно и то же, углы, которые образует вектор  $\vec{E}$  с осями координат, постоянны:

$$\begin{aligned} \cos(\vec{E} \ \vec{X}) &= \frac{E_x}{E} = const ; \\ \cos(\vec{E} \ \vec{Y}) &= \frac{E_y}{E} = const ; \\ \cos(\vec{E} \ \vec{Z}) &= \frac{E_z}{E} = const , \end{aligned} \quad (5.35)$$

Причем:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = E_x \sqrt{1 + a^2 + b^2}. \quad (5.36)$$

В частном случае, если направление вектора параллельно одной из координатных осей, вектор имеет только одну проекцию.

### § 5.5. Уравнение плоской волны

Рассмотрим распространение плоской волны в однородной среде. Запишем уравнение Максвелла в комплексной форме в декартовой системе координат, причём будем считать, что в поле нет свободных зарядов:

$$\begin{cases} 0 = -j\omega\mu\mu_0\dot{H}_{xm}; \\ \frac{\partial E_{xm}}{\partial z} = -j\omega\mu\mu_0\dot{H}_{ym}; \\ 0 = -j\omega\mu\mu_0\dot{H}_{zm}. \end{cases} \quad (5.37)$$

В рассматриваемом случае у вектора  $\vec{H}$  только одна проекция  $H_y$ , отличная от нуля.

Комплексная её амплитуда равна:

$$\dot{H}_{ym} = \dot{H}_m = -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial z}. \quad (5.38)$$

Так как комплексная амплитуда зависит только от одного переменного, то вместо частных производных можно записать:

$$\dot{H}_{ym} = -\frac{1}{j\omega\mu\mu_0} \cdot \frac{d\dot{E}_{xm}}{dz}. \quad (5.39)$$

Первое уравнение Максвелла примет вид:

$$-\frac{d\dot{H}_{ym}}{dz} = (\gamma + j\omega\epsilon\epsilon_0)\dot{E}_{xm}. \quad (5.40)$$

Подставив  $\dot{H}_{ym}$  и отбросив индекс  $y$  проекции векторов, получим уравнение:

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} = -j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\epsilon\epsilon_0)\dot{E}_m = 0. \quad (5.41)$$

Назовём коэффициентом распространения величину:

$$\Gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{j\omega\mu\mu_0(\gamma + j\omega\epsilon\epsilon_0)}. \quad (5.42)$$

Введя  $\Gamma$  в уравнение, получаем:

$$\frac{d^2 \dot{E}_m}{dz^2} - \Gamma \dot{E}_m = 0. \quad (5.43)$$

Решение уравнения имеет следующий вид:

$$\dot{E}_m = \tilde{M}_1 e^{-\Gamma z} + \tilde{M}_2 e^{\Gamma z}, \quad (5.44)$$

Перейдя к мгновенным значениям, полагая, что:

$$M_1 = M_1 e^{-j\xi_1} \quad M_2 = M_2 e^{-j\xi_2}, \quad (5.45)$$

получим:

$$E = E_x = M_1 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi_1) + M_2 e^{\alpha z} \sin(\omega t + \beta z + \xi_2) = E_{пад} + E_{отр}. \quad (5.46)$$

Прямая волна  $E_{пад}$  распространяется в сторону возрастания, обратная волна  $E_{отр}$  распространяется в сторону убывающих  $z$ . Мгновенное значение  $\bar{E}$  равно сумме ординат прямой и обратной (отраженной) волн.

Напряжённость магнитного поля:

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu_0} (-\Gamma \tilde{M}_1 e^{-\Gamma z} + \Gamma \tilde{M}_2 e^{\Gamma z}). \quad (5.47)$$

Комплексную величину:

$$Z_B = Z_B e^{j\varphi_B} = \frac{j\omega\mu_0}{\Gamma}. \quad (5.48)$$

- называют волновым сопротивлением.

Введя эту величину в формулу, получаем:

$$\dot{H}_m = \frac{\tilde{M}_1}{Z_B} e^{-\Gamma z} - \frac{\tilde{M}_2}{Z_B} e^{\Gamma z}. \quad (5.49)$$

Переходя к мгновенным значениям, будем иметь:

$$H = H_y = \frac{M_1}{Z_B} e^{-\alpha z} \cdot \sin(\omega t + \beta z + \xi_2 - \varphi_B). \quad (5.50)$$

Мгновенное значение напряженности магнитного поля равно разности ординат падающей и отраженной волн. Полученные выражения представляют собой уравнения плоских электромагнитных волн. Вектор Пойтинга:

$$\bar{P} = [\bar{E} \quad \bar{H}].$$

### § 5.6. Исследование волн

Прямая или падающая волна напряженности электрического поля:

$$E_{nad} = M_1 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi_1). \quad (5.51)$$

Представляет собой волну, распространяющуюся в направлении положительной оси  $z$ . Фаза её меняется в функции от  $z$  и  $t$ . Эквифазные поверхности представляют собой плоскости, перпендикулярные оси  $z$ .

Скорость перемещения плоскости равных фаз волны  $V_\Phi$  - называется фазовой скоростью. Величина фазовой скорости:

$$V_\Phi = \frac{dz}{dt}. \quad (5.52)$$

В момент  $t_1$  в точке  $z_1$  фаза волны равна:  $\omega t_1 - \beta z_1 + \xi_1$ .

За время  $dt$  фаза переместится на расстояние  $dz$ . Следовательно, её значение равно:

$$\omega(t_1 + dt) - \beta(z_1 + dz) + \xi_1. \quad (5.53)$$

Приравняв эти выражения, получим:

$$V_\Phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (5.54)$$

Фазовая скорость падающей волны  $V_{пад}$  имеет такую же величину. Отражённые волны перемещаются с той же фазовой скоростью, но в обратном направлении.

Коэффициент  $\beta$  - называется коэффициентом фазы или волновым числом:

$$\beta = \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2 (\epsilon \epsilon_0)^2} + 1} - 1 \right)}. \quad (5.55)$$

Быстрота затухания зависит от действительной составляющей коэффициента распространения  $\Gamma$ . Она обозначается  $\alpha$  и называется коэффициентом затухания:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \omega \mu_0 \mu \sqrt{\gamma^2 + \omega^2 (\epsilon \epsilon_0)^2} - \omega^2 \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \right)} = \frac{\omega}{V} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2 (\epsilon \epsilon_0)^2} + 1} - 1 \right)}. \quad (5.56)$$

Отношение амплитуд соответствующих волн равно модулю волнового сопротивления:

$$\frac{E_{m.nad}}{H_{m.nad}} = \frac{E_{m.omr}}{E_{m.omr}} = Z_B. \quad (5.57)$$

Если среда не ограничена в направлении распространения, то отраженных волн нет и  $M_2=0$ .

Длиной волны называют расстояние, на которое фаза волны изменяется на  $2\pi$  рад.

Пусть это расстояние соответствует:

$$Z_1 - Z_2 = \lambda, \quad (5.58)$$

тогда:

$$\begin{aligned} (\omega t - \beta z_1 + \xi_1) - (\omega t - \beta z_2 + \xi_1) &= 2\pi; \\ \beta(z_1 - z_2) &= 2\pi; \\ \beta\lambda &= 2\pi; \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\beta}, \end{aligned} \quad (5.59)$$

т.к.

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta}; \quad \lambda = \frac{V_\phi}{f}. \quad (5.60)$$

Произведение длины волны и частоты равно фазовой скорости.

На рис.67,68, представлены графики  $E_{пад} = f_1(z)$  и  $E_{отр} = f_2(z)$  для различных моментов времени.

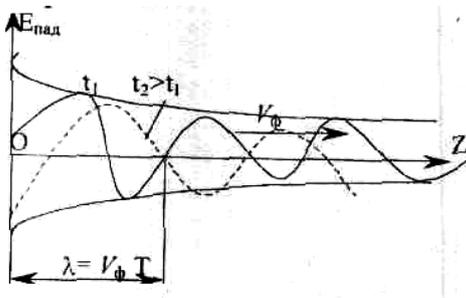


Рис.67. Мгновенное значение падающей волны

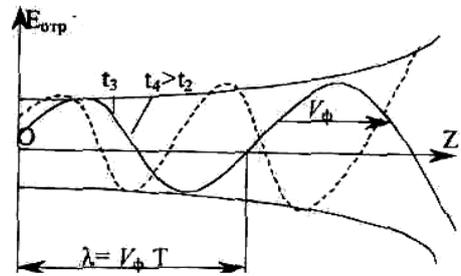


Рис.68. Мгновенное значение отраженной волны

Коэффициент распространения можно записать следующим образом:

$$69(5.61)$$

Волновое сопротивление:

$$Z_B = \frac{j\omega\mu\epsilon_0}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu_0 \tilde{\mu}}{\tilde{\epsilon} \epsilon_0}}. \quad (5.62)$$

Модуль его и аргумент:

$$Z_B = \sqrt{\frac{(\mu_0 \mu)^2 \omega^2}{\gamma^2 + \omega^2 (\tilde{\epsilon} \epsilon_0)^2}}; \quad \varphi_B = \arctg \frac{\alpha}{\beta}. \quad (5.63)$$

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

А) В каждой точке поля мгновенное значение напряженности электрического поля равно сумме ординат падающей и отражённой волн; мгновенное значение напряженности магнитного поля равно разности ординат падающей и отражённой волн;

Б) Направление вектора  $\vec{E}$ , одинаковое во всех точках поля, перпендикулярно к направлению вектора  $\vec{H}$ , причём оба вектора перпендикулярны к направлению распространения (рис.69).

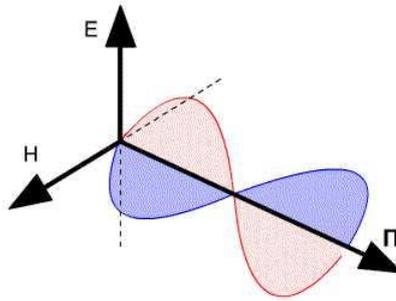


Рис.69. Распространение электромагнитных

Поэтому плоские волны относятся к классу так называемых поперечных электромагнитных волн ТЕМ ( Transverse Electro-Magnetic).

В) Отношение амплитуд волн  $E_{пад}$  и  $H_{пад}$ , и  $E_{отр}$  и  $H_{отр}$ , равно модулю волнового сопротивления  $z_\omega$ .

Г) Фазы падающих волн, также как и фазы отраженных волн, сдвинуты одна относительно другой на угол, равный аргументу волнового сопротивления  $\varphi_B$ .

Д) Падающая и отраженная волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью  $V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f$  в прямо противоположных направлениях.

Е) Амплитуды волн затухают в направлении своего распространения. Быстрота затухания зависит от величины коэффициента поглощения  $\alpha$ .

Ж) Если среда не ограничена в направлении распространения, то отраженных волн нет.  $E = E_{пад}$   $H = H_{пад}$ .

## § 5.7. Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в идеальном диэлектрике, считая, что  $\varepsilon = const$ ,  $\mu = l$ ,  $\alpha = 0$ , тогда коэффициент распространения:

$$\Gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = j\frac{\omega}{V}. \quad (5.64)$$

Коэффициент фазы:

$$\beta = \frac{\omega}{V} = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}. \quad (5.65)$$

Фазовая скорость:

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}} = V \approx \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ м/с}. \quad (5.66)$$

Волновое сопротивление:

$$\underline{Z}_B = \frac{j\omega\mu\mu_0}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\varepsilon_0}} = R_B = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ Ом}. \quad (5.67)$$

Уравнение волн:

$$\dot{E}_M = \dot{E}_{M \text{ над}} - \dot{E}_{M \text{ отр}} = \tilde{M}_1 e^{-j\frac{\omega}{V}z} - \tilde{M}_2 e^{j\frac{\omega}{V}z}. \quad (5.68)$$

$$\dot{H}_M = \dot{H}_{M \text{ над}} - \dot{H}_{M \text{ отр}} = \frac{\tilde{M}_1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}} e^{-j\frac{\omega}{V}z} - \frac{\tilde{M}_2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}} e^{j\frac{\omega}{V}z}. \quad (5.69)$$

Обозначая:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = R_B. \quad (5.70)$$

Если среда не ограничена в направлении распространения, то мгновенные значения векторов поля определяются ординатами прямой или падающей волны.

$$\begin{aligned} E &= E_x = E_{0m} \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{z}{V} \right) \right\}; \\ H &= H_y = \frac{E}{R_B} = \frac{E_{0m}}{R_B} \sin \left\{ \omega \left( t - \frac{z}{V} \right) \right\}; \\ \Pi &= |\overline{\Pi}| = \left[ \overline{E} \quad \overline{H} \right] = \Pi_2 = \frac{E_{0m}^2}{R_B} \sin^2 \left\{ \omega \left( t - \frac{z}{V} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Энергия электрического поля в объёме  $V$  равна энергии магнитного поля в том же объёме:

$$W_{\mathcal{E}} = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 H^2 R_B^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV = W_M. \quad (5.72)$$

Вместе с плоской волной в направлении оси  $z$  перемещается энергия, излучаемая источником поля. Через 1 площадку  $1\text{ м}^2$ , перпендикулярную оси  $z$ , проходит за 1 сек энергия, численно равная значению вектора Пойтинга на этой площадке.

Получившиеся результаты показывают, что амплитуда векторов поля неизменна и, следовательно, волна распространяется без затухания (среда непоглощающая). Волны  $E$  и  $H$  распространяются с одинаковой скоростью и совпадают по фазе:

$$V_{\phi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} = V. \quad (5.73)$$

Скорость распространения не зависит от частоты. Отношение комплексных амплитуд:

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \underline{Z}_B; \quad \underline{Z}_B = Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} = R_B; \quad \varphi_B = 0. \quad (5.74)$$

## § 5.8. Распространение плоской волны в хорошо проводящей среде

В хорошо проводящей среде  $\delta_1 \gg \delta_{\text{смещ}}$ , поэтому можно положить, что  $\gamma \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0 \approx 0$ :

$$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\mu_0\gamma} = \sqrt{\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot e^{j45^\circ} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}} = k + jk = \sqrt{2}ke^{j45^\circ}. \quad (5.75)$$

Коэффициент поглощения равен коэффициенту фазы.  
Волновое сопротивление:

$$\underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\varphi_3} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}} \cdot e^{j45^\circ}. \quad (5.76)$$

Фазовая скорость:

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\mu_0\gamma}}. \quad (5.77)$$

Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\omega\mu\mu_0\gamma}} = \sqrt{\frac{4\pi}{f\mu\mu_0\gamma}}.$$

(5.78)

Если среда не ограничена в направлении распространения, то мгновенные значения векторов поля:

$$E = E_x = E_{om} e^{-kz} \sin(\omega t - kz); \quad (5.79)$$

$$H = H_y = \frac{E_{om}}{Z_B} \cdot e^{-kz} \left( \omega t - kz - \frac{\pi}{4} \right). \quad (5.80)$$

где  $E_{om}$  - амплитуда вектора  $\vec{E}$  в точке  $z = 0$ ,  $\xi_1 = 0$ . Амплитуды векторов поля уменьшаются в направлении распространения.

Определим мощность тепловых потерь в объёме  $V$ , и покажем, что она равна потоку среднего значения вектора Пойтинга сквозь выбранную поверхность  $S$ :

$$P_{мен} = \frac{1}{T} \int_0^T P_{менл} dt. \quad (5.81)$$

В случае плоской волны, распространяющейся без отражения в хорошо проводящей среде:

$$E = E_x = E_{om} e^{-kz} \sin(\omega t - kz). \quad (5.82)$$

Коэффициент фазы:

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu \mu_0 \gamma}{2}}. \quad (5.83)$$

Мощность:

$$P_{менл} = \frac{\sqrt{2} E_{om}^2 a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu \mu_0}} (1 - e^{-2ka}). \quad (5.84)$$

Среднее значение вектора Пойтинга за период:

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt. \quad (5.85)$$

но

$$\Pi = \Pi_z = E_x H_y = \frac{E_{om}^2}{Z_B} \cdot e^{-2kz} \sin(\omega t - kz) \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.86)$$

следовательно:

$$\Pi_{cp} = \frac{\sqrt{2} E_{om}^2}{4 Z_B} \cdot e^{-2kz}. \quad (5.87)$$

Волновое сопротивление:

$$\begin{aligned}
 Z_B &= \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}}; \\
 P_{cp} &= \frac{\sqrt{2}E_{0m}^2}{4} \cdot e^{-2kz} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu\mu_0}}; \\
 P_{\text{мел}} &= -\oint_S \bar{\Pi}_{cp} d\bar{S} = \frac{\sqrt{2}E_{0m}^2 a^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu\mu_0}} (1 - e^{-2ka}),
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

где  $a$  - сторона куба объёма  $V$ .

Энергия, которая входит в выбранный объём:

$$W_1 = \frac{\sqrt{2}E_{0m}^2 Ta^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu\mu_0}}. \tag{5.89}$$

Энергия, которая выходит из этого объёма:

$$W_2 = \frac{\sqrt{2}E_{0m}^2 Ta^2}{4} \cdot e^{-2ka} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu\mu_0}}. \tag{5.90}$$

Энергия тепловых потерь:

$$W_{\text{мел}} = P_{\text{мен}} T = \frac{\sqrt{2}E_{0m}^2 Ta^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\omega\mu\mu_0}} (1 - e^{-2ka}). \tag{5.91}$$

В хорошо проводящей среде ( $\omega\epsilon\epsilon_0 = 0$ ) волны  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  распространяются с одинаковой скоростью  $v_{\Phi} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\mu\gamma}}$ , которая зависит от частоты. Быстрота затухания амплитуд характеризуется множителем  $e^{-kz}$ , где  $e^{-\beta\lambda} = e^{-2\pi} \approx 0$

$$k = \beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}}. \tag{5.92}$$

На расстоянии, равном длине волны  $\lambda$ , вектора поля практически обращаются в нуль, т. К.

Волновое сопротивление – число комплексное:

$$\underline{Z}_B = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}, \tag{5.93}$$

следовательно,  $E$  и  $H$  сдвинуты по фазе на  $45^\circ$ .

## § 5.9. Групповая скорость

При передаче радиосигналов только в исключительных случаях имеют дело с синусоидальными функциями от времени одной частоты. Обычно сигнал состоит из группы волн с определённым спектром частот. Каждая волна распространяется со скоростью  $V_{\phi} = \omega / \beta$ , причём и фазовая скорость и коэффициент  $\beta$  могут зависеть от частоты.

В этом случае фазовая скорость уже не может характеризовать скорости распространения всей группы волн, пользуются понятием групповой скорости. Пусть сигнал состоит из двух сигналов с частотами  $\omega + \Delta\omega$  и  $\omega - \Delta\omega$ . Пусть волны распространяются в направлении оси  $z$  и имеют равные амплитуды. Коэффициент фазы также незначительно отличается друг от друга:  $\beta + \Delta\beta$  и  $\beta - \Delta\beta$ .

Ордината суммарного сигнала:

$$E = E_M \sin [ (\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)z ] + E_M \sin [ (\omega - \Delta\omega)t - (\beta - \Delta\beta)z ] = 2E_M \cos( \Delta\omega t - \Delta\beta z ) \sin( \omega t - \beta z ). \quad (5.94)$$

Величина  $2E_M \cos( \Delta\omega t - \Delta\beta z )$  представляет собой огибающую суммарного сигнала. Эта огибающая медленно перемещается в направлении оси  $z$  со скоростью, скорость  $V_{ГР}$  называется групповой скоростью (рис.70).

$$V_{gp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}. \quad (5.95)$$

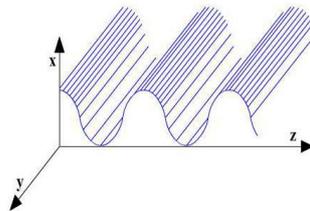


Рис.70. Групповая скорость.

Она характеризует скорость перемещения в пространстве точек огибающей, например, наибольшего значения суммарного сигнала. В общем случае :

$$V_{ГР} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}}. \quad (5.96)$$

Связь групповой скорости и фазовой:

$$V_{ГР} = \frac{V_{\phi}}{1 - \frac{\omega}{V_{\phi}} \frac{dV_{\phi}}{d\omega}}. \quad (5.97)$$

Когда  $V_\phi$  не зависит от частоты, групповая и фазовая скорости равны.

### § 5.10. Поляризация электромагнитных волн

Поляризация характеризует ориентацию вектора  $\vec{E}$  электромагнитной волны.

Рассмотрим линейно поляризованную, распространяющуюся в направлении Z (рис.71.). Если вектор  $\vec{E}$  направлен по оси X, то вектор  $\vec{H}$  будет направлен по оси Y и выражение векторов поля примут вид:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{i}E_x = \vec{i}E_m \sin(\omega t - \beta z + \psi); \\ \vec{H} &= \vec{j}H_y = \vec{j}\frac{E_m}{R_B} \sin(\omega t - \beta z + \psi),\end{aligned}\tag{5.98}$$

Где:

$$\beta = \frac{\omega}{V} = \omega\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}.\tag{5.99}$$

- волновое число

$$R_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}.\tag{5.100}$$

- волновое сопротивление

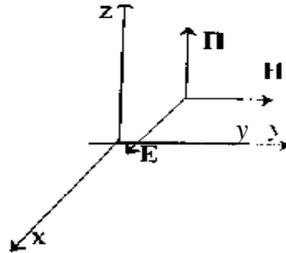


Рис.71. Направление вектора  $\vec{E}$  по оси X

Если вектор  $\vec{E}$  направлен параллельно оси y (рис.72.):

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{j}E_y = \vec{j}E_m \sin(\omega t - \beta z + \psi); \\ \vec{H} &= -\vec{i}H_x = -\vec{i}\frac{E_m}{R_B} \sin(\omega t - \beta z + \psi).\end{aligned}\tag{5.101}$$

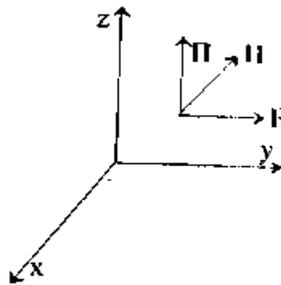


Рис.72. Направление вектора  $\vec{E}$  по оси y

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y = \vec{i}E_m \cos \varphi + \vec{j}E_m \sin \varphi.$$

(5.102)

В случае произвольной ориентации вектора  $\vec{E}$  в плоскости  $HOY$  (рис.73) его можно разложить на составляющие  $E_x$  и  $E_y$  тогда:

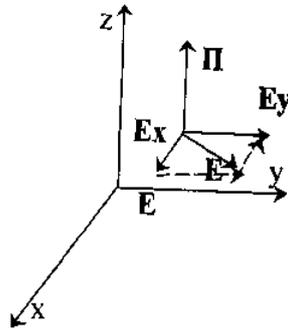


Рис.73. Произвольная ориентация  $\vec{E}$

где  $\varphi$  - угол между направлением вектора  $\vec{E}$  и осью  $X$ .

Обозначим:

$$E_m \cos \varphi = E_{m1}; \quad E_m \sin \varphi = E_{m2}, \quad (5.103)$$

тогда:

$$\vec{E} = \vec{i} E_{m1} \sin(\omega t - \beta z + \psi) + \vec{j} E_{m2} \sin(\omega t - \beta z + \psi). \quad (5.104)$$

Длина вектора:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}. \quad (5.105)$$

Фаза определяется соотношением:

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{E_x}{E_y}. \quad (5.106)$$

Наложение двух гармонических линейно поляризованных волн, векторы  $\vec{E}$  которых взаимно перпендикулярны, а фазы совпадают, даёт линейно поляризованную волну.

