

O`zbekiston Respublikasi Xalq ta`limi vazirligi

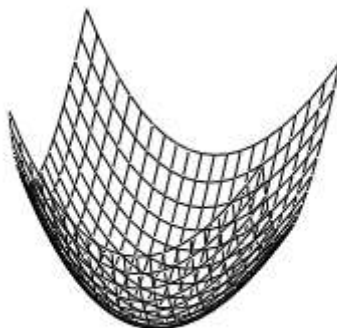
Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti

Fizika-matematika fakul`teti

Matematika o`qitish metodikasi kafedrası

Geometriya fanidan

MA`RUZALAR MATNI



Tuzuvchi:

f.-m.f.n. G. Qaypnazarova

Nukus 2015y.

VEKTOR HAQIDA TUSHUNCHA

Tayanich tushunchalar: *Yo`nalgan gasma, vektor uzunligi, birlik vektor, nollik vektor, kollinear vektor, vektorlarni qo`shish, ayirish, songa ko`paytirish.*

Fizikada va boshqa texnikaviy fanlarda, shuningdek matematikata qaraladigan miqdorlar asoson ikkiga bo`linadi.

Birinchisi, o`zlarining son qiymatlari bilan uchraydigan ya`ni bitta son bilan to`la aniqlanadigan fizikaviy yoki mexanik miqdorlarni uchratamiz. Bu miqdorlarga misol: massa, temperatura, vaqt, yuza, hajm v.h.k. Bu miqdorlar skalyar miqdorlar deb ataladi.

Ikkinchisi son qiymati bilan to`la aniqlana olmaydigan miqdorlarni uchratamiz. Bu miqdorlarning son qiymatlari bilan birga ularning yo`nalishlari ko`rsatilishi talab qiladi. Bu miqdorlarga misol: kuch, tezlik, tezlenish bo`ladi. Ular vektor miqdorlar deyiladi.

Ta`rif-1. Berilgan gasmaning uchlarining qaysi uchi birinchi, qaysi uchi ikkinchiligi aniqlangan bo`lsa, bu gasma yo`nalgan gasma deb ataladi.

Ta`rif-2. Yo`nalgan gasma *vektor* deb ataladi.

Biz vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko`rinishida yoki bitta kichik lotin harfi bilan  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ko`rinishida belgilaymiz. Vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko`rinishida belgilasak  $A, B$  nuqtalar mos vektorning boshi va oxiri joylashgan nuqtalar bo`lib topiladi. A va B nuqtalar orasidagi masofa $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi deyiladi, u bo`lsa  $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$  ko`rinishida belgilanadi.

Yo`nalishlari bir xil bo`lgan vektorlar bir xil yo`nalgan vektorlar deyiladi va  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$  ko`rinishida beriladi.

Yo`nalishlari qarama-qarshi bo`lgan vektorlar qarama-qarshi vektorlar deyiladi va $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ ko`rinishida beriladi.

Agar vektorning boshi va oxiri bir nuqtata bo`lsa, u *nol vektor* deyiladi. Nol vektor yo`nalishga ega emas, Uning uzunligi bo`lsa nolga teng. Nol vektor  $\vec{0}$  ko`rinishida yoziladi

Uzunligi birga teng bo`lgan vektor *birlik vektor* yoki *ort* deb ataladi.

Ta`rif- 3. *Bir to`g`ri chiziqqa parallel vektorlar kollinear vektorlar deyiladi.*

Bir xil uzunlikga, bir xil yo`nalishga ega bo`lgan va kollinear bo`lgan vektorlarga teng vektorlar deyiladi va  $\vec{a} = \vec{b}$  ko`rinishida belgilanadi.

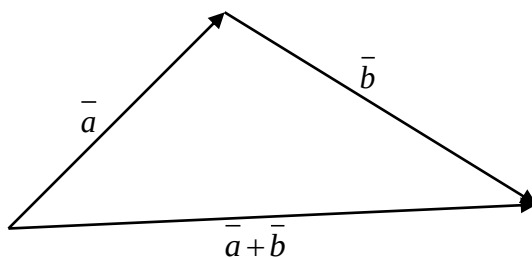
Vektorlar ustida chiziqli amallar

Vektorlar ustida bajariladigan amallar chiziqli amallar deb ataladi.

