Н.М.Жабборов, Э.О.Алиқулов, Қ.С.Ахмедова

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

(олий математика ўқитиладиган олий ўқув юртлари
талабалари учун маърузалар матни)

Қарши –2010

1-МАЪРУЗА

Ҳақиқий сонлар
Ҳақиқий сонлар тўплами.
Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати

Сон тушунчаси математиканинг муҳим тушунчаларидан бири. Улар

1) натурал сонлар (1,2,3,...),
2) бутун сонлар (..., -2, -1, 0, 1, 2,...),
3) каср сонлар (оддий ва ўнли касрлар),
4) ҳақиқий сонлар

бўлиши мумкин. Бундай сонлар, улар устида бажариладиган амаллар, амалларнинг бажарилиш қоидалари ўқувчига мактаб, коллеж ва лицейларда ўқитиладиган математика фанидан маълум.

Олий математика курси давомида кўп ҳолларда ҳақиқий сонларга дуч келамиз. Шунинг учун ҳақиқий сонлар ҳақидаги асосий маълумотларни қисқача баён этамиз.

1.1. Рационал ва иррационал сонлар

Маълумки, $\frac{p}{q}$ кўринишида ифодаланиладиган сон рационал сон дейилади, бунда p - бутун сон, q-эса натурал сон бўлиб, улар ўзаро туб, яъни $(p,q)=1$. Равшанки, оддий касрлар рационал сон бўлади.

Агар $\frac{p}{q}$ касрнинг махражи 10, 100, умуман 10 нинг натурал даражалари (10^n) бўлса, бундай оддий каср ўнли каср дейилади. Масалан,

$\frac{3}{2}, \frac{1}{17}, \frac{23}{11}, -\frac{8}{9}$ - оддий касрлар,

$\frac{7}{10}=0,7$, $\frac{112}{10}=11,2$, $\frac{23}{100}=0,23$ - ўнли касрлар бўлади.

$\frac{p}{q}$ рационал сон – оддий каср берилган бўлсин. Бўлиш қоидасидан фойдаланиб p бутун сонни q натурал сонга бўламиз. Агар бўлиш жараёнида бирор қадамдан кейин қолдиқ нолга тенг бўлса, у ҳолда бўлиш жараёни тўхтаб, $\dfrac{p}{q}$ каср ўнли касрга айланади. Одатда, бундай ўнли каср чекли ўнли каср дейилади.

p ни q га бўлиш жараёни чексиз давом этиб, маълум қадамдан кейин юқорида айтилган қолдиқлардан бири яна бир марта учраши, сўнг ундан олдинги рақамлар мос равишда такрорланиши мумкин. Одатда, бундай ўнли каср чексиз даврий ўнли каср дейилади. Такрорланадиган рақамлар (рақамлар бирлашмаси) ўнли касрнинг даври дейилади.

Масалан, $\dfrac{53}{36}$ рационал сон $1,4722...=1,47(2)$ ўнли касрга келади. Бу чексиз даврий ўнли каср бўлиб, унинг даври 2 га тенг: $\dfrac{53}{36}=1,47(2)$.

Демак, ҳар қандай $\dfrac{p}{q}$ рационал сон чекли ўнли каср ёки чексиз даврий ўнли каср орқали ифодаланади.

Аксинча, ҳар қандай чекли ўнли касрни ёки чексиз даврий ўнли касрни $\dfrac{p}{q}$ кўринишида ифодалаш мумкин.

Масалан,

$$1,03=1\frac{3}{100}=\frac{103}{100},$$

$$0,(3)=0,3333...=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+...=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}$$

(бунда чексиз камаювчи геометрик прогрессиянинг йиғиндисини топиш формуласидан фойдаланилди) бўлади.

Демак, ҳар қандай чекли ёки чексиз даврий ўнли каср рационал сон орқали ифодаланилади.

Шундай қилиб, ихтиёрий рационал сон чекли ёки чексиз даврий ўнли каср орқали ва аксинча ихтиёрий чекли ёки чексиз даврий ўнли каср рационал сон орқали ифодаланади.

Аммо чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар ҳам мавжуд. Масалан,

$$1,1010010001..., \quad 1,4142135..., \quad 2,7182818...$$

сонлар чексиз даврий бўлмаган ўнли касрлар бўлади (бу сонлардан иккинчиси $\sqrt{2}$ ни, учинчиси эса e сонини ифодалайди). Равшанки, бу сонлар рационал сонлар бўлмайди.

