

**O`ZBEKSTAN RESPUBLIKASI XALIQ BILIMLENDIRIW
MINISTIRLIGI**

**A`JINIYAZ ATINDAG`I NO`KIS MA`MLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ
INSTITUTI**

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIKA OQITIW METODIKASI KAFEDRASI

Geometriya pa`ninen

**«Vektor haqqi`nda tu`sinik. Vektorlar u`stinde si`zi`qli`
a`meller»**

temasi` boyi`nsha

LEKTSIYA TEKSTI



NO`KIS-2015

VEKTOR HAQQI'NDA TU'SINIK. VEKTORLAR U'STINDE SI'ZI'QLI' A'MELLER

Tayani'sh tu'sinikler: *Bag'i'tlan'g'an kesindi, vektor uzunlig'i', birlik vektor, nollik vektor, kollinear vektor*, *vektorlardi' qosi'w, ali'w, san'g'a ko'beytiw.*

Fizikada ha'mde basqada texnikali'q ilimlerde ja'nede matematikada qaratug'i'n shamalar tiykari'nan yeki tu'rge bo'linedi.

Birinshisi, wo'zlerinin' san ma'nisleri menen ushi'rasatug'i'n yag'ni'y bir san menen toli'q ani'qlanatug'i'n fizikali'q yamasa mexanikali'q shamalardi' gezlestiremiz (ti'g'i'zli'q, massa, temperatura, waqi't, maydan, ko'lem h.t.b). Bul shamalar skalyar shamalar dep ataladi'.

Yekinshisi san ma'nisi menen toli'q ani'qlana almaytug'i'n shamalardi' ushi'rasti'rami'z. Bunday shamalardi'n' san ma'nisleri menen birge wolardi'n' bag'i'tlari' ko'rsetiliwi talap etiledi ha'm bul shamalar vektorli'q shamalar (ku'sh, tezlik, tezleniw) boladi'.

1- ani'qlama: Bag'i'tlang'an kesindi vektor dep ataladi'.

Biz vektordi' $\overline{AB}$ ko'riniste yamasa bir kishi lati'n ha'ribi menen $\bar{a}$ ko'riniste belgileymiz. Vektordi' $\overline{AB}$ ko'riniste belgilesek, A, B noqatlar sa'ykes vektordi'n' basi' ha'm aqi'ri' jaylasqan noqatlar boli'p tabi'ladi'. A ha'm B noqatlar arasi'ndag'i' arali'q $\overline{AB}$ vektordi'n' uzi'nli'g'i' dep ataladi', wol bolsa $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$ ko'riniste belgilenedi (1.a-su'wret).

Bag'i'tlari' birdey bolg'an vektorlar birdey bag'i'tlang'an vektorlar dep ataladi' ha'm $\bar{a} \uparrow \bar{b}$ ko'riniste beriledi (1.b-su'wret).

Bag'i'tlari' qarama-qarsi' bolg'an vektorlar qarama-qarsi' vektorlar dep ataladi' ha'm $\bar{a} \updownarrow \bar{b}$ ko'riniste beriledi (1.c-su'wret).

Yeger vektordi'n' basi' ha'm aqi'ri' bir noqatta bolsa, wol *nol' vektor* dep ataladi'. Nol' vektor bag'i'tg'a iye yemes, woni'n' uzi'nli'g'i' bolsa nol'ge ten'.

Uzi'nli'g'i' birge ten' bolg'an vektor *birlik vektor* yamasa *ort* dep ataladi'.

2-ani`qlama: Bir tuwri` si`zi`qqa parallel` bolg`an yeki vektor kollinear vektorlar dep ataladi`.

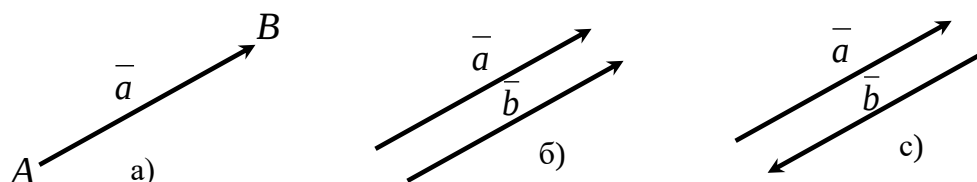
Kerisinshe, yeger bir tuwri` si`zi`qqa parallel` bolmasa, wonda bul vektorlar nokollinear vektorlar dep ataladi`.