Рассмотрим теперь две гармонически линейно поляризованные волны, электрические вектора которых взаимно перпендикулярны, а амплитуда и начальные фазы неодинаковые:

$$\vec{E} = \vec{i} E_{m1} \sin(\omega t - \beta z + \psi_1) = \vec{i} E_{m1} \{ \sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_1 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_1 \}. \quad (5.107)$$

$$\vec{E} = \vec{j} E_{m2} \sin(\omega t - \beta z + \psi_2) = \vec{j} E_{m2} \{ \sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_2 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_2 \}.$$

Чтобы найти геометрическое место точек, которое описывает конец вектора  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  при фиксированной координате  $z$ , надо решить совместно уравнения:

$$E_x = E_{m1} \{ \sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_1 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_1 \}. \quad (5.108)$$

$$E_x = E_{m2} \{ \sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_2 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_2 \}.$$

После преобразования получим:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t - \beta z) &= \frac{\frac{E_x}{E_{1M}} \sin \psi_1 - \frac{E_y}{E_{2M}} \sin \psi_2}{\cos \psi_1 \sin \psi_2 - \cos \psi_2 \sin \psi_1}; \\ \cos(\omega t - \beta z) &= \frac{\frac{E_y}{E_{2M}} \sin \psi_2 - \frac{E_x}{E_{1M}} \sin \psi_1}{\cos \psi_1 \sin \psi_2 - \cos \psi_2 \sin \psi_1}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Возводя в квадраты и сложив, получим:

$$\frac{E_x^2}{E_{1M}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2M}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{1M}} \cdot \frac{E_y}{E_{2M}} \cos(\psi_2 - \psi_1) + \sin(\psi_2 - \psi_1) = 0. \quad (5.110)$$

которое аналогично уравнению кривой второго порядка:

$$aE_x^2 + bE_y^2 - 2cE_x E_y + d = 0. \quad (5.111)$$

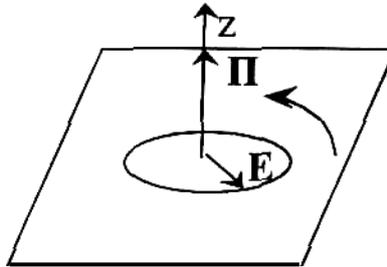


Рис.74. Эллиптическая поляризация

В случае эллипса (рис.74.)  $ab - c^2 > 0$ , что имеется в данном случае вектор  $\vec{E}$ , перпендикулярный направлению распространения  $z$ , в фиксированной точке пространства вращается, изменяя своё абсолютное значение так, что конец его описывает эллипс. Рассмотренный вид поляризации называется эллиптической. При изменении координаты  $z$  конец вектора  $\vec{E}$  скользит по поверхности прямого цилиндра с эллиптическим сечением. Конец вектора  $\vec{H}$  также перемещается по эллипсу. Если  $ab - c^2 = 0$ , что будет иметь место при  $E_{m1} = E_{m2}$  и  $\psi_1 = \psi_2$  уравнение эллипса вырождается в прямую, и поляризация волны будет линейной.

Если  $E_{M1}=E_{M2}$  и  $\psi_1=\psi_2=\frac{\pi}{2}$  рассматриваемое уравнение переходит в уравнение окружности. В этом случае поляризация называется круговой. Конец вектора  $\vec{E}$  при изменении  $z$  описывает винтовую линию на поверхности прямого цилиндра с круглым сечением.

### § 5.11. Отражение и преломление волны на плоской поверхности при нормальном падении

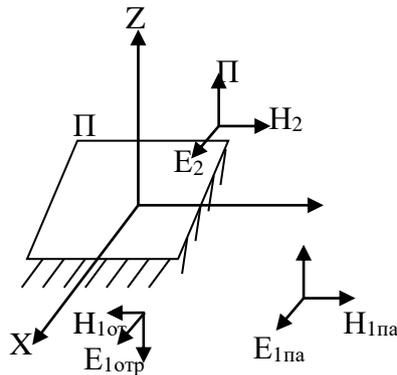


Рис.75. Распространение волн в пространстве в разнородных областях

Рассмотрим распространение волны в пространстве, которое состоит из нескольких разнородных областей. Волна, распространяющаяся в одной области, попадая на граничную поверхность, частично отражается, а частично проходит во вторую область (рис.75).

Волна распространяется из среды I с  $\epsilon_1 \gamma_1$  в среду II с  $\epsilon_2 \gamma_2$   $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .

Рассмотрим случай нормального падения плоской, гармонической линейно поляризованной волны.

В этом случае направление распространения перпендикулярно к граничной поверхности, плоскости постоянных фаз ей параллельны. Оси координат (см. рисунок) выбираются таким образом, что XOY совпадает с граничной поверхностью.

В этом случае векторы поля будут иметь по одной проекции  $E = E_X$ ;  $H = H_Y$ ;  $\Pi = \Pi_Z$ , причём эти проекции зависят от координаты  $Z$  и времени  $t$ .

Пусть  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , тогда в области I:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1m} &= \dot{E}_{пад} + \dot{E}_{отр} = \tilde{M}_1 e^{-j\beta_1 z} + \tilde{M}_2 e^{j\beta_1 z}; \\ \dot{H}_{1m} &= \dot{H}_{пад} - \dot{H}_{отр} = \frac{\tilde{M}_1}{R_{B1}} \cdot e^{-j\beta_1 z} - \frac{\tilde{M}_2}{R_{B2}} \cdot e^{j\beta_1 z}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\text{где} \quad \beta_1 = \frac{\omega}{V_{\phi 1}} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0} \quad R_{B1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}}. \quad (5.113)$$

Во II области будет распространяться только одна падающая волна:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{2m} &= \tilde{M}_3 e^{-j\beta_1 z}; \\ \dot{H}_{2m} &= \frac{\tilde{M}_3}{R} \cdot e^{-j\beta_1 z}, \end{aligned}$$

(5.114)

$$zde \quad \beta_2 = \frac{\omega}{V_{\phi_2}} = \omega \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0 \mu_0}, \quad R_{B2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2 \epsilon_0}}. \quad (5.115)$$

Согласно граничным условиям:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (5.116)$$

при  $z=0$ :

$$\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 = \tilde{M}_3; \quad \frac{\tilde{M}_1}{R_{B1}} - \frac{\tilde{M}_2}{R_{B1}} = \frac{\tilde{M}_3}{R_{B2}}. \quad (5.117)$$

Решив эти уравнения, получим:

$$\tilde{M}_2 = \frac{R_{B2} - R_{B1}}{R_{B2} + R_{B1}} \cdot E_{0m} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \cdot E_{0m} = m E_{0m}; \quad (5.118)$$

$$\tilde{M}_3 = \frac{2R_{B2}}{R_{B2} + R_{B1}} \cdot E_{0m} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \cdot E_{0m} = n E_{0m}.$$

Постоянную  $m = \frac{R_{B2} - R_{B1}}{R_{B2} + R_{B1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$  называют коэффициентом

отражения,

а  $n = \frac{2R_{B2}}{R_{B2} + R_{B1}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$  называют коэффициентом преломления.

Если  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ ,  $0 < m < 1$ ,  $n > 1$ . Фазы  $E_{над}$  и  $E_{отр}$  сдвинуты на  $180^\circ$ .

Если  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ,  $-1 < m < 0$ ,  $0 < n < 1$ . Фазы  $E_{над}$  и  $E_{отр}$  сдвинуты на  $180^\circ$ .

Фазы  $H_{над}$  и  $H_{отр}$  одинаковы.

При  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $m = 0$ ,  $n = 1$  отраженной волны не будет. Волна свободно проходит во вторую область.

В первой области амплитуды  $E_{1m}$  и  $H_{1m}$  в связи с отражением волн меняются с изменением  $z$ .  $E_{1m}$  меняется от  $E_{0m}(1 + m)$  до  $E_{0m}(1 - m)$ .

Расстояние между двумя соседними максимумами равно:

$$\frac{\lambda_1}{2} = \frac{1}{2f\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0}}; \quad (5.119)$$

Во второй области амплитуды векторов поля – величины постоянные, т.к. среда без потерь и неограниченная.

Пусть I область – идеальный диэлектрик ( $\varepsilon_1 = \text{const}$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\mu_1 = \mu_0$ ), а область II – хороший проводник с проводимостью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu_2 = \mu_2\mu_0 = \text{const}$ .

В первой области:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1m} &= \tilde{M}_1 e^{-j\beta z} + \tilde{M}_2 e^{j\beta z}; \\ \dot{H}_{1m} &= \frac{\tilde{M}_1}{R_{B1}} e^{-j\beta z} - \frac{\tilde{M}_2}{R_{B2}} e^{j\beta z}, \end{aligned} \quad (5.120)$$

где:

$$\beta = \frac{\omega}{V_\phi} = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_0 \mu_1}; \quad R_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1 \varepsilon_0}}.$$

(5.121)

Во второй области:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{2m} &= \tilde{M}_3 e^{-jkz} e^{-kz}; \\ \dot{H}_{2m} &= \frac{\tilde{M}_3}{Z_B e^{j45^\circ}} e^{-jkz} e^{-kz}, \end{aligned} \quad (5.122)$$

где:

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\gamma}{2}}; \quad Z_B = \sqrt{\frac{\mu_0\omega\mu}{\gamma}}. \quad (5.123)$$

Положив  $\tilde{M} = E_{0m}$  и используя условия на границе  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{M}_2 &= \frac{z_B e^{j45^\circ} - R_{B1}}{z_B e^{j45^\circ} + R_{B1}} \cdot E_{0m} = \tilde{m} E_{0m}; \\ \tilde{M}_3 &= \frac{2z_B e^{j45^\circ}}{z_B e^{j45^\circ} + R_{B1}} \cdot E_{0m} = \tilde{n} E_{0m}, \end{aligned} \quad (5.124)$$

$\tilde{m}$  и  $\tilde{n}$  - величины комплексные.

В области II вследствие поглощения энергии амплитуды векторов поля затухают. Быстрота затухания амплитуд характеризуется глубиной проникновения волны в металл.

Глубиной проникновения называют расстояние  $\Delta$  в направлении распространения волны, на котором амплитуда вектора напряженности убывает в  $e \approx 2,7$  раза. Если в данной точке  $z_1$  поля амплитуда вектора напряженности равна  $E_{2M} = M_3 e^{-kz_1}$ , то на расстоянии  $z_1 + \Delta$  она будет  $E_{M2} = \frac{E_{2M}}{e}$ , следовательно:

$$e = \frac{E_{2M}''}{E_{2M}'} = \frac{e^{-kz_1}}{e^{-k(z_1+\Delta)}} = e^{k\Delta}; \quad (5.125)$$

или  $k\Delta = 1$ ,

Глубина проникновения волны:

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\mu_0\gamma}}. \quad (5.126)$$

В идеальном проводнике  $\gamma = \infty$   $\Delta = 0$ .

Пусть I область- идеальный однородный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$ , а область II- идеальный проводник с  $\gamma = \infty$ , т.к. проводимость  $\gamma = \infty$  в области II ( $Z \geq 0$ ), то волна полностью отражается от граничной поверхности. В области II поля нет  $E_2 = 0$   $H_2 = 0$ .

Комплексные амплитуды векторов поля в области I ( $Z \leq 0$ ).

$$\begin{aligned}\tilde{E}_m &= \tilde{M}_1 e^{-j\beta z} + \tilde{M}_2 e^{j\beta z} = \dot{E}_{M \text{ над}} + \dot{E}_{M \text{ отра}}; \\ \dot{H}_m &= \frac{\tilde{M}_1}{R_B} e^{-j\beta z} - \frac{\tilde{M}_2}{R_B} e^{j\beta z} = \dot{H}_{M \text{ над}} - \dot{H}_{M \text{ отра}}.\end{aligned}\quad (5.127)$$

На границе  $z=0$   $\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 = 0$   $\tilde{M}_1 = -\tilde{M}_2 = \tilde{M}$  коэффициент отражения  $m = -1$ ,  $n = 0$ .

Положим  $\tilde{M} = E_{0m}$

$$\begin{aligned}\dot{E}_m &= -2e^{j45} E_{0m} \sin \beta z; \\ \dot{H}_m &= 2 \frac{E_{0m}}{R_B} \cos \beta z.\end{aligned}\quad (5.128)$$

Мгновенные значения векторов поля:

$$\begin{aligned}E &= E_x = 2E_{0m} \sin \beta z \sin(\omega t - 45^\circ); \\ H &= H_y = 2 \frac{E_{0m}}{R_B} \cos \beta z \sin \omega t.\end{aligned}\quad (5.129)$$

и представляют собой уравнение стоячих волн. На границе при  $z = 0$  будет узел  $E_2$  и пучность  $H$ .

Вектор Пойтинга:

$$\Pi = \Pi_z = E_x H_y = \frac{E_{0m}^2}{R_B} \sin 2\beta z \sin 2\omega t.\quad (5.130)$$

среднее значение  $\Pi$  за период равен 0.

По граничной поверхности протекают поверхностные токи. Плотность их равна напряженности поверхностного тока на поверхности проводника.

$$\eta = \eta_x = H_y = 2 \frac{E_{0m}}{R_B} \sin \omega t.\quad (5.131)$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Какие электрические цепи излучают электромагнитные волны?
2. Что называется элементарным вибратором?
3. Как найти напряженность электрического и магнитного полей вибратора?

4. Что называется волновой зоной?
5. В чем состоит эффект близости?
6. Как распространяется поле в дальней зоне?
7. Чему равен вектор Пойтинга в ближней зоне?
8. Какие проекции  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в сферической системе координат имеет электромагнитные волны, излучающие элементарным вибратором?
9. Какие волновые зоны являются ближними и дальними?
10. Как определяется вектор Пойтинга в излучателе?
11. От чего зависит мощность излучения?
12. Напишите мгновенное и среднее значение мощности излучения за период.
13. Что называют сопротивлением излучения?
14. Чему равны проекции векторов поля в дальней зоне?
15. Напишите уравнения бегущих сферических волн.
16. Изобразите  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{P}$  вектора в волновой зоне сферической поверхности.
17. Как определяется мощность излучения линейной антенны?
18. Как определяется сопротивление излучения линейной антенны?
19. Какая волна называется монохроматической?
20. Дать определение плоской однородной и плоской линейно поляризованной волнам.
21. Какие соотношения описывают линейно поляризованные плоские волны?
22. Чему равно мгновенное значение напряженности электрического и магнитного полей для линейно поляризованной плоской волны?
23. Что называется коэффициентом распространения волны; фазовой скоростью; коэффициентом фазы; длиной волны; коэффициентом затухания; волновым сопротивлением?
24. Какие основные свойства плоских поперечных электромагнитных волн ТЕМ (Transverse Electro-magnetic) ?
25. Если направления вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  параллельны одной из координатных осей, сколько проекций будут иметь эти вектора?
26. Чему равны углы векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  осями координат для линейно поляризованной волны?
27. Напишите уравнения плоских электромагнитных волн.
28. Какая среда называется идеальным диэлектриком?
29. Каковы особенности распространения плоской волны в идеальном диэлектрике?
30. Как записываются мгновенные значения напряженности электрического, магнитного полей и вектора Пойтинга?
31. Какова энергия электромагнитных волн в идеальном диэлектрике?
32. Зависит ли скорость распространения волны от частоты?
33. Какая среда называется хорошо проводящей?

34. Каковы особенности распространения электромагнитных волн в хорошо проводящей среде?

35. Каковы средние значения мощности и вектора Пойтинга в хорошо проводящей среде?

36. Что называют групповой скоростью, и какова ее связь с фазовой скоростью?

37. Чем характеризуется быстрота затухания амплитуд векторов поля?

38. От каких факторов зависит волновое сопротивление?

39. Наложение каких волн дает линейно поляризованную волну?

40. В каком случае возникает эллиптически поляризованная волна?

41. В каком случае возникает круговая поляризация?

42. Представить эллиптически поляризованную волну как сумму линейно поляризованной и поляризованной по кругу волн.

43. Что характеризует поляризация?

44. Как записать волновые уравнения, если вектор  $\vec{E}$  направлен параллельно оси  $Y$ ; при произвольной ориентации?

45. Что дает наложение двух гармонических линейно поляризованных волн, векторы  $\vec{E}$  которых взаимно перпендикулярны?

## ГЛАВА 6. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

### § 6.1. Явление поверхностного эффекта

Пусть переменный ток, проходящий по проводнику, распределяется неравномерно по сечению проводника. Плотность тока в различных точках сечения будет неодинаковой.

В цилиндрическом проводнике круглого сечения наибольшая плотность тока будет у поверхности проводника, наименьшая на оси. Чем больше проводимость проводника и его магнитная проницаемость, тем больше будет распределение тока. Явление носит название поверхностного эффекта.

Если ток в проводнике меняется во времени то вместе с ним будет изменяться и магнитное поле. Значит меняется и поток магнитного поля, проходящий через контур  $abcd$  и в контуре возникает ЭДС всегда работает против тока на участке  $ab$  и в направлении тока на участке  $cd$ . Поэтому мгновенное значение тока в центре проводника будет меньше, чем на его краю. Чем больше частота переменного тока, тем быстрее во времени меняется магнитное поле, тем больше ЭДС индукции и тем меньше эл. ток в центре проводника. Ток как бы вытесняется магнитным полем на поверхность проводника. При очень высоких частотах ЭДС индукции становится настолько большой, что полностью компенсирует внешнее электрическое поле внутри проводника и весь ток протекает по тонкому поверхностному слою это и есть поверхностный эффект (рис.76).

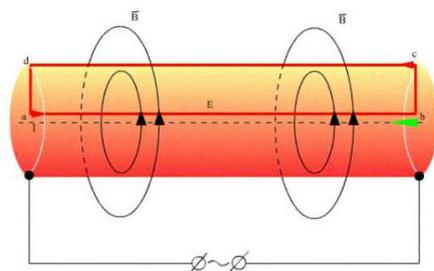


Рис.76. Возникновение поверхностного эффекта в цилиндрическом проводнике

В связи с поверхностным эффектом изменяются активное сопротивление и индуктивность проводника. С увеличением частоты активное сопротивление растет, а индуктивность падает. При очень высоких частотах практически можно считать, что весь ток проходит по поверхности проводника, а

внутренний магнитный поток обращается в нуль. Внутри проводника электромагнитного поля нет.

При исследовании процесса распространения плоской волны в проводящей среде было выяснено, что амплитуда проекций векторов поля уменьшается в направлении распространения. Меняется также и фаза.

Электромагнитная волна, проникая в глубь проводника через его поверхность, постепенно теряет свою энергию. Энергия волны преобразуется в тепло. Амплитуды векторов поля уменьшаются в направлении распространения. Если на поверхности проводника при нормальном падении волны амплитуды равны  $E_{om}$  и  $H_{om}$ , то на расстоянии  $z$  от поверхности в направлении распространения волн они уменьшаются в  $e^{kz}$  раз, где:

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}. \quad (6.1)$$

Фазы векторов поля на поверхности проводника и на расстоянии  $z$  от поверхности будут отличаться на угол:

$$kz = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}} \cdot z = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z. \quad (6.2)$$

Соответственно уменьшится и плотность тока проводимости:

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E}. \quad (6.3)$$

В точке, удаленной от поверхности на расстоянии  $z$ , равном длине волны  $\lambda$ , векторы поля уменьшаются в  $e^{k\lambda}$  раз.

Так как  $e^{k\lambda} = e^{2\pi}$ , то практически векторы поля обратятся в нуль.

При наличии нескольких токонесящих проводов, на распределение тока по сечению окажут и токи соседних проводов.

## § 6.2. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводнике

Рассмотрим явление поверхностного эффекта при прохождении синусоидального тока по металлическому цилиндрическому проводнику круглого сечения. Токами смещения внутри провода можно пренебречь, так как они малы по сравнению с токами проводимости. Провод будем считать прямым и очень длинным. Влиянием обратного провода пренебрегаем, т.е. считаем его достаточно удаленным. При сделанных предположениях будет иметь место осевая симметрия. Линии вектора  $\vec{H}$  являются окружностями, лежащими в плоскости, перпендикулярной к оси провода, с центрами на оси (рис.77.).

На одном и том же расстоянии от оси модуль вектора напряженности будет одинаковым. Вектор плотности тока направлен параллельно оси от оси провода и на одинаковом расстоянии от оси имеет одно и то же значение.

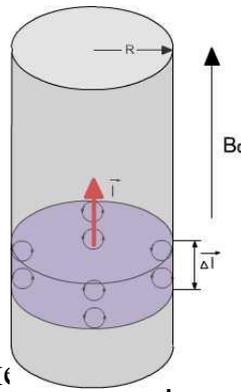


Рис.77. Цилиндрическая система координат в магнетике

Ось  $z$  цилиндрической системы координат совместима с осью провода и будем считать, что положительное направление тока совпадает с направлением оси  $z$ . Тогда векторы поля будут иметь по одной проекции, указанные на рис.77:

$$\vec{H} = \vec{i}_\varphi H; \quad \vec{\delta} = \vec{K} \delta; \quad \vec{E} = \vec{K} E = \vec{K} \frac{\delta}{\gamma}. \quad (6.4)$$

В выражение поля в цилиндрической системе координат и подставив вместо  $E$  величину  $\frac{\delta}{\gamma}$ , получим:

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu\mu_0\gamma} \cdot \frac{d\dot{\delta}_m}{dr}; \quad (6.5)$$

$$\frac{d^2\dot{\delta}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} - j\omega\mu\mu_0\gamma\dot{\delta}_m = 0. \quad (6.6)$$

Обозначим:

$$\sqrt{\omega\mu_0\mu\gamma} = m. \quad (6.7)$$

Тогда:

$$\frac{d^2\dot{\delta}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} - jm^2\dot{\delta}_m = 0. \quad (6.8)$$

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} \sqrt{-jmr} &= \omega; \\ d\omega &= \sqrt{-j} m dr; \\ d\omega^2 &= -jm^2 dr^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Получим:

$$\frac{d^2\delta_m}{d\omega^2} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\delta_m}{d\omega} - \delta_m = 0. \quad (6.10)$$

Если начальная фаза заданного тока равна нулю:  $\dot{I}_m = I_m$ , то

$$\dot{\delta}_m = \frac{I_m m a b_{or}}{2\pi a^2 b_{1a}} e^{(\beta_{or} - 45^\circ - \beta_{1a})} = \dot{\delta}_m e^{i\xi}. \quad (6.11)$$

Величина  $\frac{I_m}{\pi a^2}$  равна амплитуде средней плотности тока.

На рис.78. показана кривая зависимости  $\delta_m = f(r)$ . С увеличением частоты плотность тока на оси убывает, а на поверхности растет.