Vektorlarni qo`shish Vektorlarni ayirish Vektorni songa ko`paytirish

Vektorlarni qo`shish

Ta`rif-4. Ikki  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  va  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$  vektorlardan  $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$  vektor boshi  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  vektor oxiriga qoyilganda  $\overrightarrow{AB}$  vektor boshigan  $\overrightarrow{CD}$  vektor oxiriga yo`nalgan vektor, bu vektorlarning yig`indisi deyiladi va  $\vec{a} + \vec{b}$  ko`rinishida yoziladi. (1-rasm)



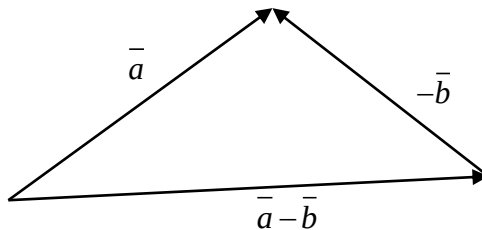
1-rasm

Yuqorida keltirilgan vektorlarni qo`shish qoidasi uchburchak qoidasi deyiladi.

Vektorlarni ayirish

Arifmetikadagidek, bu holda ham vektorlarni ayirish amali qo`shish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi.

Ta`rif-5. Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$ tengligin qanoatlantiradigan $\vec{x}$ vektoriga aytiladi. (2-rasm)



2-rasm

Vektorni songa ko`paytirish

Ta'rif-1. Berilgan λ haqiqiy son va $\vec{a}$ vektorning ko'paytmasi shunday vektor bo'lib topiladi, uning uzunligi $|\lambda|/|\vec{a}|$ ga teng, yo'nalishi $\lambda > 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\lambda < 0$ bo'lganda esa $\vec{a}$ vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi.

Ko'paytma $\lambda \vec{a}$ ko'rinishda yoziladi.

Vektorlar algabrasi deganda, vektorlar to'plamida vektorlar ustida qo'shish va skalyar songa ko'paytirish amallari tushiniladi. Biz V bilan hamma vektorlar to'plamini belgilaymiz. Bu holda vektorlarimiz bir to'g'ri ciziqda, bir tekislikda yoki fazoda yotgan bo'lishi mumkin.

Vektorlarni qo'shish va skalyar songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \text{ uchun; } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ -kommutativlik.}$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \text{ uchun; } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \text{ -assosiativlik.}$$

$$\forall \vec{a} \in V \text{ uchun } \exists \vec{b} \in V \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}, \vec{b} = -\vec{a}$$

$$\forall \vec{a} \in V \text{ uchun; } \vec{a} \cdot 1 = \vec{a} \text{ -birlik element.}$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V \text{ hamda } \forall \lambda \in R \text{ uchun } \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

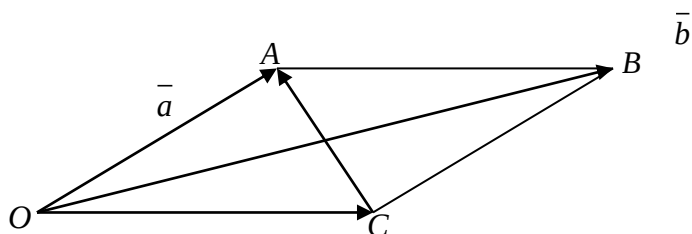
$$\forall \lambda, \mu \in R \text{ va } \forall \vec{a} \in V \text{ uchun: } \vec{a}(\lambda + \mu) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

$$\forall \lambda, \mu \in R \text{ va } \forall \vec{a} \in V \text{ uchun } \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$

$$\forall \vec{a} \in V \text{ uchun } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Bu xossalarning ba'zi bировlarini isbotlaymiz, ba'zilarining isbotlanishi bo'lsa talabalarga mustaqil ishga beriladi.