Birdey uzi`nli`qqa, birdey bag`i`tqa iye bolg`an ha`m kollinear bolg`an vektorlarga ten` vektorlar dep ataladi` ha`m $\vec{a} = \vec{b}$ ko`riniste belgilenedi.

3-ani`qlama: U`sh $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bir tegislikke parallel` bolsa, wolar komplanar vektorlar dep ataladi`.

Kerisinshe, yeger bir tegislikke parallel` bolmasa, wonda bul vektorlar nokomplanar(komplanar yemes) vektorlar dep ataladi`.

Yeger vektorlar parallel` bolsa, wolardi` parallel` ko`shiriw na`tiyjesinde bir tegislikte jaylasti`ri`wi`mi`z mu`mkin.



1-su`wret.

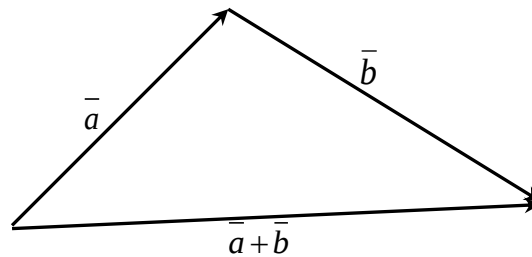
Vektorlar u`stinde wori`nlanatug`i`n to`mendegi a`meller si`zi`qli` a`meller dep ataladi`.

1. Vektorlardi` qosi`w
2. Vektorlardi` ali`w
3. Vektordi` sang`a ko`beytiw

1.Vektorlardi` qosi`w

4-ani`qlama: Yeki  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  ha`m $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ vektorlardan $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ vektor basi`  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  vektor aqi`ri`na qoyi`lg`anda  $\overrightarrow{AB}$  vektor basi`nan $\overrightarrow{CD}$ vektor aqi`ri`na

bag'itlang'an vektor, bul vektorlardi'n qosi'ndi'si` dep ataladi` ha'm $\bar{a} + \bar{b}$ ko`riniste jazi`ladi`. (2-su`wret)



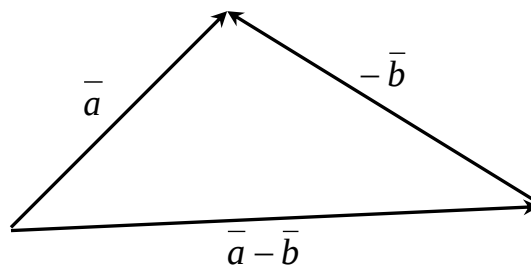
2-su`wret

Vektorlardi` bul usi`lda qosi`w qag`i`ydasi` u`shmu`yeshlik qag`i`ydasi` dep ataladi`.

2. Vektorlardi` ali`w

Arifmetikadag`i` si`yaqli`, vektorlardi` ali`w a`meli qosi`w a`meline kerii a`mel si`pati`nda ani`qlanadi`.

5-ani`qlama: Berilgen  $\bar{a}$  ha'm  $\bar{b}$  vektorlari`ni`n` ayi`rmasi` dep, $\bar{a}$ vektor menen $\bar{b}$ vektorg`a qarama-qarsi` bolg`an  $-\bar{b}$  vektordi`n` qosi`ndi'si`na ayti`ladi`. (3-su`wret)



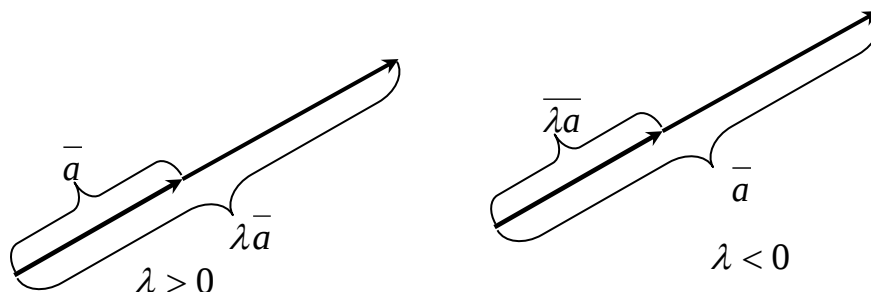
3-su`wret

Vektorlardi` qosi`w ha'm ali`wdi`n` parallelogramm usi`li`da bar boli`p, bul usi`ldi` talabalarg`a wo`z betinshe u`yreniwge qaldi`rami`z.

