

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ХАЛҚ ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**А. ҚОДИРИЙ НОМИДАГИ ЖИЗЗАХ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА
ИНСТИТУТИ ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛТЕТИ**

УМУМИЙ МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

Ҳимоя қилишга руҳсат бераман
Физика–математика факултети декан
_____ доц Б. Эргашев
“ _____ ” _____ 2012 йил

**Физика – математика факултети
Б 5140100 Математика – информатика таълим йўналиши
бўйича бакалавр даражасини олиш учун**

**“Сиртлар дифференциал геометриясини координаталар
системасининг берилиш усуллари ёрдамида ўрганиш” мавзусидаги**

БИТИРУВ МАЛАКАВИЙ ИСҲИ

Бажарувчи: ЖДПИ „математика ва информатика“ таълим
йўналиши

битирувчиси: _____ Қўшбоқова. Г.

Илмий раҳбар: _____ кат.ўқт. Қурбонов Е.

БМИ “Умумий математика” кафедраси йиғилиши қарори билан

(Қарор № _____ “ _____ ” _____ 2012 йил) ҳимояга тавсия етилди

Кафедра мудири: доц. О. Абдуллаев _____

Жиззах – 2012

МУНДАРИЖА

Кириш.....	3
И БОБ. ГАЛИЛЕЙ ТЕКИСЛИГИНИНГ ТАЪРИФИ ВА МЕТРИС МУНОСАБАТЛАРИ.	
1.1-§. Нукталар орасида масофа ва тўғри чизиклар орасидаги бурчак.....	5
1.2-§. Ҳозирги Евклид геометрияси аксиомалари ва улардан келиб чиқадиган натижалар.....	17
ИИ БОБ. ЯРИМ ЕВКЛИД ТЕКИСЛИГИДА УЧБУРЧАКЛАРГА ДОИР МЕТРИК МУНОСАБАТЛАР.	
2.1-§. Ярим евклид текислигидаги учбурчаклар учун синуслар теоремаси.....	23
2.2-§. Ярим евклид текислигидаги ички ва ташқи чизилган айланалар... ..	30
Хулоса.....	38
Адабиётлар.....	45

Кириш

Мамлакатимиз ижтимоий-иқтисодий ривожланишининг жорий ва истиқболдаги чора тадбирлари белгиланган. Жаҳон молиявий инқироzi оқибатлари тасирини ҳар томонлама ҳисобга олиш, иқтисодий ривожланиш дастурларини ушбу жараёнлар нуқтаий назаридан шакиллантириш ва уларни изчил амалга ошириш давр талабидир. Бу борадаги чора тадбирлар президенти И.А.Каримовнинг “Жаҳон молиявий-иқтисоди инқироzi, Ўзбекистон шароитида уни бартараф етишнинг йўллари ва чоралари” асарида батафсил баён етилган [6].

Маълумки [7], учбурчакларга доир метрик муносабатлар умумий таълим мактабларидан батафсил ўрганилган. Ушбу битирув малакавий ишида учбурчак комонлари ва бурчаклари орасидаги метрик муносабатлар ярим евклид текислигида ўрганилган, аниқроқ қилиб айтганда элементар геометриянинг учбурчакларга доир метрик муносабатлари синуслар теоремаси, косинеслар теоремаларининг ярим евклид тексликдаги кўринишлари келтириб чиқарилган.

Битирув малакавий ишида Евклид ва ярим Евклид геометриялари паралел келтирилган. Бу билан қўйилган масалани олдиндан тасаввур қилиш ва ечиш осонлашди.

Ишнинг 1.1 параграфида ярим евклид текислиги ва унинг асосий тешунчаларига таърифлар [9] келтирилган ҳамда тегишли ифодалар

исботланган. Шунингдек бу параграфада қўйилган масалани ечиш учун зарурий тушунчалар тўлиқ келтирилган.

1.2 Параграфида ярим евклид текислигининг аксиёмалари системасини яхшироқ тасаввур қилиш мақсадида уларнинг евклид текислигидаги кўринишлари ва улардан келиб чиқадиган кўпгина натижалар исботлари билан ўрганиш учун келтирилган [3].

Ишнинг II боби асосий боб ҳисобланиб, унда қўйилган масала тўлиқ ечимини топган. 2.1 параграфада ярим евклид текислигидаги ихтиёрий учбурчак томонлари ва бурчаклари орасидаги асосий муносабатлар [5], Пифагор теоремаси, учбурчаклар учун синуслар теоремаси, косинуслар теоремасининг кўринишлари ҳамда ярим евклид тексликлардаги учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар ҳақидаги маълумотлар [12] батафсил келтирилган.

Битирув малакавий иши II боб, 4 та параграфни ўз ичига олган жами 45 бетдан иборат.

Физика – математика факултети “Математика ва Информатика ”
талим йўналиши битирувчи босқич талабаси Артикова Санобар “Галилей
текислигида учбурчакка доир метрик муносабатлар” мавзусида ёзган
битирув малакавий ишига

ТАҚРИЗ

Маълумки [3], геометрия ихтиёрий ҳаракатда ўзининг катталигини, миқдорини ва маъносини сақлаб қолувчи тушунчаларнигина ўрганади. Ушбу битирув малакавий ишида умумий таълим мактабларидан маълум бўлган геометрик тушунчаларни ва улар орасидаги муносабатларни ярим евклид текислигидаги учбурчаклар мисолида ўрганилган. Ишнинг И – бобида ярим евклид текислигининг асосий таърифлари ва асосий тушунчалари шунингдек қўйилган масалаларни ечиш учун зарурий тушунчалар келтирилган.

Битирув малакавий ишининг 1.1 парагорафида евклид ва ярим евклид текислигидаги элементар геометрие масалалар ўрганилган. Асосий натижалар сифатида ихтиёрий учбурчакнинг томонлари орасидаги $a+b=c$ ва бурчаклари орасидаги $\angle a + \angle b = \angle c$ муносабатларни келтириш мумкин. Чунки олинган барча натижаларда бу муносабатлардан тўлиқ фойдаланилган. Бундан ташқари талаба евклид текислигидаги ўхшаш учбурчаклар томонлари орасидаги муносабатларни ҳам яхши билганлиги учун улардан яримевклид текислигидаги косинуслар ва синуслар теоремасини келтириб чиқаришда уддабуронлик билан фойдаланилган. Қўйилган масалалар евклид геометриясида тўлиқ олдиндан ечилган бўлсада, олинган натижаларни янглик деб ҳисоблаш мумкин.

Шунингдек, ишда учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг яримевклид текислигидаги кўринишлари жуда қизиқарли ҳолат деб ҳисоблайман. Метрика ҳисобига айланаларнинг яримевклид текислигидаги кўринишлари парабола (цикл) бўлиб қолиши жуда ҳам аҳамиятлидир. Чунки бу билан дифференциал геометрия тушунчаларидан бири егрилиги ўзгармас чизикларига мисоллар топилган. Аниқроқ айтганда, евклид текислигида егрилиги ўзгармас чизик айлана бўлса, ярим евклид текислигида бундай чизиклар ролини параболалар бажаради. Талаба Артикова Санобар томонидан “Галилей текислигида учбурчакка доир метрик муносабатлар” мавзусида тайёрланган БМИ олий ўқув юртларида бажариладиган БМИ низоми талабларига мос келади. Шунинг учун, уни ДАХ ҳузурида ҳимояга тавсия етман.

ф.м.ф.н. доц.

Р. Анваров

Физика – математика факултети “Математика ва Информатика ”

талим йўналиши битирувчи босқич талабаси Артикова Санобар “Галилей текислигида учбурчакка доир метрик муносабатлар” мавзусида ёзган битирув малакавий ишига

ТАҚРИЗ

Учбурчакларга доир метрик муносабатлар умумий таълим мактабларидан батафсил ўрганилган. Ушбу битирув малакавий ишида учбурчак комонлари ва бурчаклари орасидаги метрик муносабатлар ярим евклид текислигида ўрганилган, аниқроқ қилиб айтганда элементар геометриянинг учбурчакларга доир метрик муносабатлари синуслар теоремаси, косинеслар теоремаларининг ярим евклид тексликдаги кўринишлари келтириб чиқарилган.

Битирув малакавий ишида Евклид ва ярим Евклид геометриялари паралел келтирилган. Бу билан қўйилган масалани олдиндан тасаввур қилиш ва ечиш осонлашди.

Ишнинг 1.1 параграфида ярим евклид текислиги ва унинг асосий тешунчаларига таърифлар [9] келтирилган ҳамда тегишли ифодалар исботланган. Шунингдек бу параграфда қўйилган масалани ечиш учун зарурий тушунчалар тўлиқ келтирилган.

Ишдаги асосий натижалар сифатида ихтиёрий учбурчакнинг томонлари орасидаги ва бурчаклари орасидаги муносабатларни келтириш мумкин. Чунки олинган барча натижаларда бу муносабатлардан тўлиқ фойдаланилган. Бундан ташқари талаба евклид текслигидаги ўхшаш учбурчаклар томонлари орасидаги муносабатларни ҳам яхши билганлиги учун улардан яримевклид текслигидаги косинуслар ва синуслар теоремасини келтириб чиқаришда уддабуронлик билан фойдаланилган. Қўйилган масалалар евклид геометриясида тўлиқ олдиндан ечилган бўлсада, олинган натижаларни янглик деб ҳисоблаш мумкин.

Шунингдек, ишда учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг яримевклид текислигидаги кўринишлари жуда қизиқарли ҳолат деб ҳисоблайман. Метрика ҳисобига айланаларнинг яримевклид текислигидаги кўринишлари парабола (цикл) бўлиб қолиши жуда ҳам аҳамиятлидир. Чунки бу билан дифференциал геометрия тушунчаларидан бири егрилиги ўзгармас чизиқларига мисоллар топилган. Аниқроқ айтганда, евклид текслигида егрилиги ўзгармас чизиқ айлана бўлса, ярим евклид текслигида бундай чизиқлар ролини параболалар бажаради. Талаба Артикова Санобар томонидан “Галилей текислигида учбурчакка доир метрик муносабатлар” мавзусида тайёрланган БМИ олий ўқув юртларида бажариладиган БМИ низоми талабларига мос келади. Шунинг учун, уни ДАХ ҳузурида ҳимояга тавсия етман.

Сирт тушунчаси ва уни берилиши.

Текисликдаги очик доирага гомеоморф тўпламни элементар соқа деб атаймиз.

Таъриф. Фазодаги Φ тўплам элементар соқанинг топологик акслантиришдаги образи бўлса, уни элементар сирт деб атаймиз. Демак, Φ тўплам элементар сирт бўлса, $f: \Gamma \rightarrow \Phi$ -топологик акслантириш мавжуд бўлиши керак.

Бу ерда $G \subset R^2$ элементар соқа, Φ еса R^3 дан келтирилган топология ёрдамида топологик фазога айлантирилган. Φ элементар сирт бўлса, (f, G) жуфтлик Φ ни параметрлаш усули дейилади.

Албатта Γ_1 бошқа элементар соқа бўлса, Γ ва Γ_1 ўзаро гомеоморф бўлади. $g: \Gamma_1 \rightarrow G$ гомеоморфизм бўлса, $f \cdot g: \Gamma_1 \rightarrow \Phi$ кам гомеоморфизмдир.

Демак, элементар сирт учун чексиз кўп параметрлаш усуллари мавжуддир. Бирорта тўпламнинг элементар сирт еканлигини кўрсатиш учун, унинг бирорта параметрлаш усулини кўрсатиш керак.

Агар Φ сирт (f, G) параметрлаш усули билан берилиб, $(u, v) \in G$ учун $\phi(u, v)$ нуқтанинг координаталари $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ лар бўлса

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

система Φ сиртнинг параметрик тенгламалари системаси дейилади.

Таъриф. Фазодаги боғланишли Φ тўпламга тегишли қар бир нуқтанинг бирорта атрофида Φ элементар сиртга айланса, Φ содда сирт дейилади.

Иккинчи таърифга изок берамиз, демак, Φ содда сирт бўлиши учун унга тегишли қар бир $p \in \Phi$ нуқта учун шундай $U(p)$ атроф (R^3 да) мавжуд бўлиб, кесишма $U(p) \cap \Phi$ элементар сирт бўлиши керак.

Кейинчалик курс давомида сирт деганда элементар ёки содда сиртни тушунамиз.

Мисоллар.

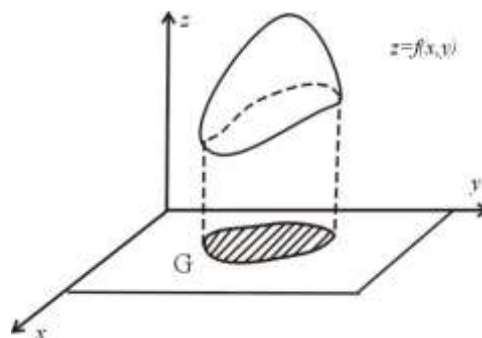
1) Қар қандай текислик элементар сиртдир, чунки текислик доирага гомеоморфдир.

Агар $M(x_0, y_0, z_0)$ текислик нуқтаси, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар текисликка параллел бўлса, уни

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty$$

кўринишида параметрлаш мумкин. Бу ерда $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ - M нуқтанинг радиус векторидир.

2) Элементар G -соқада аниқланган $z = f(x, y)$ – узлуксиз функция графиги элементар сиртдир. Сабаби, $(x, y, f(x, y)) \rightarrow (x, y)$ – акслантириш (проексия) гомеоморфизмдир.



Чизма-1

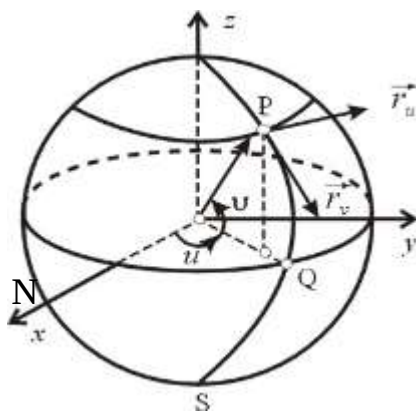
3) Икки ўлчамли сфера S^2 элементар бўлмаган содда сиртдир. R радиусли сфера S^2 нинг марказига координаталар бошини жойлаштирсак, уни $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ тўплам сифатида қарашимиз мумкин. S^2 нинг сирт еканлигини исботлаш учун унга тегишли бирорта P ни олайлик.