При  $r = a$  плотность тока будет наибольшей:

$$\dot{\sigma}_m = \frac{I_m m a b_{oa}}{2\pi a^2 b_{1a}} e^{(\beta_{oa} - 45^\circ - \beta_{1a})}. \quad (6.12)$$

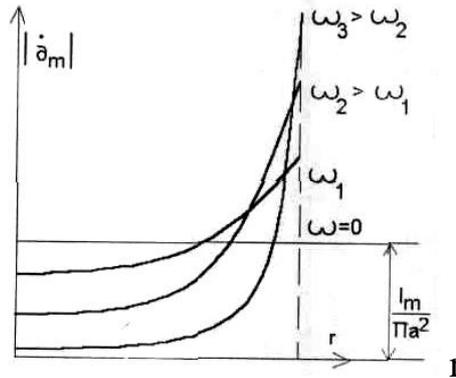


Рис78. Зависимость плотности тока от частоты

Зная плотность тока, можно определить напряженность магнитного поля:

$$\dot{H} = \frac{1}{jm^2} \cdot \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = H_m e^{i\xi}. \quad (6.13)$$

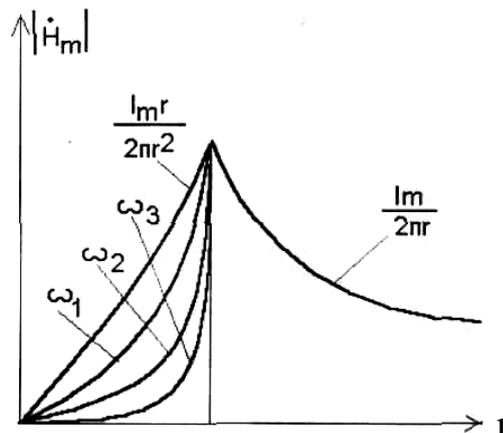


Рис. 79. Изменение напряженности магнитного поля от частоты

На рис.79. показана кривая:

$$\dot{H}_m = f(r). \quad (6.14)$$

Наибольшее значение  $H$  принимает на поверхности провода. Если амплитуда тока не меняется, то с изменением частоты амплитуда напряженности поля  $H_m$  вне провода меняться не будет. Внутри проводника в одной и той же точке величина  $H_m$  с увеличением частоты уменьшается. Уменьшается и Фвн. Чем больше частота, тем сильнее сказывается явление поверхностного эффекта, тем быстрее затухает электромагнитная волна, проникающая в глубь проводника через его поверхность из окружающего провод диэлектрика.

### § 6.3. Активное сопротивление и внутренняя индуктивность цилиндрического провода с учетом поверхностного эффекта

Активное сопротивление участка провода длиной  $l$  равно, где  $P$  – мощность тепловых потерь на участке.

Воспользуемся теоремой Пойтинга в комплексной форме:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \oint_s \left[ \overline{\dot{H}} \overline{\dot{E}} \right] d\overline{S} \right\}. \quad (6.15)$$

Поверхность интегрирования показана на рис.80.:

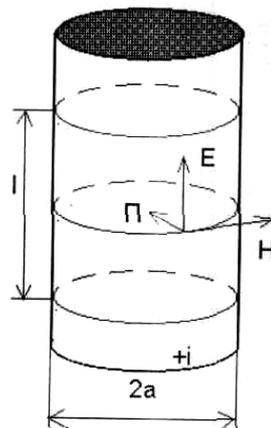


Рис.80. Поверхностный эффект в цилиндре

На боковой поверхности:

$$\overline{\dot{H}} = \frac{I_m}{2\pi a} = \overline{\dot{H}}^*. \quad (6.16)$$

$$\overline{\dot{E}}_m = \frac{I_m m a b_{oa}}{\pi a^2 b_{1Q5}} e^{j(\beta_{oa} - 45^\circ - \beta_{1a})} = \frac{\overline{\dot{\delta}}_m}{\gamma}. \quad (6.17)$$

Следовательно:

$$\left[ \begin{array}{c} \overline{\dot{H}}^* \\ \overline{\dot{E}} \end{array} \right] d\overline{S} = - \frac{I_m^2}{\pi a^2 \gamma} \cdot \frac{ma}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cdot dS^{i(\beta_{0a}-45^\circ-\beta_{1a})}. \quad (6.18)$$

Что касается потока через заштрихованные площадки, то он равен нулю. Поэтому искомая мощность:

$$P = \frac{I_m^2}{\pi a^2 \gamma} \cdot \frac{ma}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cdot \cos(\beta_a - 45^\circ - \beta_{1a}). \quad (6.19)$$

Активное сопротивление провода:

$$r = \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \cdot \frac{ma}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}). \quad (6.20)$$

Индуктивное сопротивление, обусловленное внутренним магнитным полем:

$$2\omega \int \frac{\mu_0 \mu H_m^2}{2} dV \approx I_m \left\{ \oint_S \left[ \begin{array}{c} \overline{\dot{H}}^* \\ \overline{\dot{E}} \end{array} \right] d\overline{S} \right\}. \quad (6.21)$$

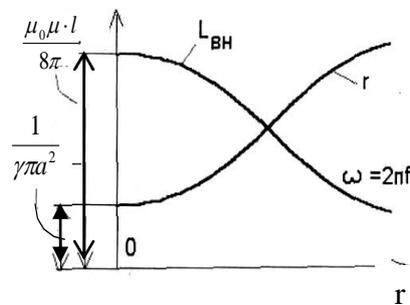


Рис.81. Зависимость индуктивности сопротивления от расстояния с учетом поверхностного эффекта

Так как:

$$2\omega \int \frac{\mu_0 \mu H_m^2}{2} dV \approx I_m \left\{ \oint_S \left[ \begin{array}{c} \overline{\dot{H}}^* \\ \overline{\dot{E}} \end{array} \right] d\overline{S} \right\}. \quad (6.22)$$

то

$$\omega L_{BH} = \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \cdot \frac{ma}{2} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}). \quad (6.23)$$

## Внутренняя индуктивность:

$$\omega L_{BH} = \frac{l}{\pi a^2} \cdot \frac{m_a}{\gamma} \cdot \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}). \quad (6.24)$$

На рис.81. показаны кривые:  $R = f_1(r)$   $L_{BH} = f_2(r)$

Как видно из рисунка, при увеличении частоты активное сопротивление растет, а индуктивность уменьшается. При  $\omega = 0$ , то есть в случае постоянного тока

$$R_0 = \frac{1}{\pi a^2 \gamma}; \quad L_{0BH} = \frac{\mu \mu_0 l}{8\pi}. \quad (6.25)$$

При большой частоте отношение  $b_{0a}/b_{1a}$  стремится к 1, а  $(\beta_{0a} - \beta_{1a})$  стремится к  $\frac{\pi}{2}$ , следовательно, активное сопротивление

$$R \approx \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \cdot \frac{m_a}{2} \cdot \cos 45^\circ \approx r_0 \cdot \frac{a}{2\Delta}. \quad (6.26)$$

Подставив значение (для меди)  $\gamma = 5,75 \cdot 10^7 \text{ 1/Ом}\cdot\text{м}$ ,  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\sqrt{f}}{a}$ , получим величину активного сопротивления на единицу длины медного провода:

$$\frac{r}{l} = 4,165 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\sqrt{f}}{a} \text{ Ом/м}. \quad (6.27)$$

Следовательно, активное сопротивление двухпроводной линии в области радиочастот будет равно:

$$R_0 \approx \frac{2r}{l} = 8,33 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a} \text{ Ом/м}. \quad (6.28)$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. В чем заключается явление поверхностного эффекта?
2. Есть ли электромагнитное поле внутри проводника и почему?
3. Как изменяется амплитуда проекций векторов поля в направлении распространения плоской волны в проводящей среде?
4. Как меняется фаза векторов поля?
5. Что называют эффектом близости?
6. Постройте зависимость плотности тока  $\delta$  от расстояния от оси провода?
7. Постройте кривую  $H_m = f(z)$ ?

8. Как зависит магнитная проницаемость и проводимость проводника с учетом поверхностного эффекта?

9. Чему равна плотность вихревых токов в листе?

10. Какое отношение величин характеризует степень неравномерности распределения магнитного потока?

11. Нарисуйте зависимость  $H$  в зависимости от координаты  $y$ .

12. Как определяют потери в единице объема листа?

13. Какими параметрами учитывается поверхностный эффект в ленточной линии?

## ГЛАВА 7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ.

### § 7.1. Распространение электромагнитных волн в волноводах

В радиотехнических устройствах для передачи энергии от источника к антенне или от антенны к приёмнику в диапазоне низких частот (метровые волны) используют двухпроводные линии. Часть передаваемой энергии тратится в линии на тепловые потери и на излучение. С увеличением частоты потери энергии в линии растут. Поэтому в диапазоне высоких частот (дециметровые волны) двухпроводные линии заменяются коаксиальными. Тепловые потери в коаксиальной линии с увеличением частоты растут, во-первых, вследствие увеличения активного сопротивления из-за более резкого проявления поверхностного эффекта, из-за нагревания изоляционных прокладок.

В области сантиметровых волн для передачи энергии применяют волноводы, которые представляют собой металлические трубы, в которых нет потерь на излучение. Передача энергии без затухания возможна только при частотах выше некоторой предельной, которая называется « критической » частотой волновода. Рассмотрим процесс распространения электромагнитных волн в волноводах прямоугольного сечения. Примем проводимость стенок металлической трубы  $\infty$ , а  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon$  - будем считать постоянными и заданными.

Расположение координатных осей и размеры поперечного сечения волновода изображены на рис.82:

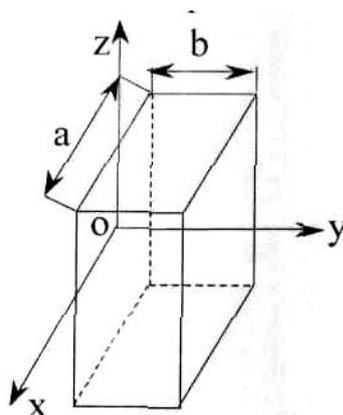


Рис. 82. Расположение координатных осей поперечного сечения волновода

Причём  $\delta = 0$ ,  $\rho = 0$ , и волновод будем считать бесконечно длинным и однородным. Пусть электро-магнитные волны, возбуждаемые в волноводе, изменяются с частотой  $\omega = 2\pi f$ . Так как волновод идеальный, то амплитуды проекции векторов поля не должны изменяться в направлении

распространения (вдоль оси z). Это будет выполняться, если  $\Gamma = \alpha + j\beta$  будет минимальным числом.

Уравнение Максвелла в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} + \Gamma \dot{H}_{ym} &= j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{E}_{xm}; \\ -\Gamma \dot{H}_{xm} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} &= j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{E}_{ym}; \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} &= j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{E}_{zm}; \\ \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial y} + \Gamma \dot{E}_{ym} &= j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{H}_{xm}; \\ -\Gamma \dot{E}_{xm} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} &= -j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{H}_{ym}; \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial y} = -j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \dot{H}_{zm};$$

Если выразить  $\dot{H}_{xm}$ ,  $\dot{H}_{ym}$ ,  $\dot{E}_{xm}$ ,  $\dot{E}_{ym}$  через  $\dot{H}_{zm}$  и  $\dot{E}_{zm}$  обозначить  $\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{V^2}$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xm} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{\mathfrak{D}} + \Gamma^2} \left( \Gamma \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} - j\omega \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} \right) \\ \dot{E}_{ym} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{\mathfrak{D}} + \Gamma^2} \left( -\Gamma \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - j\omega \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} \right) \\ \dot{H}_{xm} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{\mathfrak{D}} + \Gamma^2} \left( j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} \right) \\ \dot{H}_{ym} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{\mathfrak{D}} + \Gamma^2} \left( j\omega \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Подставив найденные проекции, получим два уравнения с неизвестными  $\dot{H}_{zm}$  и  $\dot{E}_{zm}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{V^2} + \Gamma^2 \right) \dot{E}_{zm} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{V^2} + \Gamma^2 \right) \dot{H}_{zm} &= 0 \end{aligned}$$

(7.4)

Уравнения будут удовлетворять, если принять  $\dot{H}_{z\text{M}} = 0$  и определить  $\dot{E}_{z\text{M}}$ , затем принять  $\dot{E}_{z\text{M}} = 0$  и определить  $\dot{H}_{z\text{M}}$ .

По волноводу могут распространяться различного рода волны. Например, поперечно электрические (transverse electric) волны ТЕ, у которых  $E_z = 0$ . Поперечно электромагнитные (transverse electromagnetic) волны ТЕМ, у которых оба вектора поля не имеют продольной составляющей, по волноводу распространяться не могут, т.к.  $E_z = 0$   $H_z = 0$ . Все остальные проекции векторов поля также равны нулю. Для возбуждения требуемого типа волн необходимо в начале волновода поместить устройство, которое создаёт поле соответствующего строения. Таким устройством может служить, например, небольшой стержень или рамка, присоединённые к источнику энергии.

## § 7.2 Критическая частота и параметры волны в волноводe

При решении уравнения Максвелла было получено соотношение:

$$M + N = \frac{\omega^2}{\mathcal{G}^2} + \Gamma^2, \quad (7.5)$$

тогда

$$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - \frac{\omega^2}{\mathcal{G}^2}}, \quad (7.6)$$

Эта величина будет мнимой, если:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{\mathcal{G}^2} &> \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}; \\ \omega &> \mathcal{G} \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Частота, при которой коэффициент распространения обращается в нуль, называется критической.

Она равна:

$$\omega_{\text{KP}} = 2\pi f_{\text{KP}} = \mathcal{G} \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}; \quad (7.8)$$

$$f_{\text{KP}} = \frac{\mathcal{G}}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

(7.9)

Сигнал может распространяться по идеальному волноводу без затухания только при частоте выше критической. При частоте ниже критической коэффициент распространения будет вещественным числом, и амплитуда проекции векторов поля затухает в направлении распространения.

Таким образом волновод обладает свойствами электрического фильтра, пропуская одни частоты ( $\omega > \omega_{кр}$ ) и запирая другие ( $\omega < \omega_{кр}$ ).

Рассмотрим соотношение при частоте  $\omega > \omega_{кр}$ . В этом случае коэффициент распространения - мнимое число  $\Gamma = j\beta_{mn}$ .

$$\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{g^2} - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} = \frac{1}{g} \sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2}. \quad (7.10)$$

называется коэффициентом фазы и представляет собой действительное число.

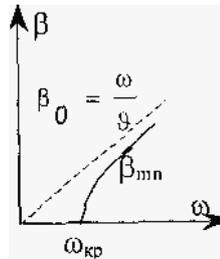


Рис.83. Зависимость коэффициента фазы от частоты

На рис.83. изображена зависимость  $\beta_{mn}(\omega)$ . Пунктирная кривая изображает зависимость коэффициента фазы от частоты в неограниченном идеальном диэлектрике.

Зная коэффициент распространения, можно записать окончательно выражения для мгновенных значений проекций векторов поля.

$$E_x = K \frac{\omega \mu_0}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \frac{n \pi}{b} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \sin \left( \omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.11)$$

$$E_y = K \frac{\omega \mu_0}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \frac{m \pi}{a} \sin \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \sin \left( \omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$E_z = 0$$

$$H_x = K \frac{\beta_{mn}}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \frac{m \pi}{a} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \sin \left( \omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$H_y = K \frac{\omega \mu_0}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \frac{n \pi}{b} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \sin \left( \omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2} \right) \quad (7.12)$$

$$H_z = K \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \sin(\omega t - \beta_{mn} z)$$

Начальная фаза постоянной  $\tilde{K}$  принята равной 0. Зная коэффициент фазы, легко найти длину волны и фазовую скорость:

$$\mathcal{G}_\phi = \frac{\omega}{\beta_{mn}}. \quad (7.13)$$

Длина волны в волноводе:

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}}. \quad (7.14)$$

Если бы сигнал с частотой  $\omega = 2\pi f$  распространился в неограниченном диэлектрике, то длина волны была равна:

$$\lambda = \frac{\mathcal{G}}{f} = \frac{1}{f \sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}}, \quad (7.15)$$

Обозначим:

$$\lambda_{кр} = \frac{\mathcal{G}}{f_{кр}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2}}}. \quad (7.16)$$

И назовём её критической длиной волны. Она имеет порядок периметра сечения волновода. Длину волны в волноводе можно записать в виде:

$$\lambda_{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2}}}. \quad (7.17)$$

Кривые зависимости  $\lambda_{mn}$  и  $\lambda$  от частоты изображены на рис.84:

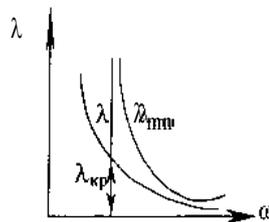


Рис.84. Зависимость длины волны от частоты

Длина волны в волноводе больше, чем длина волны в неограниченном пространстве.

### § 7.3. Фазовая и групповая скорость волны

$$\mathcal{G}_\phi = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2}}}. \quad (7.18)$$

Фазовая скорость зависит от частоты; следовательно, в волноводе имеет место дисперсия, несмотря на то, что диэлектрик идеальный и в волноводе нет потерь энергии.

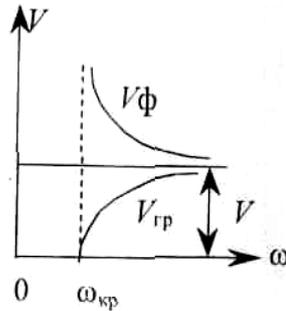


Рис.85. Зависимость фазовой скорости от частоты волновода

При  $\omega = \omega_{кр}$  фазовая скорость равна  $\infty$ , а при  $\omega > \omega_{кр}$ , фазовая скорость больше, чем скорость распространения электромагнитной энергии в неограниченном идеальном диэлектрике (рис.85).

При  $\omega < \omega_{кр}$  фазовая скорость является мнимой величиной, т.е. волновой процесс при такой частоте возбудить нельзя.

Для характеристики быстроты распространения сигнала по волноводу пользуются выражением групповой скоростью:

$$\mathcal{G}_{gp} = \frac{1}{\frac{d\beta_{mn}}{d\omega}}; \quad \text{т.к.} \quad \frac{d\beta_{mn}}{d\omega} = \frac{\mathcal{G}}{\beta_{mn}} = \frac{\mathcal{G}_\phi}{\mathcal{G}^2}; \quad (7.19)$$

$$\mathcal{G}_{gp} = \frac{\mathcal{G}^2}{\mathcal{G}_\phi},$$

При  $\omega = \omega_{кр}$   $\mathcal{G}_{gp} = 0$ , при  $\omega > \omega_{кр}$  она меньше скорости распространения электромагнитной энергии в неограниченном идеальном диэлектрике:

$$\mathcal{G}_{gp} < \mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu_0}}. \quad (7.20)$$

#### § 7.4. Распространение волны $TE_{10}$ в прямоугольном волноводе

В волноводе можно возбудить волны различных типов. Наиболее простой будет волна  $TE_{10}$ , которую можно получить поместив, металлический стержень в начале волновода, как показано на рис.86. Переместив стержень (рис.87.), можно возбудить волну  $TM_{10}$ .

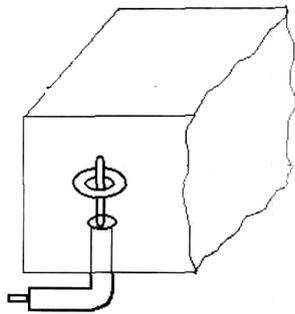


Рис.86. Возбуждение волны  $TE_{01}$  в волноводе

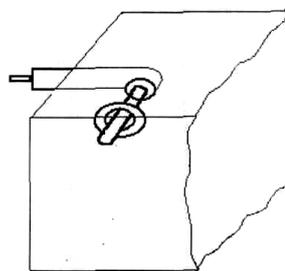


Рис.87. Возбуждение волны  $TM_{10}$  в волноводе

Стержень представляет собой продолжение центрального проводника коаксиального кабеля, который присоединён к источнику с синусоидальной Э.Д.С.

В случае волны  $TE_{10}$ , при  $m = 1$  и  $n = 0$ :

$$\beta_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}. \quad (7.21)$$

напряжённость электрического поля равна:

$$E = E_y = k \frac{\omega \mu_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta_{10} r - \frac{\pi}{2}). \quad (7.22)$$

проекции напряжённости магнитного поля:

$$H_x = k \frac{\beta_{10} a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta_{10} r + \frac{\pi}{2}). \quad (7.23)$$

$$H_z = k \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta_{10} r). \quad (7.24)$$

Векторы поля не зависят от координаты  $y$ .

Вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости поперечного сечения волновода. Линии вектора  $\vec{E}$  параллельны оси  $y$ . Они начинаются на одной стенке волновода и заканчиваются на противоположной. Плотность поверхностных зарядов на этих стенках легко получить из граничного условия:

$$\sigma = D_n = \varepsilon \varepsilon_0 E_y = k \frac{a \omega \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0}{\pi} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta_{10} r - \frac{\pi}{2}). \quad (7.25)$$

В сечении перпендикулярном направлению распространению  $\Gamma$  мгновенные значения вектора  $\vec{E}$  определяются ординатами стоячей волны, длина которой равна  $2a$ . Зависимость  $E_m$  от координаты  $x$  показана на рис 88.

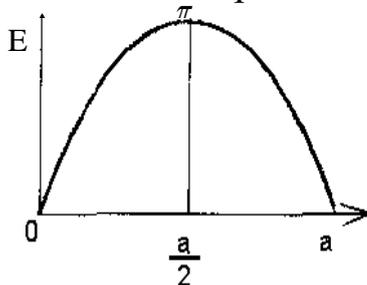


Рис.88. Зависимость  $E$  от ординаты стоячей волны

При  $x = \frac{a}{2}$  - амплитуда вектора  $\vec{E}$  достигает наибольшего значения:

$$k \frac{\omega \mu_0 a}{2} = 2 \mu_0 k f a, \quad (7.26)$$

которое зависит от постоянной  $k$ , частоты и ширины волновода. В направлении распространения мгновенные значения напряжённости электрического поля определяются ординатами бегущей волны длиной

$$\lambda_{10} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}. \quad (7.27)$$

Фазовая скорость волны:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta_{10}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}. \quad (7.28)$$

Критическая частота для волны  $TE_{10}$  равная  $f_{кр} = \frac{v}{2a}$  зависит от ширины  $\frac{a}{2}$  волновода. На рис.89 изображены кривые зависимостей  $E$  от  $Z$  при в различные моменты времени  $t$ .

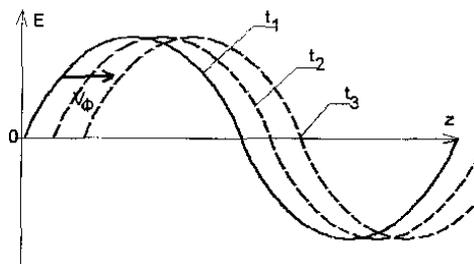


Рис.89. Мгновенное значение напряженности электрического поля

Линии вектора  $\vec{H}$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $ZOX$ . Они представляют собой замкнутые кривые.

При  $x = 0$  и  $x = a$  вектор  $\vec{H}$  направлен параллельно оси  $Z$ , причём его амплитуда  $E_m = k$ . При  $x = \frac{a}{2}$  - вектор  $\vec{H}$  направлен параллельно оси  $X$  и амплитуде его  $E_m = k \frac{\beta_{10} a}{\pi}$ .

В любой точке сечения волновода напряжённость поля определится из выражения:  $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ .

