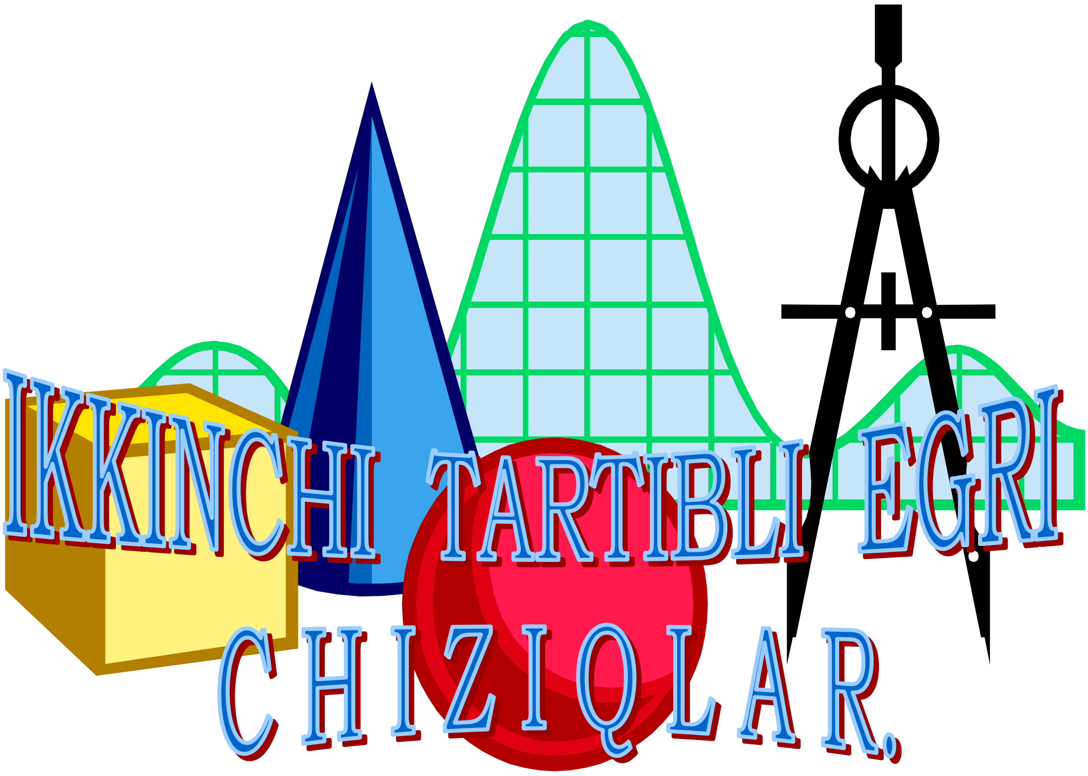
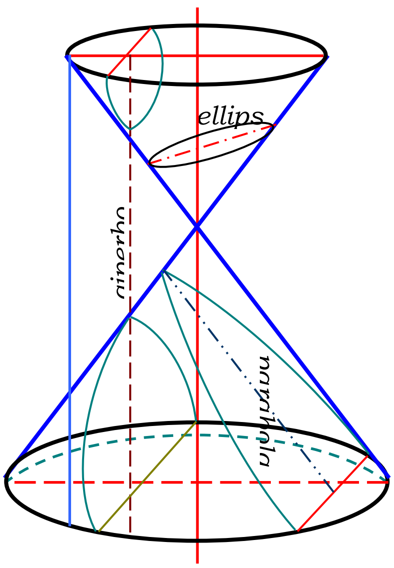
O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA

MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

Jizzax politexnika instituti



IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR.



2006 yil.

UDK 517.3

Mazkur o’quv qo’llanma “Oliy matematika” fani o’quv dasturi asosida tayyorlandi va “Oliy matematika” kafedrasining ___ _________ 200__ yil, №___, “___________” fakulteti ___ _________ 200__ yil, №___, ilmiy – uslubiy kengashlari tomonidan eshitilib institut uslubiy kengashiga tasdiqlash uchun tavsiya etildi.

Jizzax politexnika institut ___ _________ 200__ yil, №___, ilmiy – uslubiy kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan.

M u a l l i f l a r: Egamqulov Shaxobiddin

.

T a q r i z c h i l a r: f.m.f.n. A.Shamsiev – JDPI “Umumiy matematika” kafedrasi mudiri, dotsent.

t.f.n. Abduxaliqov – JizPI “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti.

A N N O T A T S I Y A

Mazkur o’quv qo’llanma texnika oliy o’quv yurtlarining «Oliy matematika» fani o’quv dasturi asosida yozilgan bo’lib, texnika oliy o’quv yurtlari fakultetlari talabalari uchun mo’ljallangan.

Ushbu o’quv qo’llanma **“Analitik geometriya”** ning asosiy bo’limlaridan “Ikkinchi tartibli egri chiziqlar” nazariyasiga bag’ishlangan bo’lib, to’rt bobdan iborat. Har bir bobning oxirida “O’z bilimini sinash uchun savollar va topshiriqlar” berilgan. Bundan tashqari har bir talaba “Mustaqil ta’lim” darslarida bajariladigan mustaqil ish variantlari keltirilgan.

Undan **«Aylana va ellips»** bo’limini o’rganishda boshqa o’quv yurti talabalari qo’shimcha adabiyot sifatida foydalanishlari mumkin.

M u h a r r i r: **t.f.n.dots. T.Abduazizov**

K I R I S H.

Hozirgi zamon ilmiy texnika taraqqiyoti muhandis-mutaxassislarining matematik tayyorgarligini takomillashtirishni talab etadi. Shu nuqtai nazardan oliy texnika o'quv yurtlari talabalari oldida turgan asosiy vazifalaridan biri, ular o'z bilimlarini mustaqil to'ldira olishlari, zarurratga qarab esa mutlaqo yangi soxalar va fanlarni mustaqil egallay olishlaridan iboratdir.

Ushbu o'quv qo'llanma "Analitik geometriya" ning asosiy bo'limlaridan "Ikkinchi tartibli egri chiziqlar" nazariyasiga bag'ishlangan.

Buyuk vatandoshimiz Abu Rayhon Beruniy o'z kuzatishlari natijasida "Sayyora harakat davomida Quyoshga ikki marta yaqinlashadi va ikki marta uzoqlashadi" degan fikrni yozib qoldirgan. Beruniy xulosasini quyidagicha tushunish mumkin: sayyora oval shaklidagi traektoriya (harakat chiziq) bo'yicha harakatlanadi, ovalning markazida esa Quyosh joylshgan.

Beruniy Qadimgi Yunon matematikalari va astronomlarining asarlarini yaxshi o'rgangan. Xususan, u ellipsni va uning xossalarini bilgani holda o'zi aytgan traetoriya (ya'ni oval chiziq) afsuski ellips bo'ladi degan xulosaga kelmaydi. Taxminimizcha ellipsning ikkita teng huquqli fokuslari mavjudligi, Quyosh esa bir dona bo'lib, uni qaysi fokusga joylashtirish mumkinligi (ya'ni simmetriyaning buzilishi) va Quyosh ellipsning markaziga joylashtirilgan holda fokuslar qanday fizik ma'noga ega bo'lish mumkinligi kabi savollar Beruniyga Keplerdan olti asr avval to'la haqiqatga yetib kelishiga to'sqinlik qilgan.

Sayyoralar harakatining asl qonunlarini ochish mashhur nemis olimi Iogann Keplerga nasib etdi. Fan sohasida nihoyatda serg'ayrat va sinchkov Kepler astronomik jadvallarni (zijlarni) chuqur o'rganib, atroflicha tahlil qildi va XVII asr boshida o'zining uchta qonunini e'lon qildi. Bular:

1. Har bir sayyoraning orbitasi ellipsdan iborat va uning fokuslaridan birida Quyosh joylashgan.

2. Har bir sayyoraning radius-vektori teng vaqt ichida teng yuzalarni chizadi.

Sayyoraning radius-vektori deb, vaqt o'tishi bilan o'zgarib boruvchi, shu sayyorani Quyosh bilan birlashtirib turuvchi yo'nalishli kesma tushuniladi.

3. Orbita radiusi kubining aylanish davri kvadratiga nisbati Quyosh sistemasidagi barcha sayyoralar uchun bir xil.

Orbitaning radiusi deganda, ellipsning katta yarim o'qi tushuniladi.

1684 yili Iondan qahvaxonalarining birida uch ingliz olimlari – tabiatshunos Robert Guk (Guk qonuni), astronom Egmund Gelley (Galley kometasi) va arxitektor Kristofor Ren (Iondandagi avliyo Pavel soborining muallifi) lar orasida munozara bo'lib o'tadi, suhbat mavzusi Quyoshga, ungacha bo'lgan masofa kvadratiga teskari proporsional kuch bilan tortiluvchi jismning traektoriyasi qanday bo'lishi kerakligi haqida edi.

Uchala olim ham buning ellips ekanligiga ishonchlari komil edi-yu, lekin buni qanday isbotlashni bilishmasdi, hatto Ren buni isbotlagan odamga mukofat e'lon qildi.

O'sha paytda 28 yoshda bo'lgan Galley Nyutonga murojaat qilishga ahd qilib, Kembridjga, uning oldiga yo'l oladi. Nyuton Galleyning savolini eshitishi hamon, darrov **"Elips"** deb javob beradi.

Quvonchdan hayratlangan Galley buni u qaerdan bilishini so'radi. **"Qaerdan? Buni men hisoblaganman"** – deb javob berdi Nyuton.

Galleyning iltimosiga ko’ra, Nyuton unga o’z hisoblarini yuborishga va’da berdi, ammo bu va’dani bajarish davomida butun boshli bir kitobni yozishga to’g’ri keldi. Ushbu kitobda avval mexanika qonunlari (hozirgi paytda Nyutonning uchta qonuni nomi bilan mashhur qonunlar) bayon qilingan va bu qonunlarga asoslanib tortilish kuchi orasidagi masofaning kvadratiga teskari proporsional degan farazga ko’ra tortiluvchi jismlarning harakat traektoriyalari topilgan.

Tarixiy bo’lib qolgan ushbu kitob 1687 yili **“Tabiiy falsafaning matematik asoslari”** nomi bilan (nashr harajatlarining bir qismini to’lagan Galleyning yordami tufayli) chop etildi.

Nyuton ushbu tortilish qonuniga bo’ysunib harakatlanuvchi har bir jism, tortilish markazi atrofida, konus kesimida hosil bo’ladigan chiziq bo’ylab harakat qilishini, shuningdek tortilish markazi ushbu chiziqning fokusida joylashishi kerakligini aniqladi.

Demak, jismning harakat traektoriyasi yo ellips, yo parabola, yoki giperbola bo’lishi kerak.

Ushbu qonun Quyosh sistemasiga nisbatan tatbiq etilsa, Keplerning sayyoralar harakati haqidagi birinchi qonuni kelib chiqadi.

Bunday xulosa planetalarning Quyosh atrofidagi harakati uchun ham, Oyning yer atrofidagi harakati uchun ham ta’lluqli. Shuningdek, atrofimizdagi barcha moddiy jismlarga aloqador bo’lganligi uchun ham, bu qonun butun olam tortilish qonuni deb ataladi.

Xususan, Nyuton isbotlagan tasdiqqa ko’ra, Quyosh sistemasiga kirib qolgan kosmik jism, yo Quyosh atrofida elliptik orbita bo’ylab davriy harakat qiladi, yo Quyosh sistemasiga parobola yoki giperbola bo’ylab kirib keladiyu va undan butunlay chiqib ketadi. Boshqacha traektoriyadagi harakat bo’lishi mumkin emas, masalan kosmik jism Quyosh sistemasiga kirib kelib uning atrofida ikki yoki uch marta aylanib, so’ngra undan chiqib keta olmaydi (albatta bu boshqariladigan kema bo’lmasa).

IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y o’zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko’rinishi quyidagicha bo’ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1).$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu yerda A, B, C, D, E, F – haqiqiy o’zgarmas sonlar, bundan tashqari A, B yoki C lardan kamida bittasi noldan farqli.

Ushbu bobda sodda ko’rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda porabalalarni qaraymiz. Bu egri chiziqlarning tenglamalarini topib, ular yordamida geometrik xossalarini o’rganamiz.

1 – B O B.

A Y L A N A   V A   E L L I P S.

R E J A :

1). Aylana va uning tenglamasi.

2). Ellips va uning tenglamasi.

3) Ellipsning ekssentrisiteti.

4). Ellipsning fokal-radiuslari.

5). Ellipsning direktrisalari.

1 – §. Aylana va uning tenglamasi.