3. Vektordi` sang`a ko`beytiw

6-ani`qlama: Berilgen  $\lambda$  haqi`yqi`y san ha'm  $\bar{a}$  vektordi`n` ko`beymesi sonday vektor boli`p tabi`ladi`, woni`n` uzi`nli`g`i`  $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$  g`a ten`, bag`i`ti` $\lambda > 0$

bolg`anda  $\bar{a}$  vektor bag`i`ti` menen birdey, $\lambda < 0$ bolg`anda bolsa  $\bar{a}$  vektor bag`i`ti`na qarama-qarsi` boladi`.



4-su`wret

Ko`beyme  $\lambda\bar{a}$  ko`rinishinde jazi`ladi`.

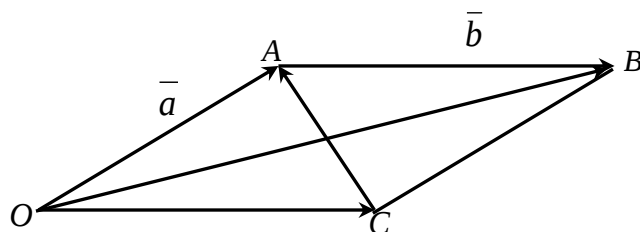
Vektorlar algebrasi` degende, vektorlar ko`pliginde vektorlardi` qosi`w ha`m skalyar sang`a ko`beytiw a`melleri tu`siniledi. Biz  $V$  menen ha`mme vektorlar ko`pligin belgileymiz. Bunda vektorlari`mi`z bir tuwri` si`zi`qta, bir tegislikte yaki ken`islikte jaylasqan boli`wi` mu`mkin.

Vektorlardi` qosi`w ha`m skalyar sang`a ko`beytiw a`melleri to`mendegi qa`siyetlerge iye:

1. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ ushi`n; $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ -kommutativlik.
2. $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V$ ushi`n; $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ -associativlik.
3. $\forall \bar{a} \in V$ ushi`n $\exists \bar{b} \in V$ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}, \bar{b} = -\bar{a}$
4. $\forall \bar{a} \in V$ ushi`n; $\bar{a} \cdot 1 = \bar{a}$ -birlik element.
5. $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$ ha`m  $\forall \lambda \in R$  ushi`n $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$
6. $\forall \lambda, \mu \in R$ ha`m  $\forall \bar{a} \in V$  ushi`n: $\bar{a}(\lambda + \mu) = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$
7. $\forall \lambda, \mu \in R$ ha`m  $\forall \bar{a} \in V$  ushi`n $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$
8. $\forall \bar{a} \in V$ ushi`n $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

Bul qa`siyetlerdin` bazi` birewlerin da`lilleymiz, bazi`lari`ni`n` da`lilleniwi bolsa talabalarg`a wo`z betinshe jumi`sqa beriledi.

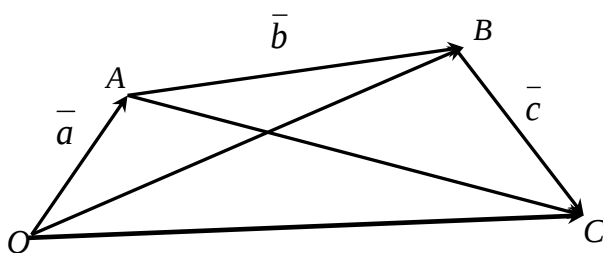
Birinshi qa'siyetti da'llillew ushi'n qa'legen yeki $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlardi'n basi'n bir O noqatqa jaylasti'rami'z ha'm



5-su'wret

5-su'wrettegi $OABC$ parallelogrammdi' payda etemiz. Bul parallelogrammdag'i OAB u'shmu'yeshliginen $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ ten'lik, OCB u'shmu'yeshlikten bolsa $\vec{OB} = \vec{b} + \vec{a}$ ten'likti payda etemiz. Demek, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Yekinshi qa'siyetti da'liyllew ushi'n $\vec{a}$ vektordi'n basi'n O noqatqa, $\vec{b}$ vektordi'n basi'n $\vec{a}$ vektordi'n aqi'ri'na jaylasti'rami'z ha'm $\vec{c}$ vektordi'n basi'n bolsa $\vec{b}$ vektordi'n aqi'ri'na jaylasti'rami'z (6-su'wret).