Таъриф. *Чексиз даврий бўлмаган ўнли каср иррационал сон дейилади*. Масалан,

$$1,4142135... = \sqrt{2}, \quad 3,141583... = \pi, \quad 2,718281... = e$$

сонлар иррационал сонлардир.

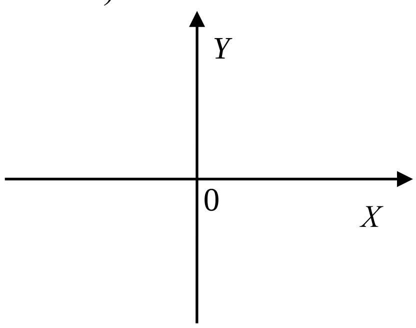
3-МАЪРУЗА

Текисликда Декарт ва қутб координаталари системаси

3.1. Декарт координаталари системаси

Текисликда иккита ўзаро перпендикуляр OX ва OY тўғри чизиқларни (ўқларни, уларнинг мусбат йўналишлари 1–чизмада кўрсатилган) олайлик.

Айтайлик, OX ўқи горизонтал, OY ўқи вертикал жойлашсин (1-чизма)

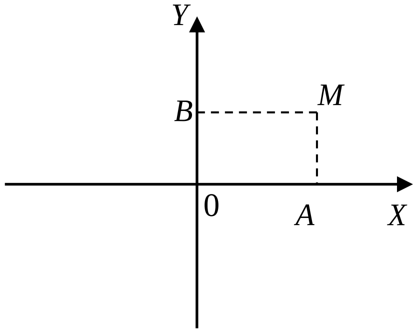


1-чизма

OX ва OY тўғри чизиқлар координата ўқлари (OX - абциссалар ўқи, OY - ординаталар ўқи), уларнинг кесишган O нуқта координата боши дейилади.

Бу иккала ўқ учун бир хил бўлган ўлчов бирлиги-масштаб бирлиги (узунлиги 1 га тенг кесма) ни оламиз. Натижада, OX, OY координата ўқлари ва уларда тайинлаган масштаб бирлигидан иборат система ҳосил бўлади. Бу система текисликда Декарт координаталари системаси дейилади.

Энди текисликда иҳтиёрий M нуқтани олайлик. (2-чизма)



2-чизма

M нуқтадан абсцисса ўқи OX га MA, ордината ўқи OY га MB перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикуляр OX ўқидан OA, OY ўқидан OB кесмаларни ажратади. Ҳосил бўлган OA ва OB кесмаларнинг узунликларини қандай ишора билан олинишини қуйидаги қоида аниқлаб беради:

1) агар A нуқта OX ўқида O нуқтадан ўнг томонда жойлашса, унда OA кесманинг узунлиги "+" ишора билан, O нуқтадан чапда жойлашса, унда OA кесманинг узунлиги "-" ишора билан олинади.

2) агар B нуқта OY ўқида O нуқтадан юқорида жойлашса, унда OB кесманинг узунлиги "+" ишора билан, O нуқтадан пастда жойлашса, унда OB кесманинг узунлиги "-" ишора билан олинади.

Ишоралари келтирилган қоидага кўра олинган OA ва OB кесмаларнинг узунликларини мос равишда x ва y орқали белгилаймиз:

$$x = OA, \qquad y = OB.$$

Одатда, x га M нуқтанинг абсциссаси, y га эса M нуқтанинг ординатаси, умуман x ва y га M нуқтанинг координаталари дейилади. M нуқта координаталар орқали $M(x, y)$ каби ёзилади.

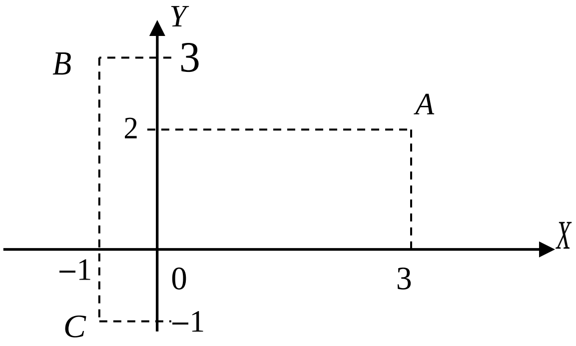
Демак, текисликдаги ихтиёрий нуқта ўзининг координаталари x ва y лардан тузилган (x, y) жуфтлик билан тўла аниқланади.