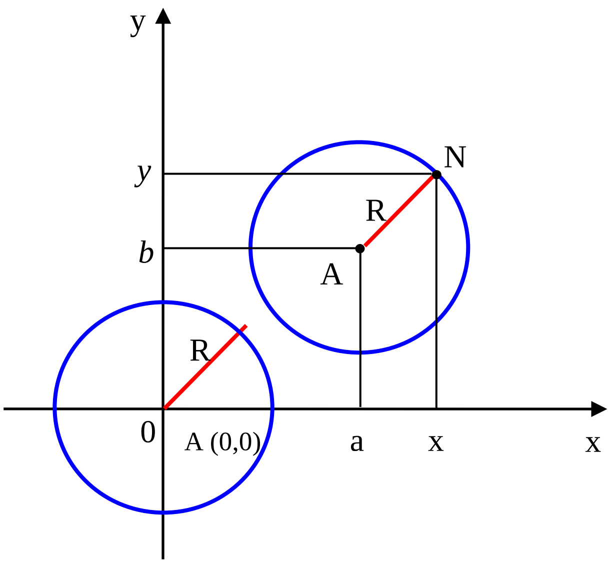
T a' r i f. Markaz deb atalauvchi nuqtadan barobar uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning to'plamiga aylana deyiladi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida aylananing radiusi *R* va markazi A *(a ; b)* nuqtada bo'lsin. *N (x ; y)* aylanadagi ixtiyoriy nuqta. Aylananing ta'rifiga ko'ra: *AN=R.*

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$AN = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Tenglikning ikkita tomonini kvadratga ko'tarib, AN=R ekanligini e'tiborga olsak $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ 1.1 kelib chiqadi. (1-chizma)



1 – c h i z m a.

$N(x, y)$ aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lgani uchun (1.1) tenglama aylananing markazi $A(a,b)$ nuqtada bo'lgan kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Aylananing tenglamasi o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajalidir. Xususiy holda, agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lsa, uning tenglamasi: $x^2 + y^2 = R^2$ (1.2)

(1.1) tenglamada qavslarni ochib va ba'zi bir ayniy almashtirishlarni bajarib, aylananing quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \quad (1.3)$$

Bu tenglamani 2–tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (1) bilan solishtirganda aylana tenglamasi uchun quyidagi ikkita shart bajarilganini ko'rish mumkin: 1) x, y koordinatalar ko'paytmasi bo'lgan $x\,y$li had qatnashmayapti; 2) x^2 va y^2 lar oldidagi koeffisientlar o'zaro teng, ya'ni $A = C \neq 0$; $B = 0$. Bu holda (1) tenglama $Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (1.4) ko'rinishda bo'lib aylanani tasvirlaydi.

Agar $a = -\dfrac{D}{A}$; $b = -\dfrac{E}{A}$; $R^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$ (1.5) bo'lsa, (1.4) tenglama (1.2) tenglamaga aylanadi va, aksincha (1.1) tenglamadan (1.5) formulalar yordamida (1.4) tenglamaga o'tish mumkin.

Mumkin bo'lgan uchta holni ko'ramiz:

1) $D^2 + E^2 - AF > 0$. Bu holda $\left(x + \dfrac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \dfrac{E}{A}\right)^2 = \dfrac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$ (1.6)

tenglama va demak, unga teng kuchli bo'lgan (1.4) tenglama ham markazi $O_1\left(-\dfrac{D}{A}; -\dfrac{E}{A}\right)$ nuqtada bo'lgan, radiusi $R = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{A}$ dan iborat aylanani aniqlaydi.

2) $D^2 + E^2 - AF = 0$. Bu holda (1.6) tenglama $\left(x + \dfrac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \dfrac{E}{A}\right)^2 = 0$

ko'rinishga ega bo'ladi. Ushbu tenglamani va demak, unga teng kuchli bo'lgan (1.4) tenglamani haqiqiy yagona $O_1\left(-\dfrac{D}{A}; -\dfrac{E}{A}\right)$ nuqtani tasvirlaydi.

3) $D^2 + E^2 - AF < 0$ bo'lsa, (1.6) yoki (1.4) tenglamaning radiusi mavhum bo'lib, bu holda haqiqatda aylana mavjud bo'lmasa-da, umumiylik nuqtai nazaridan mavhum aylana deyiladi.

T a' r i f. Aylana bilan umumiy bitta $M(x_1; y_1)$ nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq aylanaga o'tkazilgan urinma deyiladi. Agar $(x_1; y_1)$ aylananing biror nuqtasining koordinatasi bo'lsa, u holda bu nuqtadan aylanaga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi (1.2) tenglama uchun $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = R^2$ (1.7), yoki (1.1) tenglama uchun $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2$ (1.8). ko'rinishda yoziladi.

1 – m i s o l. Markazi $(1;3)$ nuqtada va radiusi 3 ga teng bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h . $a=1$; $b=3$, $R=3$. Bularni (1.1) formulaga qo'yamiz:

J a v o b: $$(x-1)^2+(y-3)^2=9$$

2 – m i s o l. Markazi $(-2;4)$ nuqtada bo'lgan va $(3;-4)$ nuqtadan o'tadigan aylana tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h . Radiusni aylana markazidan uning birorta berilgan nuqtasigacha bo'lgan masofa sifatida topamiz. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak: $R=\sqrt{(3+2)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{25+64}=\sqrt{89}$

J a v o b: $$(x+2)^2+(y-4)^2=89$$

3 – m i s o l. $A(8;5)$ va $B(-1;-4)$ nuqtalardan va markazi absissalar o'qida bo'lgan aylananing tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h . Aylananing markazi $C(a;0)$ bo'lsin. U holda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra $\sqrt{(8-a)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(-1-a)^2+(0+4)^2}$. Bu ifodani soddalashtirib, quyidagini topamiz: $18a=72 \Rightarrow a=4$; $C(4;0)$

$R=AC=\sqrt{(8-4)^2+5^2}=\sqrt{41}$. Aylananing tenglamasi: $(x-4)^2+y^2=41$.

4 – m i s o l. Aylananing radiusini va markazining koordinatalarini toping: $x^2+y^2+6x-10y+13=0$

Y e c h i s h . Berilgan tenglamani ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$x^2+6x+y^2-10y+13=0$$

x^2+6x va y^2-10y ikki hadlarni to'la kvadratlargacha to'ldirib, ushbuni hosil qilamiz: $x^2+2\cdot 3x+3^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=25+9-13$ yoki $(x+3)^2+(y-5)^2=21$, bundan $a=-3$; $b=5$, $R=\sqrt{21}$.

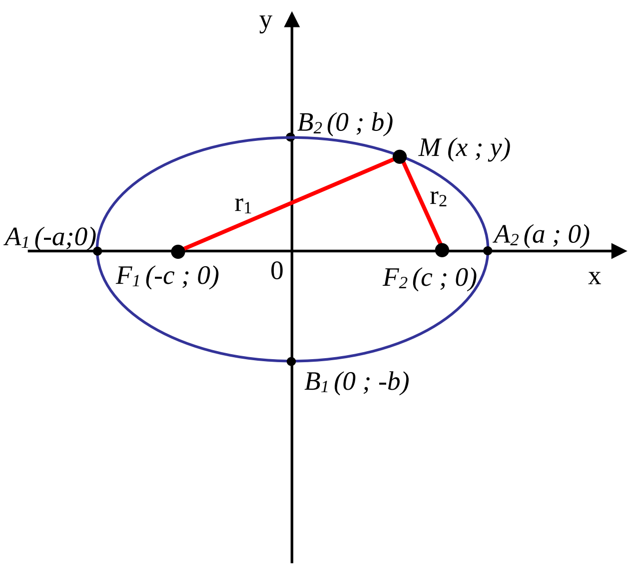
2 – §. ELLIPS VA UNING TENGLAMASI.

Yulduzli osmonni kuzatgan tadqiqotchilar orasida eng buyuklaridan biri, Ulug'bekdan so'ng ikkinchi bo'lgan Tixo Brage erishgan natijalar va hisoblashlardagi aniqliklar yana shubhalar manbai bo'lib qoldi. Endigi shubha sayyoralarning Quyosh atrofidagi harakat orbitalari (traektoriyasi) aylanadan iborat ekaniga bildirilar edi.

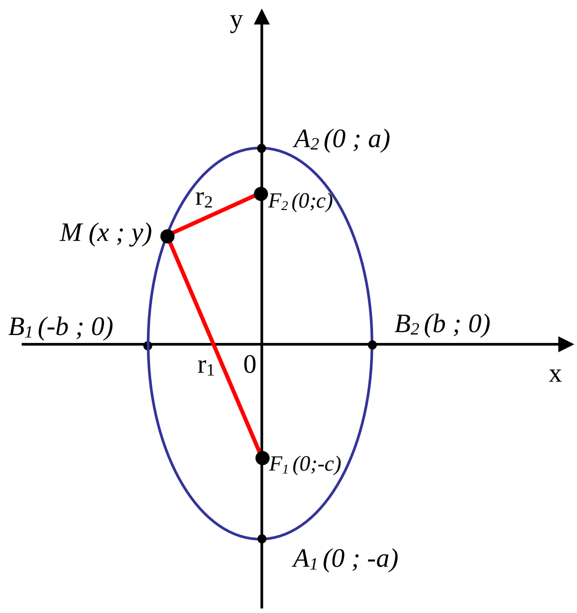
Haqiqatan, Tuxo Bragening shogirdi va yordamchisi, nemis astronomi Iogani Kepler ustozi tomonidan olingan ma'lumotlar asosida Marsning harakatini o'rgandi va bu sayyoraning traektoriyasi ellips ekanligini aniqladi.

Ellips, bu qanday chiziq? U haqida tasavvurga ega bo’lish uchun, bir bo’lak ip uchlarini bir varoq qog’ozning ikki nuqtasiga mahkamlanadi va bu ipni qalam uchi bilan tarang tortiladi. *(2 – chizma).*

Qalamni shu tarang holatda harakatlantirilsa, uning uchi qog’ozda chizadigan egri chiziq ellips bo’ladi.



2 – c h i z m a.



3 – c h i z m a.

<u>Boshqacha aytganda, ellips</u> – bu barcha, shunday M nuqtalardan iborat bo’lgan yassi figuraki, bunda M dan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo’lgan masofalar yig’indisi o’zgarmas songa teng (bu kattalik $(2a)$, fokuslar orasidagi masofa $(2c)$ dan katta bo’lishi shart): $|MF_1| + |MF_2| = const = 2a$ (2.1)

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ va $MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ni hosil qilamiz, demak, $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ (2.2). Bu tenglamani soddalashtirgandan keyin: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ (2.3)

Ellipsning ta'rifiga ko'ra $2a>2c$ bo'lgani uchun a^2-c^2 son musbat:

$a^2-c^2=b^2$ (2.4) belgilash kiritamiz. U holda (2.3) tenglama $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (2.5) ko'rinishni oladi.

(2.5) tenglama fokuslari Ox o'qda yotgan ellipsning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi. (2-chizma) (2.5) tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Ellipsning simmetriya o'qlarini ellips o'qlari deb, ularning kesishgan nuqtasini ellips markazi deb ataymiz. Ellips fokuslari joylashgan o'q fokal o'q deyiladi.

Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi deyiladi.

$F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ nuqtalar ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari. Bu nuqtalar odatda ellipsning uchlari deyiladi. $AA_1=2a$ kesma ellipsning katta o'qi, $BB_1=2b$ kesma esa, ellipsning kichik o'qi deyiladi. a va b lar ellipsning yarim o'qlaridir.

Agar ellipsning fokuslari Oy o'qda yotsa (3-chizma), uning tenglamasi $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b)$ (2.6) ko'rinishda bo'ladi.

Ellipsga doir hamma masalalarda ellipsning simmetriya o'qlari koordinata o'qlari bilan ustma – ust tushadi deb faraz qilinadi.

5 – m i s o l. Agar ellipsning o'qlari $2a=8$ va $2b=6$ bo'lsa, fokuslari Ox o'qda bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Ellipsning tenglamasini tuzish uchun a va b parametrlarni topamiz: $a=4$ va $b=3$. Bu qiymatlarni ellipsning (2.5) tenglamasiga qo'yib, ushbuni hosil qilamiz: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

6 – m i s o l. Agar ellipsning ikki uchi (–5 ; 0) va (5 ; 0) nuqtalarda, fokuslari esa (–3 ; 0) va (3 ; 0) nuqtalarda joylashgan bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Shartdan $a=5$ va $c=3$ ekanligi kelib chiqadi. (2.4) formula bo'yicha $b^2=5^2-3^2=16$ ni topamiz. a^2 va b^2 ning qiymatlarini (2.5) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ni hosil qilamiz.

7 – m i s o l. Fokuslari $(0\ ;\ -\sqrt{3})$ va $(0\ ;\ \sqrt{3})$ nuqtalarda joylashgan, katta o'qi esa $4\sqrt{7}$ ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Fokuslari Oy o'qda yotadi, demak $a=2\sqrt{7}$. (2.4) formulaga ko'ra $b^2=(2\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2=28-3=25$ ni topamiz. a^2 va b^2 ning qiymatlarini (2.6) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{28}=1$ ni topamiz.

8 – m i s o l. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ ellips berilgan. Ellipsning fokuslarining koordinatalarini va ular orasidagi masofani toping.

Y e c h i s h. Ellipsning tenglamasidan $a^2=12,\ b^2=3$ (2.4) formulaga ko'ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\pm 3$. Demak, fokuslarining koordinatalari (–3 ; 0) va (3 ; 0), ular orasidagi masofa esa $2c=2\cdot 3=6$.

3 – §. ELLIPSNING EKSSENTRISITETI, FOKAL – RADIUSLARI, DIREKTRISALARI.

Ellipsning qanday ko'rinishda bo'lishi, ellipsning ekssentrisiteti deb ataluvchi miqdor bilan aniqlanadi.

T a' r i f. Ellipsning ekssentrisiteti deb, fokuslar orasidagi $(2c)$ masofaning katta o'qi $(2a)$ nisbatiga aytiladi, ya'ni $\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$ (3.1) yoki $\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ (3.2).