Birinchi xossani isbotlash uchun ixtiyoriy ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar boshini bir O nuqtaga joylashtiramiz va



3-rasm

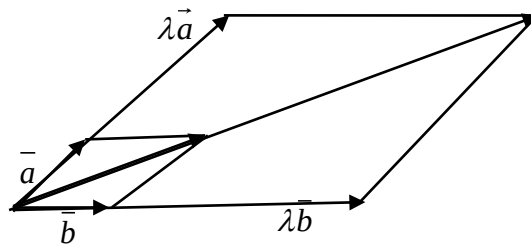
3-rasmdagi $OACB$ parallelogrammni hosil qilamiz. Bu parallelogrammdagi OAB uchburchakdan $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ tenglik, OCB uchburchakdan bo'lsa $\vec{OB} = \vec{b} + \vec{a}$ tenglikni hosil qilamiz.

Ikkinchi xossani isbotlash uchun $\vec{a}$ vektorning boshini O nuqtaga, $\vec{b}$ vektorning boshini $\vec{a}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz va $\vec{c}$ vektorning boshini bo'lsa $\vec{b}$ vektorning oxiriga joylashtiramiz. Chizmatan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{OC} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OC}$$

Har bir $\vec{a} = \vec{AB}$ vektor uchun $\vec{b} = \vec{BA}$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama qarshi yo'nalgan, uzunligi bo'lsa $\vec{a}$ ning uzunligiga teng vektor. Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{O}$ tenglikni hosil qilamiz.

Beshinchi xossani isbotlash uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning boshlarini bir nuqtaga joylashtirib, ular yordamida quyidagi $ABCD$ parallelogrammni hosil qilamiz.



4-rasm

Berilgan λ son uchun $\lambda\vec{a}$ va $\lambda\vec{b}$ vektorlarga qurilgan $ABCD$ parallelogramm $ABCD$ parallelogrammga o'xshash. Shuning uchun Uning diagonalining uzunligi $ABCD$ parallelogramm diagonali uzunligidan $|\lambda|$ marta "katta". Bu holdan bo'lsa $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ tenglikni hosil qilamiz.

Oltinchi xossani isbotlash uchun $\lambda\mu > 0$ va $\lambda\mu < 0$ hollarni qaraymiz. Birinchi hol λ va μ sonlarining ishorasi bir xil bo'ladi. Shuning uchun ularning ikkalasi ham yoki musbat yoki manfiy bo'ladi. Biz ularning ikkalasi ham manfiy bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $\vec{a}(\lambda + \mu)$, $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ vektorlar $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Demak ular bir xil yo'nalishga ega. Ularning uzunliklari bo'lsa $|\lambda + \mu||\vec{a}|$ ga teng. Agar λ va μ sonlari musbat son bo'lsa, yuqoridagi mulohaza takrorlanadi. λ va μ sonlarining belgilari har xil bo'lsa biz yana ikki holni qaraymiz:

$\lambda + \mu > 0$ va $\lambda + \mu < 0$. $\lambda + \mu > 0$ bo'lganda $\vec{a}(\lambda + \mu)$, $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ vektorlar $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalishga ega. $\mu\vec{a}$ vektorning boshini $\lambda\vec{a}$ vektorning oxiriga

joylashtirib, ularning uzunliklari va tengligini ko'ramiz. Qolgan hollar yuqoridagidek mulohazalar asosida tekshiriladi.

Teorema- 3. Nol vektordan farqli $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\lambda \in R$ son mavjud bo'lib, $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglikning bajarilishi zaruri va etarli.

Isbotlanishi. Vektorlar uchun $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ shart bajarilsa, $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinearligini isbotlash sodda bo'lganligi uchun Uni isbotlashni talabalarga havola etamiz. Bu shartning zarurligini ko'rsatamiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, ularni parallel ko'shirish natijasida bir to'g'ri chiziqqa joylashtirish mumkin. Shuning uchun ular l to'g'ri chiziqda yotadi va ularning boshi O nuqtata deb hisoblaymiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalishga ega bo'lsa

$\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ uchun $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglik bajariladi. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar qarama qarshi yo'nalishga ega

bo'lsa $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ uchun $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ tenglik bajariladi.

Ta'rif-2. Uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bir tekislikga parallel bo'lsa, ular komplanar vektorlar deyiladi.