Айтайлик x ва y ҳақиқий сонлар берилган бўлсин. Текисликда координаталари шу x ва y бўлган нуқта қуйидагича топилади: OX ўқида x ҳақиқий сон, OY ўқида y ҳақиқий сон жойлаштирилиб, шу нуқталардан мос равишда OX ва OY ўқларига перпендикуляр ўтказилади. Бу перпендикулярнинг кесишиш нуқтаси изланаётган нуқтани аниқлайди.

Масалан,

$$A(3,2), \qquad B(-1,3), \qquad C(-1,-1)$$

нуқталарнинг текисликдаги тасвирлари 3–чизмада кўрсатилган.



3-чизма

Эслатма. *Абсцисса ўқида жойлашган барча нуқталарнинг ординаталари, ордината ўқида жойлашган барча нуқталарнинг абсциссалари нол бўлади. Координаталар бошининг координаталари $(0,0)$ бўлади: $O(0,0)$.*

Юқорида айтилганлардан қуйидаги хулоса келиб чиқади: текисликдаги ихтиёрий нуқтага x ва y ҳақиқий сонлардан тузилган битта (x, y) жуфтлик мос келади. Аксинча, ихтиёрий x ва y ҳақиқий сонлардан тузилган (x, y) жуфтлик текисликда битта нуқтани ифодалайди.

2-МАЪРУЗА

Тенгламалар ва тенгсизликлар

Олий математиканинг турли соҳаларидаги масалалари, кўп ҳолларда тенглама ва тенгсизликларни ечиш билан ҳал қилинади.

Одатда, берилган тенглама ва тенгсизликлар, уларга тенг кучли, айни пайтда соддароқ бўлган тенглама ва тенгсизликлар билан алмаштирилади. Уларни ечиб, берилган тенглама ва тенгсизликларнинг ечимлари топилади.

2.1. Чизиқли ва квадрат тенгламалар

Маълумки, номаълумга нисбатан биринчи даражада бўлган тенглама чизиқли тенглама дейилади. Бу тенглама содда ҳолда ушбу

$$ax+b=0 \tag{1}$$

кўринишда бўлади, бунда a ва b берилган сонлар.

(1) тенглама:

1) $a\neq 0$ бўлганда ягона $x=-\dfrac{b}{a}$ ечимга эга бўлади,

2) $a=0,\quad b=0$ бўлганда ечимлари чексиз кўп (ихтиёрий сон тенгламанинг ечими) бўлади.

3) $a=0,\quad b\neq 0$ бўлганда ечимга эга бўлмайди.

1-мисол. *Ушбу*

$$\frac{2x-5}{4}+\frac{2x+1}{3}+x=\frac{x}{4}+2$$

тенглама ечилсин.

◄Бу тенгламанинг ҳар икки томонини 4 ва 3 сонларининг энг кичик умумий карралиси 12 га кўпайтириб

$$12\cdot\frac{2x-5}{4}+12\cdot\frac{2x+1}{3}+12x=12\cdot\frac{x}{4}+24 \ ,$$

яъни

$$3(2x-5)+4(2x+1)+12x=3x+24$$

бўлишини топамиз.

Соддалаштириш натижасида кейинги тенглик қуйидаги

$$6x-15+8x+4+12x=3x+24,$$

яъни

$$23x=35$$

кўринишга келади. Равшанки, бу тенглама берилган тенгламага тенг кучли бўлиб, унинг ечими $x=\dfrac{35}{23}$ бўлади.►

Маълумки, номаълумга нисбатан иккинчи даражада бўлган тенглама квадрат тенглама дейилади. Бу тенглама содда ҳолда ушбу

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0) \tag{2}$$

кўринишда бўлади. Бунда a, b, c берилган сонлар бўлиб, квадрат тенгламанинг коэффициентлари дейилади.(2) тенгламанинг ечими, унинг дискриминанти

$$D=b^2-4ac$$

га боғлиқ:

1) агар $D>0$ бўлса, (2) тенглама иккита ҳақиқий ечимга эга бўлиб,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

бўлади;

2) агар $D=0$ бўлса, (2) тенглама битта ҳақиқий ечимга эга бўлиб,

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

бўлади;

3) агар $D<0$ бўлса, (2) тенглама ҳақиқий ечимга эга бўлмайди.

2-мисол. *Ушбу*

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

тенглама ечилсин.