P дан фарқли S нуктани жанубий кутб сифатида, унга диаметрик қарама-қарши бўлган N нуктани шимолий кутб қисоблаб, z ўқини координата бошидан N нукта орқали ўтказамиз, Ox текислиги еса O нўқтадан ўтувчи ва ON га перпендикуляр текисликдир. Бу текислик ва сфера кесишишидан қосил бўлган айланани экватор деб атаймиз. Енди y билан OQ нур ва Ox ўқи орасидаги бурчакни, y билан OP ва OQ нурлар орасидаги бурчакни белгилаймиз. Бу ерда $Q - NPS$ меридианнинг экватор билан кесишиш нуктасидир, $0 < u < 2\pi$,

$-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Шунда S^2 нинг HC - меридиан чиқариб ташланган қисми

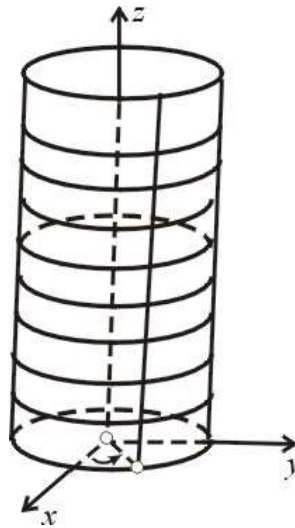
$\varphi: P \rightarrow (u, v)$ акслантириш ёрдамида $]0; 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ элементар соқага

гомеоморф акслантирилади ва $x = R \cos u \cos v$, $y = R \sin u \cos v$, $z = R \sin v$ тенгламалар ёрдамида параметрланади.



Чизма-2

4) $x = R \cos u, y = R \sin u, z = v$. тенгламалар системаси доиравий цилиндрнинг параметрик тенгламаларидир. Бу ерда $-\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty$. Албатта цилиндр кам элементар сирт емас.



Чизма-3

Агар биз $\vec{r}(u, v) = \{x(u; v); y(u; v); z(u; v)\}$ вектор функцияни кирицак (1) ифодани

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v), \quad (u, v) \in G \quad (2)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу тенглама Φ сиртнинг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади. Табиийки, Φ сирт элементар сирт бўлмаса, (1) ва (2) тенгламалар уни бирорта нукта атрофида аниқлайди. Агар Φ элементар сирт бўлса, уни тўлиқ (1) ёки (2) тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

2. Сиртнинг ошкормас кўринишда берилиши.

Бизга $G \subset R^3$ очик тўплам ва Γ да аниқланган силлиқ $F(x; y; z)$ функция берилган бўлсин.

Шунда $\Phi = \{(x; y; z) \in G : F(x; y; z) = 0\}$ тўплам Φ функциянинг сатк тўплами ёки сирти дейилади.

Агар $\text{grad} F \neq 0$ бўлса, Φ қақиқатдан кам содда сирт бўлади. Қақиқатдан, агар $p = (x_0; y_0; z_0) \in \Phi$ нуктада $F_z \neq 0$ бўлса, ошкормас функция қақидаги теоремага кўра, шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонлари ва $G_0 = \{(x; y) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$ соқада аниқланган $z = f(x; y)$ функция мавжуд бўлиб, $(x; y) \in G_0$ лар учун $F(x; y, f(x; y)) = 0$ тенглик, $z_0 = f(x_0; y_0)$ ва $|z_0 - f(x; y)| < \varepsilon$ муносабатлар бажарилиб,

$$\Pi = \{(x; y; z) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

параллелипипеднинг Φ билан кесишмаси $z = f(x; y)$ функциянинг графигидан иборатдир. Демак, Φ ўзига тегишли қар қандай нуктанинг етарли кичик атрофида элементар сирт бўлади.

Бизнинг курсимизда асосий метод математик анализ бўлганлиги учун, биз сиртлардан қўшимча шартларни талаб қиламиз.

Таъриф. Φ сирт учун унга тегишли ихтиёрий нуқта атрофида (f, G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, бунда $x(u; v), y(u; v), z(u; v)$ функциялар узлуксиз хусусий қосилаларга ега ва $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ матрисанинг ранги иккига тенг бўлса, Φ сирт регуляр сирт дейилади, параметрлаш усули еса регуляр параметрлаш дейилади.

Сиртнинг регулярлик шартини $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v \right] \neq \vec{0}$ кўринишда қам ёзишимиз мумкин. Биз курсимизда асосан регуляр сиртларни ўрганамиз.

Энди сиртларнинг берилиш усуллари қақида қуйидаги теоремаларни исботлайлик.

Теорема. Бизга Γ соқада аниқланган силлиқ $x(u; v), y(u; v), z(u; v)$ функциялар берилиб, қар бир нуқтада $\text{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ бўлса,

$$\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \\ z = z(u; v) \end{cases} \quad (u; v) \in G$$

система регуляр сиртни аниқлайди.

Теорема. Регуляр Φ сирт унга тегишли $p(u_0, v_0)$ нуқта атрофида,

$$\boxed{}, (u, v) \in G$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилиб, p нуқтада $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ детерминант нолдан фарқли бўлса, шундай силлиқ $f(x, y)$ функция мавжудки p нуқтанинг атрофида Φ сирт $z = f(x, y)$ функциянинг графигидан иборатдир.

Изоқ. Биз регуляр сиртларнинг параметрлаш усулини танлаганимизда қар доим $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ қосилалар мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

10-МАВЗУ. Егри чизиқли координаталар. Силлиқ сиртлар, уларни вектор функция ёрдамида параметрлаштириш. Сиртнинг уринма текислиги ва нормали.

Регуляр Φ сиртнинг $p \in \Phi$ нуқта атрофида регуляр (f, G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (1)$$

тенглама ёрдамида берилган, сирт устида p нуқтадан ўтувчи γ егри чизик берилган бўлиб, у

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \quad a < t < b. \quad (2)$$

тенглама ёрдамида параметрланган ва $\gamma \subset f(G)$ бўлсин.

Аниқлик учун, p сирт нуқтаси сифатида $(u_0; v_0)$ координаталарга, егри чизик нуқтаси сифатида параметр t нинг t_0 қийматига мос келсин. Табиийки, ҳар бир $t \in (a; b)$ учун шундай $(u(t), v(t)) \in G$ нуқта мавжуд бўлиб,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) \quad (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар γ силлиқ егри чизик бўлса, $u(t), v(t)$ функциялар ҳам дифференциалланувчи функциялар бўлади. Бунини исботлаш учун Φ нинг регуляри сирт еканлигидан фойдаланамиз. Φ регуляри сирт бўлганлиги учун

$\text{rang} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$. Аниқлик учун $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсин деб фараз қилиб,

$$\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \end{cases} \text{ системани қараймиз.}$$

Агар γ силлиқ егри чизик бўлса, $\vec{\rho}(t)$ вектор функциянинг координаталари $x(t), y(t), z(t)$ дифференциалланувчи функциялар бўлади. Бирорта $t^* \in (a; b)$ учун $x^* = x(t^*), y^* = y(t^*), z^* = z(t^*)$. ва $u^* = u(t^*), v^* = v(t^*)$ белгилашлар киритиб,

$$\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \end{cases}$$

системани

$$\begin{cases} x(u^*, v^*) = x^* \\ y(u^*, v^*) = y^* \end{cases}$$

бошланғич шартлар билан қараймиз. Тескари функция қақдаги теоремага асосан шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонлари ва

$$P_\delta = \{(x, y) : |x^* - x| < \delta, |y^* - y| < \delta\}$$

соқада аниқланган ва дифференциалланувчи $u = u(x, y), v = v(x, y)$ функциялар мавжуд бўлиб, улар

$$|u^* - u(x, y)| < \varepsilon, \quad x = x(u(x, y), v(x, y)), \quad u^* = u(x^*, y^*)$$

$$|v^* - v(x, y)| < \varepsilon, \quad y = y(u(x, y), v(x, y)), \quad v^* = v(x^*, y^*)$$

муносабатларни қаноатлантиради. Биз умумийликни чегараламасдан $P_\delta = \{(u, v) : |u^* - u| < \varepsilon, |v^* - v| < \varepsilon\}$ соқа учун $P_\delta \subset G$ муносабат ўринли деб қисоблаймиз.

Енди $\delta_0 > 0$ сонини шундай танлаймизки, $|t^* - t| < \delta_0$ бўлганда $|x^* - x(t)| < \delta, |y^* - y(t)| < \delta$ муносабатлар бажарилсин. $\pi: (x, y, z) \rightarrow (x, y)$ қоида билан аниқланган $\pi: R^3 \rightarrow R^2$ проексия ёрдамида $|t^* - t| < \delta_0$ учун

$$(x(t), y(t)) = \pi(x(t), y(t), z(t))$$

тенгликни қисобга олиб,

$$u(t) = u(x(t), y(t))$$

$$v(t) = v(x(t), y(t))$$

дифференциалланувчи функцияларни аниқлаймиз. Бу функциялар $u(t^*) = u^*, v(t^*) = v^*$ ва $\rho(t) = r(u(t), v(t))$ тенгликларни қаноатлантиради ва t^* нукта атрофида аниқланган функциялар бўлади. Бу t^* нукта ихтиёрий танлангани учун $u(t), v(t)$ функциялар (a, b) оралиқнинг қар бир нуктасида дифференциалланувчидир.

Агар γ регуляр егри чизик бўлса, у қолда

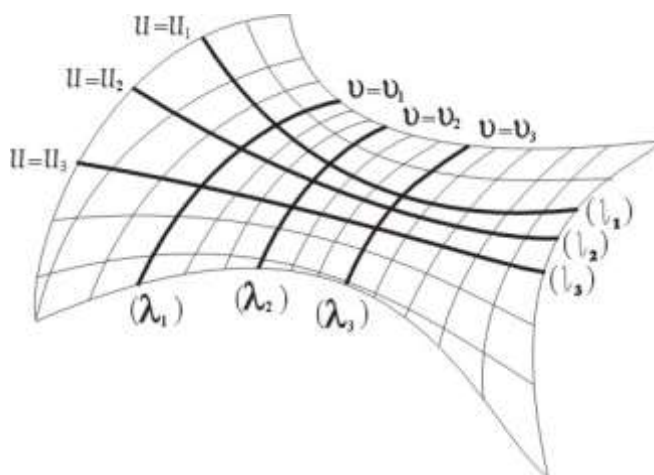
$$\vec{p}'(t) = \vec{r}_u \cdot u' + \vec{r}_v \cdot v'$$

тенгликдан u', v' ларнинг бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги келиб чиқади. Шундай қилиб, γ егри чизикни

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан бериш мумкин. Бу тенгламалар γ чизикнинг ички координаталардаги тенгламалари деб аталади.

Ф сиртда $u = t, v = v_0 = \text{const}$ ва $u = u_0 = \text{const}, v = t$ тенгламалар билан аниқланувчи егри чизиклар координата чизиклари деб аталади. Координата чизикларининг уринма векторлари мос равишда $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлардир (4-чизма).



Чизма-4

Таъриф. $\vec{a}$ вектор сирт устида ётувчи p нуктадан ўтувчи егри чизикнинг уринма вектори бўлса, у Ф сиртга p -нуктадаги уринма вектор деб аталади.

Теорема. Регуляр сиртнинг берилган нуктадаги уринма векторлари тўплами икки ўлчамли чизикли фазодир.

Таъриф. Φ сиртнинг $p(u_0; v_0)$ нуқтасидан ўтувчи ва $\vec{r}_u(u_0; v_0), \vec{r}_v(u_0; v_0)$ векторларга параллел текислик p нуқтадаги уринма текислик деб аталади.

Уринма текислик таърифида сиртнинг параметрланиш усулига боғлиқ $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар қатнашишига қарамасдан уринма текислик тушунчаси сиртнинг параметрланиш усулига боғлиқ эмаслигини қуйидаги теорема кўрсатади:

Теорема. Π — $p(u_0; v_0)$ нуқтадан ўтувчи текислик, қ сиртнинг p га яқин нуқталаридан бири, д- p ва қ нуқталар орасидаги масофа, ҳ — қ нуқтадан Π текисликгача бўлган масофа бўлсин. Шунда Π текислик p нуқтадаги уринма текислик бўлиши учун,

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{h}{d} = 0 \quad (*)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

11-МАВЗУ. Сиртнинг биринчи квадратик формаси. Сирт устидаги чизикнинг ёй узунлиги, икки чизик орасидаги бурчак. Сирт устидаги соҳанинг юзаси.

R^3 — да регуляр Φ -сирт берилган бўлса, Φ га уринма фазо $T_p\Phi$ га тегишли иккита $\vec{a}, \vec{b}$ — векторлар учун уларнинг скаляр кўпайтмасини $I(\vec{a}, \vec{b})$ билан белгилаймиз. Бу скаляр кўпайтма ёрдамида Φ сиртнинг биринчи квадратик формасини аниқлаймиз.

Уринма фазода $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар базисни ташкил қилганлиги учун $\vec{a} = a_1 \vec{r}_u + a_2 \vec{r}_v, \vec{b} = b_1 \vec{r}_u + b_2 \vec{r}_v$, -тенгликларни ёзиб,

$$I(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 \vec{r}_u^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot (\vec{r}_u, \vec{r}_v) + a_2 b_2 \vec{r}_v^2$$

ифодани ҳосил қиламиз. Демак, $I(\vec{a}, \vec{b})$ ни ҳисоблаш учун, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ базисдаги координаталарини ва $E = \vec{r}_u^2, F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)$ ва $G = \vec{r}_v^2$ функцияларни билишимиз етарли.

Биринчи квадратик формани,

$$I(\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 \cdot E + 2a_1 a_2 \cdot F + G a_2^2$$

кўринишда аниқлаймиз. Биринчи квадратик форма ёрдамида қуйидаги ишларни бажариш мумкин:

1. Сирт устида чизиклар узунлигини ҳисоблаш

Φ -сиртнинг (f, G) – параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

тенглама ёрдамида берилиб, сиртда $u = u(t)$, $v = v(t)$. тенгламалар билан γ чизиқ берилган бўлсин. γ – учун параметрларнинг t_1 ва t_2 ($t_1 < t_2$) қийматларига мос келувчи ёй узунлигини ҳисоблайлик.

Биламизки, бу ёй узунлиги R^3 да,

$$l(\gamma) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left| \vec{\rho}'(t) \right| dt$$

формула билан ҳисобланади.

Бу ерда $\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ ва $\vec{\rho}'(t) = \vec{r}_u u' + \vec{r}_v v'$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$l(\gamma) \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \cdot u'^2 + 2F \cdot u'v' + G \cdot v'^2} dt$$

формулани ҳосил қиламиз.

2. Сирт устида ётувчи чизиқлар орасидаги бурчак.