На рисунке 90, изображены кривые зависимости  $H_{xm}$  и  $H_{zm}$  от координаты  $X$ . Мгновенное значение мощности, передаваемой по волноводу:

$$\begin{aligned}
 x = a \quad x = b \\
 P = \int_S \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \Pi_r dx dy = k^2 \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^2 b}{\pi^2} \cos^2(\omega t - \beta_{10} z) \int_{x=0}^{x=a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \\
 = k^2 \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}{2\pi^2} \cos^2(\omega t - \beta_{10} z)
 \end{aligned} \quad (7.29)$$

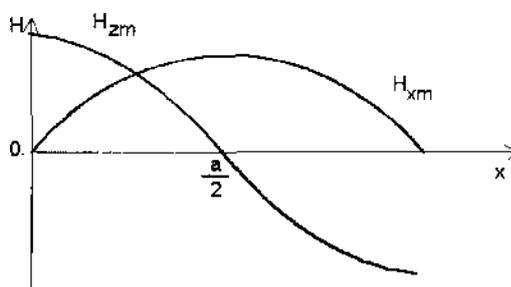


Рис.90. Зависимости напряженности магнитного поля от координаты

Среднее значение мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dp = k^2 \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}{4\pi^2} \quad (7.30)$$

Задаваясь величиной, передаваемой по волноводу мощности  $P$ , получим постоянную:

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{P}{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}}. \quad (7.31)$$

С увеличением мощности  $P$  растёт значение постоянной  $k$ , а следовательно, растёт и амплитуда напряжённости электрического поля  $E$ . Возникает возможность пробоя диэлектрика. Если волновод предназначен для работы на больших высотах, где давление низко и благоприятны условия для ионизации (например, радиолокационные устройства на самолётах), вероятность пробоя увеличивается.

### § 7.5. Потери энергии в волноводах

При рассмотрении процессов в идеальных волноводах было сделано предположение, что сопротивление стенок трубы и проводимость диэлектрика, заполняющего её, равны нулю.

В таких волноводах распространение волн при частотах  $\omega = \omega_{кр}$  происходит без затухания и коэффициент распространения величина мнимая  $\Gamma = j\beta_{mn}$ . В реальных волноводах стенки имеют хотя и малое, но конечное сопротивление (медь, серебро). Проводимость диэлектрика также отлична от нуля. Поэтому часть энергии, передаваемой по волноводу, тратится на тепловые потери. Коэффициент распространения в этом случае будет комплексным числом

$$\Gamma = \alpha_{mn} + j\beta_{mn}. \quad (7.32)$$

Строгий учёт потерь в волноводе связан со сложными вычислениями и не во всех случаях возможен. Поэтому обычно подсчитывают приближённое значение потерь. При этом делаются некоторые допущения, упрощающие расчёт. Формулы, которые при этом получаются, определяют потери и коэффициент затухания  $\alpha_{mn}$  достаточной степенью точности.

При расчётах делают два допущения:

- 1) потери в диэлектрике настолько малы, что ими можно пренебречь
- 2) в диэлектрике на внутренней поверхности волновода векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  выражаются также, как и в случае идеального волновода.

Если диэлектриком является воздух, то первое допущение справедливо для достаточно широкого диапазона частот. Допущение второе справедливо потому, что тангенциальные составляющие векторов поля значительно меньше нормальных составляющих, так как стенки волновода имеют достаточно высокую проводимость. Поэтому, не допуская большой ошибки, можно считать, что на границе диэлектрик-металл  $E_{\tau} = 0$ , а амплитуда  $H_{\tau}$  не

меняется в направлении оси  $Z$  и выражается так же, как и в случае идеального волновода.

Коэффициент затухания можно определить исходя из следующих соображений. Пусть  $P_0$  - среднее значение энергии, которая в течение 1 сек. проходит через сечение волновода. На расстоянии  $Z$  в направлении распространения волны за то же время пройдёт меньшее количество энергии. Обозначим её  $P$ . Так как энергия пропорциональна произведению векторов поля, а амплитуда каждого вектора убывает в  $e^{-\alpha z}$  раз, то  $P = P_0 e^{-2\alpha z}$ .

На участке длиной 1 м ( $z = 1$ ) передаваемая мощность изменится на величину:

$$N = -\frac{dP}{dZ} = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} = P \cdot 2\alpha. \quad (7.33)$$

Следовательно, коэффициент затухания:

$$\alpha = \frac{N}{2P}. \quad (7.34)$$

Величина передаваемой мощности может быть определена как поток вектора Пойтинга сквозь поперечное сечение волновода:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_S \bar{H} d\bar{S}. \quad (7.35)$$

Мощность тепловых потерь на единицу длины волновода  $N$  определится по закону Джоуля-Ленца, причём для упрощения расчёта можно предположить, что ток, протекающий по трубе, сосредоточен в слое толщиной:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega} \cdot \mu \epsilon_0 \gamma}. \quad (7.36)$$

равной эквивалентной глубине проникновения волны в металл, причём в пределах этого слоя ток распределяется равномерно и его плотность численно равна плотности  $\eta$  поверхностного тока, протекающего по внутренней стенке такого же волновода, но без потерь.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Рассказать об особенностях распространения электромагнитных волн в волноводах.
2. Записать волновые уравнения волновода.
3. Какие волны распространяются в волноводе?
4. Написать уравнения проекций векторов поля для волны ТЕ.
5. Чему равны критическая частота и параметры волны в волноводе?

6. От чего зависит фазовая скорость волны в волноводе?
7. Когда возникают поперечные электромагнитные волны ТЕМ в волноводе?
8. Что необходимо для возбуждения требуемого типа волн в волноводе?
9. Каким свойством обладает волновод?
10. Чем отличается фазовая скорость волны от скорости распространения волны в волноводе?
11. Как можно возбудить волну  $TE_{10}$  в прямоугольном волноводе?
12. Чему равна напряжённость электрического поля при возбуждении волны  $TE_{10}$ ?
13. Каким образом можно рассчитать проекции напряжённости магнитного поля в прямоугольном волноводе?
14. Чему равна плотность поверхностных зарядов в прямоугольном волноводе, который присоединён к источнику синусоидальной Э.Д.С. ?
15. В каком случае напряжённость электрического поля достигает максимального значения?
16. Чему равна длина бегущей волны  $TE_{10}$  и фазовая скорость?
17. Как изменяются проекции напряжённости магнитного поля от координаты  $X$  ?
18. Каково мгновенное значение мощности, передаваемое по волноводу?
19. Как распространяется поперечная магнитная волна  $TM$  в прямоугольном волноводе?
20. Охарактеризуйте сходство, и различие строения свободных полей прямоугольного и круглого волноводов?
21. Как учитываются потери энергии в волноводах?

## ГЛАВА 8. ТЕОРИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ.

### § 8.1. Общая теория электромагнитных резонаторов

Колебательные системы, которые применяются в диапазоне волн длиннее 1м, обычно представляют собой соединение индуктивной катушки и конденсатора.

Частота собственных колебаний такого контура

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (8.1)$$

где  $L$  - индуктивность катушки;

$C$  - ёмкость конденсатора.

Добротность контура:

$$Q = \frac{\omega_0 W_0}{P} = \frac{\sqrt{L}}{R}. \quad (8.2)$$

где  $R$  - активное сопротивление контура;

$W_0$  - энергия запасенная в контуре;

$P$  - средняя за период мощность потерь.

В диапазоне волн короче 1м для возбуждения колебаний нужной частоты необходимо уменьшить индуктивность или ёмкость контура. Минимальная ёмкость контура ограничена конструктивными соображениями, поэтому увеличение частоты должно производиться путём уменьшения индуктивности, приводящего к уменьшению характеристического сопротивления контура  $L/C$ . А так как с увеличением частоты увеличивается активное сопротивление (следствие усиления поверхностного эффекта и увеличения мощности излучения), то добротность контура  $Q$  резко падает. Поэтому обычный колебательный контур практически не пригоден в диапазоне дециметровых и сантиметровых волн.

В этом диапазоне частот применяют колебательные системы в виде объёмных резонаторов, представляющих собой замкнутую металлическую оболочку, ограничивающую некоторый объём диэлектрика.

На рис. 91 показано, как, постепенно видоизменяя обычный колебательный контур, получают объёмный резонатор. Индуктивная катушка (рис.91, а) заменяется пластиной (рис.91, б).

Для дальнейшего уменьшения индуктивности параллельно включается несколько пластин (рис.91, в). Объединив эти пластины, получают полый резонатор (рис.91, г). В объёмном резонаторе тепловые потери малы.

Потери на излучение практически отсутствуют, так как электромагнитное поле в диэлектрике экранировано металлической оболочкой.

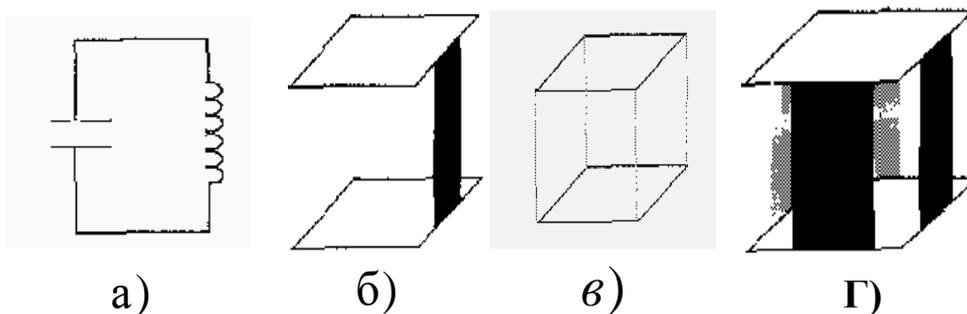


Рис.91. Переход от закрытого колебательного контура к резонатору

Индуктивность (L) и ёмкость (C) резонатора незначительны, поэтому добротность объёмного резонатора весьма высока (порядка  $10^4$ ).

Металлическая оболочка резонатора может иметь различную форму. На практике встречаются прямоугольные, цилиндрические, тороидальные и другие формы резонаторов (рис.92).

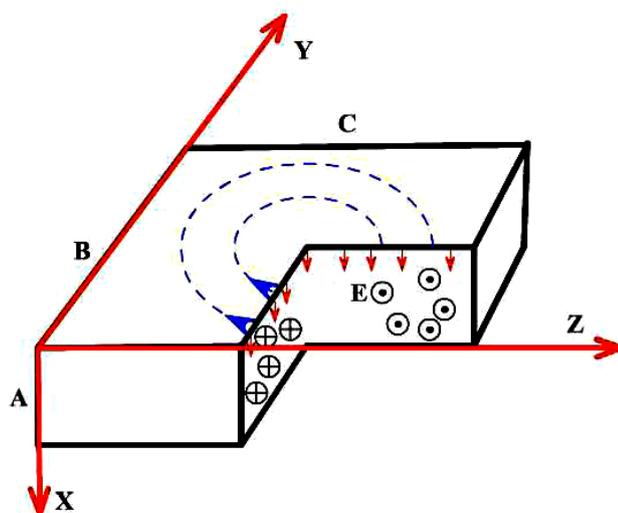


Рис.92. Волна простейшего типа в резонаторе.

## § 8.2 Частота собственных колебаний резонатора

Подставим значение  $\dot{E}_{xm}$  в уравнение:

$$\nabla^2 \dot{E}_{xm} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \dot{E}_{xm} = 0. \quad (8.3)$$

После преобразования получим:

$$\frac{\omega_0^2}{v^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{p^2 \pi^2}{c^2}. \quad (8.4)$$

Частота собственных колебаний резонатора:

$$\omega_0 = v\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}; \quad (8.5)$$

$$f_0 = \frac{v}{2} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}. \quad (8.6)$$

Частота собственных колебаний резонатора зависит от его размеров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и от значений  $m$ ,  $n$ ,  $p$  которые определяют тип колебаний. Так как  $m$ ,  $n$ ,  $p$  могут быть любыми целыми числами, то резонатор характеризуется бесконечным дискретным спектром собственных частот.

Собственной длиной волны резонатора называют длину волны в неограниченной диэлектрике при частоте, равной частоте собственных колебаний резонатора:

$$\lambda_0 = \frac{v}{f_0} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}} \quad (8.7)$$

Наименьшая частота собственных колебаний резонатора называется основной частотой.

В резонаторе происходит периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно.

При отсутствии потерь колебания будут незатухающими. К реальным резонаторам для поддержания колебаний необходимо непрерывно подводить энергию, восполняющую потерянную.

Добротность резонатора определяется формулой:

$$Q = \frac{\omega_0 W_0}{p} = \frac{2\pi W_0}{N_n}. \quad (8.8)$$

где  $W_0$  - энергия, запасённая в резонаторе;

$N_n$  - потери энергии за один период.

Добротность резонатора будет тем выше, чем меньше его поверхность при заданном объёме. Объёмный резонатор является совершенной колебательной системой.

### § 8.3. Волна простейшего типа в прямоугольном резонаторе

Для волны простейшего типа можно положить:  $m = 1$ ;  $n = 1$ ;  $p = 1$ . В случае синусоидального во времени процесса:

$$E = E_z = K \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \omega_0 t \quad (8.9)$$

$$E_x = 0 \quad E_y = 0$$

$$H_x = K \frac{\pi}{\omega_0 \mu_0 b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$H_y = K \frac{\pi}{\omega_0 \mu_0 a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (8.10)$$

$$H_z = 0$$

Так как во все проекции векторов поля входит одна постоянная  $K$ , то конфигурация поля определяется однозначно. Частота собственных колебаний резонатора:

$$\omega_0 = \frac{v\pi ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (8.11)$$

Собственная длина волны:

$$\lambda = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (8.12)$$

Размер "С" резонатора вдоль оси  $Z$  на характер поля не влияет, но для того чтобы добротность была достаточно большой величиной, "С" выбирают не меньше  $a$  или  $b$ .

Найдём уравнения линий векторов поля. Линии вектора  $\vec{E}$  прямые параллельные оси  $Z$ , так как  $E = E_z$ . Так как  $H_z = 0$ , то линии вектора  $\vec{H}$  кривые, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости  $ХОУ$ . Уравнения этих линий определяется из соотношения :

$$\frac{dx}{H_{xm}} = \frac{dy}{H_{ym}}, \quad (8.13)$$

Следовательно:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_{xm}}{H_{ym}} = \frac{a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}}{a \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}. \quad (8.14)$$

Интегрируя, получаем:

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = const.$$

(8.15)

На рис.93 показаны кривые зависимости  $E_m$ ,  $H_{xm}$ ,  $H_{ym}$  от соответствующих координат.

Покажем, что энергия, сообщённая резонатору, пульсирует, переходя из электрического поля в магнитное и обратно.

В момент  $t = 0$  напряжённость электрического поля  $E = 0$ , следовательно, вся энергия сосредоточена в магнитном поле.

$$t = \frac{\pi}{2\omega_0} \quad (8.16)$$

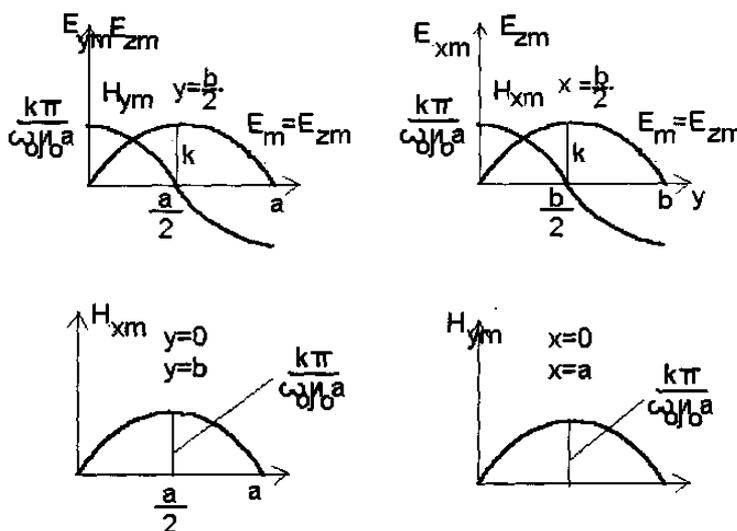


Рис.93. Графики зависимости напряженностей электрического и магнитного полей от координаты

В момент  $t = \pi/(2\omega_0)$  напряжённость магнитного поля станет равной нулю и вся энергия сосредоточится в электрическом поле. Так, резонатор идеальный, потерь в нём нет, энергия остаётся без изменения. Подсчитаем её величину.

Пусть

$$t = \frac{\pi}{2\omega_0}. \quad (8.17)$$

Тогда:

$$W_0 = W_B = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \frac{1}{8} \epsilon\epsilon_0 K^2 abc. \quad (8.18)$$

Если величина  $W_0$  задана, то постоянная  $K$  определится из выражения:

$$K = 2 \sqrt{\frac{2W_0}{\epsilon\epsilon_0 abc}}. \quad (8.19)$$

## § 8.4. Мощность потерь в прямоугольном резонаторе, добротность резонатора

Определим добротность резонатора, считая, что проводимость стенок  $\gamma \text{ сим}/_M$ , магнитная проницаемость  $\mu\mu_0 \text{ зн}/_M$ . Предположим для упрощения такое же выражение, как и в резонаторе без потерь. Так же как и при исследовании волноводов, будем считать, что ток равномерно распределён в слое толщиной:

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu\mu_0 \gamma}}, \quad (8.20)$$

и по величине равен поверхностному току на стенках идеального резонатора. Так, токи на противоположных стенках резонатора одинаковы по амплитуде, то

$$P = 2P_{aoc} + 2P_{hoc} + 2P_{aob}. \quad (8.21)$$

Средняя за период мощность, которая теряется в стенке  $aoc$  :

$$P_{aoc} = \frac{1}{\gamma\Delta} \int_0^a \int_0^c \frac{H_m^2(x=0)}{2} dx dy = K^2 \frac{\pi^2 ac}{4(\mu\mu_0)^2 \gamma b^2 \Delta}, \quad (8.22)$$

аналогично находим:

$$P_{hoc} = K^2 \cdot \frac{\pi^2 ac}{4(\mu\mu_0)^2 \gamma b^2 \Delta}. \quad (8.23)$$

Мощность, которая теряется в стенке  $aob$ :

$$P_{aob} = \frac{1}{\gamma\Delta} \int_0^a \int_0^b \frac{H_m^2(x=0) + H_m^2(x=0)}{2} dx dy = K^2 \frac{\pi^2}{2\omega_0(\mu\mu_0)^2 \gamma \Delta} \left( \frac{a}{4b} + \frac{b}{4a} \right). \quad (8.24)$$

Общая средняя мощность тепловых потерь в стенках резонатора:

$$P = K^2 \frac{\pi^2}{2\omega_0(\mu\mu_0)^2 \gamma \Delta} \left( \frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} \right). \quad (8.25)$$

Следовательно, добротность рассматриваемого резонатора:

$$Q = \frac{\varepsilon\varepsilon_0(\mu\mu_0)^2 \omega_0^3 \gamma \Delta abc}{4\pi^2 \left( \frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} \right)}. \quad (8.26)$$

В случае кубического резонатора при  $a = b = c$  для простейшей волны ( $m = 1; n = 1; p = 1$ ) формула значительно упростится:

$$Q = \frac{1}{3} \cdot \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}{\Delta}. \quad (8.27)$$

Так как резонатор обычно выполняется из ферромагнитного материала (медь, латунь, серебро), и если диэлектрик – заполняющий его воздух, то добротность такого резонатора:

$$Q = \frac{2\pi}{3} \cdot a \sqrt{f_0 \gamma \cdot 10^7}. \quad (8.28)$$

### § 8.5 Коаксиальные линии

Необходимость применения очень высоких частот (не ниже  $10^9$  Гц) при передаче энергии по волноводам ограничивает их применение.

Кроме того, поперечная электромагнитная волна ТЕМ передаваться по волноводу не может. Поэтому для передачи сигналов в широком диапазоне частот (от самых малых до частот порядка  $10^6$  Гц) пользуются коаксиальным кабелем. Он позволяет передавать сигналы без помех, при сравнительно небольших потерях. По кабелю можно передавать телевизионные программы на большие расстояния; устанавливать одновременно сотни телефонных связей. Коаксиальным кабелем пользуются в радиолокационных установках.

Так же, как и волновод, кабель хорошо защищён от внешних помех. Это обеспечивается его конструкцией.

Коаксиальный кабель состоит из двух проводников: трубы круглого сечения и цилиндрического провода. Проводники располагаются концентрически и изолируются друг от друга высококачественным диэлектриком (полиэтилен, полистирол и др.). При исследовании процессов в кабеле будем считать его конструкцию совершенной, т.е. радиус внутреннего провода «а» и внутренний диаметр трубы *b* постоянны по всей длине кабеля, а диэлектрик, заполняющий трубу, однородным, с проницаемостью  $\varepsilon_0 \varepsilon_a = const$  и проводимостью  $\gamma = 0$ .

В начале примем сопротивление проводников кабеля равным нулю. Ось *Z* цилиндрической системы координат направим по оси внутреннего провода. Тогда амплитуды векторов  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  не будут зависеть от координаты.

При гармоническом законе изменения векторов поля по времени каждую из проекций  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  можно представить, например, следующим образом:

$$H_{\psi} = I_m \left\{ \dot{H}_{\psi m} e^{-\Gamma z} e^{j\omega y} \right\}. \quad (8.29)$$

Для того чтобы волна распространялась по кабелю без затухания, коэффициент распространения  $\Gamma$  должен быть мнимым. Кроме того, в выражениях проекций векторов поля, координата  $\psi$  не входит и, следовательно, их производные по  $\psi$  равны нулю.