6-su'wret

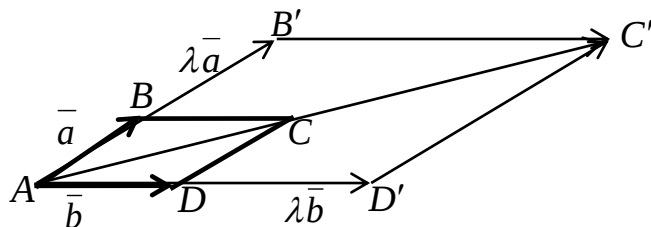
Si'zi'lmadan to'mendegi ten'liklerdi payda etemiz:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{OC}, \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OC}$$

$$\text{Demek, } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Ha'r bir $\vec{a} = \vec{AB}$ vektor ushi'n $\vec{b} = \vec{BA}$ vektor $\vec{a}$ vektorg'a qarama-qarsi' bag'i'tlang'an, uzi'nli'g'i' bolsa $\vec{a}$ vektordi'n uzi'nli'g'i'na ten' vektor. Vektorlardi' qosi'w qag'i'ydasina ko're $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$ ten'likti payda etemiz.

Besinshi qa'siyetti da'liyllew ushi'n $\bar{a}$ ha'm $\bar{b}$ vektorlari'ni'n baslari'n bir noqatqa jaylasti'ri'p, wolar ja'rdeminde to'mendegi $ABCD$ parallelogrammdi' payda yetemiz.



7-su'wret

Berilgen λ san ushi'n $\lambda\bar{a}$ ha'm $\lambda\bar{b}$ vektorlardan quri'lg'an $AB'C'D'$ parallelogramm $ABCD$ parallelogrammg'a uqsas. Soni'n ushi'n woni'n diagonali'ni'n uzi'nli'g'i' $ABCD$ parallelogramm diagonali' uzi'nli'g'i'nan $|\lambda|$ ma'rte «u'lken». Bunnan bolsa $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ ten'likti payda etemiz.

Alti'nshi' qa'siyetti da'liyllew ushi'n $\lambda\mu > 0$ ha'm $\lambda\mu < 0$ jag'daylardi' qaraymi'z. Birinshi jag'dayda λ ha'm μ sanlari'ni'n belgisi birdey boladi'. Soni'n ushi'n wolardi'n yekewide yaki won', yaki teris boladi'. Biz wolardi'n yekewide teris bolg'an jag'daydi' qarayi'q. Bul jag'dayda $\bar{a}(\lambda + \mu)$, $\lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ vektorlar $\bar{a}$ vektorg'a qarama-qarsi' bag'i'tlang'an boladi'. Demek wolar birdey bag'i'tqa iye. Wolardi'n uzi'nli'qlari' bolsa $|\lambda + \mu||\bar{a}|$ g'a ten'. Yeger λ ha'm μ sanlari' won' san bolsa, joqari'dag'i' wori'ng'an operaciyalar qaytalanadi'. λ ha'm μ sanlari'ni'n belgileri ha'r qi'ylì bolsa biz ja'ne yeki jag'daydi' qaraymi'z:

$\lambda + \mu > 0$ ha'm $\lambda + \mu < 0$. $\lambda + \mu > 0$ bolg'anda $\bar{a}(\lambda + \mu)$, $\lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, $\lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ vektorlar $\bar{a}$ vektor menen birdey bag'i'tqa iye. $\mu\bar{a}$ vektordi'n basi'n $\lambda\bar{a}$ vektordi'n aqi'ri'na jaylasti'ri'p, wolardi'n uzi'nli'qlari'da ten'ligin ko'remiz. Qalg'an jag'daylarda joqari'da keltirilgenler tiykari'nda tekseriledi.

1-teorema: Nol` vektordan wo`zgeshe $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear boli`wi` ushi`n  $\lambda \in R$  san bar boli`p, $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ten`liktin` wori`nlani`wi` za`ru`rli ha`m jeterli.