Φ -сиртда $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ ва $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(s)$ тенглама билан регуляр чизиқлар берилган бўлсин. Агар бу чизиқлар кесишса (яъни $\vec{\rho}(t_0) = \vec{\rho}_1(s_0)$ тенгликни қаноатлантирувчи t_0, s_0 лар мавжуд бўлса), $\vec{\rho}'(t_0)$, $\vec{\rho}'_1(s_0)$, векторлар орасидаги бурчакни шу нуқтадаги егри чизиқлар орасидаги бурчак деб атаймиз: Бу бурчакнинг қиймати φ бўлса,

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{\rho}'(t_0), \vec{\rho}'_1(s_0))}{\left| \vec{\rho}'(t_0) \right| \cdot \left| \vec{\rho}'_1(s_0) \right|}$$

тенглик ўринлидир. Бу ерда,

$$\begin{aligned} \vec{\rho}'(t_0) &= \vec{r}_u u'(t_0) + \vec{r}_v v'(t_0), \\ \vec{\rho}'_1(s_0) &= \vec{r}_u u'_1(s_0) + \vec{r}_v v'_1(s_0) \end{aligned}$$

тенгликларни ҳисобга олсак,

$$\cos \varphi = \frac{Eu'(t_0)u'_1(s_0) + F(u'(t_0)v'_1(s_0) + v'(t_0)u'_1(s_0)) + Gv'(t_0)v'_1(s_0)}{\sqrt{E(u'(t_0))^2 + 2Fu'(t_0)v'(t_0) + G(v'(t_0))^2} \cdot \sqrt{E(u'_1(s_0))^2 + 2Fu'_1(s_0)v'_1(s_0) + G(v'_1(s_0))^2}}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

МАВЗУ: ГАЛИЛЕЙ ТЕКИСЛИГИДА УСЎБУРСҲАККА ДОИР МЕТРИК МУНОСАБАТ.

И БОБ. ГАЛИЛЕЙ ТЕКИСЛИГИНИНГ ТАЪРИФИ ВА МЕТРИС МУНОСАБАТЛАРИ.

1.1.§ Нуқталар орасида масофа ва тўғри чизиқлар орасидаги бурчак.

Текисликда $\vec{a}(x_1, y_1)$ $\vec{b}(x_2, y_2)$ векторлар берилган бўлсин.

1.1.1- таъриф. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $(\vec{a} \cdot \vec{b})_1 = x_1 \cdot x_2$
 $(\vec{a} \cdot \vec{b})_2 = y_1 \cdot y_2$ агар $x_1 \cdot x_2 = 0$ бўлса кўринишда аниқланадиган аффин
текисликка Галилей текислиги дейилади. Кўпгина адабиётларда Галилей
текислиги ярим евклид текислиги ҳам деб аталади. Бунинг сабаби
векторларнинг скаляр кўпайтмаси Евклид текислигидаги векторлар скаляр
кўпайтмасининг ярми кўринишида эканлигидадир.

Евклид текислигидаги каби ярим Евклид текислигининг ҳам
ҳаракатлари мавжуд.

1.1.2-таъриф. Галилей текислигидаги нуқталарнинг координаталарини
алмаштирувчи

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (1.1.1.)$$

Тенгламалар системасига Галилей текислигидаги ҳаракат деб аталади.
(1.1.1) ҳаракатни

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = vx + y \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Кўринишидаги Ой ўқ йўналишидаги силжиш ва

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases} \quad (1.1.3)$$

Параллел кўринишиларга ажратиш мумкин.

1.1.1-теорема: (1.1.1) ҳаракат Галилей текислигидаги ҳар қандай тўғри чизиқни яна тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқни ўзига параллел тўғри чизиққа ўтказди.

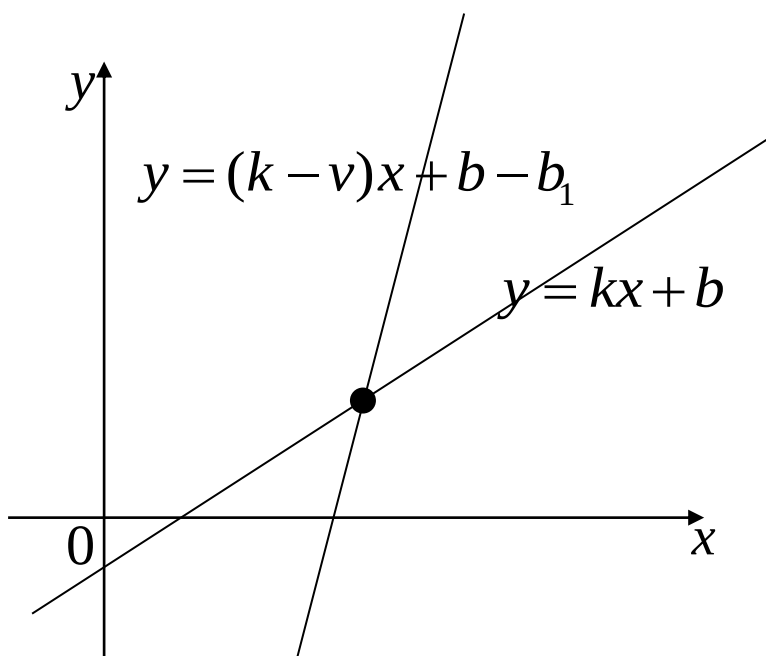
Исбиот: $y=k_1x+b_1$ тўғри чизиқ берилган бўлсин, у ҳолда $vx+y+b=k_1(x+a)+b_1$ ёки $y=(k_1-v)x+b_1-b$ тенглама яна тўғри чизиқ тенгламасини ифода этади.

$y=kx+b_1$ ва $y=kx+b_2$ ўзaro параллел тўғри чизиқлар берилган бўлсин, у ҳолда

$$\begin{cases} vx+y+b=k(x+a)+b_1 \\ vx+y+b=k(x+a)+b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=(k-v)x+b_1-b \\ y=(k-v)x+b_2-b \end{cases}$$

Тенгламалар системаси $k-v=k-v$ эканлигидан параллел тўғри чизиқларни ифода этади. Теорема исбот бўлди.

Ушбу теореманинг исботини 1-қисмида келтирилганларни чизмамда қуйидагича келтириш мумкин.



Демак, (1.1.1) ҳаракат ярим Евклед тикеслиги учун буриш ва параллел кўринишдан иборат экан.

Таърифдан келиб чиққан ҳолда $M(x_1; y_1)$ ва $N(x_2; y_2)$ нуқталар охиридаги масофани

$$|MN| = |x_2 - x_1| \quad (1.1.4)$$

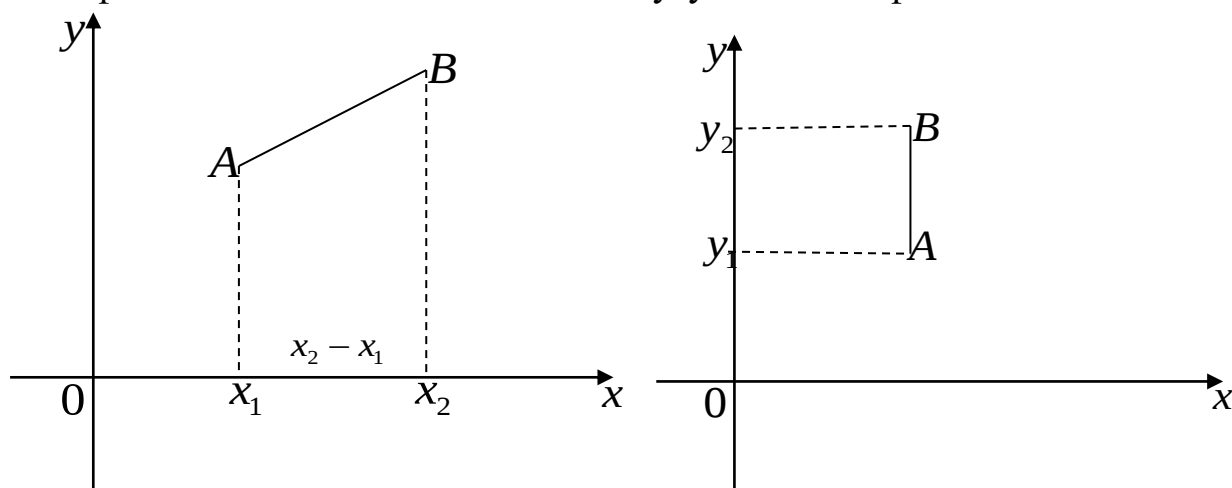
Кўринишида аниқлаш мукин.

Агар $x_1 = x_2$ бўлса, М ва Н нуқталар орасидаги масофа 0 га тенг бўлади. Бундай ҳолларда нуқталар орасидаги иккинчи масофа

$$|MN| = |y_2 - y_1| \quad (1.1.4)$$

га тенг бўлади. Шунинг учун ярим Евклид текисликлари бўинган материали текисликлар деб аталади. Буларга асосланиб, нуқталар орасидаги масофани қуйидаги кўринишларда белгилаш мумкин.

Ярим Евклид маъносидаги $|MN|_1$ -биринчи, $|MN|_2$ - масофалар. $|MN|_1$ масофа [MN] кесманинг Ох ўқидаги прожекциясини ифода қилса, $|MN|_2$ масофа Евклид маъносидамги кесма узунлигини ифодалайди.



Нуқталар орасидаги масофа (1.1.1) ҳаракатда инвариант эканлигини кўриш мумкин. А(х,й) ва Б(х₁,й₁) нуқталар берилган бўлсин. (1.1.1) ҳаракатда бу нуқталарнинг образлари А'(х',й') ва Б'(х'₁,й'₁) лар бўлсин. У ҳолда х' = х₁' ва й' = vx + й + б, й'₁ = vx + й₁ + б бўлади. Бундан й'₁ - й' = (х + й₁ + б) - (vx + й + б) = й₁ - й келиб чиқади.

Ярим Евклид текислигига берилган таърифдан ва нуқталар орасидаги масофадан фойдаланиб, айланага таъриф берамиз.

1.1.2-таъриф: Берилган нуқталардан бир хил масофада ётган нуқталар тўпламига айлана деб аталади.

$M(x, y)$ айлананинг ихтиёрий нуқтаси $O(a, b)$ еса берилган нуқта бўлсин.
 У ҳолда (1.1.4) га кўра

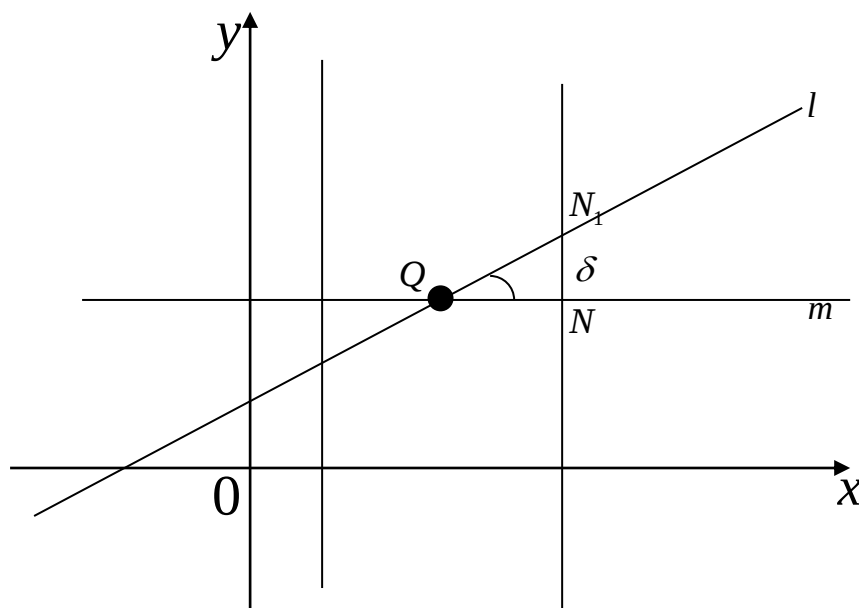
$$|OM| = x - a = R^2 \quad \text{ёки} \quad x = \sqrt{R^2 + a} \quad (1.1.7)$$

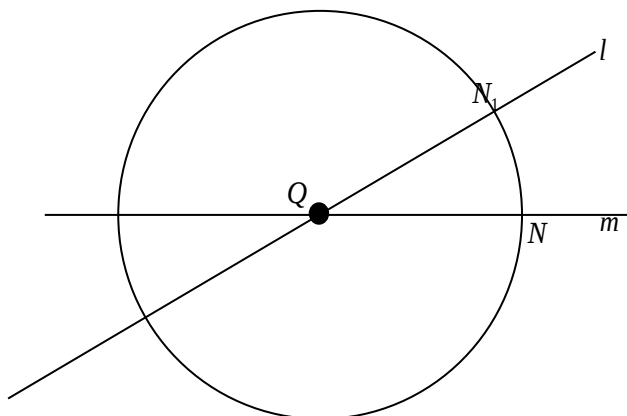
(1.1.7) тенглама Евклид текислигида иккита ўзaro параллел тўғри чизиқни ифодалайди. Демак $x = \pm a$ кўринишидаги иккита тўғри чизиқ ярим Евклид текислиги учун маркази $O(a, b)$ нуқтада бўлган айлананинг тенгламаси экан.

Маълумки $[a, b]$ Евклид текислигида иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак деб маркази шу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари бўлган бирлик айлананинг тўғри чизиқлар билан чегараланган, ёйнинг узунлигига тенг. Бу тушунчани ярим Евклид текислигидаги кўриниши оддий Евклид маъносидаги кесма узунлиги бўлади. Шунинг учун $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак

$$\delta = k_2 - k_1 \quad (1.1.8)$$

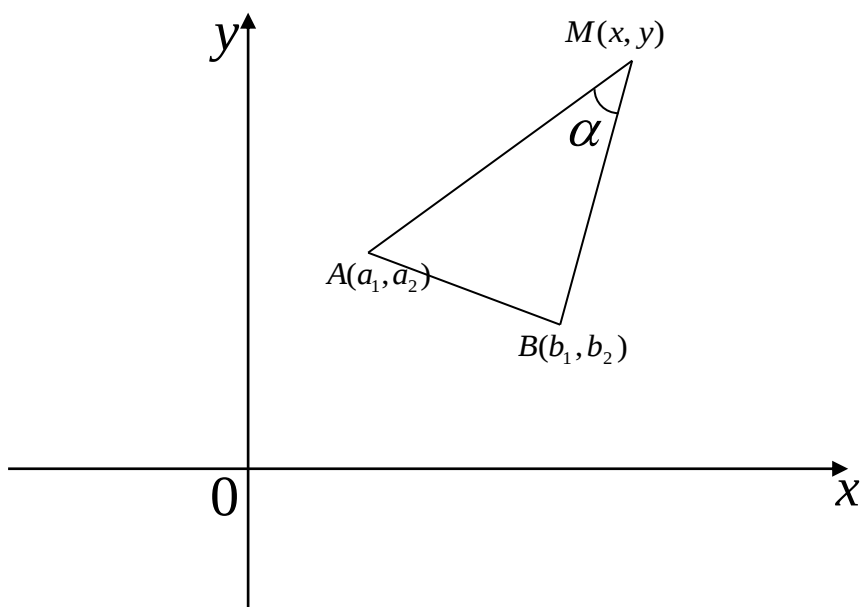
га тенг бўлади.