Выясним, может ли по кабелю при заданных условиях распространяться поперечная электромагнитная волна ТЕМ, для которой  $E_z=0$  и  $H_z=0$ . Уравнения Максвелла в рассматриваемом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \Gamma \dot{H}_{\varphi m} &= j\omega \varepsilon_0 \varepsilon \dot{E}_{r m}; \\ \Gamma \dot{E}_{r m} &= j\omega \mu_0 \mu_r \dot{H}_{\varphi m}; \\ \frac{d(r\dot{H}_{\varphi m})}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

После умножения первых двух уравнений и деления на  $\dot{H}_{\varphi m} \dot{E}_{r m}$ , получим:

Поэтому волна ТЕМ может распространяться без затухания при любом значении частоты. Так как  $\Gamma = j\omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = j \frac{\omega}{v} = j\beta$

$$\begin{aligned} \frac{d(r\dot{H}_{\varphi m})}{dr} &= 0; \quad , mo \\ \dot{H}_{\varphi m} &= \dot{H}_m = \frac{const}{r}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Чтобы найти постоянную интегрирования, зададим её комплексной амплитудой  $I_m$  тока, проходящего по внутреннему проводнику. Тогда по закону полного тока:

$$\dot{H}_m = \frac{I_m}{2\pi a}. \quad (8.32)$$

Подставив,  $\Gamma = j\omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}$  получим:

$$\dot{E}_{r m} = \dot{E}_m = \dot{H}_m \cdot \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{I_m}{2\pi a} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (8.33)$$

Мгновенные значения векторов поля следующие:

$$\begin{aligned} H &= H_{\varphi} = H_m \sin(\omega t - \beta r) \\ E &= E_r = H_m \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \sin(\omega t - \beta r) \end{aligned} \quad (8.34)$$

Векторы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  совпадают по фазе. В любой точке они взаимно перпендикулярны. Их отношение – число действительное, равное:

$$\sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (8.35)$$

В любом объёме  $V$  энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

Напряжение между проводниками кабеля:

$$u = \int_a^b E dr = I_m \sqrt{\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \sin(\omega t - \beta r). \quad (8.36)$$

Ток:  $i = I_m \sin(\omega t - \beta r)$

Так как кабель без потерь, то ток и напряжение совпадают по фазе. Мы рассматривали режим одной бегущей волны (кабель без отражения), поэтому

$$Z_{BX} = r = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (8.37)$$

Индуктивность и ёмкость на единицу длины кабеля:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{L}{l} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \\ C_0 &= \frac{C}{l} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned} \quad (8.38)$$

Коэффициент распространения:  $\Gamma = \alpha + j\beta$

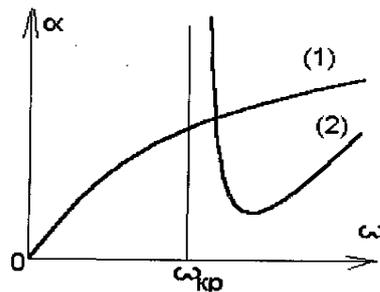


Рис.94. Зависимость коэффициента затухания

коаксиального кабеля от частоты

Коэффициент затухания:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\gamma} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}} \text{ нем/м} \quad (8.39)$$

На рис.94 приведены кривые  $\alpha = f(\omega)$  для коаксиального кабеля (1) и волновода (2). Помимо волны ТЕМ в коаксиальном кабеле могут распространяться и волны других типов. Для волны ТМ, векторы поля имеют проекции

$E_r, E_z$  и  $H_\psi$  и уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \Gamma \dot{H}_{\psi m} &= j\omega \epsilon_0 \epsilon \dot{E}_{r m} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{H}_{\psi m})}{\partial r} &= j\omega \epsilon_0 \epsilon \dot{E}_{z m} \\ -\Gamma \dot{E}_{r m} - \frac{\partial \dot{E}_{z m}}{\partial r} &= j\omega \mu_0 \mu_r \dot{H}_{\psi m} \end{aligned}$$

(8.40)

Выразим  $\dot{H}_{\psi m}$  и  $\dot{E}_m$  через  $\dot{E}_{zm}$  :

$$\dot{H}_{\psi m} = -\frac{j\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \cdot \frac{\partial E_{zm}}{\partial r};$$

$$\dot{E}_m = -\frac{\Gamma}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \cdot \frac{\partial E_{zm}}{\partial r}.$$
(8.41)

Проекция  $\dot{E}_{zm}$  определится из уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 \dot{E}_{zm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\dot{E}_{zm}}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2\right) \dot{E}_{zm} = 0.$$
(8.42)

Коэффициент распространения:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} - \frac{\omega^2}{v^2}}.$$

(8.43)

Для того чтобы волна ТМ распространялась по кабелю без затухания, коэффициент распространения должен быть мнимым. Это возможно при условии:

$$\frac{n\pi}{b-a} < \frac{\omega}{\mathcal{G}}. \quad (8.44)$$

Предельная частота  $\omega_{\text{КР}} = \frac{\pi n v}{b-a}$ . Распространение возможно только при частотах выше критической. Аналогичные соотношения получаются и для волны ТЕ. Подбирая "а и в" можно довести  $\omega_{\text{КР}}$  до такой величины, что бы волны ТЕ и ТМ не могли распространяться.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Каким образом осуществляется переход от колебательной системы к объёмному резонатору?
2. Какое преимущество имеет объёмный резонатор перед колебательной системой?
3. Расскажите о конструктивных особенностях объёмного резонатора.
4. Какими уравнениями описываются электромагнитные процессы в прямоугольном объёмном резонаторе?
5. Как ищется решение волнового уравнения для прямоугольного резонатора?
6. По какому закону меняется электромагнитное поле в идеальном резонаторе?
7. Каким граничным условиям должно удовлетворять волновое уравнение для напряжённости электрического поля в резонаторе?
8. Как изменяется картина поля при изменении индексов m, n, p?
9. Чему равна частота собственных колебаний резонатора?
10. Как определяется добротность резонатора?
11. Какими уравнениями описываются волны простейшего типа при синусоидальном во времени процесса в прямоугольном резонаторе?
12. От чего зависит частота собственных колебаний резонатора?
13. Чему равна длина волны прямоугольного резонатора?
14. Как определить уравнения линий векторов поля в прямоугольном резонаторе?

15. Постройте кривые зависимости  $E_m$ ,  $H_{xm}$ ,  $H_{ym}$  от соответствующих координат.

16. Как осуществляются колебания энергии электрического и магнитного поля прямоугольного резонатора?

17. От чего зависит мощность тепловых потерь в стенках резонатора?

18. Чему равна добротность резонатора?

19. Дайте определение коаксиальных линий, какие волны могут передаваться этими линиями?

20. Укажите условия, при которых могут возникать волны ТЕМ и ТМ?

## ГЛАВА 9. КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОВОЛН

### § 9.1. Классификация по диапазонам частот

Спектр электромагнитных волн состоит из радиоволн, инфракрасных, видимых световых и ультрафиолетовых волн, рентгеновского и  $\gamma$ -излучений. Радиоволны занимают низкочастотную часть электромагнитного спектра и, в свою очередь, делятся на диапазоны, наименования, границы которых в соответствии с принятым регламентом радиосвязи приведены в таблице.

Номер полосы	Диапазон частот (исключая нижний предел, включая верхний предел)	Метрическое подразделение длин волн	Сокращенное буквенное обозначение
4	от 3 до 30 кГц	мираметровые	ОНЧ
5	от 30 до 300 кГц	километровые	НЧ
6	от 300 до 3000 кГц	гектометровые	СЧ
7	от 3 до 30 МГц	декаметровые	ВЧ
8	от 30 до 300 МГц	метровые	ОВЧ
9	от 300 до 3000 МГц	дециметровые	УВЧ
10	от 3 до 30 ГГц	сантиметровые	СВЧ
11	от 30 до 300 ГГц	миллиметровые	КВЧ
12	от 300 до 3000 ГГц	децимиллиметровые	ОКВЧ

Мираметровые, километровые, гектометровые и декаметровые соответствуют названиям: сверхдлинные (СДВ), длинные (ДВ), средние (СВ), короткие (КВ). В соответствии с этой классификацией спектр радиочастот подразделяется на девять частотных полос, которые обозначаются целыми числами от 4 до 12 в возрастающем порядке. Полоса с номером  $N$  охватывает диапазон частот от  $0,3 \cdot 10^N$  до  $3 \cdot 10^N$ . Пользуясь выражением, которое определяет границы частотных полос, легко оценить их канальную емкость, то есть число возможных для размещения независимых радиоканалов.

Если предположить, что каждый телефонный канал занимает спектр частот 2700 Гц, то число каналов в каждой полосе определится выражением:

$$m_N = (3 \cdot 10^N - 0,3 \cdot 10^N) / 2700 = 10^{N-3}$$

При  $N=4$  (диапазон СДВ)  $m_4 = 10$ ; при  $N=11$  (диапазон миллиметровых длин волн)  $m_{11} = 10^8$ . Возможность размещения в диапазоне УКВ (к диапазону УКВ относятся частотные полосы с 8 по 12-ю включительно) большого числа радиоканалов является его основным достоинством, обуславливающим быстрое освоение. Этот же фактор определяет освоение радиоволн оптического диапазона.

## § 9.2. Классификация по возможным механизмам распространения

Принято выделять четыре классификационные группы, под которые подходят возможные механизмы распространения радиоволн (рис.95):

- радиоволны свободно распространяющиеся или прямые;
- земные;
- тропосферные;
- ионосферные.

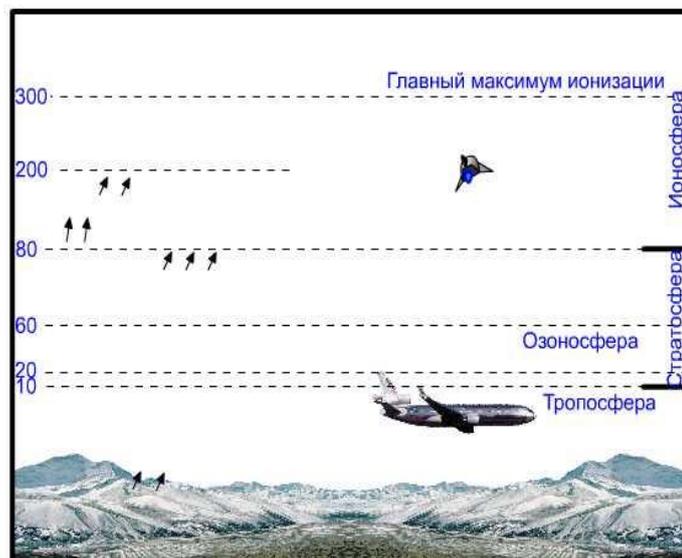


Рис.95. Распространение радиоволн

Земные волны распространяются вдоль земной поверхности. Будучи созданы антенной, находящейся в непосредственной близости от нее, они способны распространяться на большие расстояния за счет дифракционного огибания ее сферической выпуклости (рис.96).

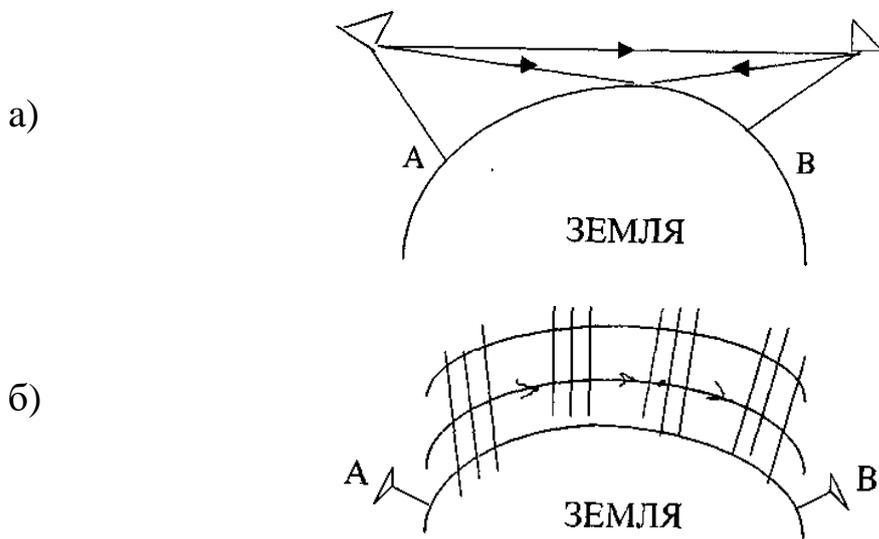


Рис.96. Распространение земных волн

Наиболее ярко такой механизм распространения проявляется в областях ОНЧ и НЧ. По мере увеличения частоты возможная дальность распространения земных радиоволн резко падает. На высоких и очень высоких частотах земные волны имеют свои характерные особенности, обусловленные пространственной интерференцией прямых и отраженных от поверхности Земли радиоволн.

Характерным моментом в данном случае является большая высота установки антенн над Землей в сравнении с длиной волны. Тропосферные волны (рис.97) образуются вследствие рассеяния и отражения радиоволн на турбулентных и слоистых неоднородностях коэффициента преломления в тропосфере. Тропосферой называют нижнюю, примыкающую к поверхности Земли часть атмосферы, характеризуемую примерно линейным законом убывания температуры с ростом высоты. Хотя основной поток энергии, излученный передающей антенной, проходит сквозь тропосферу в прямом направлении, отражение и рассеяние радиоволн служат причиной существования электромагнитного поля далеко за пределами горизонта, вне границ прямой видимости.

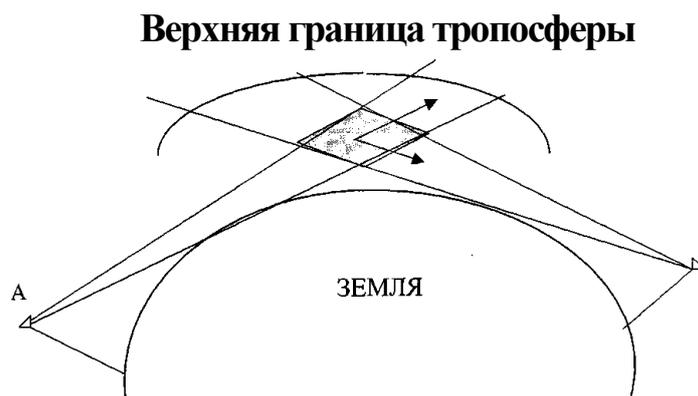


Рис.97. Распространение тропосферных волн

Механизм образования тропосферных волн не является единственно возможным. Существуют и другие механизмы, вызванные рефракционными явлениями. Рефракция представляет собой искривление траектории радиоволны при ее распространении в неоднородной среде, примером которой может служить атмосфера, в частности, ее нижняя часть - тропосфера.

Ионосферные волны (рис.98) обязаны своим существованием наличию в верхних слоях атмосферы на высотах, превышающих 60 км, плазмы - смеси сильно разреженных газов с большим числом электронов, а также положительно и отрицательно заряженных ионов молекул различных газов.

Для радиоволн некоторых частотных диапазонов ионосфера представляет неоднородную среду. В результате волна, попавшая в ионосферу, испытывает рефракцию. При определенных условиях в ионосфере наблюдается явление полного внутреннего отражения, и радиоволна возвращается к поверхности Земли, претерпев как бы гигантский скачок несколько тысяч километров. Такой механизм распространения является основным в диапазоне коротких волн.

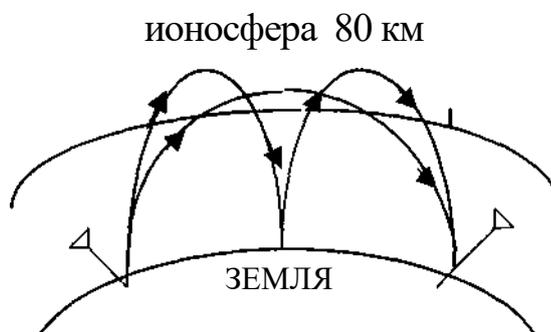
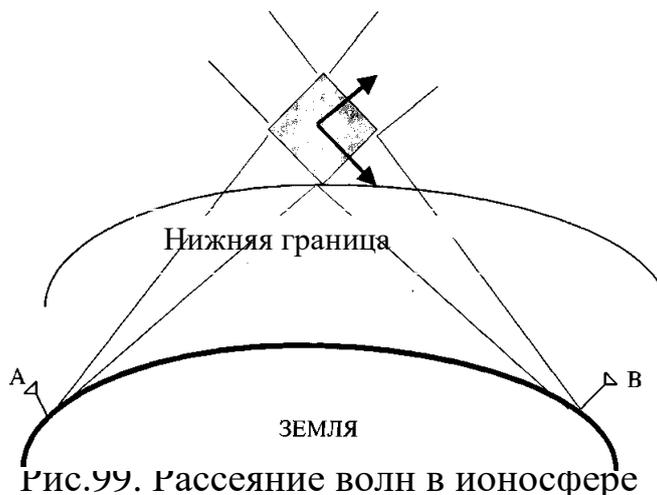


Рис.98. Распространение ионосферных волн

Ионосферные волны образуются и другим образом – путем рассеяния на локальных неоднородностях в ионосфере. При этом механизм образования ионосферных волн, в какой - то мере подобен механизму образования тропосферных волн (рис.99). Прямые или свободно распространяющиеся радиоволны не связаны с присутствием поверхности Земли и ее атмосферы, хотя они и могут оказывать существенное влияние на условия распространения. В качестве прямых радиоволн могут существовать волны всех частотных диапазонов. Примером использования таких волн могут служить линии радиосвязи "Земля-Космос" и "Космос - Космос". Причины, определяющие существование одного механизма распространения радиоволн,

могут оказывать достаточно сильное влияние на условия распространения радиоволн другого механизма.



Например, на условия распространения земных волн в сантиметровом диапазоне очень сильное влияние оказывает тропосфера Земли. В результате этого влияния напряженность поля в точке приема неустойчива во времени, подвержена изменениям, носящим случайный характер. Радиоволны можно классифицировать по устойчивости уровня напряженности поля во времени.

### § 9.3 Распространение радиоволн в однородных поглощающих средах

Для свободного пространства  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $\rho = 0$ ,  $\gamma = 0$ . Если параметры среды неодинаковы для разных точек исследуемого пространства, то такие среды относятся к неоднородным. В ряде случаев параметры среды зависят от частоты распространяющихся в них электромагнитных волн. Такие среды называют диспергирующими. Условия распространения радиоволн в однородных и неоднородных средах существенно различаются. Рассмотрим механизм распространения сферических волн в однородной поглощающей среде. Среду характеризуем параметрами  $\epsilon \neq 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $\rho = 0$ .

$$\text{Если } \frac{\epsilon}{60\lambda\gamma} \gg 1 \quad \text{- диэлектрик;}$$

$$\frac{\epsilon}{60\lambda\gamma} \ll 1 \quad \text{- проводник;}$$

$$\frac{\epsilon}{60\lambda\gamma} \approx 1$$

- полупроводник.

Коэффициент преломления  $n = \sqrt{\varepsilon}$  :

$$n = \sqrt{\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon)^2 + (60\lambda\gamma)^2}}. \quad (9.1)$$

Коэффициент поглощения

$$p = \sqrt{\varepsilon - \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon)^2 + (60\lambda\gamma)^2}} \quad (9.2)$$

Скорость распространения и степень поглощения монохроматических электромагнитных волн в поглощающих средах зависят от параметров среды и частоты. В средах неоднородных механизм распространения радиоволн существенно меняется. Путь, проходимый волной, становится криволинейным. Характер и степень искривления траектории движения радиоволны зависят от характера и степени неоднородности среды, а также от направления вхождения волны в среду. Искривление траектории электромагнитных волн в неоднородной среде носит наименование рефракции. Физической причиной искривления траектории в неоднородных средах является неодинаковость скоростей распространения отдельных участков волнового фронта волны. Рефракция может существенно влиять на механизм распространения земных и прямых волн, а кроме того, являться причиной существования определенных видов тропосферных и ионосферных волн.

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:**

1. Как классифицируются радиоволны по диапазонам частот?
2. Что называется канальной ёмкостью?
3. Как классифицируются радиоволны по возможным механизмам распространения?
4. Каков механизм распространения земных волн?
5. Какие волны называют тропосферными, ионосферными?
6. Каковы особенности распространения радиоволн в однородных поглощающих средах?
7. Как образуются тропосферные волны?
8. Чем обязаны своим существованием ионосферные волны?
9. Каковы причины существования прямых или свободно распространяющиеся радиоволны и где они используются?

10. От чего зависит скорость распространения и степень поглощения электромагнитных волн в поглощающих средах?

## ГЛАВА 10. ЗЕМНЫЕ РАДИОВОЛНЫ УКВ ДИАПОЗОНА

### § 10.1 Земные радиоволны над плоской поверхностью Земли

Механизм распространения земных радиоволн в целом достаточно сложен как с точки зрения наблюдаемых физических явлений, так и с точки зрения математического аппарата. Сложность обусловлена влиянием множества факторов: высоты установки антенны над поверхностью Земли, параметров почвы, характера поляризации волны, длины волны, кривизны поверхности Земли, расстояния до передающей антенны. Кривизна поверхности Земли требует дополнительного учета дифракционных явлений. Атмосфера Земли также накладывает свои закономерности, связанные с рефракцией. Пусть антенны установлены на большой высоте над поверхностью Земли, так как только при этом условии на УКВ может быть осуществлена радиосвязь на расстояниях до нескольких десятков километров (рис 100). Предположим, что нам заданы: коэффициенты усиления антенн  $G_1$  и  $G_2$ , высоты антенн  $h_1$  и  $h_2$ , параметры почвы  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ , расстояние между пунктами передачи и приема  $r$ , излучаемая передающей антенной мощность  $P_\Sigma$ , длина волны  $\lambda$ , поляризация волны, обусловленная передающей антенной. Требуется определить напряженность поля в точке приема:

$$E_1 = \frac{245\sqrt{PG_1}}{r_1} \cdot e^{j(\omega t - kr_1)}. \quad (10.1)$$

$$E_2 = \frac{245\sqrt{PG_2}}{r_2} \cdot e^{j(\omega t - kr_2) - j\theta}. \quad (10.2)$$

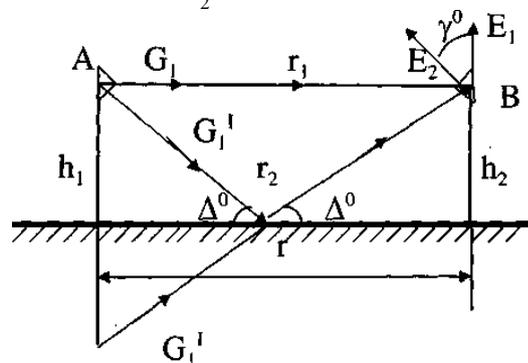


Рис.100. Земные радиоволны над плоской поверхностью земли

Для наиболее часто встречающихся высоты антенн значительно меньше расстояния между ними. Это позволяет полагать, что вектора полей  $E_1$  и  $E_2$  коллинеарны

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \quad \Delta r = r_2 - r_1 \approx \frac{2h_1 h_2}{r} \quad G_1 = G_1'$$

В результате сложения полей, имеем:

$$E = E_1 + E_2 = E_1 \left[ 1 + \operatorname{Re}^{-j(2\pi\Delta r/\lambda + \theta)} \right] = E_1 F. \quad (10.3)$$

Множитель ослабления:

$$F = \left| 1 + \operatorname{Re}^{-j(2\pi\Delta r/\lambda + \theta)} \right|. \quad (10.4)$$

Множитель ослабления отражает интерференционный характер изменения напряженности суммарного поля в зависимости от расстояния между антеннами, от высот расположения антенн и от рабочей длины волны, там где

$$\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r} + \theta = 2k\pi. \quad (10.5)$$

$$F_{\max} = 1 + R; \quad \text{при} \quad \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r} + \theta = (2k - 1)\pi. \quad (10.6)$$

$$F_{\min} = 1 - R, \quad (\kappa = 1, 2, 3 \dots).$$

**В диапазоне УКВ при  $h_1 \ll r$  и  $h_2 \ll r$  угол  $\Delta$  весьма мал и**

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{h_1 + h_2}{r} \approx \Delta \text{ рад}. \quad (10.7)$$

При этом можно полагать, что  $R = 1$ , а  $\theta = 180^\circ$ . Тогда  $F_{\max} = 2$ , а  $F_{\min} = 0$ , формула приобретает вид:

$$F = 2 \left| \sin \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda r} \right|. \quad (10.8)$$

График зависимости  $F(r)$  приведен на рисунке 101:

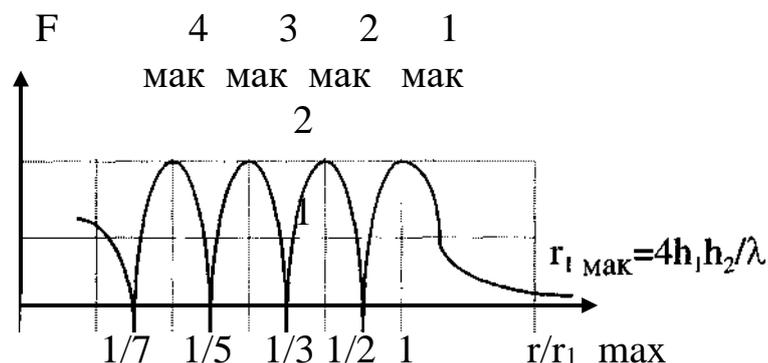


Рис.101. Множитель ослабления в зависимости от расстояния между антеннами

Первый интерференционный максимум наблюдается при:

$$\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda r_k} \leq \frac{\pi}{9}; \quad r_k \geq \frac{18h_1 h_2}{\lambda}; \quad F = \frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda r}. \quad (10.10)$$

Напряженность поля для расстояний, превышающих  $r_k$  обратно пропорциональна квадрату расстояния, то есть:

$$E_d \approx \frac{2,18\sqrt{PG_1}}{r^2} \cdot \frac{h_1 h_2}{\lambda}. \quad (10.11)$$

## § 10.2. Земные радиоволны над сферической поверхностью Земли

Механизм распространения земных волн над гладкой сферической поверхностью Земли во многом сходен с механизмом распространения радиоволн над гладкой плоской поверхностью. Расстояние прямой видимости при заданных высотах подвеса антенн  $h_1$  и  $h_2$  (рис.102):

$$r_0 = 3,57 * (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}). \quad (10.12)$$

Различают 3 зоны:

$$r < 0,7r_0;$$

$$0,7r_0 \leq r \leq 1,3r_0;$$

$$r > 1,3r_0.$$

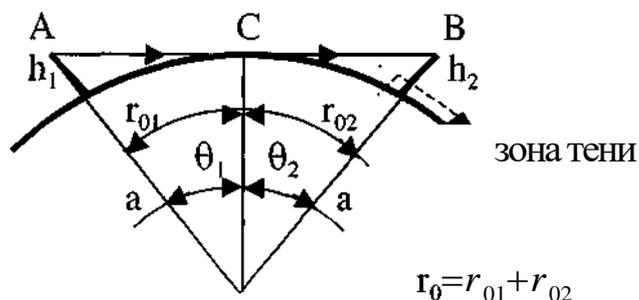


Рис.102. Земные радиоволны над сферической поверхностью земли

Положение границ этих зон определяется сменой характера зависимости напряженности электромагнитного поля от расстояния. Для количественной оценки величины суммарного поля достаточно ввести понятие "приведенных высот" передающей и приемной антенн над плоскостью горизонта.