$c<a$ bo'lgani uchun ellips ekssentrisiteti birdan kichik: $\varepsilon<1$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan, (2.4) formuladan $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-\varepsilon$ kelib chiqadi. Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: ellipsning ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b katta yarim o'qi a dan shuncha kam farq qiladi, ya'ni ellips fokal o'q bo'ylab shuncha kam tortilgan bo'ladi.

(3.2) formuladan ko'rinadiki, b orta borsa ε kichiklasha boradi va aksincha, b kamaya borsa ε kattalasha boradi. b ning limiti nolga intilsa $\varepsilon=1$ bo'lib, ellips ikkilangan kesmaga aylanadi.

Katta va kichik o'qlari teng bo'lgan ellips aylanadir, ya'ni b=a limit holda a radiusli aylana hosil bo'ladi: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ yoki $x^2+y^2=a^2$ (3.3). Bunda $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$ va ellips fokuslari go'yo bitta nuqtada – aylana markazida birlashib ketadi. Aylana essentrisiteti nolga teng: $\varepsilon=\frac{0}{a}=0$.

Ellips va aylana orasidagi bog'lanishni boshqa nuqtai nazardan ham o'ranish mumkin. Yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsni a radiusli aylananing proeksiyasi deb qarash mumkin ([4], 134 bet).

T a' r i f. Ellipsning fokuslaridan ixtiyoriy M(x;y) nuqtasigacha bo'lgan masofalar, M(x;y) nuqtaning fokal–radiuslari deyiladi va r_1=a+εx, r_2=a+εx (3.4) formulalar bilan aniqlanadi (4–cizma). Ellipsning ta'rifiga ko'ra: r_1+r_2=2a (3.5)

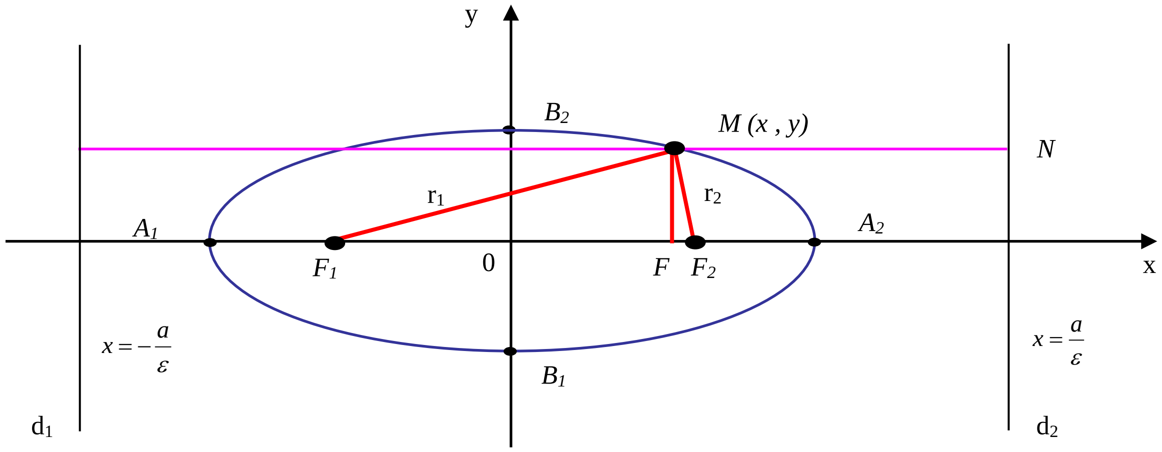
Demak, ellipsning har qanday nuqtasi fokal radiuslarining yig'indisi uning katta o'qiga teng.

T a' r i f. Ellipsning direktrisalari deb ushbu $x=\frac{a}{\varepsilon}$ va $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ (3.6) tenglamalar bilan aniqlanadigan ikki to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Ellipsning direktrisalari y o'iga parallel va ellips markazidan $\pm\frac{a}{\varepsilon}$ uzoqlikda turgan to'g'ri chiziqlardir. $\varepsilon<1$ bo'lganligi uchun $\frac{a}{\varepsilon}>a$; demak, direktrisalar ellipsdan tashqarida joylashadi. (4-chizma). $|d_1d_2|$– direktrisalar orasidagi masofa.

Markazning bir tomonida joylashgan direktrisa va fokus bir – biriga mos direktrisa va fokus deb ataladi.

Ellipsning nuqtalari bir – biriga mos fokus va direktrisaga nisbatan ushbu xossaga ega: ellipsning har bir nuqtasidan fokusgacha olingan masofaning o’sha nuqtadan mos direktrisagacha bo’lgan masofaga nisbatan ellipsning ekssentrisitetiga baravar. (isboti [6], 53-bet)



4 – c h i z m a.

<u>d_1 va d_2 direktrisalarning tenglamalari:</u>

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ va } x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ (3.6) yoki } x = \frac{-a^2}{c} \text{ va } x = \frac{a^2}{c} \text{ (3.7)}$$

Ellipsning ixtiyoriy M (x;y) nuqtasidan fokusgacha bo’lgan (r_1 yoki r_2) masofasining shu M (x;y) nuqtadan direktrisagacha (d_1 yoki d_2) bo’lgan masofaga nisbati ellipsning ekssentrisitetiga teng, ya’ni:

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon \text{ yoki } \frac{r_2}{d_2}=\varepsilon \quad (3.8)$$

Ellipsning o'qlri koordinata o'qlariga parallel bo'lib, simetriya markazi biror (x_0, y_0) nuqtda bo'lganda, uning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ (3.9) ko'rinishda bo'ladi.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning $M_1(x_1 ; y_1)$ nuqtasiga urinma bo'lgan to'g'ri chiziqning tenglamasi: $\frac{x\cdot x_1}{a^2}+\frac{y\cdot y_1}{b^2}=1$ (3.10).

9 – m i s o l. Katta yarim o'qi $a=6$ va $\varepsilon=0{,}5$ bo'lgan, ellipsning kanonik tenglamasini toping.

Y e c h i s h. $\varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}5$. Demak, fokuslar orasidagi masofaning yarmi $c=a\cdot\varepsilon=6\cdot 0{,}5=3$. Ellips kichik yarim o'qi $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}$.

Ellipsning kanonik tenglamasi: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$.

10 – m i s o l. Ellipsning ekssentrisitetini toping: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

Y e c h i s h. Ellipsning tenglamasidan: $a^2=36$; $b^2=16$.

(2.4) formuladan: $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ ni topamiz.

Ekssentrisitetni (3.2) formulaga ko'ra topamiz: $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16}{36}}=\frac{\sqrt{20}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Yoki (3.1) formulaga ko'ra: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

11 – m i s o l. M_1 (4 ; -2) nuqta orqali o'tuvchi, kichik yarim o'qi b=4 bo'lgan ellipsning ekssentrisitetini toping.

Y e c h i s h. $b=4$ da ellipsning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1.$$

$M_1(4;-2)$ nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi.

Demak, $\frac{4^2}{a^2}+\frac{(-2)^2}{16}=1$. Bunda $a^2=\frac{64}{3}$ va $b^2=16$ Ekssentrisitetini (3.2) formula yordamida topmiz: $\varepsilon=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16\cdot 3}{64}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$.

12 – m i s o l. Ellipsning katta o'qi 12 ga teng, $x=\pm 9$ to'g'ri chiziqlar esa uning direktrisalari bo'lsin. Ellipsning kanonik tenglamasini va ekssentrisitetini toping.

Y e c h i s h. Ellipsning kanonik tenglamasini topish uchun a va b yarim o'qlarni bilish kerak. Shart bo'yicha $2a = 12 \Rightarrow a = 6$

b yarim o'qni (3.7) formuladan foydalanib, quyidagicha topamiz:

$x = \frac{a^2}{c} \Rightarrow c = \frac{a^2}{x} = \frac{36}{9} = 4$, $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$. Ellips tenglamasi: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

Ellips ekssentrisiteti: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

13 – m i s o l. Ellipsning kichik o'qi 8 ga, ekssentrisiteti $\varepsilon = 0{,}6$ ga teng bo'lsa ellipsning kanonik tenglamasini va direktrisa tenglamasini yozing.

Y e c h i s h. Shartga ko'ra $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Ekssentrisitetni (3.2) formulasiga asosan: $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{16}{a^2}} = 0{,}6$. Bundan $a^2 = 25$.

Ellips tenglamasi, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ko'rinishda bo'ladi.

$$c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{25 - 16} = 3$$

(3.7) formuladan foydalanib direktrisa tenglamasini topamiz:

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = \pm \frac{25}{3}$$

14 – m i s o l. Katta o'qi 16 ga, direktrisalar orasidagi masofa 20 ga teng bo'lsa, ellipsning kanonik tenglamasini va ekssentrisitetini toping.

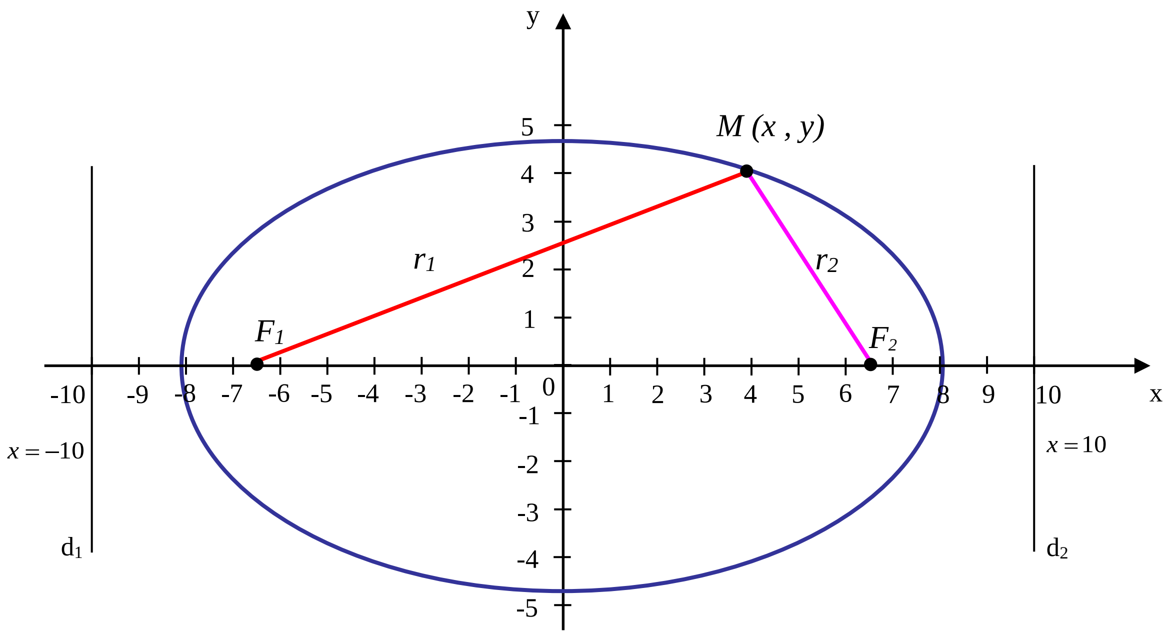
Y e c h i s h. Shartga ko'ra $2a = 16 \Rightarrow a = 8$; (3.6) formuladan:

$x = \frac{a}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{12}{2} = \frac{8}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{4}{3}$; (3.7) formuladan: $x = \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow 10 = \frac{64}{c} \Rightarrow c = 6{,}4$

$b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 40{,}96 = 23{,}04$. Bundan, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{23{,}04} = 1$ yoki

$$\frac{x^2}{64} + \frac{25y^2}{576} = 1$$

Ellipsning chizmasini yasaymiz: $a = 8$; $b = 4{,}8$; $c = 6{,}4$.



5 – c h i z m a.

T A Y A N C H   I B O R A L A R.

1. Kanonik tenglama.

2. Ekssentrisitet.

3. Fokal – radiuslar.

4. Direktrisalar.

5. Radius.

6. Ikki nuqta orasidagi masofa.

7. Diometr.

8. Ikkinchi tartibli egri chiziq.

9. Markaz.

10. Fokuslar.

11. Katta o’q.

12. Kichk o’q.

13. Yarim o’qlar.

4 – §. O’z bilimini sinash uchun savollar va topshiriqlar.

1. Aylana ta’rifini ayting.

2. Aylananing umumiy va kanonik tenglamalarini yozing.

3. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi qanday shartlar bajarilganda aylana tenglamasiga aylanadi?

4. Ellips deb nimaga aytiladi?

5. Ellipsning katta va kichik o’qlari qaysi o’qlarda joylashadi?

6. Fokus nuqtalarining koordinatalarini ayting va chizmada yasab ko’rsating.

7. Ekssentrisitet deganda nima tushuniladi va qanday formula bilan topiladi?

8. Fokal radiuslarini topish formulalari va chizmasini tushuntiring.

9. Ellipsning direktrisasi deganda nimani tushunasiz va uni chizmada qanday joylashini tushuntiring.

10. Ellipsning kanonik tenglamalari uning joylashishiga qarab qanday formulalar bilan yoziladi?

11. Markzi $\left(2\frac{1}{2} \quad ; \quad 4\frac{3}{4}\right)$ nuqtada va radiusi 4 g teng bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

12. Markazi (4 ; 3) nuqtada bo'lgan va (1 ; 7) nuqtadan o'tadigan aylana tenglamasini toping.

13. Absissalar oqiga A (3 ; 0) nuqtada urinadiganva radiusi 6 ga teng bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

14. Agar ellipsning ikkita uchi A_1(-6 ; 0) va A_2(6 ; 0) nuqtalarda, fokuslari esa $(\pm 4 \quad ; \quad 0)$ koordinatalar bilan berilgan bo'lsa, uning kanonik tenglamasini toping.