1.2.§. Евклид текислигидаги айлананинг ярим Евклид текислигидаги кўринишлари.

Маълумки, [] Евклид текислигидаги айланага мутурли хил таърифлар бериш мумкин. Масалан, берилган нуқтадан бир хил масофада ётган нуқталар тўплами ёки берилган кесма фақат тўғри бурчак остида кўринувчи нуқталар тўпламига айлана деб аталади. Келтирилган таърифнинг 1-қисми Ярм евклид текислигида иккита параллел тўғри чизик эканлигини 1.1§ да кўриб чикдик. Енди шу таърифнинг иккинчи қисмининг ярим Евклид текислигидаги кўринишидаги кўринишини аниқлайлик. Берилган кесма учлари $A(a_1, a_2)$ $B(b_1, b_2)$ кўринишидаги координаталарга ега бўлсин. $M(x, y)$ еса $[A, B]$ кесма ўзгармас бурчак остида кўрина, диган нуқталар тўпланининг ихтиёрий нуқтаси бўлсин.



(АМ) ва (БМ) тўғри чизиклар $y=kx+b$ ва $y=k_1x+b_1$ кўринишдаги тенгламаларга ега бўлсин. Бу тенгламаларни Евклид текислигидаги икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасидан ҳам ҳосил қилиш мумкин [1]. Бу ерда

$$K = \frac{y - a_2}{x - a_1} \quad \text{ва} \quad K_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1}$$

бўлиб бу рчакка берилган таърифга асосан

$$\alpha = k_1 - k = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1}$$

бўлади. Бу бурчак ўзгармас бўлганлиги учун

$$\frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1} = \alpha$$

$$\alpha(x - b_1)(x - a_1) - (x - a_1)(y - b_2) + (x - b_1)(y - a_2) = 0$$

$$(b_1 - a_1) = \alpha x^2 + [(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)]x + \alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$y = \frac{\alpha}{b_1 - a_1} x^2 + \frac{[(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)]}{b_1 - a_1} x + \frac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1}$$

бу ерда,
$$a = \frac{\alpha}{b_1 - a_1}, \quad b = \frac{(b_2 - a_2) - \alpha(a_1 + b_1)}{b_1 - a_1}, \quad c = \frac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1}$$

кўринишидаги белгилашлар кирицак,

$$y = ax^2 + 2bx + c \quad (1.2.1)$$

Ҳосил бўлади. Бу еса Евклид текислигидаги парабала тенгламасидир.

Ярим Евклид текислигида бирор аффин координаталар системасига нисбатан координаталари (1.2.1) тенгламани қаноатлантирувчи нукталар тўпламига цикл деб аталади. Маълумки, [2] Евклид текислигидаги айлананинг ҳар бир нуктасидаги егрилиги ўзгармас сонга $1/R$ га тенг. Агар (1.2.1) параболанинг егрилигини ҳисобласак у ҳам ўгармас сонга тенг бўлади.

(1.1.1) § даги ярим евклид текислигидаги ҳаракатда сикл яна сиклга ўтиншини кўрсатайлик. Ҳаракат тенгламасини

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases} \quad (1.2.2)$$

кўринишида олайлик. (1.2.2) ни поарабола тенгламасига қўйсак

$$vx + y = ax_1^2 + 2bx_1 + c \quad y = ax_1^2 + (2b - v)x_1 - c$$

яна сикл тенгламаси ҳосил бўлади.

Демак, сикл ярим евклид геометриямси тушунчаларидан бири экан, чунки у галилей ҳаракатига нисбатан инвариантдир.

Агар ҳаракат тенгламасини

$$\begin{cases} x' = x + \frac{v}{2a} \\ y' = vx + y + \frac{v^2}{4a} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Кўринишида олсак бу ҳаракат парабола нуқталарини яна шу парабола нуқталарига акслантиради. Евклид текислигида ҳар бир нуқтасидаги егрилиги ўзгармас бўлган чизиқлар айлана ва тўғри чизиқ бўлса, ярим евклид текислигида бундай хоссага ега бўлган чизиқлар сикл билан тўғри чизиқдир.

Евклид текислигидаги айлананинг бирор йўналишга параллел бўлган ватарлариунинг ўрталари битта тўғри чизиққа тегишли бўлади. Бу тўғри чизиқнинг айлана билан чегараланган бўлаги дастлабки ватарларга қўшма ватар деб аталади []. Шунга ўхшаш бирор сикл берилган бўлса, махсус йўналишга параллел бўлмаган бирор тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқлар тўплами сиклни параллел ватарларини ҳосил қилади. Бу параллел ватарларнинг ўрталари битта тўғри чизиқда ётади. Айлана унга тегишли бўлмаган нуқтадан ўтказилган уринмаларининг узунлиги ўзоро тенг. Шунга ўхшаш сиклга унга тегишли бўлмаган бирор нуқтадан ўтказилган уринмаларнинг узунликлари ўзоро тенг бўлади.

Ярим евклид текислигининг аксиомалари системасига тўхташдан олдин евклид геометрияси аксиомаларини ва улардан келиб чиқадиган баъзи натижаларни келтирайлик.

1.2. § Хозирги Евклид геометрияси аксиомалари ва улардан келиб чиқадиган натижалар

Боглиқлик аксиомалари ва улардан келиб чиқадиган натижалар
Элементар геометрия аксиомалари беш гуруҳга бўлиб урганилади.

I- гуруҳ, саккизта боглиқлик аксиомаларини уз ичига олади.

II-гуруҳ, тўртта тартиб аксиомаларидан иборат.

III -гуруҳ, бешта конгруентлик аксиомаларидан тузилган.

IV- гуруҳ битта узлуксизлик аксиомасидан ташкил топган.

V-гуруҳ, битта параллеллик аксиомасини уз ичига олади.

Боглиқлик аксиомаларида нукта, тугри чизик ва текисликларни узаро жойлашиши хоссалари хақида суз юритилади ва «тегишли» сузи билан ифодаланилади.

Бунда «а нукта а тугри чизикка тегишли», «а нукта а тугри чизикда ётади» ва «а тугри чизик а нуктадан утади» каби жумлалар тент кучли, «а нукта а текисликка тегишли», «а нукта а текисликда ётади» ва «а текислик а нуктадан утади» каби жумлалар тент кучли деб хисобланади. Агар С нукта а ва б тугри чизикларга тегишли булса, а ва б тўғри чизиклар С нуктада кесишади дейилади. а тугри чизикнинг барча нукталари а текисликка тегишли булса а тугри чизик текисликда ётади ёки а текислик а тугри чизик оркали утади деб аталади.

Қ ва Р текисликларнинг хар бири а тугри чизик оркали уца, Қ ва Р текисликлар а тугри чизик бўйича кесишади дейилади.

Биринчи гуруҳ куйидаги саккизта аксиомалардан ташкил топган:

I₁ аксиома. Л ва В нукталар кандай булмасин, бу нукталарнинг хар биридан утувчи с тугри чизик мавжуд.

1₂ аксиома. Турли а ва В нукталар кандай булмасин, бу нукталардан утувчи биттадан ортик булмаган тугри чизик мавжуд.

Бу икки аксиомани куйидагича ифодалаш мумкин: Исталган иккита турли нукталар бу нукталардан утувчи битта ва факат битта тугри чизикни аниқлайди.

И₃ аксиома.)гар бир тугри чизикда камида иккита нукта ётади. Бир тугри чизикда ётмайдиган камида учта нукта мавжуд.

1₄ аксиома, а, в, С нукталар қандай булмасин, бу нукталарнинг ҳар биридан утувчи л текислик мавжуд. Ҳар бир текисликда камида битта нукта ётади.

И₅ аксиома. Бир тугри чизикда ётмайдиган а, в, С нукталар қандай булмасин, бу нукталарнинг ҳар биридан утувчи биттадан ортик булмаган текислик мавжуд.

1₆ аксиома, д тўғри чизикнинг А ва В нукталари α текисликда ёца, д тугри чизик ҳам текисликда ётади.

1₇ аксиома, Қ ва Р текисликлар битта умумий С нуктага ега булса (текисликларнинг ҳар бирида ётувчи нукта), уларнинг яна камида битта умумий Д нуктаси мавжуд.

1₈ аксиома. Бир текисликда ётмайдиган камида туртта нукта мавжуд.

Богликлик аксиомаларидан бир неча натижалар келиб чиқади. Бу натижалардан баъзиларини келтирамиз.

1.3—теорема. Иккита тўғпу чизик биттадан ортик булмаган умумий нуктага ега. Иккита текислик ёки умумий нуктага ега емас ёки умумий тугри чизикка ега. Текислик ва унда ётмайдиган мўғпу чизик биттадан ортик булмаган умумий нуктага ега.

Исбот. Биринчи тасдиқнинг исботи 1₂ аксиомадан келиб чиқади. Яъни, тескарисини фараз киламиз. а ва б тугри чизиклар бир—биридан фаркли булиб, умумий С нуктадан ташкари Д нуктага ҳам ега булсин. У холла, С, Д нукталар а, б тугри чизикларга тегишли экани келиб чиқади. С ва Д нукталар а, б тугри чизикларга тегишлилигидан И₂ аксиомага кура а тугри чизик билан б тугри чизик устма —уст тушади. Бу зиддият биринчи тасдиқни исботлайди.

Иккинчи тасдиқни исботлайлик. Қ ва Р текисликлар умумий П нуктага ега булсин деб фараз килайлик. 1₇ аксиомага кура Қ ва Р текисликлар Р дан фаркли умумий Қ нуктага ега булади. Р ва Қ нукталардан утувчи тугри чизик Қ ва Р текисликларнинг ҳар бирида ётади. Демак, а тугри чизик Қ ва П текисликларнинг умумий нукталаридан ташкил топган экан. Бундан ташкари, а тугри чизик а ва р текисликларнинг барча умумий нукталарини уз ичига олади. Ҳақиқатдан ҳам Қ ва П текисликларнинг а тугри чизикда ётмайдиган умумий Р нуктаси бор деб фараз килайлик. У холда, Қ ва П текисликларнинг бир тугри чизикда ётмайдиган умумий учта Р, Қ, Р нукталари мавжуд булади. 1₅ аксиомага кура Қ ва П текисликлар устма —уст тушади. Шундай килиб, Қ ва П текисликлар тугри чизик буйича кесишар экан. Тасдиқ исботланди.

Учинчи тасдиқ еса 1₆ аксиомадан келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, текислик ва унда ётмайдиган тугри чизикнинг иккита умумий нуктаси булсин деб фараз килсак, 1₆— аксиомага кура тугри чизик текисликда

ётиши келиб чикади. Бу зиддият теореманинг учинчи тасдигини исботлайди. 1.3—теорема исботланди.

1.4—теорема. Тўғпу чизик ва унда ётмайдиган нукта, ҳамда иккита кесишувчи мўғпу чизиклар орқали битта ва фақат битта текислик утади.

Исбот. Биринчи тасдиқни исботлаймиз. Б нукта а тугри чизикка тегишли эмас деб фараз килайлик. 1₃ аксиомага кура а тугри чизикда камида иккита нукта мавжуд. Бу нукталарни р ва Қ деб белгилайлик. И₄ аксиомага кура В, Р, Қ нукталардан утувчи л текислик мавжуд. 1₆ аксиомага кура я текислик а тугри чизик орқали утади. 1₅ аксиомага кура бир тугри чизикда ётмайдиган В, Р, Қ нукталардан утувчи текислик ягона равишда аниқлангани

учун а тўғри чизик ва Б нуктадан утувчи Қ дан бошқа текислик мавжуд эмас.

Энди иккинчи тасдиқни исботлаймиз. а ва б тугри чизиклар С нуктада кесишади деб фараз килайлик. 1₃ аксиомага кура а тугри чизикда С дан фаркли А нукта, б тугри чизикда С дан фаркли В нукта мавжуд. А, В, С нукталар бир тугри чизикда ётмайди. 1₄ аксиомага кура А, В, С ларнинг ҳар биридан утувчи я текислик мавжуд. 1₆ аксиомага кура п текислик а ва б тугри чизиклардан утади. 1₅ аксиомага кура бу текислик ягона.

1.4 —теорема исботланди.

1.5—теорема. Ҳар кандай текислик бир мўғпу чизикда ётмайдиган камида учта нуктани уз ичига олади.

Исбот. 1₈ аксиомага кура Қ текисликда ётмайдиган В нукта мавжуд. 1₃ аксиомага кура АВ тугри чизикдан ташкарида С нукта мавжуд. А нукта АВС ва я текисликларнинг умумий нуктаси эканидан, 1₇ аксиомага кура уларнинг яна камида битта умумий Д нуктаси бор. Шундай қилиб, Қ текисликда А нуктадан ташкари Д нукта ҳам мавжуд. 1₈ аксиомага кура ЛВП текисликда ётмайдиган Е нукта мавжуд. 1₄ аксиомага кура АБЕ текислик мавжуд, 1₇ аксиомага кура, АБЕ ва Қ текисликлар А дан фаркли умумий Ф нуктага ега (1₆ аксиомага кура Ф нукта АВ тугри чизикда ётмайди). Ф вас нукталар АВ тугри чизикда ётмаслигидан, 1.4—теореманинг иккинчи тасдиғига кура улар АБФ ва АБД текисликларнинг умумий нукталари була олмайди, бу ердан Д ва Ф нукталар ҳар хил экани келиб чикади. Шундай қилиб, Қ текисликда учта А, Д, Ф турлича нукталар мавжуд экан.

1.5 —теорема исботланди.

Тартиб аксиомалари ва улардан келиб чикадиган натижалар

Биз тугри чизикдаги нукта шу тугри чизикдаги бошга иккита нуктага нисбатан тайин муносабатда «орасида ётади» деб фараз киламиз. Бунда қуйидаги аксиомаларнинг шартлари бажарилган булиши керак.