Приведенными высотами  $h_1^1$  и  $h_2^1$  называют высоты передающей и приемной антенн над плоскостью горизонта, касающейся поверхности Земли в точке формирования отраженного луча С (рис.103).

Разность хода лучей и угол  $\Delta$ , под которым волна падает и отражается от поверхности Земли:

$$\Delta r = 2 \frac{h_1^1 h_2^1}{r}; \quad (10.13)$$

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{(h_1^1 + h_2^1)}{r}. \quad (10.14)$$

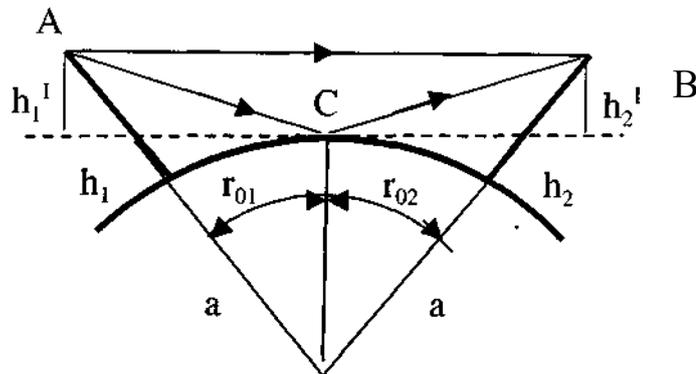


Рис.103. Разность хода лучей между падающей и отраженной волнами

Поле в области полутени и тени, обусловленное дифракционными явлениями, существенно ослаблено, в сравнении с полем в освещенной области. Множитель ослабления сильно убывает как с ростом частоты, так и с ростом расстояния. Для освещенной зоны множитель ослабления снижается до величины несколько десятков децибел, в области тени он падает до сотен децибел. Это исключает возможность использования подобного механизма распространения для практических целей, особенно в высокочастотной части УКВ диапазона на дециметровых и более коротких волнах. В низкочастотной части УКВ диапазона, на метровых волнах, на небольших удаленьях от границы освещенной зоны в областях полутени и тени напряженность поля может достигнуть заметных величин, достаточных для практического использования.

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:**

1. Как классифицируются радиоволны по диапазонам частот?
2. Что называется канальной ёмкостью?
3. Как классифицируются радиоволны по возможным механизмам распространения?
4. Каков механизм распространения земных волн?
5. Какие волны называют тропосферными, ионосферными?
6. Каковы особенности распространения радиоволн в однородных поглощающих средах?
7. Как образуются тропосферные волны?
8. Чем обязаны своим существованием ионосферные волны?
9. Каковы причины существования прямых или свободно распространяющиеся радиоволны и где они используются?
10. От чего зависит скорость распространения и степень поглощения электромагнитных волн в поглощающих средах?
11. Каковы особенности распространения земных радиоволн над плоской поверхностью Земли?
12. Условия интерференционных максимумов для земных радиоволн.

13. Особенности распространения земных радиоволн над сферической поверхностью Земли.

14. Для какой части частотного диапазона волн УКВ возможен данный механизм распространения?

15. Каков механизм распространения земных радиоволн?

16. Какой диапазон волн используется для осуществления радиосвязи на расстояниях до несколько десятков километров?

17. Чем отличается механизм распространения земных волн над гладкой сферической поверхностью Земли от распространения радиоволн над гладкой плоской поверхностью?

18. Какое сходство механизма распространения земных волн над гладкой сферической и плоской поверхностями?

19. Как ведет себя множитель ослабления для освещенной зоны и в области тени?

20. В каких случаях, в каком частотном диапазоне УКВ могут применяться волны в областях полутени и тени?

## **ГЛАВА 11. ТРОПОСФЕРНЫЕ И ИОНОСФЕРНЫЕ ВОЛНЫ**

### **§ 11.1. Тропосферные волны**

Различают два вида тропосферных волн: тропосферные волноводные каналы (ТВК) и дальней тропосферное рассеяние (ДТР).

Слоистая неоднородность тропосферы по высоте приводит к рефракции. Тропосферные волноводные каналы образуются при сверхрефракции, когда радиус траектории луча становится меньше радиуса поверхности земного шара ( $\rho < a$ ). Допустим, что вертикальный профиль индекса преломления тропосферы имеет вид, приведённый на рис.104.:

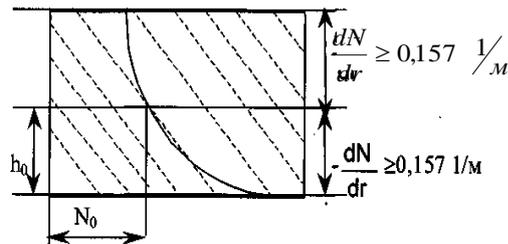


Рис.104. Слоистая неоднородность тропосферы

Сетка пунктирных линий соответствует критическому значению градиента индекса преломления:

$$\rho = a_K \sin \theta \frac{dN_T}{dr} = 0,157 \frac{1}{M} \quad (11.1)$$

В пределах некоторых высот градиент индекса преломления больше критического значения, следовательно, тут наблюдается сверхрефракция, при которой лучи испытывают полное внутри нее отражение. Из всего пучка лучей, идущих от антенны (рис.105.), только некоторая часть лучей в секторе  $\pm \alpha_{кр}$  будет претерпевать полное внутреннее отражение, как бы захватываясь некоторым волноводным каналом.

Лучи, составляющие углы с плоскостью горизонта, больше  $|\alpha_{кр}|$  (лучи 1 и 2), испытывая постепенное искривление траектории, не смогут перекрыть полного внутреннего отражения в границах области. Но и не попадут в тропосферный волновод, т.к. для них не выполняется условие  $\rho < a$ . Часть лучей, идущая ниже плоскости горизонта, проведённой через излучатель, также захватывается волноводом, не только после предварительного отражения от поверхности Земли. Данный механизм распространения называется волноводным, в силу того, что у него много общего с механизмом распространения радиоволн в диэлектрических волноводах. Волны, длины которых превышают критическую длину, в тропосферном волноводе не распространяются.

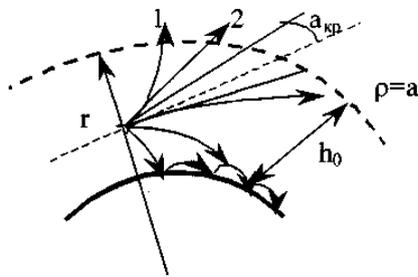


Рис.105. Сверхрефракция тропосферных волн

Высота тропосферного волновода  $h_0$ , как правило, не превышает несколько метров, следовательно, по ним могут распространяться только радиоволны УКВ диапазона. Условия возникновения тропосферных волноводов (рис.106) большей частью носят случайный характер, как во времени, так и пространстве, следовательно, такой механизм необходимо рассматривать как один из возможных путей распространения радиоволн на большие расстояния.

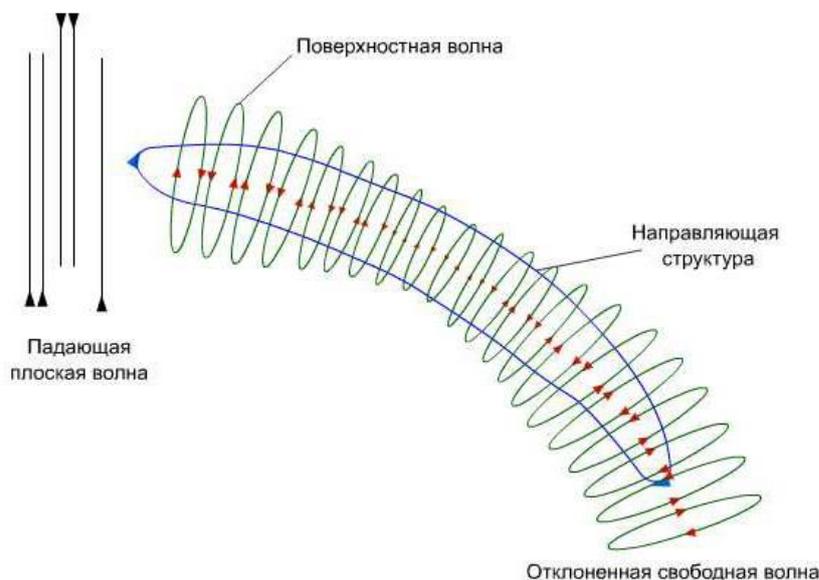


Рис.106. Условия возникновения тропосферных волноводов

## § 11.2. Дальнее тропосферное рассеяние

При использовании передатчиков с мощностью в десятки киловатт, передающих и приёмных антенн с коэффициентами усиления порядка 30-40 дБ и высокочувствительных приемников, радио связь, возможно, установить на расстояниях до 1000км. Такое сверхдальнее распространение УКВ вызвано с рассеянием УКВ на турбулентных и слоистых неоднородностях в тропосфере. Механизм распространения радиоволн за счет рассеяния дает уровень сигнала на десятки, а иногда и сотни децибел выше в сравнении с дифракционным методом. Для понимания основных явлений при ДТР требуется использование некоторых специфических

терминов, в частности: удельная эффективная площадь рассеяния, рассеивающий объём, «потеря» усиления антенны.

Для передающей и приёмной антенн поверхность Земли создаёт резкую границу между освещённой и затенённой областями, поэтому приём волн оказывается возможным лишь из некоторого общего объёма, видимого из фазовых центров передающей и приёмной антенн. Определим мощность, развиваемую во входных цепях приёмника (рис.107.).

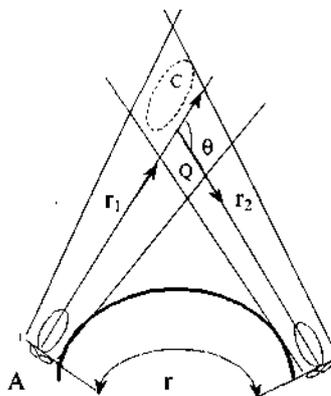


Рис.107. Дальнее тропосферное рассеяние

В точке С передняя антенна создаёт плотность тока энергии:

$$P_c = \frac{P_1 G_1}{4\pi r_1^2}. \quad (11.2)$$

Эффективной площадью рассеяния тела называется величина (имеющая размерность площади), которая, будучи умноженная на плотность потока энергии первичного поля (в месте расположения рассеивающего в тела) и разделенная на  $4\pi r_2^2$  (где  $r_2$  - расстояние от рассеивающего тела до точки приёма) даёт плотность потока энергии рассеянного (вторичного) поля в месте нахождения приёмной

антенны. Удельная эффективная площадь рассеяния единицы объёма тропосферы обозначим  $\sigma(\theta)$ . Произведение  $P_c \sigma(\theta)$  характеризует мощность вторичного излучения единицы объёма тропосферы. Интенсивность рассеяния зависит от угла рассеяния  $\theta$ . Удельная эффективная площадь рассеяния единицы объёма имеет размерность  $M^{-1}$ .

Переизлученную элементом объёма мощность можно определить выражением:

$$dP_c = \frac{P_1 G_1 \sigma(\theta)}{4\pi r_1^2}. \quad (11.3)$$

Плотность потока энергии волны в месте распространения приёмной антенны:

$$d\Pi_B = \frac{dP_c}{4\pi r_2^2}. \quad (11.4)$$

Мощность, извлекаемая приёмной антенной:

$$dP_2 = d\Pi_B A_2, \quad (11.5)$$

где  $A_2$ -эффективная поверхность приёмной антенны, связанная с коэффициентом усиления  $G$ :

$$A_2 = \frac{(G_2 \lambda^2)}{4\pi}, \quad (11.6)$$

поэтому:

$$dP_2 = \frac{P_1 G_1 G_2 \lambda^2 \sigma(\theta)}{(4\pi r_1 r_2)^2 4\pi}, \quad (11.7)$$

$dP_2$  - мощность, извлекаемая антенной из электромагнитного поля рассеянного одиночным элементом рассеивающего объёма.

Полная мощность:

$$P_2 = \frac{P_1 G_1 G_2}{4\pi^2} \int \frac{\sigma(\theta)}{(r_1 r_2)^2} dV = P_0 F^2. \quad (11.8)$$

Переизлученное неоднородностью поле отличается весьма сильной пространственной неравномерностью с резко выраженными максимумами переизлучения в прямом и зеркальном отображении.

Переизлученное неоднородностью поле для всех направлений пропорционально среднеквадратическому значению флуктуации диэлектрической проницаемости тропосферы.

Неравномерность углового распространения переизлученного неоднородностью поля растёт с ростом частоты первичного поля, падающего на тропосферу. При ДТР в процессе переизлучения энергии принимает участие ограниченная область освещенной части пространства между точками передачи и приёма - тропосферный объём излучения  $Q$ .

Анализ показывает, что множитель ослабления пропорционален величине рассеивающего объёма. Однако использование антенн с высокой направленностью приводит к уменьшению рассеивающего объёма и к уменьшению  $P_2$ . Следовательно, при увеличении усиления антенн мощность сигнала в месте приёма будет увеличиваться не пропорционально увеличению, а медленней (рост уровня сигнала отстаёт от роста усиления антенн).

### § 11.3 Ионосферные радиоволны в метровом диапазоне длин волн

Говоря об ионосферных волнах в УКВ диапазоне, следует разграничивать три возможных механизма их образования, в основе которых лежат: отражение радиоволн регулярным F и нерегулярным E<sub>s</sub> слоями, рассеяние радиоволн слоистыми и локальными неоднородностями, отражение и рассеяние радиоволн на метеорных следах. Причём эти явления наблюдаются только в метровом диапазоне длин волн.

Радиоволны всех остальных поддиапазонов, входящих в УКВ диапазон, ни при каких условиях ионосферой не отражаются и не рассеиваются. При анализе влияния, которое оказывает ионосфера на распространяющиеся в ней волны, было сформулировано условие возвращения луча на поверхности Земли под воздействием ионосферной рефракции:

$$\sin \varphi_0 = \sqrt{1 - 80,8 \frac{N_U}{f^2}}, \quad (11.9)$$

где  $\varphi_0$  - угол падения волны на нижнюю границу ионосферы;

$N_U$  - электронная концентрация;

$f$  - частота.

Электронная концентрация слоев ионосферы изменяется в течение суток, года и одиннадцатилетнего цикла активности Солнца. Для волн УКВ диапазона это условие не выполняется; электронная концентрация в слоях оказывается недостаточным для отражения радиоволн указанной частоты. Следовательно, на этих частотах ионосфера практически прозрачна для падающих на неё радиоволн. Однако в годы повышения солнечной активности электронная концентрация ионосферы в слоях F резко возрастает, что делает возможным отражение радиоволн низкочастотной части УКВ диапазона для падающих на ионосферу лучей. В годы повышения активности Солнца на волнах 6-10 м возможно установление радиосвязи на расстояние, превышающее 2000 км. При однократном отражении от ионосферы максимальная дальность составляет 3500-4000 км; при двукратном 7000-8000 км отраженная слоем F волна отсутствует, т.к. угол вхождения луча в ионосферу при такой дальности радиосвязи не будет достаточным. В некотором смысле аналогичная картина явлений наблюдается при отражении радиоволны от так называемого «спорадического» (нерегулярного) слоя E<sub>s</sub>, представляющего собой ограниченную область ионосферы на высоте регулярного слоя E (100-120 км), состоящую из электронных облаков «решетчатой» структуры.

Максимальная дальность распространения не превышает 2000-2500 км, а минимальная - до 1000 км. Появление слоя E<sub>s</sub> вызывает взаимные помехи станций, работающих в диапазоне метровых волн и разнесённых на расстояние 1000-2000 км. В ряде случаев возникновение слоя E<sub>s</sub> служит также причиной сверхдальнего приема телевизионных программ.

## § 11.4. Отражение и рассеяние радиоволн на метеорных следах

В атмосфере Земли, движущейся вокруг Солнца со скоростью 30 км/с, непрерывно вторгается из мирового пространства огромное количество мелких частиц, называемых метеорами. Влетая в атмосферу Земли с такими огромными скоростями, метеоры накаляются вследствие трения о воздух, плавятся и в большинстве случаев испаряются. Этот процесс сопровождается интенсивной ионизацией, происходящих на высотах 80-120 км. Ионизированный метеорный след в начальной стадии представляет собой узкий цилиндрический столб газа примерно метрового диаметра средней протяженностью 15 км. Метеорные следы являются источником переизлучения и рассеяния радиоволн, направляемых с поверхности Земли в ионосферу.

При определённой ориентации метеорного следа и достаточной его электронной плотности переизлучаемая волна обнаруживается на расстоянии 2000 км (рис.108.).

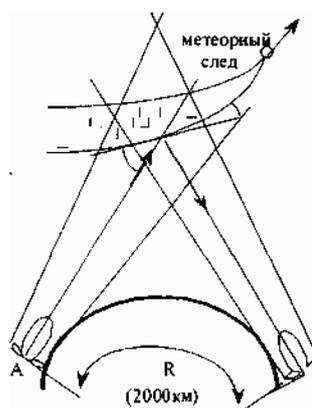


Рис.108. Отражение и рассеяние радиоволн на метеорных следах

Сигнал в точке приёма  $P(t)$  существует в течение ограниченного промежутка времени  $t$ . Именно в эти промежутки  $P(t) > P_{\text{мин}}$  наблюдаются удовлетворительные условия прохождения радиоволн. В отличие от обычных систем радиосвязи в данном случае используется принцип «прерывистой связи».

Он заключается в том, что информация с высокой скоростью передаётся по частям, кратковременными сеансами, лишь в период существования на трассе метеорных следов требуемой пространственной ориентации и электронной плотности. При их отсутствии аппаратура работает в «ждущем» режиме, производя предварительные накопления информации в запоминающих устройствах с тем, чтобы при открытии канала опять передать её с высокой скоростью.

При мощности излучения порядка 1кВт можно использовать полосу частот 15-20 кГц. При увеличении мощности до 20-30 кВт ширина полосы частот может быть 100-200 кГц. Наиболее благоприятен для метеорной связи 30-50 МГц.

### § 11.5. Свободно распространяющиеся радиоволны УКВ диапазона в системах космической связи

Космической связью принято называть связь с наземной радиостанции с объектом, находящимся в космосе, а также связь между наземными пунктами путем ретрансляции через искусственный спутник Земли (ИСЗ), находящийся в космосе. Обмен информацией между земными пунктами через ретранслятор возможен только на волнах, свободно проходящих сквозь всю толщу атмосферы и позволяющие осуществлять широкополосную передачу.

К таким волнам относятся высокочастотная часть диапазона УКВ, инфракрасные и оптические волны. Можно установить радиосвязь свободно распространяющимися волнами на расстоянии до 20000 км. Если на борту ИСЗ имеется приемно-передающая аппаратура, то система ретрансляции называется активной, в отличие от пассивной, когда радиоволны в точку приёма попадают путём отражения или рассеяния телом спутника (рис.109).

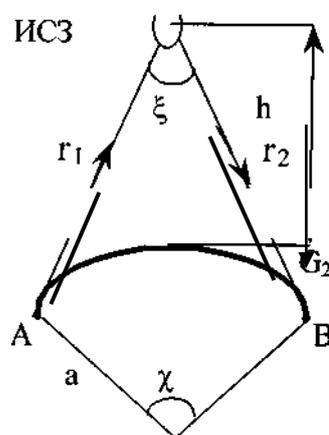


Рис.109. Свободно распространяющиеся радиоволны УКВ в системах космической связи

Для пределов круглосуточной связи между пунктами А и В, спутник должен находиться на квазистационарной орбите, т.е. быть строго неподвижным.

Это условие выполняется, если орбита спутника круговая, экваториальная и её радиус 35000 км. Максимальный угол  $\xi = 180^\circ$ , а

$\chi=162^\circ$ , максимальное расстояние до Земли 18000 км, а расстояние от спутника до А и В 40900 км. Мощность во входных цепях приёмника:

$$P_2 = \frac{P_1 G_1 G_2 \lambda^2 \sigma F^2}{(4\pi)^3 (r_1 r_2)^2}, \quad (11.10)$$

где:

$P_1$  - мощность передатчика в кВт

$G_2$  - усиление передатчика в направлении ИСЗ

$G_1$  - коэффициент усиления приёмной антенны в направлении ИСЗ

$r_1$  и  $r_2$  - расстояние от передатчика и приёмника до ИСЗ в км.

$F$  - множитель ослабления на всей трассе

$\sigma$  - эффективная площадь рассеяния ИСЗ в направлении на пункт приёма

Эффективная площадь рассеяния:

$$\sigma = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (11.11)$$

Условием нормальной работы является:

$$P_2 > P_{2\text{ мин}}, \quad \text{где } P_{2\text{ мин}} = 10^{-10} - 10^{-18} \text{ Вт}$$

Всеми видами потерь можно пренебречь в диапазоне 3-6 ГГц, только сильный дождь может дать затухание. На частотах ниже 3 ГГц основную роль играют поляризационные потери, которые на частоте 1 ГГц составляют 5-7 дБ. На частотах 6 ГГц появляются потери в атмосферных газах, которые на частоте 10 ГГц составляют 10 дБ. Радиопрозрачное окно оказывается несколько шире при прохождении волной атмосферы по кратчайшему пути (угол возвышения к горизонту близок  $90^\circ$ ). Волны испытывают рефракцию, подвержены замираниям, испытывают смещение спектра частот (эффект Доплера) при использовании нестационарных ИСЗ, а также относительно сильно запаздывают во времени, что делает затруднительной двухстороннюю телефонную связь при нескольких ретрансляциях.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Какие виды тропосферных волн существуют?
2. Каков механизм распространения тропосферных волн?
3. Что называется эффективной площадью рассеяния?
4. Какова мощность; извлекаемая приёмной антенной?
5. Какие три возможных механизма образования ионосферных волн?
6. Какова максимальная и минимальная дальность распространения ионосферных волн?
7. Особенности отражения и рассеяния радиоволн на метеорных следах.