◀Равшанки, $2x^2+7x-4=(x+4)(2x-1)$. Берилган тенгламанинг ҳар икки томонини ($x\neq -4,\quad x\neq \frac{1}{2}$ деб) $(x+4)(2x-1)$ га кўпайтириб топамиз:

$$2x^2+7x-4+\frac{2x}{x+4}\cdot(x+4)(2x-1)+\frac{27(2x^2+7x-4)}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}(x+4)(2x-1).$$

Натижада

$$2x^2+7x-4+4x^2-2x+27=6x+24$$

бўлиб,

$$6x^2-x-1=0$$

бўлади. Бу тенгламани ечиб

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{1\pm 5}{12},$$

$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ бўлишини топамиз. Бироқ, $x = \frac{1}{2}$ да қаралаётган тенглама маънога эга эмас. Демак, берилган тенгламанинг ечими $x = -\frac{1}{3}$ бўлади.►

53-МАЪРУЗА

Узлуксиз тасодифий миқдорлар ва уларнинг тақсимот функциялари. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремаси

53.1. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги, математик кутилиши ва дисперсияси

Маълумки, тасодифий миқдор узлуксиз бўлса, бу тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари бирор (a,b) оралиқни ташкил этади. Равшанки, бу ҳолда тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни каби жадвал шаклида ёзиб бўлмайди.

Фараз қилайлик $F(x)$ функция узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлсин.

1-таъриф. *Айтайлик, ξ тасодифий миқдор, $F(x)$ эса унинг тақсимот функцияси бўлсин.*

Агар $F(x)$ функция дифференциалланувчи бўлса, унинг $F(x)$ ҳосиласи ξ тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги дейилади ва $p(x)$ каби белгиланади:

$$p(x) = F'(x).$$

Энди тасодифий миқдор зичлик функцияси $p(x)$ нинг хоссаларини келтирамиз.

1-хосса. *Ихтиёрий x учун*

$$p(x) \geq 0, \qquad P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx \tag{1}$$

бўлади.

◄Тақсимот функцияси $F(x)$ ўсувчи бўлгани учун $F'(x) \geq 0$ бўлиб, ундан $p(x) \geq 0$, бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Иккинчи томондан Ньютон-Лейбниц формуласига кўра

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1).$$

бўлади.

Юқоридаги тенгликлардан

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$$

бўлишини топамиз.▶

2-хосса. *Агар* $p(x)$ *тасодифий миқдорнинг зичлик эҳтимоли бўлса, у ҳолда*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

бўлади.

◀Равшанки,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} p(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}} \int_{v}^{u} F'(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}} F(u) - F(v) = 1 - 0 = 1.$$

▶

3-хосса. *Агар* ξ *тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси* $F(x)$ *зичлик эҳтимоли* $p(x)$ *бўлса, у ҳолда*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$$

бўлади.

◀Равшанки,

$$\int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \lim_{v\to-\infty} \int_{v}^{x} p(x)dx = \lim_{v\to-\infty}\left[F(x) - F(v)\right] = F(x) - \lim_{v\to-\infty} F(v) = F(x) - 0 = F(x)$$

.

▶

4-хосса. *Агар* ξ *тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси* $F(x)$ x_1 *нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$P\{\xi = x_1\} = 0$$

бўлиб,

$$P\{x_1 \le \xi < x_2\} = P\{x_1 < \xi < x_2\},$$
$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

бўлади.

1-мисол. *Агар* ξ *тасодифий миқдорнинг эҳтимол зичлиги*

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{àãàð} \quad x<0 \\ 2x, & \text{àãàð} \quad 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{àãàð} \quad x>0 \end{cases}$$

бўлса, бу тасодифий миқдорнинг $\left(\frac{1}{2},1\right)$ *оралиқдаги қийматларни қабул қилиш эҳтимоли топилсин.*

◀(1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$P\left\{\frac{1}{2}<\xi<1\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1} p(x)\,dx=2\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{3}{4}.$$ ▶

Айтайлик, ξ тасодифий миқдор, $p(x)$ эса унинг эҳтимол зичлиги бўлсин.

2-таъриф. *Агар ушбу*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$$

хосмас интеграл мавжуд бўлса, бу интеграл ξ *тасодифий миқдорнинг математик кутилиши дейилади. Демак,*

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx \tag{2}$$

$$p(x)=F'(x).$$

Энди тасодифий миқдор зичлик функцияси $p(x)$ нинг хоссаларини келтирамиз.

1-хосса. *Ихтиёрий* x *учун*

$$p(x)\ge 0,\qquad P\{x_1<\xi<x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx \tag{1}$$

бўлади.

◀Тақсимот функцияси $F(x)$ ўсувчи бўлгани учун $F'(x)\ge 0$ бўлиб, ундан $p(x)\ge 0,$ бўлиши келиб чиқади.

Маълумки,

$$P\{x_1<\xi<x_2\}=F(x_2)-F(x_1).$$

Мундарижа