ИИ₁ аксиома. В нукта Л ва С нукталар орасида ёца, у холда А, В, С битта тугри чизикнинг турли нукталари булиб, В нукта С ва А нукталар орасида ҳам ёцин.

ИИ₂ аксиома. А ва С нукталар кандай булмасин, АС тугри чизикда хеч булмаганда битта В нукта мавжуд булиб, С нукта А ва В нукталар орасида ёцин.

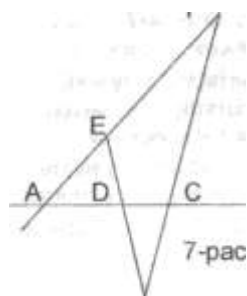
ИИ₃ аксиома. Тугри чизикнинг ихтиёрий учта нуктаси ичидан колган иккитасининг орасида ётувчи биттадан ортиқ булмаган нуктаси мавжуд.

ИИ₁ — ИИ₃ аксиомалар тартибнинг чизикли аксиомалари дейилади.

Таъриф. А ва В нукталар жуфтлиги кесма деб аталади ва АВ ёки ВА каби белгиланади. А ва В нукталар орасида ётувчи нукталарни АВ кесманинг ички нукталари ёки оддий килиб АВ кесманинг нукталари, А ва В нукталарни еса кесманинг учлари дейилади.

ИИ₄ аксиома. (Паш аксиомаси) А, В, С — бир тугри чизикда ётмайдиган нукталар ва а АВС текислигида ётиб, А, В, С нукталарнинг бирортасидан ҳам утмайдиган тугри чизик деб фараз килайлик. Агар а тугри чизик ЛВ кесманинг бирор нуктасидан уца, у холда а тугри чизик АС ва ВС кесмалардан факат биттасининг ички нуктасидан утади.

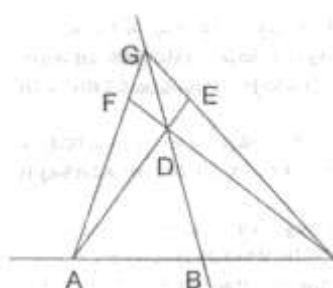
1.6—теорема. Хар кандай АС кесма камида битта Д нуктани уз ичига олади.



Исбот. 1₃ аксиомага кура АС тугри чизикдан ташкарида ётувчи Е нукта мавжуд. ИИ₂ аксиомага кура А тугри чизикда шундай Ф нукта мавжудки, бунда Е нукта АФ кесманинг ички нуктаси булади (7—расм). П₂ аксиомага кура ФС. тугри чизикда шундай Г нукта мавжудки, С нукта Ф ва Г нукталар орасида ётади. ИИ₃ аксиомага кура Г нукта Ф ва С нукталар орасида ётмайди. ИИ₄ аксиомага кура ЕГ тугри чизик АС ва ФС кесмалардан биттасининг ички нуктасидан утади. Лекин

ЕГ тугри чизик ФС кесмани кесиши мумкин емас, акс холда Иж ва 1₂ аксиомаларга кура каралаётган барча нукталар бир тугри чизикда ётиши келиб чикади. А, Е, С нукталар бир тугри чизикда ётмаслиги маълум. Бундан еса, ЕГ тугри чизик кесма билан бирор Д нуктада кесишиши келиб чикади. Натижада, А ва С нукталар орасида ётувчи Д нуктанинг мавжудлиги исботланди.

1.7—теорема. Бир мўғпу чизикда ётувчи хар кандай А, В, С нукталардан ҳар доим колган иккитасининг орасида ётувчи битта нукта мавжуд.



Исбот. А нукта 5 ва С нукталар орасида, С нукта А ва В нукталар орасида ётмасин деб фараз килайлик. 1₃ аксиомага кура АС тугри чизикдан ташкарида Д нукта мавжуд.

Д нуктани В нукта билан тугри чизик ёрдамида туташтирамыз (8—расм). ИИ₂ аксиомага кура БД тугри

чизикда шундай Г нукта мавжудки, Д нукта В ва Г нукталар орасида ётади. БСГ учбурчак ва АД тугри чизикка P_4 (8-расм) аксиомани

8-расм

куллаш натижасида АД ва СГ тугри чизиклар С ва Г нукталар орасида ётувчи бирор Е нуктада кесишиши келиб чикади. Худди шунта ухшаш, АЕГ учбурчак ва СД тугри чизикка P_4 аксиомани куллаш натижасида СД ва АГ тугри чизиклар А ва Г нукталар орасида ётувчи Ф нуктада кесишиши исботланади. АЕГ учбурчак ва СФ тугри чизикка P_4 аксиомани куллаб, Д нукта А ва Е нукталари орасида ётишини, яна шу аксиомани АБС учбурчак ва БГ тугри чизикка куллаб, в нукта А ва С нукталар орасида ётишини хосил киламиз. Теорема исботланди.

Бир тугри чизикда ётмайдиган А, В, С нукталар берилган булсин. АВ, ВС, АС кесмалардан ташкил топган фигура учбурчак, А, В, С нукталар учбурчакнинг учлари, А В, ВС, АС кесмалар учбурчакнинг томонлари дейилади.

1.1-Таъриф. Берилган тугри чизик кесманинг бирор ички нуктасини уз ичига олса, тугри чизик; кесмани кесиб утади ёки тугри чизик билан кесма кесишади дейилади.

1.2-Таъриф. Бизга а тугри чизик ва унда ётувчи турли О ва А нукталар берилган булсин. а тугри чизикнинг О нуктасидан бошлаб А нуктаси жойлаштан тарафдаги нукталаридан иборат Кис ми ОА нур деб айтилади, О нукта еса ОА нурнинг боши дейилади.

ОА нурдан бирор В нукта олайлик. У холда ОА ва ОВ нурлар устма — уст тушади. Яъни, ОА нурнинг барча нукталари ОВ нурнинг нукталари, ОВ нурнинг барча нукталари ОА нурнинг нукталари булади.

Маълумки, а тугри чизикдан олинган О нукта тугри чизикни боши умумий нуктада булган иккита нурга ажратади. Бундан фойдаланиб тугри чизикда тартиб тушунчасини киритамиз. Бунинг учун тугри чизик нукталари орасида «ергаштиради» ва «ергашади» тушунчаларини аниклашимиз керак. Агар тугри чизикнинг бир—биридан фаркли Х, Й нукталаридан бири иккинчисини ергаштирса, у холда иккинчиси биринчисига ергашади. Бунда транзитивлик хоссаси уринли булиши керак, яъни ихтиёрий х, у, з элементлар учун х, у ни ергаштирса, у, г ни ергаштирса, у холда х, з ни ергаштиради.

Хакикий сонлар тупламида куйидагича тартиб киритиш мумкин. Агар $a < b$ булса, а сони б сонини ергаштиради ёки б сони а сонига ергашади деб олиш мумкин.

Бизга а тугри чизиг ва унда О нукта берилган булсин. Боши О нуктада булган нурларнинг бирини карайлик. Бу нурда А нукта ОВ кесмага тегишли булса, А нукта В нуктани ергаштиради деб оламиз. У холда А нукта В нуктани ергаштирса, В нукта С нуктани ергаштирса, А нукта С

нуктани ергаштириши келиб чикади. Бундан хар бир нур тартибланган деб хулоса килиш мумкин.

Енди бу нурлардан бигтасини биринчи, бошқасини иккинчи деб оламир ва бу нурларда киритилган тартиб ёрдамида а тугри чизикда куйидагича тартиб киритамиз:

1) Биринчи нурнинг а ва В нукталарини олайлик.

Агар биринчи нурда В нукта а нуктани ергаштирса, у холда а тугри чизикда а нукта В нуктани ергаштиради;

2) Биринчи нурнинг барча нукталари а тугри чизикда О нуктани ергаштиради.

3) Биринчи нурнинг барча нукталари а тугри чизикда иккинчи нурнинг барча нукталарини ергаштиради.

4) О нукта а тугри чизикда иккинчи нурнинг барча нукталарини ергаштиради.

5) Иккинчи нурнинг а ва В нукталари учун, иккинчи 1-нурда а нукта В нуктани ергаштирса, а тугри чизикда а нукта В нуктани ергаштиради.

1) — 5) шартлар ёрдамида киритилган тартиб а тугри чизикдаги тартибни аниқлайди.

Биринчи ва иккинчи нурларни уринларини алмаштирак а тугри чизикда янги тартиб ҳосил булади (олдинги тартибга тескари). Киритилган тартибларни бирини танлаш натижасида тугри чизикда юналиш аниқлаш мумкин.

Биз юкорида келтирган жумлалар тугри чизикдаги нукталарнинг жойлашишига нисбатан еди. Худди шунта ухшаш жумлаларни текисликдаги ва фазодаги нукталарни жойлашишига нисбатан ҳам келтириш мумкин. Бу жумлаларни укувчиларга масала сифатида берамиз.

Нурларда киритилган тартиб ёрдамида аниқланган тугри чизикдаги тартиб учун транзитивлик хоссаси уринлилигини исботлайлик.

Бизга а тугри чизикда а, В ва С нукталар берилган булиб, а нукта В нуктани, В нукта С нуктани ергаштирсин. У холда а нукта с нуктани ергаштиришини исботлашимиз керак. а, В ва С нукталар О нукта билан аниқланган иккита нурлардан биттасида жойлашган булсин. Масалан, биринчи нурда жойлашган булсин, у холда , а нукта в нуктани ергаштиргани учун в нукта ОА кесманинг ички нуктаси, В нукта С нуктани ергаштиргани учун С нукта ОВ кесмани ички нуктаси булади. с нукта ОА кесманинг ички нуктаси эканлиги келиб чикади. Демак, а нукта С нуктани ергаштиради. Худди шунта ухшаш уччала нукта иккинчи нурда жойлашган холда ҳам а нукта с нуктани ергаштириши исботланади.

Агар а нукта биринчи нурда, В нукта иккинчи нурда (ёки О нукта билан устма —уст тушса) жойлашган булса, С нукта иккинчи нурда ётади. Акс холда 2) ёки 3) шартлар бажарилмай колган булади. А нукта биринчи

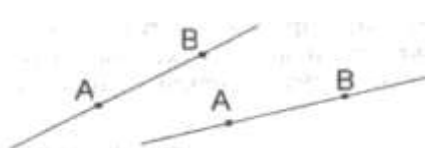
нурнинг нуктаси, С нукта иккинчи нурнинг нуктаси булгани учун, 3) шартга кура А нукта С нуктани ергаштиради.

Ва нихоят, агар А, В нукта биринчи нурда, С нукта иккинчи нурда жойлашган (ёки О нукта билан устма — уст тушса) булса, 3) шартга (ёки 2) шартга) кура А нукта С нуктани ергаштиради. Долган барча холлар 1) — 5) шартларга зид келади.

Шундай килиб 1) — 5) шартлар асосида аникланган тугри чизикдаги тартиб транзитивлик хоссасига ега экан.

Конгруентлик аксиомалари ва улардан келиб чикадиган натижалар

Берилган кесма бошка кесма билан тайин муносабатда «конгруент» ёки «тент» деб фараз киламиз. Конгруентлик муносабати куйидаги аксиомаларни каноатлантириши керак;



9-расм

ИИИ₃-аксиома. а тугри чизикда А ва В нукталар шу тугри чизикда ёки бошка аъ тугри чизикда ётувчи Аъ нукта берилган булсин, у холда берилган Аъ нуктага кура а тугри чизик юналишида АъВъ кесма

АВ кесмага конгруентбуладиган хар доим битта ва факат битта Въ нукта топиш мумкин.

Кесмаларнинг конгруентлик муносабати $AB = A'B'$ каби белгиланади. Хар бир АВ кесма учун $AB=BA$ конгруентлиги талаб килинади.

П₁₂—аксиома. Битта кесмага конгруент булган кесмалар узаро конгруент.

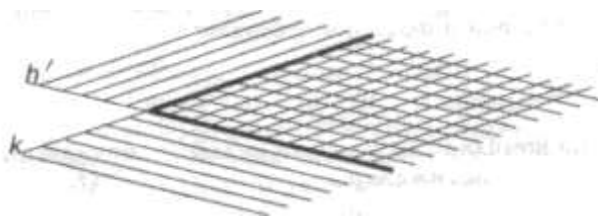
Натижа. Хар бир кесма узига конгруент.

Ш₂— аксиомалардан конгруентлик муносабатининг симметриклиги ва транзитивлиги келиб чиқади.

Ш₃—аксиома, а тугри чизикда умумий ички нукталарга ега булмаган АВ ва ВС кесмалар берилган булсин. АъВъ ва ВъС кесмалар шу тугри чизикда ёки бошка аъ тугри чизикда ётувчи ва умумий ички нукталарга ега булмаган кесмалар булсин. Агар бунда $AB = A'B'$ ва $BC = B'C'$ муносабатлар уринли булса, у холда $AC = A'C'$ муносабат уринли.

1.3-Таъриф. Бир нукта (О нукта)дан чикувчи икки х,к нур (бир тугри чизикда ётмайдиган) дан иборат геометрик шакл бурчак дейилади.

Л, к нурлар бурчак томонлари, О нукта бурчак учи дейилади. Бурчак $z(x, k)$ ёки $Z(k, x)$ каби белгиланади. А ва В нукталар мос равишда x ва k нурларнинг нукталари булса, $z(x, k)$ бурчак $ЗАОБ$ ёки $ЗО$ каби ҳам белгиланади.



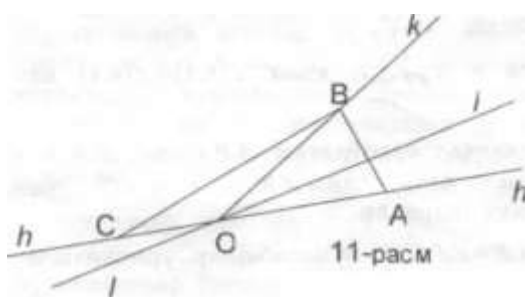
10-расм

И ва k нурлар мос равишда x ва k нурларининг тугри чизиккача тулдирувчилари булсин деб фараз килайлик. x ва k нурлар ёрдамида ажратилган ярим текисликлардан k нур жойлашгани, ҳамда k ва k нурлар ёрдамида ажратилган ярим текисликлардан А нур жойлашганининг умумий кисми (кесишмаси) бурчакнинг ички нукталари дейилади (10—расм).

Бурчакнинг барча ички нукталари туплами бурчакнинг ичи дейилади. Бурчак жойлашган текисликнинг, бурчакнинг ичидан, О нукта, k ва Л нурлардан ташкари гисми бурчакнинг ташкариси деб аталади.