Ta'biyki, Agar vektorlar parallel bo'lsa, ularni parallel ko'shirish natijasida bir tekislikda joylashtirishimiz mumkin.

Tekshirish uchun savollar

Vektor deb nimaga aytiladi?

Vektorlar qanday belgilanadi?

Vektorlarning qanday turlarini bilasiz?

Vektorlar ustida qanday amallar bajarish mumkin va ular qanday amallar deb ataladi?

Vektorlar ustida chiziqli amallarning qanday xossalarini bilasiz?

Komplanar vektorlar deb qanday vektorlarga aytiladi?

VEKTORLARNING CHIZIQLI BOG'LANISHLILIGI. VEKTOR KOORDINATALARI

Tayanch tushunchalar: Vektorlarning chiziqli kombigasiyasi, chiziqli bog'lanishli vektorlar vektor fazoning vazisi, o'lchami.

Bizga $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi va $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ haqiqiy sonlar berilgan bo'lsa, $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$ vektor $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ Vektorlarning chiziqli kombinasiyasi deb ataladi. Chiziqli kombinasiyata nisbatan sonlarning bittasi noldan farqli bo'lsa, u notrivial chiziqli kombigasiya deb ataladi.

Ta'rif-1 Berilgan $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi uchun kamida bittasi noldan farqli bo'lgan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

tenglik bajarilsa, $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ vektorlar oilasi chiziqli bog'lanishli deyiladi.

Teorema-1 Ikki vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun bu oila vektorlarning kollinear bo'lishi zarurli va etarli.

Isbot. Oilaga tegishli ikki $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, kamida bittasi noldan farqli λ_1, λ_2 sonlari mavjud bo'lib, $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} = \bar{0}$ tenglik bajariladi. Agar $\lambda_1 \neq 0$ bo'lsa, $\bar{a} = -(\lambda_1 / \lambda_2) \bar{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Bu bo'lsa 1- teoremaga ko'ra $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning kollinear ekanligini ko'rsatadi.

Va aksincha, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kollinear bo'lsin. Ularning boshlarini bir nuqtaga joylashtirsak, ular bir to'g'ri chiziqda yotadi. Bu to'g'ri chiziqda vektorlar boshi joylashgan nuqtanii koordinata boshi sifatida olib, koordinatalar sistemasini kiritamiz. Vektorlarning oqirlarini A ha'm B ha'rflar bilan belgilaymiz: $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$. Vektorlardan biri, masalan $\bar{a}$ noldan farqli vektor bo'lsin. Demak, $\bar{a} \neq \bar{0}$ ha'm O nuqta AB kesmani qandayda bir λ nisbatda bo'ladi: $BO/OA = \lambda$ yoki $BO = \lambda OA$

Endi $\bar{b} = -\lambda \bar{a}$ ten'likni ko'rsatamiz. Agar $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlar yo'nalishi bir xil bo'lsa, O nuqta AB kesmaga tegishli emas va $\lambda < 0$. Agar $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlar yo'nalishi qarama-qarshi bo'lsa, $\lambda > 0$

bo'ladi. Shuning uchun $\vec{b}$ ha'm $-\lambda\vec{a}$ vektorlarning yo'nalishlari bir xil. Ularning uzunliklari ham tengdir:

$$|\vec{b}| = |\vec{BO}| = |\lambda| |\vec{OA}| = |\lambda| |\vec{a}| = |-\lambda\vec{a}|.$$

Demak, bu vektorlar teng. Endi $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$ tenglikdan $-\lambda\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ tenglik kelib chiqadi.

Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli oilani hosil qiladi.

Teorema- 2. Uchta vektordan iborat oila chiziqli bog'lanishli bo'lishi uchun ularning komplanar bo'lishi zarurli va etarli.