8. Каковы особенности свободно распространяющихся радиоволн УКВ диапазона в системах космической связи?

9. Чем отличается явление рассеяния радиоволн УКВ диапазона на слоистых и локальных неоднородностях ионосферы от дальнего тропосферного рассеяния?

10. Что важно для проектирования линий радиосвязи, использующих метеорные следы?

## ГЛАВА 12. ЗАМИРАНИЕ РАДИОВОЛН

### § 12.1. Замирания земных радиоволн

Предположим, что трасса проходит в холмистой местности и точка приёма находится в зоне прямой видимости (при отсутствии рефракции). Исследуя напряжённость поля в различные моменты времени, находим, что она не остаётся постоянной, а изменяется, причём в значительных пределах.

Характер этого изменения показан на рисунке. Причиной колебаний (запираний) напряжённости поля является нестабильность во времени метеорологических условий в районе трассы, приводящая к изменению вертикального градиента диэлектрической проницаемости тропосферы и к появлению в ней слоев с резко отличающимся значением диэлектрической проницаемости. В зависимости от особенностей трасс могут наблюдаться замирания различного типа.

На слабо холмистых трассах, а также на трассах с протяжёнными плоскими холмами замирания обусловлены случайным изменением разности фаз прямого и отражённого от поверхности Земли лучей.

Такие замирания называют рефракционными интерференционного типа. Они носят быстрый характер, их средняя длительность при глубине порядка 25-30 дБ определяется секундами и десятками секунд. Длительность замираний определяется средним промежутком времени между максимальным и минимальным, следующим друг за другом во времени, значениями множителя ослабления. В данном случае изменения множителя ослабления на 25-30 дБ происходит за время от одной до десяти секунд. Аналогичный характер замираний наблюдается за счёт влияния слоистых неоднородностей тропосферы; показанный на рис.110. Быстрые замирания являются селективными, т.е. частотно-избирательными. Если на данной трассе распространяется волна с широким спектром, то замирания будут наблюдать на всех частотах, но не одновременно.

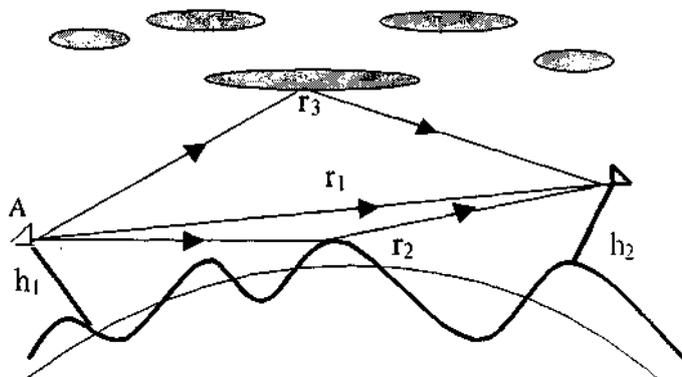


Рис.110. Отражение волн на холмистых трассах

Земли луч практически отсутствует, и под заметных слоистых образований в тропосфере, замирания обусловлены уменьшением просвета между

прямым лучом и вершинами холмов и попаданием приемной антенны в область глубокой тени.

Эти замирания достаточно медленны и не обладают частотной избирательностью, т. е. уровень сигнала падает одновременно для всех частот широкого спектра радиосигнала. Такие замирания называют "Рефракционными замираниями за счёт влияния затеняющих препятствий". Для описания свойств замирающих полей и уточнения оценки запаса энергетического потенциала линий вводят некоторые понятия и определения.

Предположим, что изменяющиеся во времени поле наблюдается в течение какого-то промежутка времени  $T$ . (В зависимости от целей исследования он может длиться от минут до суток и более). Мгновенные значения напряжённости поля являются случайными величинами, и их и характеризуют функцией распределения. Функция распределения определяет процент времени в интервале  $T$ , в течение которого мгновенное значение амплитуду вектора напряжённости поля (или множителя ослабления) превышает наперёд заданную величину, пробегающую все возможные значения (уровни) при данном исследовании. Характерный вид функции распределения приведён на рисунке.

По оси абсцисс отложена вероятность  $P$  (в процентах), а по оси ординат соответствующий данной вероятности уровень напряжённости поля.

Однако, эти уровни задаются в относительных единицах в сравнении с полем свободного пространства  $E_0$  или медианным полем  $E_{мед}$  и выражаются в логарифмических единицах-децибелах (рис.111):

$$F(\text{дБ}) = 20 \lg\left(\frac{E}{E_0}\right); \quad F(\text{дБ}) = 20 \lg\left(\frac{E}{E_{мед}}\right). \quad (12.1)$$

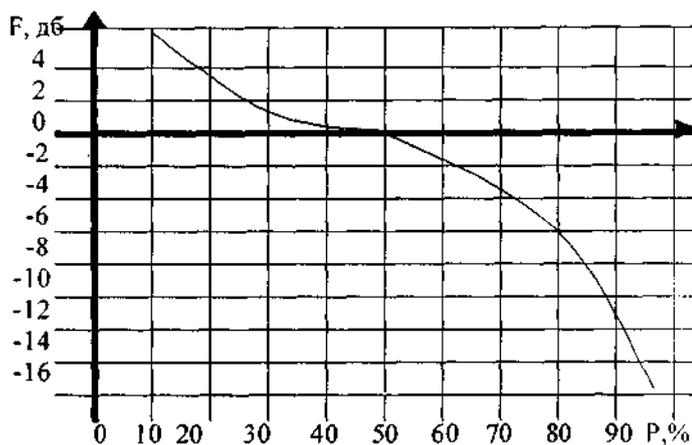


Рис.111. Зависимость вероятности от уровня напряженности

Медианным значением амплитуды вектора напряжённости электрического поля называют такое значение, которое превышаетя в промежутке времени не более 50% от общего времени наблюдения  $T$ . Функция распределения может быть построена не только для случайно изменяющейся во времени

напряжённости поля, но также и для тех параметров, которые обуславливают эти изменения.

Удобный тому пример - функция распределения градиента диэлектрической проницаемости следует учитывать путём введения представления об эффективном вертикальном градиенте диэлектрической проницаемости:

$$g_{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon_{\varepsilon}}{dh} = 0,2 * 10^{-5} \frac{dN_{\varepsilon}}{dh}, \quad (12.2)$$

$\frac{dN_{\varepsilon}}{dh}$  где - градиент эффективного индекса преломления.

Под  $g_{\varepsilon}$  понимается постоянный по высоте и вдоль трассы градиент, при котором вычисленные и измеренные значения поля совпадают. Пользуясь функциями распределения градиента эффективной диэлектрической проницаемости, можно для каждой конкретной трассы определить функцию распределения напряжённости поля (множитель ослабления), а по ней оценить устойчивость работы радиолиний. Под устойчивостью подразумевается промежуток времени (в процентах к общему времени работы линии), в течение которой напряжённость поля не падает ниже определённой наперёд заданной минимально допустимой (пороговой) величины. Обеспечение заданной устойчивости работы является одним из основных требований, предъявляемых к линиям радиосвязи.

## § 12.2. Замирания сигналов при дальнем тропосферном рассеянии

Характерной особенностью дальнего тропосферного рассеяния (ДТР) является подверженность уровня принимаемых сигналов замираниям.

При ДТР сигнал образуется в результате интерференции полей, рассеянных в направлении на пункт приёма множеством неоднородностей, находящихся в пределах рассеивающего объёма (рис.112).

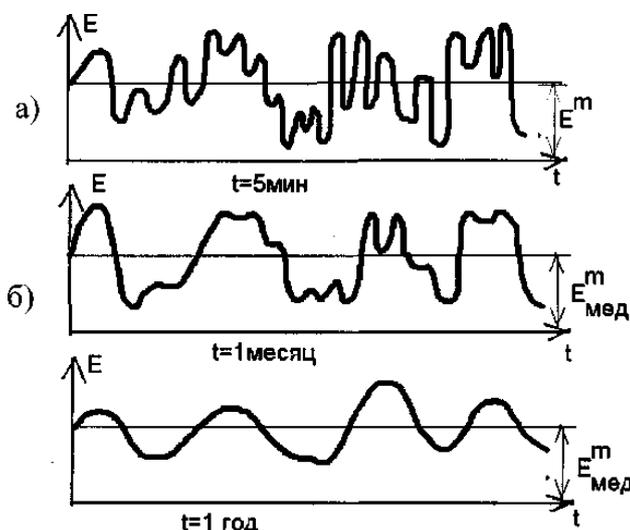


Рис.112. Замирание при ДТР

Фазам полей свойственны непрерывные случайные изменения, так как турбулентные и сложные неоднородности тропосферы являются флуктуирующими. В результате сложения множества полей со случайно изменяющимися фазами сигнал претерпевает замирания.

Количественная оценка замирания при ДТР производится таким же образом, как и для земных волн, путём использования тех же параметров и понятий: медианного и мгновенного значений уровней сигнала и множителя ослабления, глубины и скорости замираний, закона распределения глубины замираний, устойчивости сигнала. При ДТР в сравнении с земными волнами замирания проявляются более резко. Различают замирания быстрые и медленные.

Свойства быстрых замираний оцениваются за пятиминутные интервалы. Для них определяется медианное значение напряжённости поля  $E^{\circ}$  мед (рис а), а также интегральный закон распределения глубины замираний относительно этого медианного значения. Свойства медленных замираний оцениваются за месячные интервалы наблюдения закономерности изменения медианных уровней напряжённости поля  $E^{\circ}$  (рис б). Результатом оценки является определение медианного (среднемесячного) значения уровня напряжённости поля  $E^m$ , а также интегрального закона распределения глубины медленных замираний относительно медианного значения. Сезонные изменения уровней сигналов оцениваются по изменению среднемесячных (медианных) уровней сигнала  $E^m$  (рис в). Частота быстрых замираний возрастает по мере укорочения длины волны и увеличения скорости вертикального перемещения неоднородностей тропосферы. К аналогичному результату приводит использование передающих и приемных антенн, с более широкими диаграммами направленности в вертикальной и горизонтальной плоскостях

Изменение медианных пятиминутных уровней напряжённости поля происходит в результате медленного изменения амплитуд множества интерферирующих волн под воздействием меняющихся метеорологических условий. Результаты многочисленных экспериментов показывают, что статистический закон распределения медленных замираний подчиняется логарифмически нормальному закону. Параметры логарифмически нормального закона оказываются разными для трасс разной протяжённости. Увеличение протяжённости трассы приводит к уменьшению глубины медленных замираний уровней сигнала.

Среднемесячное значение напряжённости поля ( $E^m$  мед) довольно заметно зависит от сезона года. Наиболее низкие уровни сигнала наблюдаются в зимнее время, а наиболее высокие - летом (для средних широт северного полушария). Изменение среднемесячных значений уровней сигналов на трассах протяжённостью 200-300 км при переходе от зимы к лету составляет в среднем 10-12 дБ. Причина сезонной изменчивости среднемесячных уровней напряжённости поля заключается в том, что при переходе от зимы к лету происходит увеличение абсолютного значения индекса преломления тропосферы за счёт увеличения средней температуры и влажности. При этом усиливаются рефракционные явления. Радиусом кривизны траекторий

лучей в тропосфере уменьшаются, и рассеивающий объём перемещается ближе к поверхности Земли. Угол рассеяния при этом уменьшается, что сопровождается резким увеличением удельной эффективной площади рассеяния, а следовательно, и увеличением среднего уровня сигнала. С другой стороны, интенсивности флуктуации индекса преломления тропосферы и его вертикального градиента также возрастают по мере приближения к поверхности Земли, что вызывает дополнительное увеличение уровня сигнала.

### §12.3. Повышение устойчивости сигналов

Замирания при ДТР в сравнении с замираниями земных радиоволн более глубоки.

Повышение устойчивости при ДТР путём увеличения мощностей передатчиков и коэффициентов усиления антенн оказывается в ряде случаев недостаточным для надёжной работы радиолиний, так как средний уровень сигнала очень низкий. Поэтому при ДТР прибегают к другим методам повышения устойчивости, а именно к использованию разнесённого приёма.

Замирания обладают свойствами пространственной частотной и временной избирательности (некоррелированности). Свойство пространственной избирательности заключается в том, что характер замираний уровня сигнала при одновременном его приёме в пунктах, разнесённых на некоторое расстояние  $L$ , делается всё более независимыми по мере роста этого расстояния. Начиная с некоторого расстояния, называемого критическим  $l_{кр}$ , замирания считаются статистически независимыми (некоррелированными).

Это объясняется тем, что радиоволны, воздействующие на разнесённые антенны, создаются в несколько различных объёмах рассеяния.

Свойство частотной избирательности замираний проявляется совершенно аналогичным образом, если радиоприём происходит одновременно на двух частотах, отличающихся на некоторую величину  $\Delta f$ , носящую наименование "частотный разнос".

Для повышения устойчивости радиоприёма путём реализации частотной независимости замираний необходимо осуществлять одновременную работу линии радиосвязи на двух и более частотах, отличающихся друг от друга на величину не менее  $\Delta f_{кр}$ , что часто и делается.

Сущность временной избирательности замираний выясняется при сравнении уровней сигналов, наблюдаемых с некоторым сдвигом во времени (разнос во времени с интервалом  $\tau$ ). Таким образом, существенное повышение надёжности и достоверности передачи информации при ДТР возможно путём использования разнесённого в пространстве по частоте и во времени приёма.

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. Что является причиной замирания земных радиоволн?
2. Чем обусловлены замирания на трассах с протяжёнными плоскими холмами?
3. Какие замирания называют рефракционными?

4. Как оценить глубину замирания земных радиоволн?
5. Как определяется функция распределения напряжённости поля?
6. Замирания сигналов, каких видов возможны при ДТР?
7. Как оценить быстрые, медленные замирания?
8. Почему происходят сезонные изменения уровней сигналов?
9. В чём заключается свойства пространственной, частотной временной избирательности?
10. Каким способом повышают надёжность и достоверность передачи информации при ДТР?

## ГЛАВА 13. ИСТОЧНИКИ ПОМЕХ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

### § 13.1. Атмосферные помехи

Источником атмосферных помех являются грозовые разряды, представляющие собой мощные аperiodические или колебательные импульсы атмосферного электричества длительностью в тысячные доли секунды. Каждый импульс создаёт радиоволны помех с непрерывным спектром. Наибольшая спектральная плотность атмосферных помех приходится на область звуковых частот 300-10000 Гц. По мере роста частоты спектральная плотность убывает обратно пропорционально частоте.

Сантиметровые радиоволны рассеиваются капельками дождя и тумана, что приводит к появлению отражённых радиолокационных сигналов. Наличие отражений от дождя и туч, занимающих большую площадь на экранах радиолокационных станций, часто мешает нормальной работе этих станций. Для ослабления отражений от дождя на радиолокационных станциях применяют радиоволны с круговой поляризацией. В этом случае направление вращения вектора  $E$  по отношению к антенне в излученной и отраженной волнах противоположно (рис.113).

Поскольку поляризационные свойства антенны при передаче и приеме одинаковы, радиоволны с круговой поляризацией, при которой вектор  $E$  вращается в обратную сторону не принимаются на ту же антенну. Сигналы, отраженные от дождя, в силу этого оказываются сильно ослабленными. В тоже время радиоволны отраженные от самолётов и других объектов несимметричной формы имеют эллиптическую поляризацию и по этому значительно лучше принимаются на эту антенну таким образом круговая поляризация улучшает радиолокационную наблюдаемость нужных объектов на фоне сигналов, отраженных от скопления дождей.

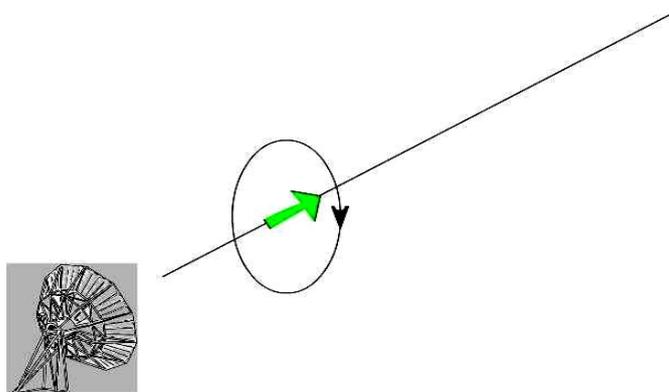


Рис.113. Отражение волн от капелек дождя и снега.

Влияние атмосферных помех проявляется наиболее сильно в диапазоне СДВ и становится практически незаметным в УКВ диапазоне. Пространственно - временная зависимость интенсивности атмосферных помех в некотором пункте приёма определяется его географическим положением относительно мировых центров грозовой деятельности (влажные тропические экваториальные районы) и климатическими особенностями района, где он находится. Вредное воздействие атмосферных помех в УКВ диапазоне проявляется только при ближних грозах.

### § 13.2. Космические помехи

Космическими помехами называются радиоволны, излученные источниками внеземного происхождения, в том числе Солнцем и планетами. Космическое излучение состоит из общего шумового фона галактики и из направленного более мощного излучения дискретных источников, находящихся в определённых участках небесной сферы. Шумы космического происхождения обычно оцениваются шумовой или яркостной температурой  $T_{як}$ . Под величиной  $T_{як}$  - понимается термодинамическая температура сопротивления, согласованного с входным сопротивлением приёмника, на котором развивается такая же мощность тепловых шумов, которую дают. Шумы космического происхождения:

$$P_M = KT_{як} \Delta f. \quad (13.1)$$

где  $P_M$  – мощность тепловых шумов;  
 $K$  - постоянная Больцмана;  
 $T_{як}$  - яркостная температура;  
 $\Delta f$  - эквивалентная шумовая полоса пропускания приёмника.

Уровень шумового космического фона в данной точке земной поверхности претерпевает суточные изменения за счёт вращения Земли. Спектральная плотность шумового фона космических помех плавно убывает с ростом частоты. В области УКВ уровень помех дискретных источников космического излучения выше на два-три порядка, однако, он имеет второстепенное значение по сравнению с излучением галактики, поскольку создаёт существенные помехи только в том случае, когда антенны направлены на источник излучения. Радиоволны помех космического происхождения неполяризованы. Ослабить влияние космических помех можно, правильно ориентируя антенны.

### § 13.3. Шумы теплового излучения Земли

Земля, как всякое нагретое тело, создаёт поток теплового радиоизлучения, некоторая часть которого через границу раздела Земля - воздух проникает в атмосферу, а остальная часть отражается обратно в толщу Земли. В предположении однородности и изотермичности толщи Земли её яркостная температура излучения в атмосферу определяется выражением:

$$T_{\text{зя}} = T_3(1 - |R|). \quad (13.2)$$

где  $T_3$  - термодинамическая температура Земли;

$R$  - коэффициент отражения от границы раздела Земля - атмосфера для данных частоты, угла скольжения, вида поляризации и электрических параметров земной поверхности.

Уменьшение коэффициента отражения сопровождается возрастанием шумовой температуры. При коэффициенте отражения равном нулю, шумовая температура равна термодинамической температуре Земли, которая принимается обычно равной 300 К.

### §13.4. Шумы поглощения в газах и осадках

Из физики известно, что если газ селективно поглощает излучение на некоторой частоте, то он излучает на той же частоте. В диапазоне сантиметровых волн излучение Солнца поглощается и переизлучается кислородом и парами воды. Яркостная температура газа и паров воды атмосферы Земли  $T_{\text{гя}}$  в значительной степени зависит от угла подъёма диаграммы направленности приёмной антенны над уровнем горизонта. Она максимальна при углах подъёма, близких к нулю, поскольку при этом в создании теплового излучения участвует большая толща атмосферы и, следовательно, большая масса кислорода и паров воды.

Яркостная температура за счёт осадков,  $T_{\text{оя}}$  так же как и поглощение в них, увеличивается с ростом интенсивности осадков, размеров интенсивности осадков, размеров капель, протяжённости полосы осадков вдоль трассы, частоты распространяющейся волны. При километровой полосе дождя и интенсивности осадков порядка 10-20  $\frac{\text{мм}}{\text{ч}}$ , увеличивается почти от 0 К на частоте 1 ГГц до 10 - 40К на частоте 10 ГГц. При интенсивности осадков 1-2  $\frac{\text{мм}}{\text{ч}}$  на частоте 10 ГГц  $T_{\text{ок}} \leq 1-2\text{К}$ .

### § 13.5. Промышленные помехи.

Источником промышленных помех являются электроустановки, используемые на производственных предприятиях на транспорте, в быту и в медицине.

Спектр промышленных помех весьма широк. Он охватывает диапазоны длинных, средних, коротких и ультракоротких волн вплоть до частот порядка 500 МГц. Спектральная плотность распределения промышленных помех плавно убывает с ростом частоты. Географическое распределение промышленных помех крайне неоднородно. Наиболее сильно они проявляются в крупных индустриальных центрах и больших городах. В диапазоне средних волн на частоте порядка 1 МГц уровни промышленных и атмосферных помех соизмеримы. Интенсивность промышленных помех оказывается существенно выше для вертикально поляризованной компоненты напряжённости электрического поля. Это обстоятельство обусловило использование для целей телевизионного УКВ ЧМ вещания передающих антенн, создающих электромагнитное поле горизонтальной поляризации.

Существуют много различных способов ослабления промышленных помех, однако наиболее эффективным средством борьбы с ними является использование устройств подавления помех в местах их возникновения.

### **§ 13.6. Взаимные помехи станций.**

Этот вид помех вызван радиостанциями, работающими на одних и тех же или близких частотах. Взаимные помехи существуют на всех частотных диапазонах. Степень их влияния зависит от расстояния между работающими радиостанциями и условий распространения радиоволн между ними, обусловленных состоянием атмосферы Земли. Очевидно, что взаимные помехи проявляются наиболее сильно на тех частотных диапазонах, где условия распространения радиоволн наиболее благоприятны и где работает большое число радиостанций. Этот вид помех является доминирующим в диапазоне коротких волн за пределами больших городов и в диапазоне метровых волн. Благоприятные условия для возникновения взаимных помех в диапазоне метровых волн могут создаваться ионосферой, в диапазоне дециметровых и более коротких волн - тропосферой. Взаимные помехи радиостанций различных служб, работающих в УККВ диапазоне при большом пространственном разnose, могут появляться при возникновении условий, способствующих сверхдальному распространению УКВ.

Следует отметить, что наличие взаимных помех служит определённым тормозом в деле более широкого использования различных радиотехнических средств.

По своему влиянию взаимные помехи часто бывают практически основными, и с каждым годом эта тенденция проявляется всё сильнее. Изучение взаимных помех, способов их уменьшения и приспособления к

ним вылилось в самостоятельную проблему, получившую название электромагнитной совместимости.