1.8—теорема. Боши бурчак учида булиб, узи бурчак ичида жойлашган И нур, учлари бурчакнинг хар хил томонларида булган АВ кесмани кесади ва аксинча, бурчак учини учлари бурчак томонларида булган кесманинг ички нуктаси билан туташтирувчи нур бурчакнинг ичида жойлашади.

Исбот. а нукта $z(x, k)$ берилган бурчакнинг А томонида, в нукта $Z(x, k)$ бурчакнинг k томонида, / нур бу бурчакнинг учидан чикиб бурчак ичида жойлашган деб фараз килайлик. И нурнинг тулдирувчиси булган, Аъ



нурдан бирор С нукта олиб, абс учбурчак караймиз. лъ деб / нурнинг тулдирувчисини, л* деб еса лва лъ нурлардан ташкил топан тугри чизикни белгилайлик (11 — расм).

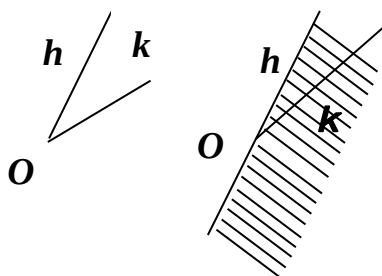
П₄ аксиомага кура л* СВ, А В кесмалардан биттаси билан кесишиши керак. л* тугри

чизикнинг $z(x, k)$ бурчак ичида нукталари юк, бундан л* АВ

ни кесиши келиб чикади. лъ нурнинг $г(x, k)$ бурчак ичида нукталари юклигидан л нур АВ кесма л у билан кесишишини хосил киламиз. Теореманинг биринчи кисми исботланди.

Бизга учи О нуктада булган, бурчак ва учлари шу бурчак томонида жойлашган ав кесма берилган булсин. Учи о нуктада булиб, ав кесманинг ички нуктасидан утувчи нур $z(x, k)$ бурчак ичида

жойлашганлигини
курсатишимиз керак.



12-расм

Теска рис ини фараз килайлик, учи O нуктада, AB кесманинг ички C нуктасидан утувчи к нур $z(x, k)$ бурчакнинг ичида тула жойлашмасин. Яъни $z(x, k)$ бурчакнинг ташкарисида к нурнинг бирор D нуктаси бор деб фараз килайлик. Аниклик учун, C ва i нукталар x ва I нурлар билан чегараланган турли ярим текисликларга тегишли булсин. У холда к нур x нур билан O дан фаркли, яна битта умумий яъни, x нур билан k нурнинг кесишиш нуктаси борлиги келиб чиқади. Бу еса к нур AB кесманинг ички нуктасидан утади деган фаразга зид. Демак, к нурнинг $z(x, k)$ бурчак ташкарисида нуктаси юк екан. Теорема исботланди.

Енди бурчаклар конгруентлиги муносабатини киритамиз.

Π_4 — аксиома. Бизга а текисликда $Z\{x, k\}$ бурчак ва шу текисликда ёки бошка I текисликда аъ тугри чизик, хамда аъ тугри чизик билан аникланган тайин ярим текислик берилган булсин.

аъ тугри чизикда боши Y нуктада булган K нур караймиз.

аъ текисликнинг берилган ярим текислигида $z(x, k)$ бурчакка конгруент бурчак хосил киладиган ягона къ нур топиш мумкин ва $Z(x, k) = Z(x', k')$ бурчакнинг барча ички нукталари аъ билан аникланган берилган ярим текисликда ётади. Бурчакларнинг конгруентлиги $z(x, k) = z(x', k')$ каби белгиланади.

Хар бир бурчак узига конгруент, яъни $Z(x, k) = Z(x, k)$ ва $Z(x, k) = Z(k, x)$.

Π_5 — аксиома. Бир тугри чизикда ётмайдиган A, B, C ва A', B', C' нукталар берилган булсин. Агар $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ ва $\angle BAC = \angle B'A'C'$ муносабат уринли эканидан

$\angle ABC = \angle A'B'C'$ ва $\angle ACB = \angle A'C'B'$ муносабатлар уринлилиги келиб чиқади.

Π_1 — Π_3 — аксиомалар факат кесмаларга тегишли, Π_4 — аксиома бурчаклар конгруентлиги билан Π_5 — аксиома еса кесмалар конгруентлиги билан бурчаклар конгруентлигини билдиради.

Агар АВ кесма АЪВъ кесмага конгруент булса, АЪВъ кесма АВ га конгруентлиги келиб чикади. Шунинг учун АВ ва АЪВъ кесмалар узаро конгруент дейилади.

Бизга а тутри чизикда А,Б,С,...,К,Л ва аъ тутри чизикда Аъ,Бъ,Съ,...,Къ,Лъ нукталар берилган булсин. Агар АВ ва АЪВъ, АС ва АЪС, ВС ва БЪСъ,...,КЛ ва КВ кесмалар узаро конгруент булса, берилган иккала нукталар тизими узаро конгруент дейилади.

1.9—теорема. Бизга А,Б,С,Д,...,К,Л ва Аъ,Бъ,Съ,Дъ,...,Къ,Лъ конгруент нукталар тизими берилган булсин. Агап В нуктанинг бир тарафида А ва иккинчи тарафда С,Д,...,К,Л нукталар ёца, С нуктанинг бир тарафида А,В ва иккинчи тарафида Д,...,К,Л нукталар ёца ва хоказо, у холда Аъ,Въ,Съ,...,Къ, нукталар ҳам мос равишда, яъни Въ нуктанинг бир тарафида Аъ ва иккинчи тарафида Съ,Дъ,...,Къ,Лъ нукталар, С нуктанинг бир тарафида Аъ,Въ ва иккинчи тарафида еса Дъ,...,Къ,Лъ нукталар жойлашган булади ва хоказо.

1.10—теорема, а мўғпу чизикда ётувчи А,В,С ва аъ мўғпу чизикда ётувчи Аъ,Въ,С нукталар берилган булиб, $AB = A\breve{B}\breve{B}$ ва $AC = A\breve{C}\breve{C}$ муносабат уринли булсин.

Агап В нукта А ва С нукталар орасида, Въ нукта еса аъ мўғпу чизикнинг Аъ нуктадан С нукта жойлашган тарафида ёца, у холда Въ нукта Аъ ва С нукталар орасида ётади.

Исбот. ИИИ, аксиомага кура а тутри чизикда шундай C^* нукта мавжудки, Въ нукта Аъ ва C^* нукталар орасида ётади ва $B\breve{C}^*-BC$. ИИИ₃ аксиомага асосан, $AC-A\breve{C}^*$ муносабатлар уринли. Шундай Килиб, $AC = A\breve{C}$ ва

$AC-A\breve{C}$ муносабатлар уринли. С ва C^* нукталар Аъ нуктадан бир тарафда ётганлиги учун ИИИ, аксиомани куллаб, С ва C^* нукталарнинг устма — уст тушишини хосил киламиз. Демак, Въ нукта Аъ ва С нукталар орасида ётади, теорема исбот булди.

1.4-Таъриф. ABC ва $A\breve{B}\breve{B}C$ учбурчаклар берилган булсин. Агар $AB = A\breve{B}\breve{B}$, $AC-A\breve{C}$, $BC = B\breve{C}$, $\angle A = \angle A\breve{B}$, $\angle B=\angle B\breve{B}$, $\angle C = \angle C$, муносабатлар уринли булса, ABC ва $A\breve{B}\breve{B}C$ учбурчаклар конгруент дейилади ва $AABC = AA\breve{B}\breve{B}C$ каби белгиланади.

1.11—теорема. (Учбурчаклар конгруентлигининг биринчи аломати) А,В,С ва Аъ,Въ,С учбурчаклар учун $AB-A\breve{B}\breve{B}$, $AC = A\breve{C}$ ва $\angle A = \angle A\breve{B}$ муносабатлар уринли булса, у холда ABC ва $A\breve{B}\breve{B}C$ учбурчаклар конгруент булади.

Исбо.т. ИИИ₅ аксиомага кура, $\angle B = \angle B\breve{B}$ ва $\angle C = \angle C$ еканлиги келиб чикади. Енди $BC-B\breve{C}$ муносабатни исботлашимиз керак.

BC кесма ВЪС кесмага конгруент булмасин деб фараз қилайлик. ИИИ₅ аксиомага кура ВЪС нурда шундай Д нукта топиладики, бу нукта учун

BC = БЪДЪ муносабат уринли булади. Фаразимизга кура, АЪС ва АЪДЪ кесмалар хар хил. ABC ва АЪБЪДЪ учбурчаклар учун Ш₅ аксиомани куллаб, ЗБАС = ЗБЪАЪДЪ муносабат хосил киламиз. Теорема шартига кура

ЗБАС = ЗБЪАЪС муносабат уринли. Охирги икки муносабат ИИИ₄ аксиомага зид. Бу зиддиятдан теореманинг исботи келиб чиқади.

1.12—теорема. (Учбурчаклар кошурунтлитнинг иккинчи аломати) ABC ва учбурчаклар учун AB = АЪВЪ, ZA = ЗАЪ, ZB = ЗБЪ муносабатлар уринли булса, ABC ва АЪВЪС учбурчаклар конгруент булади.

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун BC = ВЪС эканини исботлашимиз етарли. Чунки AB=АЪВЪ ва ZB = ЗБЪ муносабатларга BC = ВЪС муносабат кушилса, учбурчаклар конгруентлигининг биринчи аломатига кура, ABC ва АЪВЪС учбурчаклар конгруент булади.

Тескарисини фараз киламиз- AB=АЪВЪ, ZA=ЗА, ZB = ЗБЪ, муносабатлар уринли булиб, BC = ВЪС булсин. ИИИ₅ аксиомага кура, ВЪС нурда шундай Д нукта топиладики, BC = БЪД муносабат уринли булади. ABC ва АЪБЪД учбурчаклар учун ИИИ₅ аксиомани кулласак BAC= БЪАЪД муносабат келиб чиқади. АЪД ва АЪС нурлар устма — уст тушмайдиган нурлар булгани учун, Ш₄ аксиомага зид. Яъни BAC бурчакка тенг булган ВЪАЪС ва ЗБЪАЪД бурчаклар устма—уст тушмаяпти. Бу зиддиятдан BC = ВЪС муносабат келиб чиқади. Учбурчаклар конгруентлигининг биринчи аломатини куллаш натижасида, ABC ва АЪВЪС учбурчакларнинг конгруентлигини хосил киламиз.

1.5-Таъриф. Икки томони тент булган учбурчак тент ёнли учбурчак дейилади. Учбурчакнинг тент томонлари ён томонлари, учинчи томони еса ас ос и дейилади.

1.13—теорема. ABC учбурчакда AC = CB тенглик уринли булса, у холда ZCAB = ZCBA муносабат уринли булади.

Исбот. ABC ва BAC учбурчаклар караймиз.

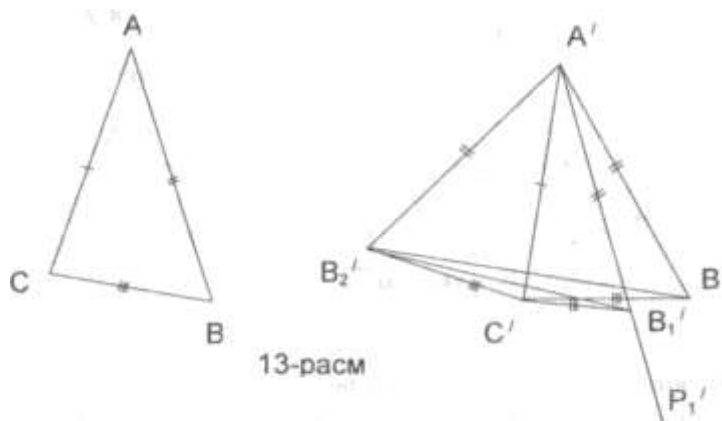
Теорема шартига кура CA = CB ва ZC умумий эканидан Ш₅ аксиомага кура, ZCAB = ZCBA эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

1.14— теорема. (Учбурчаклар конгруентлитнинг учинчи аломати). ABC ва АЪВЪС учбурчаклар учун AB = АЪВЪ, AC = АЪС, BC = ВЪС муносабатлар уринли булса, ABC ва АЪВЪС учбурчаклар конгруент булади.

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун ZCAB = ЗСЪАЪБ муносабатни курсатиш етарли, чунки теорема шартига кура CA = СЪАЪ, AB = АЪВЪ тенглик уринли, сунгра учбурчаклар

конгруентлигининг биринчи аломатини кулласак, ABC ва $AB'C$ учбурчакларнинг конгруентлиги келиб чиқади. Тескарисини фарз киламиз. У холда $P1_4$ аксиомага кура $AB'C$ тугри чизикдан B' нукта

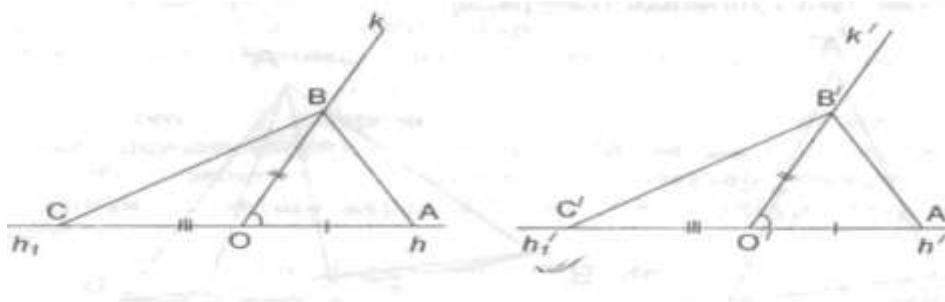
жойлашган тарафда шундай $A \in P$ нур топиладики, $\angle CAB = \angle CA'B$ муносабат уринли булади. Фаразимизга кура, $A \in P$ нур AB нур билан устма - уст тушмайди.



III аксиомага кура, $A \in P$ нурда шундай B_1 нукта топиладики, $AB = AB_1$ муносабат уринли булади. Учбурчаклар конгруентлигининг биринчи аломатига кура $AB = AB_1$, $AC = AC_1$ ва $\angle CAB = \angle CA'B_1$ муносабатлардан $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ учбурчаклар конгруентлиги келиб чиқади. Бундан еса, $BC = B_1C_1$ тенг лик хосил гиламиз. Кесмалар конгруентлигининг транзитивлик ва симметриклик хоссаларидан AB_1C_1 учбурчак томонлари $AB_1B_2C_1$ учбурчак томонларига мос равишда конгруентлиги келиб чиқади. Худди шунга ухшаш AC_1 тугри чизикнинг иккинчи тарафида AB_2C_1 учбурчак ясаш мумкин.