Isbot. Oilaga tegishli uch $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar chiziqli bog'lanishli bo'lsa, ularning komplanar bo'lishini isbotlaymiz. Chiziqli bog'lanishlili ta'rifiga ko'ra, kamida bittasi noldan farqli α, β, γ sonlar uchun

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

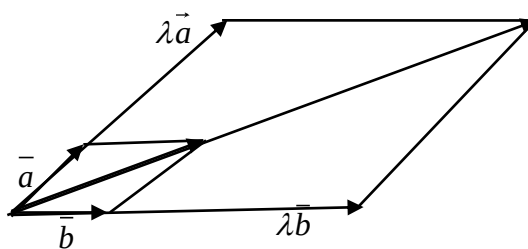
tenglik o'rinli. Aniqlik uchun γ noldan farqli bo'lsin, uchin holda bu tenglikdan

$$\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b}$$

tenglik galib chiqadi. Bu tenglikda $\lambda = \alpha/\gamma$, $\mu = \beta/\gamma$ belgilashlarni kiritip $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ tenglikni hosil qilamiz. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning boshi bir umumiy O nuqtata joylashgan bo'lsa, smusbatgi tenglikdan $\vec{c}$ vektor $\lambda\vec{a}$ va $\mu\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonaliga tengligi galib chiqadi. Bu bo'lsa ular bir tekislikda yotadi deganidir, demak, ular komplanar vektorlar.

Va aksincha, $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. Ular chiziqli bog'lanishli ekanligini isbotlaymiz.

Berilgan uch vektor orasida kollinear vektorlar bo'lgan holni chiqarib tahslaymiz. Teorema-1 ga asoslanib, shu vektorlar juftligi chiziqli bog'lanishli bo'lar edi va berilgan uch vektorlarning chiziqli bog'lanishlili galib chiqar edi. Shuning uchun $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orasida hesh bir juft kollinear bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz (asoson, ular orasida nol vektor yo'q). Vektorlarni bir tekislikga ko'shirib, ularning boshlarini O nuqtaga joylashtiramiz (1-rasm).



1-rasm

So'ng $\vec{c}$ vektorning C uchi orqali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkizamiz, vektor yotgan to'g'ri chiziqlarning $\vec{b}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan gasishish nuqtani A bilan belgilaymiz va $\vec{b}$ vektor yotgan to'g'ri chiziqlarning $\vec{a}$ vektorga parallel to'g'ri chiziq bilan gasishish nuqtasini B bilan belgilaymiz. (Shu nuqtalarning mavjud ekanligi, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ Vektorlarning nokollinearligi galib chiqadi). Vektorlarni qo'shishning parallelogramm qoidasiga ko'ra $\vec{c}$ vektor $\vec{OA}$ va $\vec{OB}$ vektorlar yig'indisiga teng, ya'niy

$$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}.$$

$\vec{OA}$ vektor noldan farqli $\vec{a}$ vektorga kollinear (u bilan bir to'g'ri chiziqda yotuvchi), demak, Shunday qilib λ haqiqiy son topiladi,

$$\vec{OA} = \lambda \vec{a}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shonga u'qshash, $\vec{OB} = \mu \vec{b}$ tenglik ham o'rinli. Bu tengliklardan

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

tenglik galib chiqadi. Smusbatgi tenglikni $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + (-1)\vec{c} = \vec{0}$ ko'rinishda jyozi olish mumkin. Bu tenglikdagi λ , μ va -1 sonlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lganligi sababli, smusbatgi tenglik $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ Vektorlarning chiziqli bog'lanishligini anglatadi. Teorema isbotlandi.

Natiya- Agar $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lmasa, ular chiziqli erkli bo'ladi.

Natiya- Ixtiyoriy uch komplanar bo'lmagan vektorlar orasida ikki kollinear vektorlar bo'la olmaydi. Shongdek ular orasida nol vektor ham bo'lmaydi.

**Ta`rif- 2.** Berilgan  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$  vektorlar oilasi chiziqli erkli bo`lib, Ixtiyoriy vektorni ularning chiziqli kombigatsiyasi ko`rinishida yozish mumkin bo`lsa, bu oila vektor fazoning bazisi deb ataladi.

**Ta`rif-3.** Agar Bazisning har bir vektori birlik vektor bo`lib, ularning har ikkitasi o`zaro perpendikulyar bo`lsa, bu holday bazis ortonormallang`an bazis deyiladi. Bazisning vektorlar sUni fazoning o`lchami deb ataladi.