15. Fokuslari Ox o'qida bo'lgan va katta o'qi 14 ga, ε ekssentristeti esa $\frac{2}{3}$ ga teng bo'lgan ellipsning tenglamasini yozing.

16. Kichik o'qi 6 ga, direktrisalar orasidagi masofa 13 ga teng bo'lsa, ellipsnink kanonik tenglamasini toping.

II – B O B. G I P E R B O L A V A P A R A B O L A.

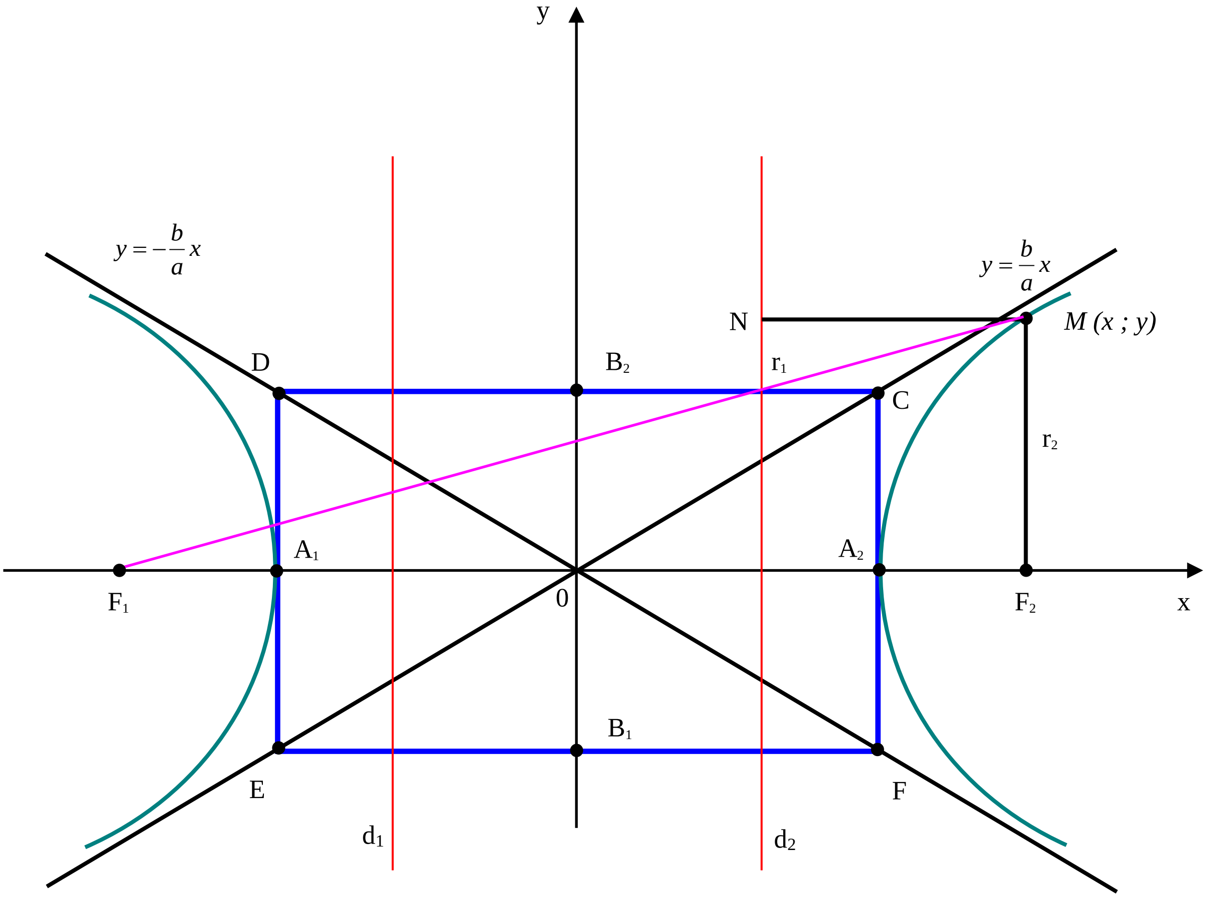
R E J A:

1. Giperbola va uning tenglamasi.
2. Giperbolaning shakli.
3. Giperbolaning asimptotalari.
4. Giperbolaning ekssentrisiteti, direktrisalari va fokal radiuslari.
5. Giperbolaning ba'zi xossalari.
6. Parabola va uning tenglamasi.

1 – §. GIPERBOLA VA UNING TENGLAMASI.

T a' r i f. Giperbola deb, tekislikning barcha shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslri deb ataluvchi berilgan ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas bo'ladi (bu kattalik nolga teng bo'lmagan va fokuslari orasidagi masofalardan kichik bo'lgan shartda).

F_1 va *F_2* fokuslar orasidgi masofani *2c* orqali, giperbolaning har bir nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduliga teng bo'lgan o'zgarmas miqdorni 2a orqali ($0<2a<2c$) belgilaymiz. Ellips holida bo'lgani kabi absissalar o'qini fokuslar orqali o'tkazamiz, F_1 F_2 kesmaning o'rtasini esa koordinatalar boshi deb qabul qilamz. *(6 – chizma)*

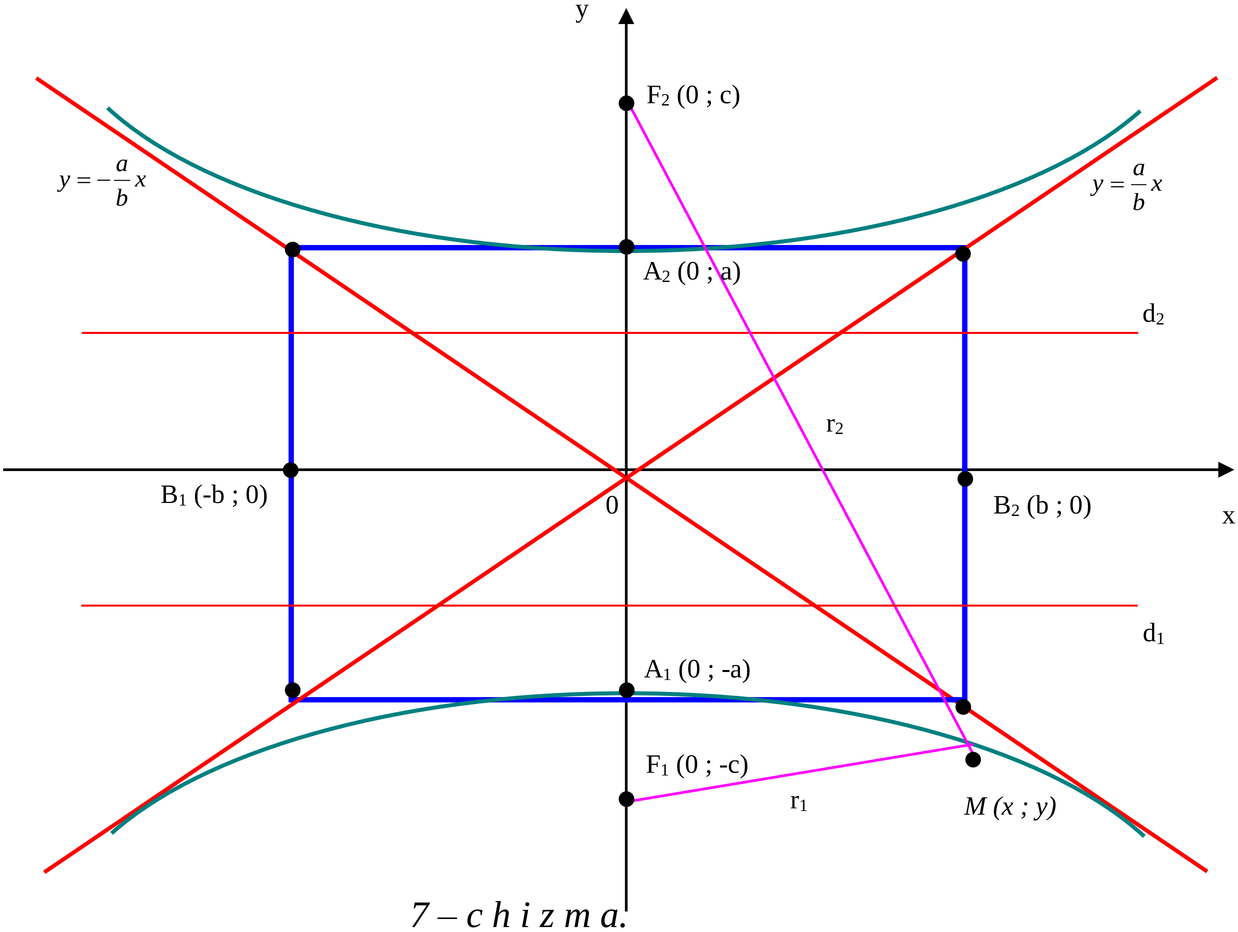


6 – c h i z m a.

Bunda fokuslar F_1 (-0 ; 0) va F_2 (0 ; 0) koordinatalarga ega bo'ladi.

Fokuslari Ox o'qida yotgan giperbola (6-chizma) tenglamasini, uning ta'rifiga asoslanib keltirib chiqaramiz. Ikki nuqt orasidagi masofa formulasiga ko'ra:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \qquad (1.1)$$



7 – c h i z m a.

/

Soddalashtirishlarni bajargandan so'ng, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \quad (1.2)$$

(1.2) tenglamada giperbola uchun 2a < 2c bo'lgandan ayirma noldan kichik:

$a^2 - c^2 < 0$. Shuning uchun $c^2 - a^2 = b^2$ (1.3) deb olamiz. U hold (1.2) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (1.4).

(1.4) tenglamaga fokuslari Ox o'qida yotgan giperbolaning kanonik (sodda) tenglamasi deyiladi.

Giperbola tenglamasida $y = 0$ deyilsa, $x = \pm a$ bo'lib, giperbola Ox o'qini $A_1(-a\ ;\ 0)$ va $A_2(a\ ;\ 0)$ nuqtalarda kesishini bildiradi. (1.4) tenglamada x=0 deyilsa $y^2 = -b^2$ bo'lib, bu esa giperbola Oy o'qi bilan kesishmasligini bildiradi.

Lekin, $y = \pm\sqrt{-b^2} = \pm bi$ mavhum bo'lgani uchin,fokal o'qqa perpendikulyar bo'lgan simmitiriya o'qi giperbolaning mavhum o'qi(B_1B_2 kesma), giperbolaning fokuslari joylashgan o'q fokal o'q (F_1F_2 kesma) va fokal o'qni odatta haqiqiy o'q (A_1A_2 kesma) deyilib, A_1 va A_2 nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlari deb ataladi.

Agar giperbolaning fokuslari Oy o'qda yotsa (7-chizma), u holda uning tenglamasi $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (1.5). Bu giperbola (1.4) giperbolaga nisbatan qo'shma deyiladi.

1 – m i s o l. Agar giperbolaning haqiqiy o'qi 18 ga, mavhum o'qi esa 8ga teng bo'lsa, fokuslari Ox o'qda yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Giperbolaning tenglamasini tuzish uchun a va b parametrlarni bilish zarur. Masalaning shartidan: $2a = 18 \Rightarrow a = 9$; $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Topilgan qiymatlarni (1.4) ga qo'ysak: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$

2 – m i s o l. Agar giperbolaning uchlari A_1 (-2 ; 0) va A_2 (2 ; 0) nuqtalarda joylashgan, fokuslri esa F_1 (-4 ; 0) va F_2 (4 ; 0) nuqtalarda joylashgan bo'lsa, giperbola tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Shartdan a=2, c=4 ekani kelib chiqadi. (1.3) formulaga ko'ra $b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$. Bu qiymatlarni (1.4) tenglamaga qo'yib, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ ni hosil qilamiz.

3 – m i s o l. Giperbolaning tenglamasi berilgn $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{57} = 1$. Uning uchlarining va fokuslarining koordinatalarini topig.

Y e c h i s h. Giperbolaning tenglamasidan: $a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$.

(1.3) formulaga ko'ra $c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 57 = 121 \Rightarrow c = \pm 11$. Demak, giperbolaning uchlari (-8 ; 0) va (8 ; 0) nuqtalar, fokuslari esa (-11;0) va (11;0) nuqtalar ekan.

2 – §. GIPERBOLANING SHAKLI.

(1.4) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ (2.1) tenglamalarni topamiz.

Bu tenglamalarning birinchisidan ushbu xulosalar chiqadi:

1) $|x|<a$ uchun y ning qiymti mavhum; demak, giperbola y o'qi bilan kesishmaydi va $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan soha ichida nuqtalari bo'lmaydi.

2) $x=\pm<a$ bo'lganda, $y=0$ bo'ladi; demak, giperbola x o'qini ikkita A_1 va A_2 nuqtada kesadi; bu A_1 va A_2 nuqtalar koordinatalar boshida a masofda turadi va giperbolaning uchlari deb ataladi.

3) absolyut qiymti a dan katta bo'lgan x ning har bir qiymatiga y ning ikki qiymati to'g'ri keladi, bu qiymatlar bir – biridan ishoralari bilangina farq qiladi. Demak, giperbola x o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziqdir;

4) x cheksiz o'sganda y ham cheksiz o'sadi. Demak, (2.1) tenglamalarning ikkinchisi giperbolaning y o'qiga nisbatan simmetrik egri chiziq ekanligini ko'rsatadi.