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:**

- 1.Классифицируйте источники помех.
- 2.Что является источником атмосферных помех?
- 3.Как влияют атмосферные помехи по мере роста частоты на работу радиолиний?
- 4.Какие особенности работы УКВ диапазона при воздействии атмосферных помех?
- 5.Какие радиоволны называются космическими помехами?
- 6.Как оцениваются шумы космического происхождения?
- 7.Как изменяется спектральная плотность шумового фона космических помех с ростом частоты?
- 8.За счет, какого параметра изменяется коэффициент отражения?
- 9.От чего зависит яркостная температура газа и паров воды атмосферы Земли?
- 10.Какие способы ослабления промышленных помех и взаимных помех станций существуют?

## ГЛАВА 14. ДИАПАЗОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН

### § 14.1. Особенности распространения сверхдлинных и длинных волн

Для электромагнитных полей, соответствующих диапазонам СДВ и ДВ, различные виды почв, а тем более все водные среды выступают как проводники. Справедливость сделанного утверждения может нарушаться лишь вблизи границы диапазона СВ для сухих почв.

Добавим, что на СДВ и СВ земная поверхность оценивается как наиболее гладкая. Поскольку это граница проводника, магнитное поле вблизи неё близко к тангенциальному полю, а электрическое - нормальное. Волновое сопротивление проводящей среды мало по модулю, так что невелико поглощение при отражении. Поэтому так называемая земная волна слабо затухает и может использоваться для связи на расстояниях даже порядка 3000 км. Поскольку передающая и приемная антенны находятся непосредственно вблизи земной поверхности, естественной оказывается вертикальная поляризация волны. Поэтому одной из типичных антенн является вертикальная металлическая башня, близкая по своему действию к элементарному электрическому излучателю, так как размеры антенны, разумеется, малы по сравнению с длиной волны. Можно сказать, что область пространства, в которой распространяются рассматриваемые волны, есть сферический слой, лежащий между земной поверхностью и нижней границей ионосферы. Тропосфера практически не оказывает влияния на распространение СДВ и ДВ.

Впервые в истории рассматриваемые волны использовались для трансатлантической связи (частоты 15-50 кГц). Радиолинии на СДВ и ДВ характеризуются высоким уровнем грозных помех. Антенные сооружения имеют громадные размеры, оставаясь малыми по сравнению с длиной волны, они весьма дороги, направленность излучения невелика, узка полоса частот. В то же время связь устойчива по отношению к ионосферным возмущениям; зона действия передатчика плавно - без резких колебаний поля - охватывает огромные пространства. Международными соглашениями предусматривается применение СДВ и ДВ, главным образом, для радионавигации и радиовещания.

Отметим также, что с понижением частоты увеличивается глубина проникновения поля в проводящие среды. Поэтому СДВ имеют преимущество при реализации радиолиний под водой (связь с подводными лодками и пр.).

Некоторые особенности распространения СДВ связаны с действием земного магнетизма (рис.124).

В диапазоне длинных волн наблюдаются атмосферные помехи-«свистящий атмосферик». Он воспринимается на слух как сигнал, частота которого меняется во времени за (0,5/1с примерно от 400 до 8000 Гц). Источником «свистящего атмосферика» является грозовой разряд, возбуждающий сверхдлинные волны. При распространении волны в ионизированном газе направлении силовых линий постоянного магнитного поля при  $f < f_n = 1,4 \text{ МГц}$  не происходит отражения волны от ионосферы, поскольку диэлектрическая проницаемость ионосферы всегда больше 1. Волна распространяется вдоль силовых линий магнитного поля Земли, пронизывает всю толщу ионосферы и может быть принята на Земле на другом конце силовой линии магнитного поля. Сигнал, отраженный от земной поверхности проходит обратный путь и может быть принят в месте возникновения грозового разряда. Время запаздывания таких сигналов составляет 2-3 секунды, откуда следует, что они проходят путь в многие тысячи километров, удаляясь от Земли на расстояние 10000-15000 км. Наблюдения за «свистящими атмосфериками» позволяет получить сведения о состоянии магнитного поля Земли и плотности среды на большом расстоянии от её поверхности.

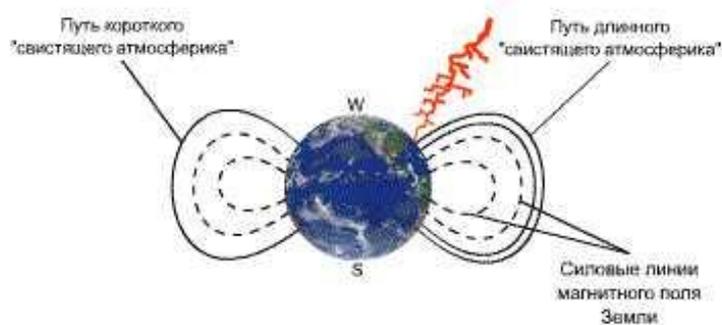


Рис.124. Возникновение «свистящего атмосферика»

## § 14.2. Особенности распространения средних волн.

Расстояние от поверхности Земли до нижней границы ионосферы составляет 60-100 км. Это расстояние имеет тот же порядок, что и длина волн (ДВ и СДВ), так что волны распространяются между двумя близко расположенными полупроводящими концентрическими сферами, одной из которых является Земля, а другой- ионосфера.

Для волновода, образованного Землей и ионосферой оптимальными являются волны длиной 25-35 км, а критической - волна длиной 100 км.

В сферическом ионосферном волноводе фазовая скорость радиоволн превышает скорость света в свободном пространстве. На частоте 100 кГц отличие в фазовой скорости от скорости света невелико  $(\frac{v_0}{\tilde{n}} - 1) = (1 \div 5) * 10^{-3}$ .

Она зависит от электронной плотности и числа столкновений электронов с молекулами в той области ионосферы, где происходит отражение радиоволн. Это приводит к нестабильности фазы волны в утренние и вечерние часы, когда меняется высота отражения ДВ.

Методы расчёта напряженности поля ДВ на больших расстояниях от передатчика, основанное на рассмотрении картины поля ионосферного волновода.

Вся электромагнитная энергия, излученная антенной, оказывается заключенной между двумя сферами и распространяется между ними по всем направлениям, поскольку в диапазоне ДВ применяют ненаправленные антенны. С удалением от антенны кольцевое сечение сферического волновода увеличивается, пока внутренний радиус кольца в котором распространяется волна не достигнет величины радиуса земного шара. При дальнейшем увеличении расстояния площадь кольца вновь уменьшается и энергия волны концентрируется.

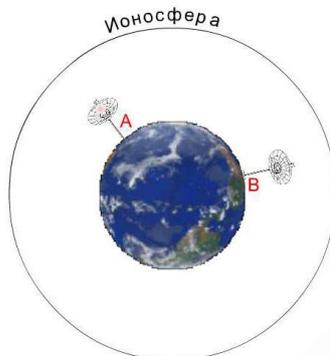


Рис.125. Отражение волн СВ от ионосферы.

По мере увеличения частоты условия распространения радиоволн изменяются настолько, что для диапазона СВ характерными оказываются уже иные особенности. Из-за большего поглощения в почве радиолинии СВ, использующие земную волну, могут иметь протяжённость лишь порядка 1000 км. Что касается ионосферной волны, то она способна отразиться лишь при электронной концентрации, свойственной слою E. Поэтому днём, когда существует более низкий слой D, волна проходит через него и практически полностью поглощается. Ночью же поглощение соответственно гораздо меньше и радиолиния может работать в ионосферной волне, её протяжённость при этом весьма значительно

возрастает. Существенно, что ночью в точку приёма могут прийти одновременно земные и ионосферные волны или, например, две ионосферные волны (рис.125).

Поскольку состояние ионосферы подвержено постоянным изменениям (а участок трассы в ионосфере по сравнению с ДВ может быть значителен), фаза проходящей волны будет изменяться во времени. По той причине в обоих отмеченных случаях интерференция волн приводит то к ослаблению, то к усилению поля в месте приёма. С этими замираниями (Федингом) борются, стараясь уменьшить излучение передающей антенны под большими углами к горизонту, чтобы подавить возбуждение ионосферной волны. Тогда увеличивается так называемая зона уверенного приёма (земной волны).

Средние волны используются, главным образом, в радиовещании; имеются и радионавигационные системы на СВ.

### **§ 14.3. Особенности распространения коротких волн**

Для коротких волн почва ведёт себя как несовершенный диэлектрик, и они глубоко проникают в земную поверхность.

Это приводит к сильному поглощению земной волны, которая оказывается пригодной для радиосвязи лишь на десятки километров. Основной практический интерес представляют ионосферные волны, которые обуславливают поглощение волны. Существует, так называемая зона молчания - кольцевая область, внутренний радиус которой соответствует дальности приёма земной волны в диапазоне КВ. Таким образом, это зона, в которой уже не принимается земная волна, но ещё не может быть использована волна ионосферная. Другим характерным эффектом, свойственным диапазону КВ, является кругосветное эхо - наложение на принимаемый сигнал другого, который создаётся волной, обошедшей земной шар путём многократных отражений от ионосферы и Земли. Время запаздывания при однократном обходе земного шара составляет 0,13 с.

На коротких волнах впервые в практике радиосвязи были реализованы остронаправленные антенны, позволяющие экономно расходовать энергию при двухсторонней связи. Наличие таких антенн и относительная малость поглощения КВ при рефракции в ионосфере и отражении от земли делают короткие волны весьма подходящими для дальней радиосвязи. Интересно, что значение коротких волн было понято под влиянием радиоловительской практики.

Наиболее короткая волна, для которой возможно распространение КВ, называется максимально применимой частотой. Так называемая оптимальная рабочая частота лежит ниже максимально применимой частоты (МПЧ) на

15-30%. Поскольку затухание волны растёт обратно пропорционально квадрату частоты, снижение частоты нежелательно. Существует понятие применимой наименьшей частоты (НПЧ), т.е. частоты, при которой для данной мощности передатчика напряжённость поля в месте приёма оказывается на грани требуемой нормы.

Распространение волн КВ существенно меняется, ночью снижается. Поэтому существуют дневные и ночные волны. Это поддиапазоны 10-25м и 35-100м, соответственно рекомендуемые для связи в зависимости от времени суток.

Для диапазона КВ типичные интерференционные замирания, вызываемые наложением нескольких относительно независимо распространяющихся волн, несущих принимаемый сигнал.

Нестабильность ионосферы, необходимость учёта потерь и дисперсия волн, проходящих через неё, а также иные факторы обуславливают ряд трудностей на пути расчёта КВ радиолиний.

#### **§ 14.4. Особенности распространения УКВ**

В годы максимума солнечной активности рефракция в ионосфере приводит к отражению волн выходящих за пределы диапазона КВ (например, около 6м). Можно также отметить отражение метровых волн от спорадического слоя, обладающего высокой концентрацией, но образующегося нерегулярно. За этим исключением всему диапазону УКВ присуще то качество, что рефракция в ионосфере не приводит к возвращению луча.

В силу сказанного обычные радиолинии на УКВ действуют в пределах прямой видимости; для увеличения дальности радиосвязи антенны поднимают над земной поверхностью.

Чем короче волна, тем менее гладкой оказывается земная поверхность. Но даже в тех случаях, когда критерий гладкости нарушается, нередко пользуются представлением об эффективном коэффициенте отражения от поверхности. Однако типичны случаи, когда этот подход непригоден даже для очень грубых оценок. Таковы условия распространения УКВ в пределах города.

Типично применение УКВ на радиорелейных линиях, протяжённость которых многократно превышает расстояние прямой видимости.

Практический интерес представляют также различные типы дальнего распространения УКВ. Именно в том диапазоне реализуются возможности существенного влияния нерегулярных тропосферных явлений. Весьма значительное превышение расстояния прямой видимости возможно в результате сверхрефракции, в особенности как следствие процессов рассеяния. В тропосферных радиорелейных линиях связи

приемопередающие станции находятся на расстоянии сотен километров. Дальнее распространение УКВ может быть обусловлено рассеянием на случайных неоднородностях ионосферы, а также на ионизированных областях, образующихся при вхождении в атмосферу метеоров ("следы" метеоров) и при полярных сияниях. Существуют весьма протяженные линии, использующие эти явления (свыше 1000 км).

### **§ 14.5. Особенности космической радиосвязи**

Диапазоны УКВ ввиду прозрачности для этих волн ионосферы используются в системах космической связи. Нужно сделать оговорку, что в пределах внутренней ионосферы, возможна передача и в диапазоне КВ.

Не перечисляя многочисленные функции космических радиолиний, отметим, что, по крайней мере, следует различать радиолинии, связывающие Землю и космический объект (искусственный спутник Земли или Луны, космический корабль, направляющийся к планетам и пр.), космические объекты между собой и, наконец, используемые для связи между земными объектами. Существует также проблематика местной связи при освоении Луны и планет.

Космические радиолинии могут быть беспрецедентно протяжёнными, простираясь на многие миллионы километров. Поэтому, хотя поглощение в межпланетной среде весьма невелико в расчёте на единицу длины, оно, в принципе, подлежит оценке.

Действие атмосферы Земли приводит к искривлению выходящего через неё луча. Теория рефракции позволяет оценивать направление выходящего луча.

Отдельную проблему составляет исследование влияния плазменного окружения космического объекта, входящего в плотные слои атмосферы, или плазменной области, появляющейся при наличии факела ракеты. Эти явления приводят к нарушению связи. Связь в неземных условиях может иметь различные особенности. Так, например, отсутствие у Луны атмосферы затрудняет проблему связи между лунными объектами, лежащими за пределами прямой видимости. Известно предложение использовать в этом случае ретранслятор на Земле.

Проблематика распространения радиоволн в космосе важна не только в рамках проектирования радиосистем, но и для научных исследований: радиоастрономии, радиолокации планет и пр. Все большее значение приобретают спутниковая связь и вещание. Радиолинии, использующие ретрансляцию через ИСЗ, имеют ряд особенностей. В частности, в результате движения ИСЗ относительно наземной станции сказывается эффект Доплера - смещение частоты, меняющееся на трассе; это приводит к искажению спектра сигнала.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ:

1. В какой области пространства распространяются волны СДВ и ДВ?
2. Какое влияние оказывает тропосфера на распространение волн СДВ и ДВ?
3. Какие помехи оказывают влияние на радиолинии СДВ и ДВ?
4. В каких целях предусматривается Международными соглашениями применение волн СДВ и ДВ?
  
5. Как борются с замираниями волн СВ, чтобы подавить возбуждение ионосферной волны?
6. Где используются средние волны (СВ)?
7. Какие характерные эффекты свойственны диапазону КВ?
8. В каких пределах оптимальная рабочая частота (ОРЧ)?
9. Что означает понятие наименьшей применимой частоты?
10. Какие замирания типичны диапазону КВ?
11. Где применяются УКВ?
12. Каковы особенности космической радиосвязи?

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Никольский, Т.И. Никольская. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва; Наука 1989.
2. И.Е. Тамм. Основы теории электричества . Москва; Наука 1989.
3. Л.А. Вайнштейн. Электромагнитные волны. Москва; Радио и связь 1988.
4. Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. Электродинамика и распространение радиоволн. Москва; Сов. радио 1979.
5. Г.П. Грудинская. Распространение радиоволн. М.; Высшая школа, 1975.
6. М. Николе. Аэрономия. Пер. с англ. Под ред. М. Полоснова. М.; Мир, 1973.
7. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн. Под ред. Ерохиной. М.; Радио и связь, 1996.
8. Х.Г. Унгер. Волноводы. Пер. с англ. Под ред. В.В. Шевченко, 1980.
9. Е. Янке, Ф. Эмдэ, Ф. Леш. Специальные функции. Пер. с нем. Под ред. Л.И.Седова. Москва,; Наука, 1977. (справочник)
10. Н.Е.Кочин. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. Москва; Издательство АН, 1961.
11. Справочник по спутниковой связи и вещанию. Под ред. Л.Я. Кантора. Москва; Радио и связь, 1983.
12. Ю.Р. Рашидов, И.К.Колесников, К.Г. Абидов. Электродинамика и распространение радиоволн. Ташкент: ТГТУ, 2004.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ.....</b>	<b>3</b>
<b>ЧАСТЬ I.</b>	
<b>ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1.</b>	
<b>ЭЛЕКТРОСТАТИКА.....</b>	<b>4</b>
Введение.....	4
§ 1.1. Электрический заряд.....	6
§ 1.2. Электрическое поле. Закон Кулона .....	7
§ 1.3. Напряженность электрического поля.....	11
§ 1.4. Силовые линии электрического поля.....	13
§ 1.5. Электрический потенциал.....	13
§ 1.6. Проводники в электрическом поле.....	15
§ 1.7. Поляризация диэлектрика и электрическая индукция.....	17
§ 1.8. Теорема Гаусса.....	23
§ 1.9. Работа при перемещении электрического заряда в электрическом поле. Энергия системы зарядов. Энергия электростатического поля.....	28
§ 1.10. Граничные условия в электростатическом поле.....	31
§ 1.11. Методы расчета электростатических полей.....	33
§ 1.12. Распределение потенциалов и зарядов в системе проводящих тел.....	38
<b>ГЛАВА 2.</b>	
<b>ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ.....</b>	<b>42</b>
§ 2.1. Ток и плотность тока проводимости.....	42
§ 2.2. Закон Ома в дифференциальной форме.....	42
§ 2.3. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.....	44
§ 2.4. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме .....	45
§ 2.5. Граничные условия двух проводящих сред.....	46
§ 2.6. Поле шарового электрода.....	47
§ 2.7. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем.....	48
<b>ГЛАВА 3.</b>	
<b>МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОЕ ВО ВРЕМЕНИ.....</b>	<b>51</b>
§ 3.1. Магнитное взаимодействие токов .....	51
§ 3.2. Закон Био–Савара. Теорема о циркуляции.....	57
§ 3.3. Граничные условия в магнитном поле.....	69
§ 3.4. Энергия магнитного поля.....	70
§ 3.5. Методы расчетов магнитных полей.....	71

<b>ГЛАВА 4.</b>	
<b>ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....</b>	<b>73</b>
§ 4.1. Полный электрический ток.....	73
§ 4.2. Первое и второе уравнение Максвелла.....	74
§ 4.3. Использование вихревого электрического поля в токамаке.....	76
§ 4.4. Третье и четвертое уравнение Максвелла.....	77
§ 4.5. Реальность существования электромагнитного поля.....	78
§ 4.6. Полная система уравнений электромагнитного поля.....	79
§ 4.7. Теорема Умова – Пойтинга.....	83
§ 4.8. Запаздывающие электродинамические потенциалы.....	84
<b>ГЛАВА 5.</b>	
<b>ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.....</b>	<b>88</b>
§ 5.1. Излучение электромагнитных волн.....	88
§ 5.2. Мощность и сопротивление излучения.....	92
§ 5.3. Излучение рамочной антенны.....	93
§ 5.4. Плоские электромагнитные волны.....	96
§ 5.5. Уравнение плоской волны.....	97
§ 5.6. Исследование волн.....	99
§ 5.7. Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике.....	102
§ 5.8. Распространение плоской волны в хорошо проводящей среде.....	103
§ 5.9. Групповая скорость.....	105
§ 5.10. Поляризация электромагнитных волн.....	107
§ 5.11. Отражение и преломление волны на плоской поверхности при нормальном падении.....	110
<b>ГЛАВА 6.</b>	
<b>ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ.....</b>	<b>116</b>
§ 6.1. Явление поверхностного эффекта.....	116
§ 5.2. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводнике....	117
§ 5.3. Активное сопротивление и внутренняя индуктивность цилиндрического провода с учетом поверхностного эффекта.....	120
<b>ГЛАВА 7.</b>	
<b>РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН.....</b>	<b>124</b>
§ 7.1. Распространение электромагнитных волн в волноводах.....	124
§ 7.2. Критическая частота и параметры волны в волноводе.....	126
§ 7.3. Фазовая и групповая скорость волны.....	128
§ 7.4. Распространение волны $TE_{10}$ в прямоугольном волноводе.....	129
§ 7.5. Потери энергии в волноводах.....	132

<b>ГЛАВА 8.</b>	
<b>ТЕОРИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ.....</b>	<b>136</b>
§ 8.1. Общая теория электромагнитных резонаторов.....	136
§ 8.2. Частота собственных колебаний резонатора.....	137
§ 8.3. Волна простейшего типа в прямоугольном резонаторе.....	138
§ 8.4. Мощность потерь в прямоугольном резонаторе, добротность резонатора.....	140
§ 8.5 Коаксиальные линии.....	142
<b>ЧАСТЬ II.</b>	
<b>РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН.....</b>	<b>147</b>
<b>ГЛАВА 9.</b>	
<b>КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОВОЛН.....</b>	<b>147</b>
§ 9.1. Классификация по диапазонам частот.....	147
§ 9.2. Классификация по возможным механизмам распространения.....	148
§ 9.3. Распространение радиоволн в однородных всепоглощающих средах.....	151
<b>ГЛАВА 10.</b>	
<b>ЗЕМНЫЕ РАДИОВОЛНЫ УКВ ДИАПАЗОН А.....</b>	<b>153</b>
§ 10.1. Земные радиоволны над плоской поверхностью Земли....	153
§ 10.2. Земные радиоволны над сферической поверхностью Земли.....	155
<b>ГЛАВА 11.</b>	
<b>ТРОПОСФЕРНЫЕ И ИОНОСФЕРНЫЕ ВОЛНЫ.....</b>	<b>158</b>
§ 11.1. Тропосферные волны.....	158
§ 11.2 Дальнее тропосферное рассеяние.....	159
§ 11.3 Ионосферные радиоволны в метровом диапазоне длин волн.....	162
§ 11.4. Отражение и рассеяние радиоволн на метеорных следах....	163
§ 11.5. Свободно распространяющиеся радиоволны УКВ диапазона в системах космической связи..	164
<b>ГЛАВА 12.</b>	
<b>ЗАМИРАНИЕ РАДИОВОЛН.....</b>	<b>167</b>
§ 12.1. Замирание земных радиоволн.....	167
§ 12.2. Замирание сигналов при дальнем тропосферном рассеянии.....	169
§ 12.3. Повышение устойчивости сигнала.....	171
<b>ГЛАВА 13.</b>	
<b>ИСТОЧНИКИ ПОМЕХ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ.....</b>	<b>173</b>
§ 13.1. Атмосферные помехи.....	173
§ 13.2. Космические помехи.....	174
§ 13.3. Шумы теплового излучения Земли.....	174

§ 13.4. Шумы поглощения в газах и осадках.....	175
§ 13.5. Промышленные помехи.....	175
§ 13.6. Взаимные помехи станций.....	176
<b>ГЛАВА 14.</b>	
<b>ДИАПАЗОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ</b>	
<b>РАДИОВОЛН.....</b>	<b>178</b>
§ 14.1. Особенности распространения сверхдлинных и длинных волн.....	178
§ 14.2. Особенности распространения средних волн.....	179
§ 14.3. Особенности распространения коротких волн.....	181
§ 14.4. Особенности распространения УКВ.....	182
§ 14.5. Особенности космической радиосвязи.....	183
<b>ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПО КУРСУ</b>	
<b>" ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ</b>	
<b>РАДИОВОЛН".....</b>	<b>185</b>
<b>ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ ВЕЛИЧИН, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В</b>	
<b>"ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ" МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ</b>	
<b>(СИ).....</b>	<b>200</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>203</b>
<b>СОДЕРЖАНИЕ.....</b>	<b>204</b>