Quyidagi faktlar o`rinli:

Tekislikta har qanday ikki nokollinear vektorlar bazisni tashkil etadi.

2⁰. Fazoda har qanday uch nokomplanar vektorlar bazisni tashkil etadi

Ta`rif-4. Bizga $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$ bazis berilib, $\overline{a}$ vektor uchun

$$\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + \dots + a_n \overline{e_n}$$

tenglik bajarilsa, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlar $\overline{a}$ vektorning koordinatalari deb ataladi.

3⁰. Har bir vektor berilgan baziste o`zining koordinatalari bilan aniqlanadi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar

V_3 vektor Fazoda $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ bazisga nisbatan $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar quyidagi koordinatalarga ega bo`lsin:

$$\overline{a}\{a_1, a_2, a_3\} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + a_3 \overline{e_3}$$

$$\overline{b}\{b_1, b_2, b_3\} = b_1 \overline{e_1} + b_2 \overline{e_2} + b_3 \overline{e_3} \text{ dan}$$

$\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarni qo`shamiz:

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + a_3 \overline{e_3}) + (b_1 \overline{e_1} + b_2 \overline{e_2} + b_3 \overline{e_3})$$

Bu tengliklardan vektorlarni qo`shish va songa ko`paytirish a`mallarining xossalari boyicha

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1) \overline{e_1} + (a_2 + b_2) \overline{e_2} + (a_3 + b_3) \overline{e_3} \Rightarrow \overline{a} + \overline{b} \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}.$$

Demak ikki vektorning yig`indisi koordinatalari qo`shiluvhi vektorlarning mos koordinatalarining yig`indisidan iborat.

Shu singari $\overline{a} - \overline{b}$ ning koordinatalari:

$$\overline{a} - \overline{b} \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\}$$

$\overline{a}\{a_1, a_2, a_3\}$ vektorning λ songa ko`paytmasining koordinatalari :

$$\lambda \overline{a} \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}.$$

Misol-1. $\vec{a}\{3,-2,1\}, \vec{b}\{-1,0,-2\}$ va $\vec{c}\{1,2,0\}$ vektorlar berilgan.

$\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, 3\vec{a}, \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini aniqlang.

Yechilishii. $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning koordinatalari $\{3 + (-1), -2 + 0, 1 + (-2)\} = \{2, -2, -1\}$;

$\vec{b} - \vec{c}$ vektorning koordinatalari $\{-1 - 1, 0 - 2, -2 - 0\} = \{-2, -2, -2\}$;

$3\vec{a}\{3 \cdot 3, 3 \cdot (-2), 3 \cdot 1\}, 3\vec{a}\{9, -6, 3\}$;

$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ vektorning koordinatalari

$$\left\{ 3 + \frac{1}{2} \cdot (-1) - 3 \cdot 1, -2 + \frac{1}{2} \cdot 0 - 3 \cdot 2, 1 + \frac{1}{2} \cdot (-2) - 3 \cdot 0 \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, -8, 0 \right\}$$

Tekshirish uchun savollar

Chiziqli kombigasiya deb nimaga aytiladi?

Chiziqli bog`lanishli vektorlar deb qanday vektorlarga aytiladi?

Vazis deb nimaga aytiladi?

Vektor fazo o`lchami deb nimaga aytiladi?

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar qanday bajariladi?

IKKI VEKTORNING SKALYAR KO`PAYTMASI VA UNING XOSSALARI

Tayanich tushunchalar: *proektsiya, skalyar ko`paytma, vektorlar orasidagi burchak, parallel vektorlar, perpendikulyar vektorlar.*

Vektorlarning skalyar ko`paytmasi

**Ta`rif- 5.** Ikki  $\vec{a}$  va  $\vec{b}$  vektorlarning skalyar ko`paytmasi deb, bu vektorlarning uzunliklari va ular orasidagi burchak kosinusini ko`rinish paytirishdan hosil boladi`lgan songa aytiladi va $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ ko`rinishida yoziladi. Bu erda φ , $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

Skalyar ko`paytmaning ta`rifidan quyidagi faktlar kelib chiqadi:

1-xossa. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun ularning o'zaro perpendikulyar bo'lishi zaruriy va etarli.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \vec{a} \perp \vec{b}$$