Giperbolaning hamma nuqtalari $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohadan tashqarida joylashganligidan va ordinatalar o'qiga simmetrikligidan, u cheksiz cho'zilgan ikki ayrim tarmoqdan ibort ekanligi bilinadi. (6-chizma).

3 – §. G I P E R B O L A N I N G A S I M P T O T A L A R I.

Funksiya argumenti x cheksizlikka intilganda funksiya grafigi biror to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashish xossasi uning grafigini chizishda muhum rol o'ynaydi.

T a' r i f. Agar $y = f(x)$ egri chiziqning M nuqtasidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan s masofa M nuqta cheksiz uzoqlashganda nolga intilsa, l to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya grafigining asimptota chiziqlari umuman uch xil ko'rinishda bo'ladi:

1). Vertikal asimptota;

2). Gorizontal asimptota;

3). $y = kx + b$ *ko'rinishdagi asimptota chizig'i.*

$x \to a$ bo'lganda $|y| \to \infty$ bo'lsa, $x = a$ vertikal asimptota chizig'i; $y \to a$ bo'lganda $|x| \to \infty$ bo'lsa, $y = b$ gorizontal asimptota chizig'i bo'ladi.

Agar $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (3.1), $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - k(x)$ (3.2) limitlar mavjud bo'lsa, u holda $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning og'ma asimptotasi deyiladi.

Agar $y = kx + b$ og'ma asimptota tenglamasini aniqlashda $k = 0$ (xususiy holda $k = 0$, $b = 0$) bo'lsa, u holda $y = b$ (yoki $y = 0$) to'g'ri chiziq gorizontal asimptota deyiladi.

Giperbolaning muhum xususiyatlaridan biri shundaki, uning nuqtalari uchlaridan uzoqlashib borgan sari asimptota deb atalgan to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib boradi.

Giperbolada ikkita asimptota bor bo'lib, uning tenglamalari, (1.4) uchun: $y = \pm\frac{b}{a}x$ (3.3), (1.5) tenglama uchun: $y = \pm\frac{a}{b}x$ (3.4).

6 – va 7 – chizmalarda giperbola va uning asimptotalarining o'zaro joylashishi ko'rsatilgan. Bu chizmalarda giperbola asimptotalarining qanday joylashi ham ko'rsatilgan. Giperbolani yasashdan avval uning asimptotalarini yasash tavsiya qilinadi.

4 – m i s o l. Giperbola asimptotalarining tenglamalari $8y + 6x = 0$ va $8y - 6x = 0$ hamda fokuslar orasidagi masofa 20. Uning kanonik tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Masala shartiga asosan va (3.3) formulaga ko'ra: $y = \pm\frac{6}{8}x$.

Bundan: $b = \frac{6}{8}a$ (3.5)

Masala shartiga asosan: $2c=20 \Rightarrow c=10$; $c^2=b^2+a^2 \Rightarrow 100=b^2+a^2$ (3.6)

a va b larni (3.5) va (3.6) dan topamiz:

$$\begin{cases} 100=a^2+\dfrac{36}{64}a^2 \\ b=\dfrac{6}{8}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=64 \\ b^2=36 \end{cases}$$

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi: $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

5 – m i s o l. Asimptotalar orasidgi burchak 150 º va fokuslari abssisssalar o'qida bo'lib, ular orasidagi masofa $2c=8\sqrt{3}$ bo'lsa giperbola tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Agar giperbola asimptotalari o'zaro 150 º li burchak tashkil etsa, ularda bittasi bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchak 30º bo'ladi.

Shuning uchun: $\dfrac{b}{a}=tg30^0 \Rightarrow a=\sqrt{3}b$.

a va b larning qiymatlarini aniqlaymiz. Masala shartiga asosan:

$c^2 = 48$. Bundan: $\begin{cases} a = \sqrt{3}b \\ a^2 + b^2 = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b^2 + b^2 = 48 \\ a^2 = 3b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 12 \\ a^2 = 36 \end{cases}$

Demak, izlanayotgan giperbola tenglamasi: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1$

4 – §. Giperbolaning ekssentrisiteti, direktrisalari va fokal radiuslari.

T a' r i f. *Giperbolaning ekssentrisiteti deb,* fokuslar orasidagi (2c) masofaning haqiqiy o'qi (2a) nisbatiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4.1).$$

$c < a$ bo'lgani uchun $e > 1$ bo'ladi.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatan (1.3) formuladan quyidagi kelib chiqadi: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = e^2 - 1$ (4.2). Bundan ekssentrisiteti qanchalik kichik bo'lsa, giperbolaning yarim o'qlari nisbati $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'lishi ko'rinadi.

Biroq $\frac{b}{a}$ nisbat giperbola asosiy to’g’ri to’rtburchagi CDEF (6-chizma) ning shaklini, demak, giperbolaning o’zining shaklini aniqlaydi. Giperbolaning ekssentrisiteti qanchalik kichik bo’lsa, uning asosiy to’g’ri to’rtburchagi fokal o’q yo’nalishi bo’yicha shunchalik tortilgan bo’ladi.

T a’ r i f. *Giperbolaning direktrisalari deb,* uning simmetriya markazidan $\pm\frac{a}{e}$ masofada haqiqiy o’qiga perpendikulyar bo’lib o’tadigan $(d_1$ va $d_2)$ to’g’ri chiziqlarga aytiladi.

Demak, giperbola direktrisalarining tenglamalari:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{e} \\ x = -\dfrac{a}{e} \end{cases} \quad (4.3) \text{ yoki } \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{c} \\ x = -\dfrac{a^2}{c} \end{cases} \quad (4.4)$$

Giperbolaning markazidan bir tomonda yotgan direktrisasi va fokusi mos direktrisa va mos fokus deb ataladi.

Giperbolaning nuqtalari mos fokus va mos direktrisaga nisbatan ushbu xossaga ega: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo’lgan masofaning mos direktrisagacha bo’lgan masofaga nisbati o’zgarmas son bo’lib, giperbolaning ekssentrisitetiga tengdir, ya’ni:

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad (4.5) \text{ yoki } \frac{r_2}{d_2} = e \quad (4.6)$$

Ta'rif. Giperbolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasidan uning $F_1(-c;0)$ va $F_2(c;0)$ fokuslarigacha bo'lgan masofalari M nuqtaning *fokal radiuslari deyiladi* va ular shu

$\begin{matrix} r_1 = -a + ex \\ r_2 = a + ex \end{matrix}$ (o'ng tarmog'i uchun) (4.7) va $\begin{matrix} r_1 = -a - ex \\ r_2 = a - ex \end{matrix}$ (chap tarmoq uchun) (4.8) formulalar bilan aniqlanadi.

6 – misol. Giperbolaning tenglamasi berilgan: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1$. Uning ekssentrisitetini toping.

Yechish. Giperbola tenglamasidan: $a^2 = 36$, $b^2 = 12$. Ekssentrisitet (4.1) formula bo'yicha hisoblanadi: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{7}{6}$;

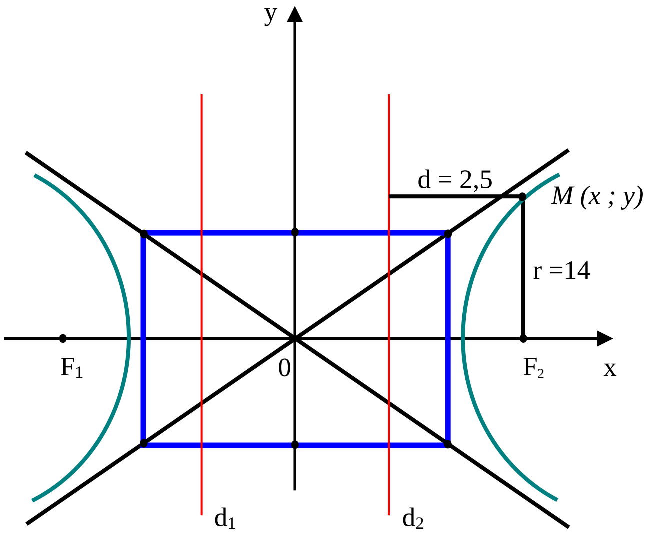
7 – misol. Haqiqiy o'qining uzunligi 10 ga, ekssentrisiteti $\frac{6}{5}$ ga teng bo'lib, fokuslari Ox o'qda yotgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko'ra: $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ (4.1) tenglikdan foydalanib, quyidagini topamiz: $\frac{6}{5} = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 6$.

So'ngra, $b^2 = 36 - 25 = 11$ ni topamiz. Shunday qilib izlanayotgan tenglama $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$ ko'rinishda bo'ladi.

8 – m i s o l. Giperbolaning ekssentrisiteti $e=\frac{7}{5}$. $M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi r=14. Shu M nuqtadan u bilan bir tomonda yotuvchi direktrisagacha bo'lgan masofani hisoblang.

Y e c h i s h. Masala shartiga asosan chizma chizamiz *(8 – chizma).*



8 – c h i z m a.

Agar $M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi r bo'lsa, $M(x;y)$ nuqtadan M nuqta bilan bir tomonda yotuvchi direktrisagacha bo'lgan masofani d desak, bular orasida $e=\frac{r}{d}$ munosabat mavjud. Bu munosabatdan: $d=\frac{r}{e}=\frac{14}{\frac{7}{5}}=\frac{5}{2}=2,5$.

J a v o b: **d = 2,5**

5 – §. Giperbolaning ba'zi xossalari.

1. Agar giperbolaning haqiqiy yarim o'qi mavhum yarim o'qqa teng bo'lsa $(a=b)$, u teng tomonli (yoki teng yonli) giperbola deyiladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ yoki $x^2-y^2=a^2$ (5.1) ko'rinishga ega bo'ladi. Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamasi $y=x$, $y=-x$ (5.2) ko'rinishda bo'ladi va demak, koordinata burchaklarining bissektrisalari bo'ladi.

Teng tomonli giperbolaning ekssentrisiteti: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}$ (5.3)

2. (1.3) va (4.1) tenglamalar fokuslari Oy o'qda bo'lgan giperbola uchun o'zgarishsiz qoladi.

3. Fokuslari Oy o'qda yotgan teng tomonli giperbolaning tenglamasi:

$y^2-x^2=a^2$ (5.4) ko'rinishda bo'ladi.

4. Giperbolaning o'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lib, markazi biror $(x_0;y_0)$ nuqtada bo'lsa, uning tenglamasi $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ (5.5) ko'rinishda bo'ladi.

(1) tenglamada $A=\frac{1}{a^2}$; $B=0$; $C=-\frac{1}{b^2}$; $D=0$; $E=0$; $F=-1$ bo'lsa, u tenglama $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ko'rinishni olib, giperbola tenglamasiga aylanadi.

9 – m i s o l. Quyidagi giperbolaning tenglamasini eng soda shaklga keltiring: $16x^2 - 4y^2 + 32x + 16y - 64 = 0$.

Y e c h i s h. Bu berilgan tenglamani giperbolaning kanonik ko'rinishdagi tenglamasiga keltiramiz.

$16x^2 + 32x = 16(x^2 + 2x + 1) - 16$ va $-4y^2 + 16y = -4(y^2 - 4y + 4) + 16$ ekanliklarini e'tiborga olsak, berilgan tenglamaning ko'rinishi:

$16(x+1)^2 - 4(y-2)^2 = 64$ yoki $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$. Bu tenglama markazi $(-1;2)$ nuqtada, haqiqiy yarim o'qi 2 ga mavhum yarim o'qi esa 4 bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasidir.

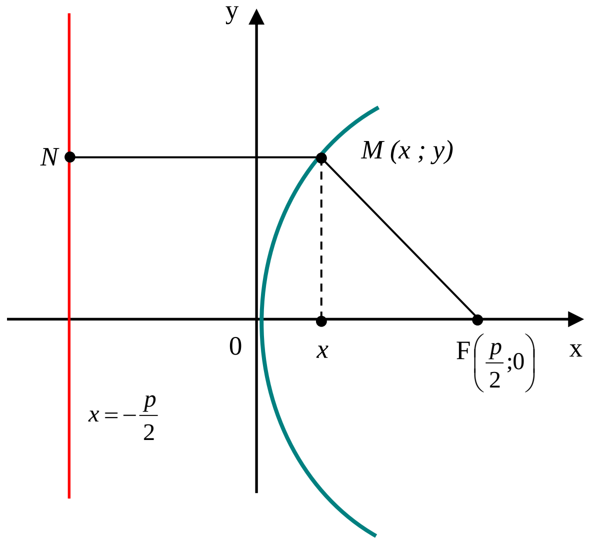
6 – §. Parabola va uning tenglamasi.