Енди $AB_2B_1B_2$ ва $CB_2B_1B_2$ учбурчаклар караймиз. $AB_2B_1 = AB_1B_2$, $CB_2B_1 = CB_1B_2$ муносабатлардан $\angle AB_2B_1 = \angle AB_1B_2$ тенгликлар келиб чиқади. Охирги икки муносабатлардан ва теоремага кура $\angle AB_2C_1 = \angle AB_1C_1$ тенглик хосил киламиз. Натижада учбурчаклар конгруентлигининг биринчи аломатига кура AB_2C_1 ва AB_1C_1 учбурчакларнинг тенглиги ва $\angle CB_2A = \angle CB_1A$ муносабат келиб чиқади. Худди шундай $\angle CB_2A = \angle CB_1A$ тенглик исботлаш мумкин. Охирги икки муносабат аксиомага зид. Ушбу зиддият теоремани исботлайди.

1.6-Таъриф. Умумий учга ва гомонга ега булиб, колган томонлари бир — бирини тулдирувчи нурлардан иборат бурчаклар кушни дейилади. Бирининг томонлари иккинчисининг тулдирувчи нурларидан иборат бурчаклар вертикал дейилади.



14-расм

1.14-теорема. Конгент бурчакларнинг қўшилари ҳам конгент бўлади.

Исбот. $\angle(x, k) = \angle(x', k')$ бурчаклар берилган бўлсин. x, x' нурларнинг тулдирувчиларини мос равишда x_k, x'_k ва $\angle(x, k)$ ва $\angle(x', k')$ бурчакларнинг учларини O, O' деб белгилайлик. x, k, x_k нурлардан мос равишда A, B, C нукталар олайлик. ИИИ, аксиомага кура x', k', x'_k нурларда шундай A', B', C нукталар топиладики, $OA = O'A'$, $OB = O'B'$ ва $OC = O'C'$ муносабатлар уринли бўлади (14—расм). Ш₃ аксиомага кура $AC = A'C'$, Ш₅ аксиомага кура еса $\angle OAB = \angle O'A'B'$ (ёки $\angle CAB = \angle C'A'B'$) муносабат келиб чиқади. Учбурчаклар конгруентлигининг биринчи аломатига кура $AB = A'B'$ конгруентлигини ҳосил қиламиз. $LB = A'B'$, $AC = A'C'$ ва $\angle CAB = \angle C'A'B'$ муносабатлардан 1.13 —теоремага кура $BC = B'C'$ муносабат, $OB = O'B'$, $OC = O'C'$ ва $BC = B'C'$ муносабатларга учбурчаклар конгруентлигининг учинчи аломатини куллаш натижасида $\angle BOC = \angle B'O'C'$ яъни, $\angle(x, k) = \angle(x', k')$ муносабат келиб чиқади. Теорема исботланди.

Ярим евклид текислигидаги бурчак евклид маъносидаги кесма узунлигига тенг эканлигини 1.1.§ да кўриб чиққан едик. Бундан ташқари агар ўзоро устма-уст тушмаган A ва B нукталар битта махсус тўғри чизикда ёца улар орасидаги масофа нолга тенг бўлади. Бундай нукталарга параллел нукталар деб аталади. Ярим евклид текислигининг ўзига хослиги унинг метрис муносабатларидамдир. Бирор жумладаги бирор, сўз ўрнига масофа, ёки аксинча тўғри чизик ўрнига нукта сўзларини алмаштирсак, бу жумла маъносини йўқотмайди. Бундай хоссага фақат ярим евклид текислигигина егдир. Евклид текислигининг аксеомаларидан баъзилари учун бу муносабатлар уринма бўлишлиги

мумкин. Лекин ихтиёрий аксеома теорема ёки таъриф учун бу принцип ўринли эмас.

**ИИ БОБ. ЯРИМ ЁЕВКЛИД ТЕКИСЛИГИДА
УСЌБУРСЌАКЛАРГА ДОИР МЕТРИС МУНОСАБАТЛАР.
2.1§ Ярим евклид текислигидаги учбурчаклар учун синуслар
теоремаси.**

Маълумки, [], учбурчакларга доир метрис муносабатлар деганда учбурчакларнинг ички бурчаклари йиғин диси томонлари ва бурчакларини ўзоро боғлайдиган муносабатларни тушунамиз.

1. Евклид текислигида ҳар қан дай учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси 180^0 га тенг. Томонлари a , b , c кесмаларга тенг бўлган усвхбурчак мавжуд бўлишлиги учун,

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < b + a \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Тенгсизликлар системаси ечимга ега бўлиши шарт. Ярим евклид текислигидаги учбурчакка доир метрис муносабатларни евклид текислигидаги метрис муносабатлар билан параллел ўрганиш мақсадида уларни келтирайлик.

Учбурчак мактабда урганиладиган планиметрия курсининг асосий «ишчи» фигураларидан биридир. Учбурчакларнинг тенглик аломатлари геометрия курсида урганилади. Учбурчакларнинг тенглик аломатларидан жуда куп геометрик тасдиқларни исботлашда ва масалаларни ечишда фойдаланилади. Учбурчакларнинг тенглиги айлана буйича планиметрия курсида урганилади баёни турли хил дарсликларда турличадир.

Тенг учбурчакларни ўрганишнинг дастлабки боскичида «бурчак каршисидаги томон», «Томонлар орасидаги бурчак» тушунчаларини кайта ишлаш зарур.

Учбурчаклар тенглигининг уч аломати куйдаги кетма-кетликда урганилади:

1) Учбурчакларнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги буйича тенглик аломати

2) Учбурчакларнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари буйича тенглик аломати

3) Учбурчакларнинг учта томонларига кура тенглик аломати учбурчакларнинг тенглик аломатларидан фойдаланишда ;

1) Уларнинг тенглиги хакидаги гипотезага нисбатан учбурчаклар жуфтини курсатиш;

2) Каралаётган учбурчакларда мос холда тенг элементлар жуфтларини ажратиш

3) Аломатлардан бири асосида каралаётган учбурчакларнинг тенглиги хакида хулоса чиқариш;

4) Мос элементлардан кайсинингдир тенглиги хакида хулоса чиқариш « Фигураларнинг тенглиги» мавзуси геометрия [8] курсида урганилади. Бу мавзуда ҳаракат натижасида икки фигурадан бири иккинчисига уца, улар тенг фигуралар деб аталиши, фигураларнинг тенглигини белгилаш учун одатдаги тенглик белгисидан фойдаланилиши айтилади.

Бу мавзуда куйидаги иккита тасдиқ исботланади :

1) агар иккита учбурчакда мос томонлари тенг ва мос бурчакларни тенг булса, у холда бу учбурчаклар ҳаракат натижасида устма-уст тушишини билдиради.

2) Агар иккита учбурчак ҳаракат натижасида устма-уст тушса, у холда бу учбурчакларнинг мос томонлари тенг ва мос бурчаклари тенг.

3) Фигураларнинг ухшашлигига оид мавзулар [7] укув кулланмада.

[7] да «Шаклларнинг ухшашлиги» номли мавзуда ухшаш шакиллар ухшашлик алмаштириши купбурчакларнинг ухшашлиги, учбурчаклар ухшашлигининг аломатлари урганилади. [8] да ухшашлик алмаштириши ва унинг хоссалари, фигураларнинг ухшашлиги, учбурчакларнинг ухшашлик аломатлари, тугри бурчакли учбурчакларнинг ухшашлиги урганилади. Бунда учбурчакларнинг ухшашлик аломатлари куйидаги тартибда урганилади ;

1) Учбурчакларнинг иккта бурчаги буйича ухшашлик аломати

2) Учбурчакларнинг иккта томони ва улар орасидаги бурчак буйича ухшашлиги

3) Учбурчакларнинг учта томонига кура ухшашлик аломати

Фигураларнинг ухшашлиги тушунчаси ўқувчиларнинг кургазмали интуитив тасаввурларига таянган холда хаётий мисолларни келтириш билан киритилади.

Учбурчакларнинг ухшашлик аломатларидан купгина теоремаларни исботлашда ва масалаларни ечишда фойдаланилади.

1. Купбурчак хакида дастлабки тушунча [6] укув кулланмада берилади. Унда аввало синик чизик, унинг томонлари, учлари, турлари ва периметри хакида тушунча берилади. Шундан сунг синик чизик тушунчаси оркали купбурчакка таъриф берилади ва купбурчак томонлари, учлари, турлари хакида маълумот берилади.

Мактаб геометрия курсида факат каварик купбурчаклар урганилиши таъкидланади.

Учбурчакка ташки ва ички чизилган айланалар хакида 7-синф геометрия [8] курсида маълумот берилади.

Учбурчакнинг хамма учларидан утган айлана шу учбурчакка ташки чизилган айлана дейилади.

Агар айлана учбурчакнинг хамма томонига уринса, уни учбурчакка ички чизилган айлана дейилади.

Куйидаги теоремалар исботланади: Теорема. Учбурчакка ташки чизилган айлананинг маркази учбурчак томонларининг урталаридан утказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуктасидан иборатдир.

Теорема: Учбурчакка ички чизилган айлана маркази учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуктасидан иборат.

Берилган учбурчакка ички чизилган айланани ва учбурчакка ташки чизилган айланани ясаш мумкин.

Уткир бурчакли, тугри бурчакли ёки утмас бурчакли учбурчакка ташки чизилган айлана марказининг вазияти чизма ёрдамида аникланади. Лекин баъзи ўқувчиларга уткир бурчакли учбурчакка ташки чизилган айлананинг маркази гипотенузанинг уртасида ётишни, утмас бурчакли учбурчакка ташки чизилган айлананинг маркази учбурчакдан ташкарида ётишини исбот қилишда ёйнинг бурчак катталиги шу ёйга тиралган ички чизилган бурчак катталигининг иккиланганига тенг эканлиги фактидан фойдаланилади. «Айланага ички чизилган бурчак хақида маълумот берилади.

[7] ўқув қўлланмада еса бу мавзу учбурчакка ташки ва ички чизилган айланалардан олдин урганилади.

Айлананинг бир нуктасидан чиқувчи икки ватридан ташкил топган бурчак айланага ички чизилган бурчак деб аталади.

Бунда қуйидаги теорема исботланади;

Теорема: Айланага ички чизилган бурчак ўзи тиралган ёйнинг ярли билан ўлчанади (яъни бурчакнинг катталиги ўзи тиралган ёй бурчак катталигининг яримига тенг).

Исбот қилинган теоремадан ўшбу муҳим натижалар қелиб чиқади:

1-натижа. Битта ёйга тиралган барча ички бурчаклар ўзаро тенгдир.

2-натижа. Диаметрга тиралган барча ички чизилган бурчаклар тугри бурчаклардир. Шундан сунг купбурчакка ташки чизилган айлана урганилади. Таъриф. Агар купбурчакнинг хамма учлари битта айлана устида ёца, купбурчак айланага ички чизилган деб аталади. Айлана еса купбурчакка ташки чизилган деб аталади.

Учбурчакка ташки чизилган айлана хакида куйидаги теорема исботланади:

Теорема: Хар кандай учбурчакка ягона ташки айлана чизиш мумкин.

[7] да учбурчакка ички чизилган айлана куйидагича таърифланади ва унга доир теорема исботланади:

Таъриф: Агар купбурчакнинг хамма томонлари айланага уринувчи булса, уни айланага ташки чизилган деб аталади.

Теорема: хар кандай учбурчакка ягона ички айлана чизиш мумкин.

Маълумки, хар кандай учбурчакка ички ва ташки айланалар чизиш мумкин. Аммо ихтиёрий купбурчакка хар доим хам ички ёки ташки айланалар чизиш имконияти булавермайди.

Хаттоки, ихтиёрий туртбурчакка ички ёки ташки айланалар чизиш мумкин ёки мумкин емаслигини курсатиш хам мумкундир.

Айланага ички ёки ташки чизилган туртбурчакларнинг хоссалари [8] урганилмайди. [7] да еса куйидаги теоремалар хамда ифодаланади ва исботланади:

1-теорема: Айланага ташки чизилган туртбурчакнинг карама –карши томонлари йигиндиси узаро тенгдир

2-теорема: Айланага ички чизилган туртбурчакнинг карама –карши бурчаклари йигиндиси 180^0 га тенг

Мактаб геометрия курсида ([7], [8]) да мунтазам купбурчаклар куйидагича таърифланади;

Таъриф: Хамма томонлари тенг ва хамма бурчаклари тенг булган каварик купбурчак мунтазам купбурчак деб аталади.

Ўқувчиларга атрофи оламдан мисоллар келтириш ва тайёр мисолларни курсатиш махсадга мувофикдир.

Хар кандай мунтазам купбурчакка ички ва ташки айланалар чизиш мумкин ва бу айланаларнинг марказлари устма –уст ташиши хакидаги теорема исботланади.

Мунтазам купбурчакнинг маркази апофемаси, радуси ва марказий бурчаги хакида маълумот берилади.

Шундан сунг мунтазам купбурчакнинг тамони билан ички ва ташки чизилган айланаларнинг радиуслари орасидаги боғланиш урганилади .

Мунтазам n бурчакнинг тамони a , унга ташки ва ички чизилган айланаларнинг радиуслари мос равишда R ва r булса,

$$a_n = 2 R \sin \frac{180^\circ}{n} \quad (1)$$

(1) формула айланага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг тамонини унга ташки чизилган айлана радиуси оркали хисоблаш формуласидир.

$$a_n = 2 r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \quad (2)$$

(2) формула айланага ташки чизилган мунтазам n бурчакнинг тамонини унга ички чизилган айлана радиуси оркали хисоблаш формуласидир.

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n} \quad (3)$$

(3) , бу мунтазам n бурчакка ички ва ташки чизилган айланаларнинг радиусларини боғловчи формуладир.

Юкоридаги формулаларни татбик килиб масалалар ечиш билан ўқувчиларнинг масалалари ечиш билан ўқувчиларнинг масалалар ечиш куникмаларини янада шакллантириш мумкин.

Перпендикуляр огма, проексия мавзуси ҳам геометрия курсида урганилади [7] укув кулланмада тугри чизикка ундан ташкаридаги нуктадан тушурилган перпендикуляр, перпендикулярнинг узунлиги, огма, огманинг асоси, огманинг проексияси хакида тушунча берилади.

Сунгра куйидаги теорема исботланади:

Теорема: огма перпендикулярдан ва узининг проексиясидан каттадир.