2-xossa. Har qanday vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi, bu vektor uzunligining kvadratiga teng:

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$$

3-xossa. Skalyar ko'paytma o'rin almastirish (kommutativlik) qoidaga bo'ysinadi:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}).$$

4-xossa. Skalyar ko'paytirish, skalyar ko'paytirishga nisbatan gruppallash qoida:

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{5-xossa. } (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

Beshinchi xossaning isbotlanishi proeksiyaning ikkinchi xossa dan kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) &= |\vec{a} + \vec{b}| |\vec{c}| \cos \varphi = |\vec{c}| (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{c}| (\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = |\vec{c}| (\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha + |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \varphi \end{aligned}$$

6-xossa. Ortonormallangan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazis uchun

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ bu erda } i, j = 1, 2, 3.$$

Skalyar ko'paytmaning koordinatalarda ifodalanishi

Vektor fazoda ortonormallangan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazisni olaylik. $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bu bazisga nisbatan

$\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\{x_2, y_2, z_2\}$ koordinatalarga ega bo'lsin:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3$$

Skalyar ko'paytmaning 4- va 5-xossalariga asoslanib

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \cdot (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) = \\ &= x_1 x_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 y_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + z_1 z_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 + (x_2 y_1 + x_1 y_2) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \\ &\quad + (z_1 y_2 + y_1 z_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + (x_1 z_2 + z_1 x_2) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

nisbatni yoza olamiz, bu erda 7-xossatan foydalansak,

$$(a, b) = x_1 x_2 \overline{e_1^2} + y_1 y_2 \overline{e_2^2} + z_1 z_2 \overline{e_3^2}$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi, bu vektorlarning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Bu holdan Shunday qilib natija kelib chiqadi: $\overline{a}\{x, y, z\}$ vektorning uzunligi uning koordinatalarining kvadratlarining yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng:

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ikki vektor orasidagi burchak

Ikki vektor orasidagi burchak quyidagi formula boyicha hisoblanadi:

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{x_1 x_2 \overline{e_1^2} + y_1 y_2 \overline{e_2^2} + z_1 z_2 \overline{e_3^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$\overline{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ va $\overline{b}\{x_2, y_2, z_2\}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Misol- 2. $\overline{a}\{1, -1, 0\}$, $\overline{b}\{1, -2, 2\}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechilishii. $\overline{a}, \overline{b}$ vektorlarning koordinatalarini ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga qo'yamiz:

$$\cos(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{1 + 2 + 0}{\sqrt{1+1+0} \sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bu holdan

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 45^\circ$$

Tekshirish uchun savollar

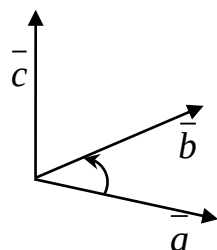
1. Nuqtaning to'g'ri chiziqqa proeksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Nuqtaning tekislikda proeksiyasi deb nimaga aytiladi?
3. Vektorning o'qqa proeksiyasi deb nimaga aytiladi?
4. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi degandanimani tushinasiz?
5. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?
6. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti qanday?

IKKI VEKTORNING VEKTOR KO`PAYTMASI. UCHTA VEKTORNING ARALASH KO`PAYTMASI

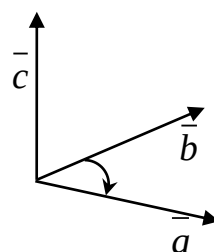
Tayanich tushunchalar: vektor ko`paytma, aralash ko`paytma, uchburchak yuzasi, parallelepiped hajmi

**Ta`rif-1.** Ta`rtiblangan $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ uchlikda $\bar{c}$ vektor oxiridan $\bar{a}, \bar{b}$ vektorlar tekisligiga qaraganimizda $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ ga qisqa burilish yo`nalishi soat strelkasi yo`nalishiga qarama-qarshi yo`nalgan bo`lsa, bu uchlik o`ng uchlik deb ataladi. Agar bu yo`nalish soat strelkasi yo`nalishi bilan ustma-ust tushsa, $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ uchlik chap uchlik deyiladi.