6.1. Uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola.

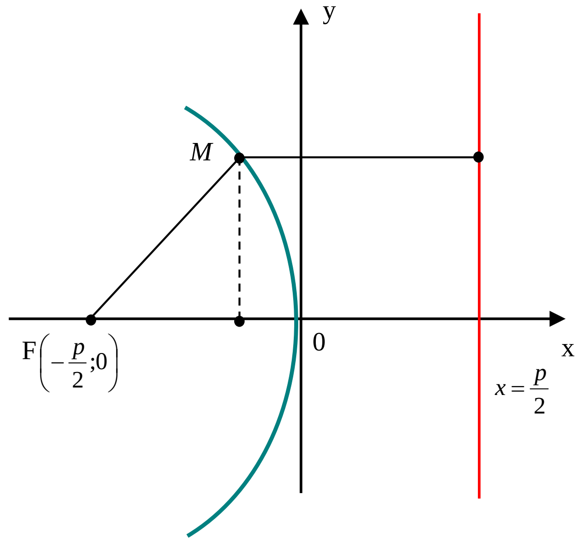
T a' r i f. ***Parabola deb,*** tekislikning fokus deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan baravar uzoqlashgan barcha nuqtalar to'plamiga (fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi) aytiladi.

Fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofani p orqali belgilaymiz. Bu kattalik ***parabolaning parametrik deyiladi.***

Parabola tenglamasini keltirib chiqarish uchun tekislikda koordinatalar sistemasini quyidagicha olamiz. Fokusdan o'tuvchi hamda berilgan direktrisaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni abssissa o'qi deb, direktrisa va fokus orasidagi masofani ifodalovchi kesma o'rtasidan o'tuvchi hamda Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Oy o'qi deb olamiz. *(9 – chizma)*



9 – c h i z m a.



10 – c h i z m a.

Shunday qilib, tanlangan sistemada *fokus* $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, **direktrisa tenglamasi** $x=-\frac{p}{2}$ (6.12) ko'rinishda bo'ladi.

$M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda parabola ta'rifiga asosan: $MN=MF$ (6.11). Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$ (6.13) bo'ladi.

(6.12) tenglikning har ikki tomonini kvadratga oshirib topamiz:

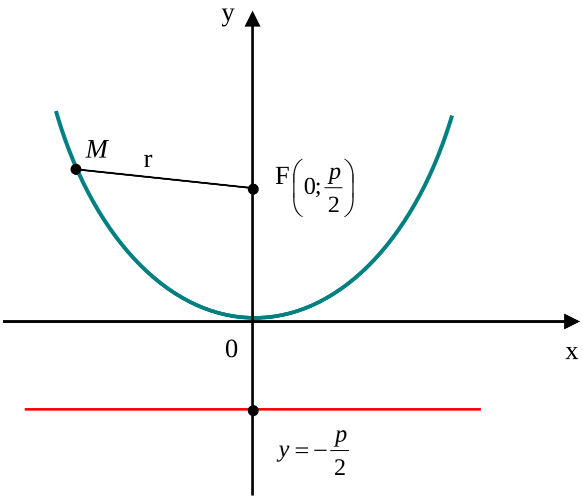
$y^2 = 2px(p > 0)$ (6.14). Bu tenglama, simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari o'nga yo'nalgan, uchi koordinata boshida bo'lgan parabolaning kanonik (eng sodda) tenglamasi deyiladi (9-chizma).

Parabolaning simmetriya o'qi fokal o'q deyiladi. Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning uchi deyiladi.

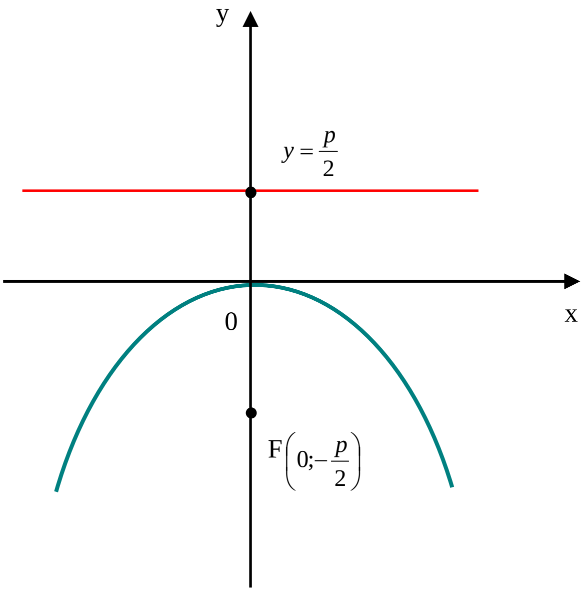
$M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi: $r = x + \frac{p}{2}$ (6.15)

Simmetriya o'qi Ox va tarmoqlari chapga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola (10-chizma) ning kanonik tenglamasi $y = -2px$ $(p > 0)$ (6.15) ko'rinishda bo'ladi. Uning direktrisasi tenglamasi $x = \frac{p}{2}$ (6.1.7) bo'ladi.

Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida joylashgan parabolaning tenglamasi (11-chizma) $x^2 = 2py$ $(p > 0)$ (6.1.7) ko'rinishda bo'lib, uning direktrisasi tenglamasi $y = -\frac{p}{2}$ (6.1.8) bo'ladi. $M(x;y)$ nuqtaning fokal – radiusi: $r = y + \frac{p}{2}$ (6.1.9)



9 – c h i z m a.



10 – c h i z m a.

Oy o'q simmetriya o'qi bo'lgan va tarmoqlari pastga yo'nalgan, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabolaning (12-chizma) kanonik tenglamasi $x^2 = -2py \ \ (p > 0)$ (6.1.10) ko'rinishda bo'lib, uning direktrisasi tenglamasi $y = \frac{p}{2}$ (6.1.11) bo'ladi.

Parabolaning ekssentrisiteti: $\varepsilon = 1$, chunki $d = r$; $e = \frac{r}{d} = 1$.

10 – m i s o l. Agar uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabolaning fokusi $F(4;0)$ nuqtada yotsa, bu parabola tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Parabolaning fokusi Ox o'qining musbat yarim o'qida yotibdi.

Unda parabolaning tenglamasi $y^2 = 2px$ bo'ladi. $\frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 8$.

Demak, $y^2 = 16x$.

11 – m i s o l. Uchi koordinatalar boshida, Ox o'qiga nisbatan simmetrik va $A(2;-2)$ nuqtadan o'tuvchi parabolaning tenglamasi topilsin.

Y e c h i s h. Shartga ko'ra izlanayotgan parabola $(2;-2)$ nuqtadan o'tadi. Binobarin, bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi. $(-2)^2 = 2p \cdot 2 \Rightarrow p = 1$.

Demak, parabolaning tenglamasi $y^2 = 2 \cdot 1 \cdot x = 2x$ bo'ladi.

12 – m i s o l. Parabola tenglamasi $y^2 = 10x$ berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Parabola tenglamasi $y^2 = 10x$ dan $2p = 10 \Rightarrow p = 5$.

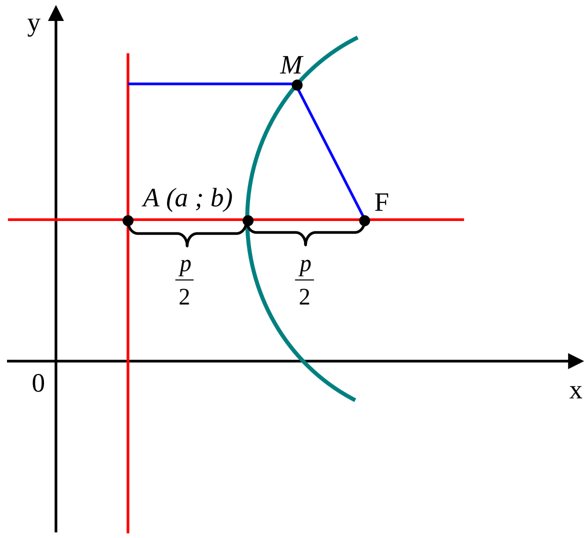
$x = -\frac{p}{2}$ bo'lgani uchun $x = -\frac{5}{2}$ yoki $2x + 5 = 0$ direktrisa tenglamasidir.

13 – m i s o l. Uchi koordinatalar boshida, direktrisasining tenglamasi $x = -4$ bo'lgan parabola fokusining koordinatalarini yozing.

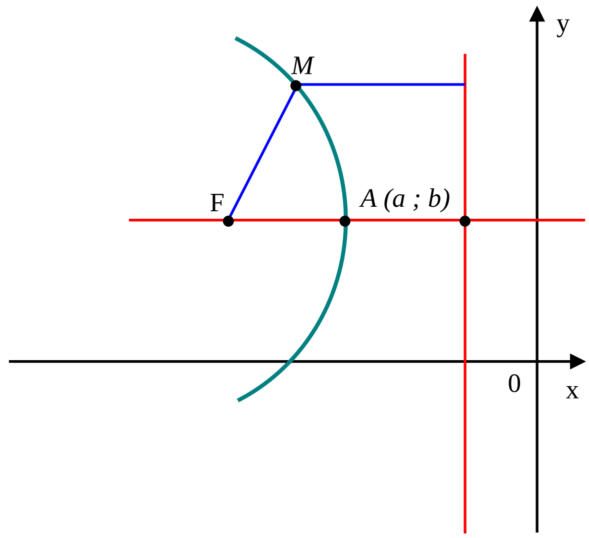
Y e c h i s h. Koordinatalar boshidan, direktrisagacha bo'lgan masofa koordinatalar boshidan fokusgacha bo'lgan masofaga, ya'ni $\frac{p}{2}$ ga teng. $x = -4$ direktrisa tenglamasidan $\frac{p}{2} = 4$ ekani kelib chiqadi. $x = -\frac{p}{2}$ direktrisa tenglamasiga $y^2 = 2px$ parabola mos keladi, uning fokusi $F(4;0)$.

6.2. Uchi siljigan parabola.

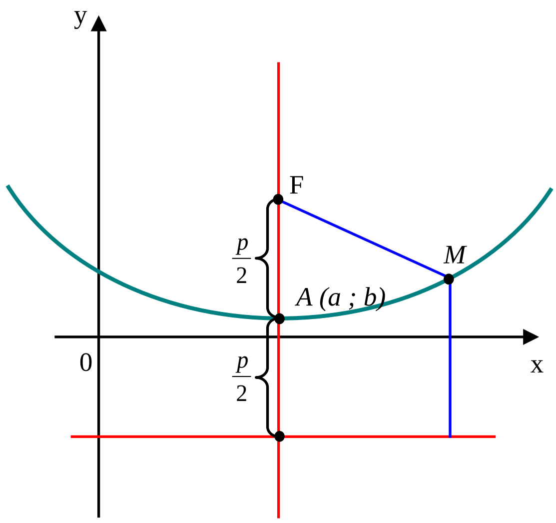
Uchi $(a;b)$ nuqtada, sim metriya o'qi Ox o'qqa parallel va tarmoqlari o'ngga yo'nalgan parabola tenglamasi *(13 – chizma)*:



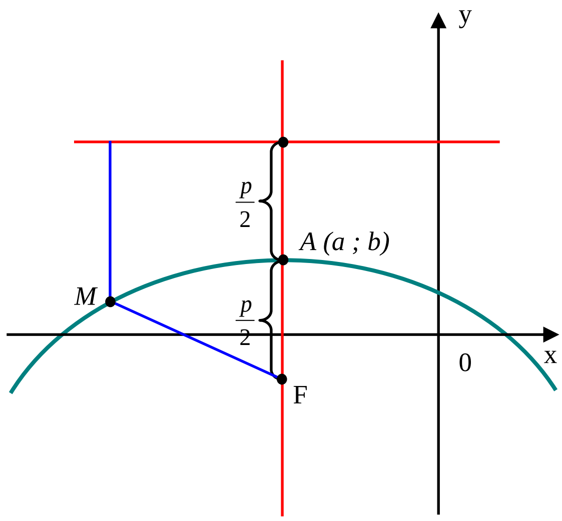
13 – c h i z m a.



14 – c h i z m a.



15 – c h i z m a.



16 – c h i z m a.

$(y-b)^2 = 2p(x-a)$ (6.2.1) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel va tarmoqlari chapga yo'nalgan parabola tenglamasi *(14 – chizma):*

$(y-b)^2 = -2p(x-a)$ (6.2.2) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari yuqoriga yo'nalgan parabola tenglamasi *(15 – chizma):*

$(x-a)^2 = -2p(y-b)$ (6.2.3) ko'rinishda bo'ladi.

Uchi $(a;b)$ nuqtada, simmetriya o'qi Oy o'qqa parallel va tarmoqlari pastgayo'nalgan parabola tenglamasi *(16 – chizma):*

$(x-a)^2 = -2p(y-b)$ (6.2.4) ko'rinishda bo'ladi.

Tenglamalarning har birida parabolaning parametri $p>0$ – parabola fokusidan uning direktrisasigacha bo'lgan masofa.

14 – m i s o l. Uchi A (1 ; 3) nuqtada bolib, M (5 ; 7) nuqtadan o`tuvchi, simmetriya o`qi Ox o`qqa parallel bo`lgan parbola tenglamasini toping.

Y e c h i s h. Shartga muvofiq, izlanayotgan parabola tenglamasi (6.2.1) ko`rinishda bo`ladi, chunki M (5 ; 7) nuqta parobalaning uchidan o`ngda joylashgan. Demak, parobolaning tarmoqlari o`ngga yo`nalgan. $p$ parametrning qiymatini hisoblash uchun A va M nuqtalarning kordinatalarini (6.2.1) tenglama qo`yamiz:

$(7-3)^2 = 2p(5-1) \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = 2.$ Topilgan $p=2$ qiymatni va A uchning koordinatalarini (6.2.1) tenglamaga qo`yib, izlanayotgan tenglamani hosil qilamiz: $(y-3)^2 = 4(x-1)$

15 – m i s o l. Uchi A (3 ; -3) nuqtada, fokusi F (8 ; 2) nuqtada bo`lgan parabola tenglamasini tuzing .