Da`lilleniwi. Vektorlar ushi`n $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ sha`rt wori`nlansa, $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinearli`g`i`n da`lillew a`piwayi` bolg`anli`g`i` ushi`n woni` da`lillewdi talabalardi`n` wo`zlerine tapsi`rma si`pati`nda beremiz. Bul sha`rttin` za`ru`rligin ko`rsetemiz. Yeger $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear bolsa, wolardi` parallel` ko`shiriw na`tiyjesinde bir tuwri` si`zi`qqa jaylasti`ri`w mu`mkin. Soni`n` ushi`n wolar  $l$  tuwri` si`zi`qta jatadi` ha`m wolardi`n` basi`  $O$  noqatta dep yesaplaymi`z. Yeger

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar birdey bag`i`tg`a iye bolsa,  $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$  ushi`n $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ten`lik

wori`nlanadi`. Yeger $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar qarama-qarsi` bag`i`tg`a iye bolsa, $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

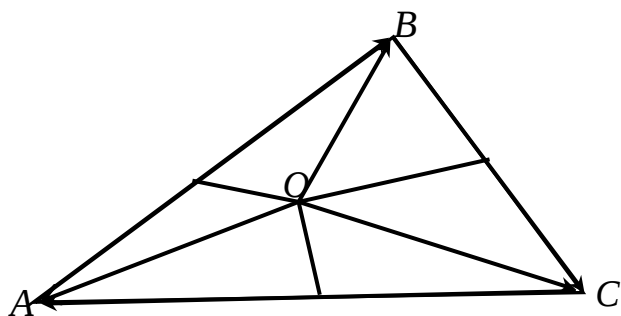
ushi`n  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  ten`lik wori`nlanadi`.

Vektorlar ha`m wolar u`stinde a`meller elementar geometriyag`a tiyisli ma`selelerdi sheshiwdi an`satlasti`radi`. Sonday ma`selelerdi sheshiwdi qarasti`rami`z.

*1-ma`sele:*  $ABC$  u`shmuyeshlikte $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ boli`p,  $O$  awi`rli`q worayi` bolsa, $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$ boli`wi`n da`lillen`.

Sheshiliwi. To`mendegi 8 -su`wret boyi`nsha vektorlardi` jazi`p alami`z:

$$\vec{OA} = \frac{2}{3} \left(\vec{BA} - \frac{BC}{2} \right), \vec{OB} = \frac{2}{3} \left(\vec{CB} - \frac{1}{2} \vec{CA} \right), \vec{OC} = \frac{2}{3} \left(\vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AB} \right)$$



8-su`wret

Bul tabi`lg`an vektorlar boyi`nsha

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0 \text{ ten`likke iye bolami`z.}$$

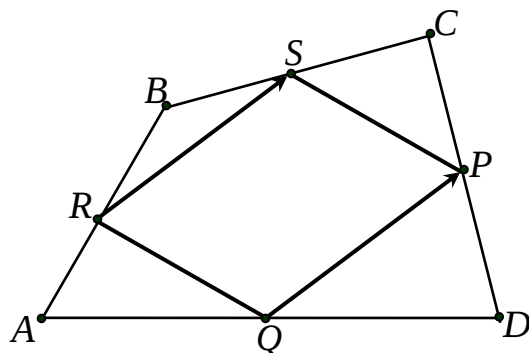
2-ma`sele: Qa`legen to`rtmu`yeshlik ta`replerinin` wortalari` parallelogrammni`n` to`beleri bolatug`i`nli`g`i`n da`lillen`.

Sheshiliwi. $ABCD$ to`rtmu`yeshlikni` qaraymi`z. Ta`replerinin` wortalari` sa`ykes R, S, P, Q noqatlari` bolsi`n. $RSQR$ tin` parallelogramm boli`wi`n da`liyllew talap etiledi. 9-su`wret boyi`nsha to`mendegilerdi jaza alami`z:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BS}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}) = 0 \end{aligned}$$

Sonli`qtan $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{QP} = 0$, bunnan $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QP}$.

Demek, $RSQR$ to`rtmu`yeshliktin` qarama-qarsi` yeki ta`repi o`z-ara ten` ha`m parallel` yeken. Bul bolsa  $RSQR$  to`rtmu`yeshligi parallelogramm bolatug`i`nli`g`i`n ko`rsetedi.



9-su`wret

Qadag`alaw ushi`n sorawlar

1. Vektor dep nege ayti`ladi`?
2. Vektorlar qanday belgilenedi?
3. Vektorlardi`n` qanday tu`rlerin bilesiz?
4. Vektorlar u`stinde qanday a`meller ori`nlaw mu`mkin?
5. Vektorlar u`stinde si`zi`kli` a`mellerdin` qanday qa`siyetlerin bilesiz?
6. Komplanar vektorlar dep qanday vektorlarga ayti`ladi`?