Бу теоремани исботлаш ўқувчиларга тугри бурчакли учбурчаклар учун илгари урганилган Пифагор теоремаси еслатилади ва ундан фойдаланилади.

Учбурчак тенгсизлиги хакида 8-синф геометрия курсида, яъни [7] укув кулланмада маълумот берилади.

Бунинг учун куйидаги теорема исботланади: Теорема. Ихтиёрий учбурчакнинг хар бир томони узунлиги колган икки томон узунликлари йигиндисидан кичикдир (уларнинг айирмасидан каттадир).

Бу теоремани учбурчак томонларининг энг каттаси учун исбот килиш етарлидир. Бунинг учун учбурчакнинг учидан унинг энг катта томонига перпендикуляр утказилади ва олдинги мавзуда урганилган перпендикуляр, огма ва унинг проексияси хоссаси ўқувчиларга еслатилиб, унга кура теорема исботланади.

Куйидаги натижанинг уринли жонини исбот килишни ўқувчиларга топширик сифатида берилади:

Натижа: Икки нуктани туташтирувчи кесманинг узунлиги бу нукталарни туташтирувчи синик чизик узунлигидан кичикдир

Кесмалар нисбати, пропорсионал кесмалар хакида [7] укув кулланмада маълумот берилади ва куйидаги теорема исботланади:

Теорема: Бурчак томонларини кесувчи параллел тугри чизиклар бурчак томонларидан пропорсионал кесмалар ажратади.

Бу теоремани исботлашда маълум бир яшашлар бажарилади ва Фалес теоремасидан фойдаланилади.

Бу теоремадан келгусида купгина геометрик масалаларни ечишда фойдаланилади .

«Бурчаклари тенг булган учбурчак томонларнинг хоссаси» мавзуси [7] укув кулланмада урганилади.

Бу мавзуда олдинги булимда урганилганпропорсионал кесмалар хакидаги теоремадан келиб чикадиган ушбу натижавий теорема исботланади:

Теорема: Агар икки учбурчакнинг мос бурчаклари тенг булса, мос томонлари пропорсионал булади .

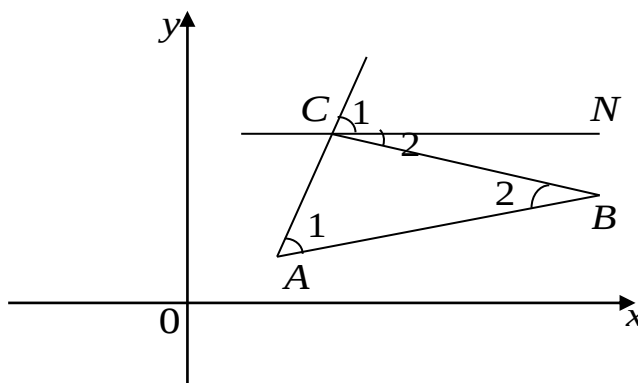
Бизга маълумки, олдин урганилганлар кейин урганиладиганлар учун замин яратади. Шунча кура юкоридаги тушунча ва хоссалардан кейинги мавзуларни ўрганишда кенг фойдаланилади . Буни ўқувчиларга ҳам хар дарсда таъкидлаш лозим. Масалан, пропорсионал кесмалар ва бурчаклари тенг булган учбурчаклар томонларининг хоссасидан ундан кейин урганиладиган бурчак синуси тушунчасини киритишда фойдаланилади.

Ярим евклид текислигида томонлари a, b, c кесмалар узунликларига тенг бўлган учбурчак мавжуд бўлишлигио учун

$$a+b=c \quad (2.1.2)$$

тенглик ўринли бўлишлиги шарт. Буни нуқталар орасидаги масофа тушунчасидан осонгина келтириб чиқариш мумкин.

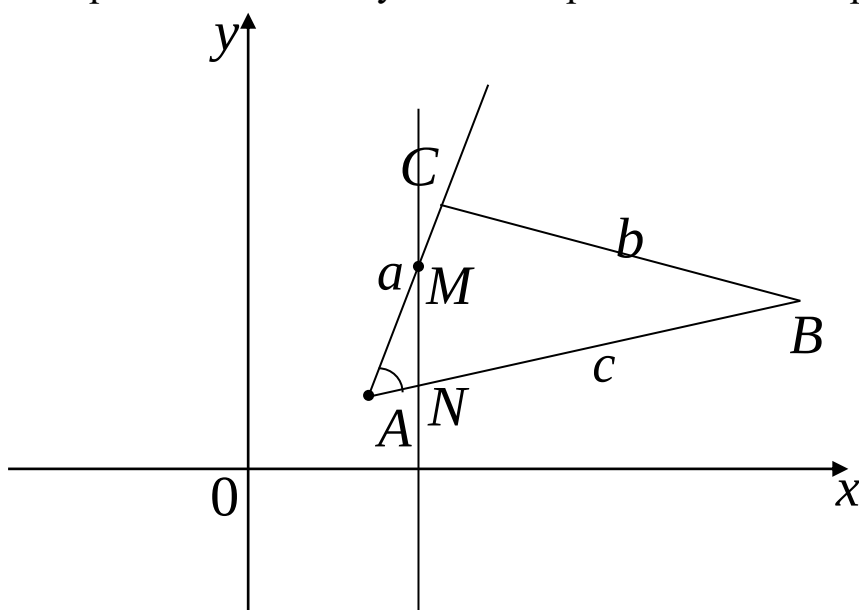
Кесма узунлиги унинг Ox ўкдаги проексияининг узунлигига тенг. Бундан (2.1.2) тенглик осонгина келиб чиқади.



Чизмадаги $\angle A$ ва $\angle B$ лар учун $CN \parallel AB$ еканлигидан

$$\angle A + \angle B = \angle C \quad (2.1.3)$$

Демак, галилей текислигидаги ҳар қандай учбурчакнинг иккита бурчаклари йиғиндиси доимо унинг учинчи бурчги катталигига тенг. (2.1.3) тенгликни (2.1.1) дан масофа сўзини бурчак сўзи билан алмаштириб ҳам ҳосил қилиш мумкин. Енди 1.1§ даги бурчкка берилган таърифдан фойдаланиб, галилей текислигидаги учбурчакларни томонлари ва бурчакларини боғловчи муносабатларни мисол келтирамиз.

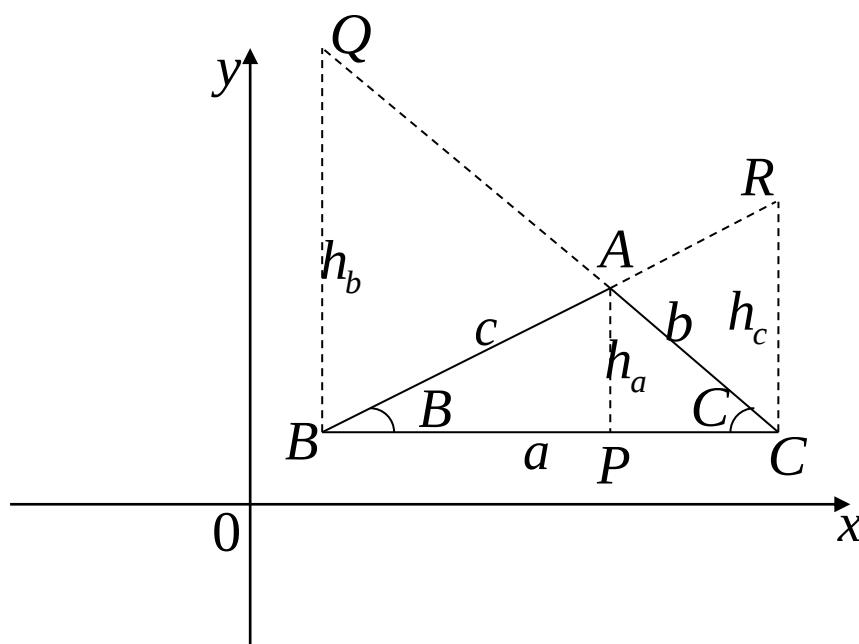


АБС учбурчакнинг А учидаги бурчаги $[MN]$ кесма узунлигига тенг бўлганлиги учун АМН ва АБС ўхшаш учбурчаклардан

$$\frac{A}{MN} = \frac{AN}{AC} \quad (2.1.4)$$

Бу ерда $|AN|=1$, $|AC|=C$ еканлигидан $\angle A = \frac{MN}{C}$ кели б чиқади.

Галилей текислигидаги ҳар қан дай учбурчакнинг баланфлиги унинг учларидан қарама-қарши томонларига тушган Ой ўққа параллел кесмаларнинг узунлигига тенг. Уларни чизмада қуйидагича тасвирлаш мумкин.



h_a кесма а-томонга, h_b -кесма б томонга, h_c -кесма с томонга туширилган баландликлардир. Чизмадан

$$\frac{B}{h_c} = \frac{1}{a}, \quad \frac{A}{h_c} = \frac{1}{b}$$

$$h_c = a \cdot B, \quad h_c = b \cdot A \quad (2.1.5)$$

$$h_c = h_c \Rightarrow a \cdot B = b \cdot A \Rightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B}$$

Келиб чиқади. Худди шунингдек h_b ва h_a

$$\frac{a}{A} = \frac{c}{C}, \quad \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad (2.1.6)$$

(2.1.5) ва (2.1.6) тенгликлардан

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad (2.1.7)$$

Муносабатни келтириб чиқариш мумкин.

(2.1.7) муносабатлар ярим евклид текислигидаги учбурчаклар учун синуслар теорема сани ифодалайди. Соддароқ қилиб айтганда евклид текислигидаги учбурчаклар учун синуслар теоремасининг ярим евклид текислигидаги кўриниши (2.1.7) дан иборат.

Юза аффин тушунча бўлганлиги учун ярим евклид текислигидаги учбурчакнинг юзаси учун қуйидаги формулани чиқариш мумкин.

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \quad (2.1.8)$$

(2.1.8) муносабатлар галилей текислигидаги ҳаракатга нисбатан инвариантдир. Чунки, АВС учбурчакнинг а – томони галилей ҳаракатларида Ой ўқи йўналишида бурилади, бироқ унинг проекциясининг узунлиги ўзгармайди.

(2.1.8) формулалардаги x_a , x_b , ва x_c ларнинг ўринларига уларнинг (2.1.5), (2.1.6) тенгликлардаги ифодаларни қўйсак,

$$S = \frac{1}{2}abC = \frac{1}{2}acB = \frac{1}{2}bcA \quad (2.1.9)$$

Формулалар ҳосил бўлади. (2.1.9) муносабатлар ярим евклид текислигидаги учбурчак юзаларини ҳисоблаш формулаларидир.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЙОТЛАР

- [1] Александров П.С.,** Лекции по аналитической геометрии Москва «Наука»1980 г
- [2]. Дадажонов Н.Д. , Жураев М.СХ.** Геометрия. 1-қисм Тошкент. 1995 й
- [3] Дадажонов Н.Д., Юнусметов Р., Абдуллаев Т.** Геометрия. 2-қисм Тошкент 1989 У
- [4]. Ефимов Н. В.** Высше геометрия. М. «Наука» 1971 г.
- [5] Латипов Х., Тожиев СХ., Рустамов Р.** Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент. “Ўқитувчи”1993 й
- [6].Каримов И .А “Жаҳон молиявий-иқтисоди инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари”** Тошкент 2009 й
- [7]. Норманов А. Е.** Геометрия асослари. Т. «ЎзМУ», 2003 й.
- [8] Пагарелов А В.** Геометрия. Москва “Хайк”,1989 й
- [9]. Яглом. И. М.** Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия Москва 1985 г.
- [10]. Кори-Ниёзий.,** Аналитик геометрия курси, Тошкент. Укитувчи 1975
- [11]. Ж.Исраилов, З. Пашаев.** Геометрия, 1 қисм Т. 2004.
- [12]. К.Х. Абдуллаев и др.** Геометрия 1-част. Т-2002.
- [13]. А.Д.Александров, Н.Ю.Несветаев,** Геометрия, М., «Наука» 1990 г.

Физика – математика факултети “Математика ва Информатика ”
талим йўналиши битирувчи босқич талабаси Артикова Санобар “Галилей
текислигида учбурчакка доир метрик муносабатлар” мавзусидаги БМИ га
илмий раҳбар

ХУЛОСАСИ

Ноевклид геометрия тушунчалари учун ажратилган соатлар ўқув
дастурида бошқа тушунчаларга қараганла камроқ бўлсада, талаба Артикова
Санобар бу геометриянинг асосий тушунчаларини яхши ўзлаштирганлигини
кўрсатди. Евклид текислигидаги элементар геометрия тушунчаларни ярим
евклид текислигига ўтказишда уларни паралел равишда келтирган. Бу билан
қўйилган масала ечими ҳақида олдиндан тасаввур ҳосил қилган.
Асосий натижалар сифатида ихтиёрий учбурчакнинг томонлари орасидаги
 $a+b=c$ ва бурчаклари орасидаги $\angle a + \angle b = \angle c$ муносабатларни келтириш
мумкин. Чунки олинган барча натижаларда бу муносабатлардан тўлиқ
фойдаланилган. Бундан ташқари талаба евклид текислигидаги ўхшаш
учбурчаклар томонлари орасидаги муносабатларни ҳам яхши билганлиги учун
улардан яримевклид текислигидаги косинуслар ва синуслар теоремасини
келтириб чиқаришда уддабуронлик билан фойдаланилган. Қўйилган масалалар
евклид геометриясида тўлиқ олдиндан ечилган бўлсада, олинган натижаларни
янглик деб ҳисоблаш мумкин.

Шунингдек, ишда учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг
яримевклид текислигидаги кўринишлари жуда қизиқарли ҳолат деб
ҳисоблайман. Метрика ҳисобига айланаларнинг яримевклид текислигидаги
кўринишлари парабола (цикл) бўлиб қолиши жуда ҳам аҳамиятлидир. Чунки бу
билан дифференциал геометрия тушунчаларидан бири егрилиги ўзгармас
чизиқларига мисоллар топилган. Аниқроқ айтганда, евклид текислигида
егрилиги ўзгармас чизиқ айлана бўлса, ярим евклид текислигида бундай
чизиқлар ролини параболалар бажаради. Талаба Артикова Санобар томонидан
“Галилей текислигида учбурчакка доир метрик муносабатлар” мавзусида
тайёрланган БМИ олий ўқув юртларида бажариладиган БМИ низоми

талабларига мос келади. Шунинг учун, уни ДАХ ҳузурида ҳимояга тавсия
етаман.

ф.м.ф.н

Е. Қурбонов