Y e c h i s h. Shartga ko`ra izlanayotgan parabolaning tenglamasi (6.2.1) ko`rinishda bo`ladi. Parabolaning o`qi Ox o`qqa parallel bo`lgani uchun (uchining va fokisining) ordinatalari bir xil va demak, Ox o`qqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziqda yotadi), parobolaning tarmoqlari esa o`ngga yo`nalgan (parabolaning fokusi uchidan o`ngda joylashgan). Parobolaning uchi bilan fokusi orasidagi masofa p\2 ga teng bo`lgani uchun $\frac{p}{2}=8-3=5\Rightarrow p=10$.

A uchining koordinatalarini va p ning topilgan qiymatini (6.2.1) tenglamaga qo'yib, $(y+3)^2=10(x-3)$ ni hosil qilamiz .

16 – m i s o l. $y^2+4y-24x+76=0$ parabola uchi va fokusining koordinatalarini toping. Direktrisasining tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Parobolala tenglamasini (6.2.1) ko`rinishga keltiramiz :

$$y^2+4y=24x-76\Rightarrow y^2+2\cdot 2y+2^2=24x-72\Rightarrow (y+2)^2=24(x-3).$$

Bundan parabola uchining koordinatalari: A (3;-2); $2p=24\Rightarrow p=12$.

Parabola uchidan fokusigacha bo`lgan masofa $\frac{p}{2}=\frac{12}{2}=6$ ga teng.

Fokusning abssissasi: $3+\frac{p}{2}=3+6=9.$ Fokus parabola uchidan o`ngda joylashgan, chunki parabolaning tarmoqlari o`ngga yo`nalgan; fokusning ordinatasi parabola uchining ordinatasiga teng, chunki parobolaning o`qi Ox o`qqa parallel, u holda fokusning koordinatalari F (9 ; -2) bo`ladi.

Parabolaning tarmoqlari o`ngga yo`nalgani uchun direktrisa parabola uchidan chaproqdan o`tadi. U koordinatalar boshidan ham chapdan o`tadi, chunki uchidan Oy o`qqacha masofa 3 ga teng, uchidan direktrisagacha bo`gan masofa 6 ga teng. Direktrisaning abssissasi minus ishora bilan olingan ushbu ayirmaga teng: $\frac{p}{2}-3=6-3=3$.

Shuning uchun direktrisaning tenglamasi: $x=-3$

T A Y A N C H   I B O R A L A R.

1. Fokuslar orasidagi masofa.

2. Giperbola uchi.

3. Giperbolaning mavhum o'qi.

4. Fokal o'q.

5. Giperbolaning haqiqiy o'qi.

6. Qo'shma giperbola.

7. Vertikal asimptota.

8. Gorizontal asimptota.

9. Og'ma asimptota.

10. Giperbolaning o'ng va chap tarmoqlari.

11. Teng tomonli giperbola.

12. Parabolaning parametri.

7 – §. O'z bilimini sinash uchun savollar va topshiriqlar.

1. Giperbolaning ta'rifini ayting.

2. Giperbola kanonik tenglamasi.

3. Giperbola fokuslari orasidagi masofa formulasi.

4. Giperbolaning ekssentrisiteti.

5. Giperbolaning direktrisasi.

6. Parabolaning kanonik tenglamasi.

7. Parabolaning direktrisasi.

8. Teng tomonli giperbolaning ekssentrisiteti.

9. Fokuslari Oy o'qda yotgan teng tomonli giperbola tenglamasi.

10. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasida qanday shartlar bajarilsa giperbolaning kanonik tenglamasini hosil qilish mumkin?

11. Agar giperbolaning uchlari $A_1(-4;0)$ va $A_2(4;0)$ nuqtalarda, fokuslari $(\pm 6;0)$ nuqtalarda bo'lsa, uning tenglamasini tuzing va chizmasini yasang.

12. Fokuslari Ox o'qida bo'lib, mavhum o'qining uzunligi 10 ga, ekssentrisiteti $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ga teng bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

13. Giperbola fokuslarining koordinatalari $(\pm 4;0)$ bo'lib, assimptotalari $y=\pm\frac{5}{3}x$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, giperbolaning tenglamasini tuzing.

14. Giperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}=1$ tenglama bilan berilgan. Giperbolaning ekssentrisiteti, direktrisalari va fokal radiuslarini toping.

15. Uchi koordinatalar boshida bo'lib, Oy o'qqa simmetrik va $A(5;3)$ nuqtada o'tuvchi parabolaning tenglamasini tuzing.

16. Parabolaning tenglamasi berilgan $y^2=8x$. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing.

17. Uchi koordinatalar boshida, direktrisasining tenglamasi $x=-4$ bo'lgan parabola fokusining koordinatalarini toping.

18. Uchi $A(2;4)$ nuqtada bo'lib, $B(6;8)$ nuqtadan o'tuvchi, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

19. Uchi $A(1;3)$ nuqtada, fokusi $F(3;5)$ nuqtada bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

20. Uchi $A(3;6)$ nuqtada, direktrisasi $x=-3$ to'g'ri chiziqdan iborat parabola tenglamasini tuzing.

III. BOB. *IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLARNING UMUMIY XOSSALARI VA FAN – TEXNIKADA QO'LLANISHI.*

1 – §. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy xossalari va farqlari.

Har uchala egri chiziq – ellips, giperbola va parabolani shunday nuqtalarning geometrik o'rni deb ta'riflash mumkinki, bu nuqtalardan berilgan nuqtagacha (fokusgacha) masofalarning berilgan bir to'g'ri chiziqqacha (direktrisagacha) bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas miqdordir (4,6,8 – chizmalar), ya'ni $\frac{FM}{MN}=e=const$ (1.1)

Ellips uchun $e<1$, giperbola uchun $e<1$, parabola uchun $e=1$. Bundagi e ikkinchi tartibli egri chiziqning ekssentrisitetidir.

I va II boblarda aylana, ellips, giperbola va parabolani ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi geometrik o'rin sifatida ta'riflab, bu egri chiziqlarning tenglamalarini chiqargan edik. Bu egri chiziqlarning hammasi 2 – darajali tenglamalardan iborat bo'lib, aylana tenglamasi ellips tenglamasining xususiy holi ekanligini ko'rdik.

Biz ikkinchi tartibli egri chiziqning uch tipi bilan tanishdik. *Bu egri chiziqlarning* bir – biridan ***muhim farqi*** ulardagi asimptotik yo'nalishlarning bor – yo'qligida yoki bor bo'lsa uning nechtaligidadir, ya'ni ellips asimptotik yo'nalishlarga ega emas, parabola – bitta va giperbola – ikkita asimptotik yo'nalishga ega.

Uchala egri chiziqning tenglamalari ham ikkita o'zgaruvchili 2 – darajali umumiy ko'rinishdagi $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (1) tenglamaning xususiy hollaridir.

Agar $A = \frac{1}{a^2}$, $C = \frac{1}{b^2}$, $F = -1$ va qolgan koordinatalar nolga teng bo'lsa, (1) tenglama ellips tenglamasiga aylanadi, agar $C = 1$, $D = -P$, qolgan koeffitsientlar esa nolga teng bo'lsa, (1) tenglama parabola tenglamasiga aylanadi, agar $A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$, $F = -1$ va qolgan koordinatalar nolga teng bo'lsa, (1) tenglama giperbola tenglamasiga keladi.

2 – §. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar konus kesimlari sifatida.

T a' r i f. Berilgan to'g'ri chiziqni uni kesuvchi boshqa bir to'g'ri chiziq (aylnish o'qlari) atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan sirt doiraviy konus deyiladi.

Bunda aylanayotgan to'g'ri chiziq o'zining istalgan holatida konusning yasovchisi deb, to'g'ri chiziqning aylanish o'qi bilan kesishish nuqtasi esa konusning uchi deb ataladi. Konus uning uchi ajratib turadigan ikkita pallaga ega.

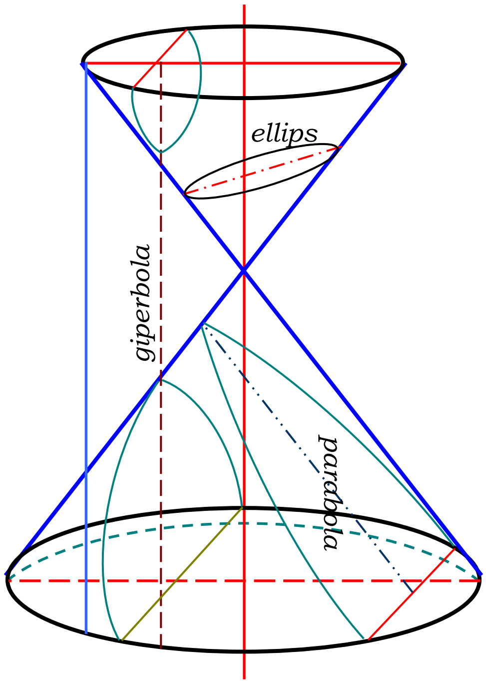
Aylana, ellips, giperbola va parabolani doiraviy konusning uchidan o'tmaydigan tekislikning kesmalari sifatida hosil qilinadi. Shuning uchun bu egri chiziqlar konus kesimlar deyiladi.

Agar tekislik konus o'qiga perpendikulyar bo'lsa, kesimda aylana hosil bo'ladi.

Agar tekislik o’qqa perpendikulyar bo’lmay, konusning faqat bitta pallasini kessa va uning yasovchilaridan bittasiga ham parallel bo’lmasa, *kesmada ellips hosil bo’ladi.*

Agar tekislik konus yasovchilaridan biriga parallel ravishda uning pallalaridan birini kessa, kesimda parabola hosil bo’ladi.

Agar tekislik konusning ikkala pallasini kessa, kesimda parabola hosil bo’ladi. *(17 – chizma).*



17 – c h i z m a.

3 – §. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning fan va texnikada qo’llanishi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning fan va texnikada qo’llanishiga misollar keltiramiz:

1. Ellipsning ikkita urinmasi o’zaro parallel bo’lsa, urinish nuqtalarini tutashtiruvchi kesma ellips markazidan, ya’ni O nuqtadan o’tadi.

Fizikadan ma’lumki, nurning sirtga tushish burchagi qaytish burchagiga teng. Shuning uchun, ellipsning fokuslaridan biriga yorug’lik manbaini joylashtirsak, barcha nurlar ellips chizig'idan qaytib ikkinchi fokusda yig'iladi.

Bu hodisani akustik va optik tajribalarda kuzatish mumkin. AQSh da ellips shakldа qurilgan katta xona mavjud bo'lib, uning F_1 nuqtasida gaplashayotgan ikki kishining suhbatini F_2 nuqtada bemalol eshitish mumkin.

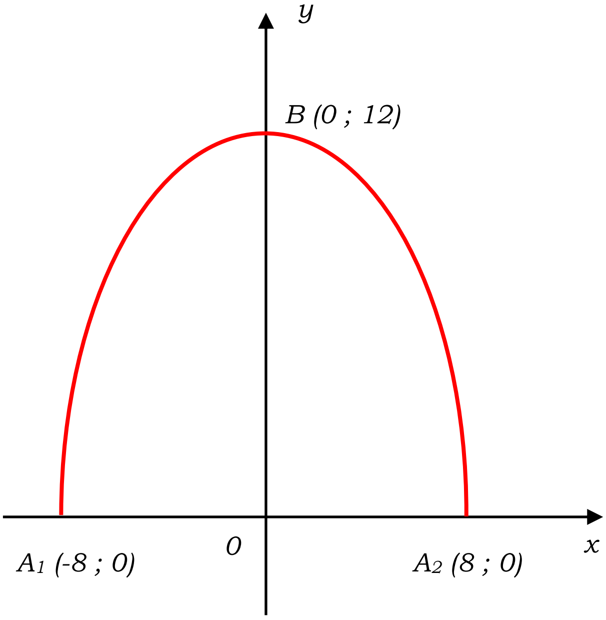
2. Ma'lumki, quyosh sistemasining planetalari Quyosh joylashgan umumiy fokusga ega ellipslar bo'yicha harakat qiladi.

3. Agar parabola fokusiga yorug'lik manbai joylashtirilsa, paraboladan qaytgan nurlar uning o'qiga parallel holda ketadi. Projektorning tuzilishi shu xossaga asoslangan.

4. Mexanikada isbot qilinganidek, yer yuzidan gorizontalga qarab burchak ostida $V_0 = 11{,}2$ km/s (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang'ich tezlik bilan chiqarilgan raketa parabola bo'ylab yer yuzidan cheksiz uzoqlashib boradi $V_0 > 11{,}2$ km/s boshlang'ich tezlik bilan harakat qilayotgan raketa ham yer yuzasidan cheksiz uzoqlashib boradi, faqat – giperbola bo'ylab harakat qiladi. Nihoyat, $V_0 < 11{,}2$ km/s boshlang'ich tezlikda raketa ellips bo'ylab harakatlanib yoki yana Yerga qaytib tushadi, yoki Yerning sun'iy yo'ldoshi bo'lib qoladi.

5 – m a s a l a. Gorizontga nisbatan o'tkir burchak ostida otilgan tosh parabola yoyini chizib, boshlang'ich joyidan 16 metr uzoqqa tushadi. Toshning 12 metr balandlikka ko'tarilganligini bilgan holda uning parabolik traektoriyasi tenglamasini tuzing.

Y e c h i s h. Koordinata o'qlarini shunday joylashtiramizki, tosh otilgan nuqta bilan toshning tushgan nuqtasi abssissalar o'qida yotsin. Hosil bo'lgan kesmaning o'rtasidan hamda toshni eng balandlikka ko'tarilgan nuqtasidan ordinatalar o'qini o'tkazamiz *(18 – chizma)*



18 – c h i z m a.

Bu holda parabola Oy o'qqa simmetrik bo'lgani uchun uning tenglamasini $x^2 = 2p(y - y_0)$ ko'rinishda izlaymiz. Masala shartiga asosan: $y_0 = 12$.

Demak, parabolaning tenglamasi:

$$x^2 = 2p(y - 12)$$

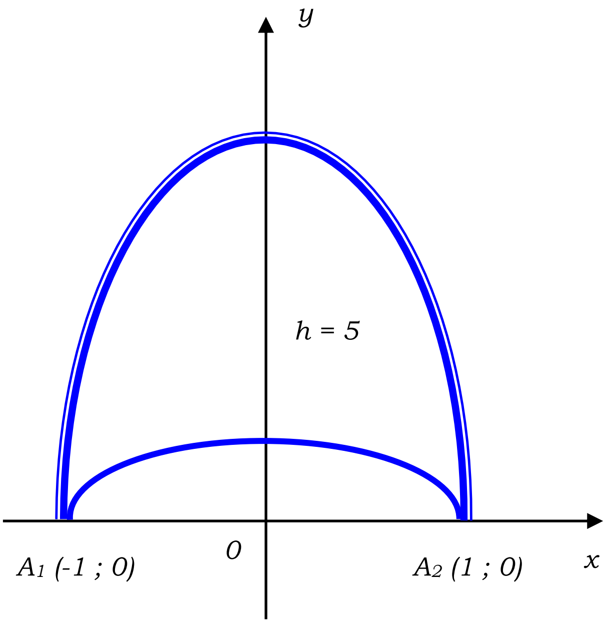
Bu parabola A (8 ; 0) nuqtadan o'tganligi uchun bu nuqtaning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantirishi kerak:

$$64 = 2p(0 - 12) \Rightarrow p = -\frac{8}{3}.$$

Demak, gorizontga nisbatan o'tkir burchak ostida otilgan toshning traektoriyasi: $x^2 = -\frac{16}{3}(y - 12)$

6 – m a s a l a. Fontandan otilib chiqayotgan suv oqimi, parametri $p = 0{,}1$ bo'lgan parabola shaklini oladi. Suvning otilib chiqayotgan joydan 2 m uzoqlikka tushayotganligi ma'lum bo'lsa, otilib chiquvchi suvning balandligi topilsin.

Y e c h i s h. Bu masalada ham koordinata o'qlarini shunday joylashtiramizki, suvning otilib chiqish nuqtasi bilan tushush nuqtasi abssissalar o'qida yotsin. Hosil bo'lgan kesmaning o'rtasidan hamda suvning eng balandga ko'tarilgan nuqtalari orqali ordinatalar o'qini o'tkazamiz.



19 – c h i z m a.

Biz oldin egri chiziqning tenglamasini tuzamiz.

Tenglamani $x^2 = -2p(y-h)$ ko'rinishda izlaymiz.

Masala shartiga asosan, tenglama $x^2 = -0{,}2(y-h)$ ko'rinishni oladi.

Bu egri chiziq A (1 ; 0) nuqtadan o'tganligi uchun bu nuqtaning koordinatalari tenglamani qanoat-lantirishi kerak:

$$1 = -0{,}2(0-h) \Rightarrow h = 5$$

IV B O B. MUSTAQIL TA'LIM DARSLARIDA BAJARILADIGAN MUSTAQIL ISHLAR.

I. M U S T A Q I L I S H.

Aylana va ellipsga doir topshiriqlarni bajaring.

R E J A:

1. Markazi $(a_{11} \ ; \ a_{12})$ nuqtada bo'lgan va $(a_{13} \ ; \ a_{14})$ nuqtadan o'tadigan aylana tenglamasini tuzing va chizmasini yasang.

2. $A(a_{21} \ ; \ a_{22})$ va $B(a_{23} \ ; \ a_{24})$ nuqtalardan va markazi ordinatalar o'qida bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

3. $a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}x + a_{14}y + a_{21} = 0$ (1) aylananing radiusini va markazining koordinatalarini toping va chizmasini yasang.

4. Diametri uchining koordinatalari $(a_{11} \ ; \ a_{13})$ va $(a_{22} \ ; \ a_{14})$ bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

5. (1) aylananing koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarining koordinatalarini toping.

6. $A(a_{21} \ ; \ a_{22})$, $B(a_{23} \ ; \ a_{24})$ va $C(a_{11} \ ; \ a_{12})$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

7. Agar aylana markazi $a_{11}x + a_{12}y + a_{21} = 0$ (2) to'g'ri chiziqda yotsa, $A(a_{21} \ ; \ a_{22})$ va $B(a_{23} \ ; \ a_{24})$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

8. Aylana markazi $(a_{11} \ ; \ a_{12})$ nuqtada joylashgan. (2) to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.

9. Agar ellipsning ikki uchi $(-a_{12}\;;\;0)$ va $(a_{12}\;;\;0)$ nuqtalarda, fokuslari $(-a_{21}\;;\;0)$ va $(a_{21}\;;\;0)$nuqtalarda joylashgan bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

10. Agar fokuslari Ox o'qda yotgan ellipsning katta o'qi $2\cdot a_{12}$ ga, ekssentrisiteti $e=a_{24}$ ga teng bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

11. Direktrisalar orasidagi masofa $2\cdot a_{13}$ ga, ekssentrisiteti $e=a_{24}$ ga teng bo'lsa, ellips tenglamasini tuzing.

12. Agar fokuslari Ox o'qda yotgan ellips $A(a_{21}\;;\;a_{22})$ va $C(a_{13}\;;\;a_{14})$ nuqtadan o'tsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.

13. $a_{11}x^2+a_{21}y^2+a_{14}x+a_{22}y-a_{12}=0$ (3) ellipsning yarim o'qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini va direktrisa tenglamasini tuzing.

14. Direktrisalar orasidagi masofa $2\cdot a_{13}$ va fokuslari orasidagi masofa $2\cdot a_{21}$ bo'lsa ellips tenglamasini tuzing.

1 – j a d v a l.

Variant №	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	**Variant №**	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
1	6	6	12	12	4	12	2	0,6	**16**	9	9	22	18	7	14	-5	0,8
2	7	7	14	14	5	10	-2	0,4	**17**	8	8	17	16	4	12	6	0,6
3	8	8	13	16	6	12	-3	0,3	**18**	8	8	18	16	3	15	4	0,4
4	4	4	15	8	2	6	3	0,8	**19**	7	7	16	14	3	12	-4	0,5
5	5	5	11	10	4	12	-4	0,9	**20**	11	11	24	22	9	18	6	0,3
6	3	3	12	6	2	6	4	0,7	**21**	11	11	25	22	8	16	-6	0,2
7	6	6	14	12	3	9	5	0,4	**22**	9	9	18	18	4	12	5	0,7
8	7	7	16	14	4	12	-5	0,2	**23**	12	12	20	24	10	20	-5	0,5
9	3	3	10	6	1	4	6	0,1	**24**	12	12	21	24	9	18	8	0,4
10	4	4	14	8	3	9	-6	0,6	**25**	12	12	22	24	8	16	-8	0,8
11	6	6	16	12	5	10	4	0,5	**26**	7	7	19	14	6	18	10	0,6
12	8	8	18	16	5	15	-4	0,4	**27**	11	11	21	22	7	14	-10	0,4
13	8	8	19	16	4	12	6	0,8	**28**	14	14	24	28	10	20	-12	0,5
14	10	10	20	20	8	16	-6	0,8	**29**	14	14	23	28	12	24	10	0,2
15	10	10	21	20	6	12	5	0,4	**30**	14	14	22	28	11	22	12	0,6

II. M U S T A Q I L I S H.

Giperbola va parabolaga doir topshiriqlarni bajaring (2-jadval)

1. Agar giperbolaning haqiqiy o'qi a_{11} ga, mavhum o'qi esa a_{12} ga teng bo'lsa, fokuslari Ox o'qda yotgan giperbola tenglamasini tuzing.

2. Agar giperbolaning uchlari $A_1(a_{13};a_{21})$ va $A_2(a_{22};a_{21})$ nuqtalarda joylashgan, fokuslari esa $F_1(a_{31};a_{21})$ va $F_2(a_{33};a_{21})$ nuqtalarda joylashgan bo'lsa, giperbola tenglamasini tuzing va yasang.

3. Agar fokuslari Ox o'qda yotgan giperbolaning haqiqiy o'qi a_{32} ga, fokuslari orasidagi masofa a_{23} ga teng bo'lsa, shu giperbola tenglamasini tuzing va ekssentrisitetini toping.

4. Giperbola tenglamasi berilgan: $\frac{x^2}{b_{11}}-\frac{y^2}{b_{12}}=1$. Uning fokuslari orasidagi masofani, ekssentrisitetini toping va asimptotalarining tenglamasini tuzing.

5. Agar giperbolaning haqiqiy o'qi a_{11} ga, ekssentrisiteti b_{13} ga teng bo'lgan fokuslari Ox o'qda yotgan tenglamasini toping.

6. Giperbolaning ekssentrisitetini b_{13}. M nuqtaning fokal radiusi $r=a_{11}$. Shu M nuqtadan u bilan bir tomonda yotuvchi direktrisagacha bo'lgan masofani hisoblang.

7. Haqiqiy o'qi a_{12}, fokuslari $(a_{13};a_{22})$ va $(a_{32};b_{21})$ nuqtalarda joylashgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

8. Quyidagi giperbolaning tenglamasini eng sodda shaklga keltiring.

$$b_{21}x^2+a_{13}y^2+b_{22}x+b_{33}y-a_{11}=0$$

9. Fokusi $F(a_{22};a_{21})$ nuqtada, uchi koordinatalar boshida bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

10. Direktrisasi $x = a_{13}$ to'g'ri chiziqdan iborat va uchi koordinatalar boshidan o'tgan parabolaning tenglamasini tuzing va yasang.

11. Parabola tenglamasi berilgan: $y^2 = a_{12}x$. Uning fokusining koordinatalarini hisoblang va direktrisasi tenglamasini tuzing.

12. Uchi $A(a_{13};a_{22})$ nuqtada bo'lib, $M(b_{21};a_{21})$ nuqtadan o'tuvchi, simmetriya o'qi Ox o'qqa parallel bo'lgan parabola tenglamasini tuzing.

13. $x^2 - a_{11}x - y + a_{22} = 0$ parabolani yasang.

2– j a d v a l.

Variant №	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	b_{33}
1	16	8	-5	0	5	16	-8	8	8	81	32	5/4	2	8	10
2	24	40	-3	0	3	14	$-3\sqrt{5}$	10	$3\sqrt{5}$	64	17	4/3	4	16	12
3	18	12	-3	0	3	18	-5	6	5	81	45	5/3	3	12	18
4	20	14	-6	0	6	16	-10	12	10	49	13	6/5	4	16	24
5	14	8	-7	0	7	20	-12	14	12	36	11	8/7	2	12	28
6	12	6	-10	0	10	12	-16	8	16	121	40	4/3	8	48	20
7	22	16	-4	0	4	22	-9	10	9	144	81	12/11	6	24	32
8	26	18	-2	0	2	24	-7	14	7	169	25	14/13	11	22	20
9	28	20	-8	0	8	26	-11	16	11	225	81	8/7	9	36	16
10	30	22	-1	0	1	10	-4	6	4	225	144	6/5	3	18	8
11	10	6	-3	0	3	12	-6	8	6	25	16	6/5	8	32	12
12	16	12	-8	0	8	8	-13	4	13	225	56	3/4	5	40	16
13	18	14	-9	0	9	10	-14	4	14	169	48	4/3	12	24	18
14	20	16	-10	0	10	14	-15	6	15	121	57	6/5	10	40	20
15	22	18	-11	0	11	16	-16	10	16	625	400	13/11	15	30	44
16	24	20	-12	0	12	18	-17	12	17	144	108	7/6	13	26	48
17	26	22	-13	0	13	20	-18	14	18	169	88	15/13	11	44	26
18	28	24	-14	0	14	22	-19	16	19	49	24	9/7	9	18	28
19	30	26	-15	0	15	24	-20	18	20	196	27	7/5	7	28	30
20	32	28	-16	0	16	26	-21	20	21	196	75	9/8	5	20	32

F O Y D A L A N I L G A N A D A B I Y O T L A R.

1. T.Jo’raev va boshqalar. “Oliy matematika asoslari”. 1–qism, “O’zbekiston”, T. 1995

2. T.Shodiev. “Analitik geometriyadan qo’llanma”, “O’qituvhi”, T. 1973

3. B.A.Abdalimov. “Oliy matematika”, “O’qituvhi”, T. 1994

4. V.E.Shneyder va boshqalar. “Oliy matematika qisqa kursi” 1–qism, “O’qituvchi”, T. 1985

5. Fizika, matematika va informatika (ilmiy – uslubiy jurnal),
№4 va №6, 2004

6. S.P.Vinogradov. Oliy matematika “O’qituvchi”, T. 1964

M U N D A R I J A.