Bizga $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ (o`ng) va  $\{\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}\}$  (chap) uchlik berilgan bo`lsin (1, 2-rasmlar)



1-rasm



2-rasm

**Ta`rif-2.** Ikki  $\bar{a}$  va  $\bar{b}$  vektorlarning vektor ko`paytmasi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\bar{c}$ vektoriga aytiladi:

$\bar{c}$ vektorning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning uzunliklari bilan ular orasidagi burchak sinusining ko`paytmasiga teng, ya`ni $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\angle \bar{a} \bar{b})$.

$\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ikkalasiga ham perpendikulyar, ya`ni $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$.

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ tartiblangan vektorlar uchligi musbat uchlik bo`lishi kerak.

Vektor ko`paytmaning xossalari:

1. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}];$
2. $[\lambda \bar{a}, \bar{b}] = \lambda [\bar{a}, \bar{b}] = -[\lambda \bar{b}, \bar{a}], \lambda \in R;$
3. $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}];$
4. $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$

Vektor ko'paytmaning koordinatalarda berilishi

Endi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasining koordinatalarini i topaylik:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3$$

Vektor ko'paytmaning xossalarini va bazis Vektorlarning vektor ko'paytmasining e'tiborga olsak:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3, x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3] = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{e}_1 - (x_1 z_2 - x_2 z_1) \vec{e}_2 +$$

$$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

Demak

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \quad (1)$$

Uchburchak yuzasi

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasining moduli tomonlari shu vektorlardan iborat bo'lgan parallelogram yuzasiga teng bo'lgani uchun, Unin yarimi shu $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan uchburchakning yuzasiga teng bo'ladi, demak uchburchakning yuzasi

$$S_{\square} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]| \quad (2)$$

Misol-1- $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -1)$, $C(1, 0, 3)$ nuqtalar berilgan. ABC uchburchakning yuzasini hisoblang.

Yechilishii. $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ ning koordinatalarini i hisoblaymiz: $\vec{AB} \{1, 2, -3\}$, $\vec{AC} \{0, 1, 1\}$. Endi bu vektorlarning vektor ko'paytmasini topamiz:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{5, -1, 1\}$$

$$|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{27}.$$

$$(2) \text{ boyicha } S_{\square} = \frac{1}{2} \sqrt{27}.$$

Uch vektorning aralash ko'paytmasi

Ta'rif-3. Birinchi ikki vektorning vektor ko'paytmasidan iborat vektorni, uchinshi vektorga *ckalyar ko'paytirishdan* hosil bo'lgan son uchta $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb ataladi, ya'ni $([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c})$, bu ko'paytma $\overline{abc}$ ko'rinishida belgilanadi:

Aralash ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

Agarda $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlar o'zaro komplanar bo'lsa, u holda ularning aralash ko'paytmasi nolga teng va aksincha.

Aralash ko'paytmatagi ikki vektorning o'rnin almastirishdan aralash ko'paytmaning ishorasi teskariga o'zgaradi, absolyut qiymati bo'lsa o'zgarmaydi, ya'ni $(\overline{abc}) = -(\overline{bac}) = -(\overline{cba})$.

Aralash ko'paytmatagi ko'payushilarni siklli o'rin almastirishdan aralash ko'paytmaning ma'nosi o'zgarmaydi:

$$(\overline{abc}) = (\overline{bca}) = (\overline{cab})$$

Berilgan $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlarning bittasini λ haqiqiy soni-ga ko'paytirishdan ularning aralash ko'paytmasi shu λ soni-ga ko'payadi, ya'ni

$$(\lambda \overline{abc}) = (\overline{\lambda a b c}) = (\overline{a b \lambda c}) = \lambda (\overline{abc})$$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi ha'r bir ko'pattuvchiga nisbatan distributivlik xossaga ega:

$$\begin{aligned} ((\overline{a_1} + \overline{a_2}) \overline{bc}) &= (\overline{a_1 bc}) + (\overline{a_2 bc}) \\ (\overline{a} (\overline{b_1} + \overline{b_2}) \overline{c}) &= (\overline{ab_1 c}) + (\overline{ab_2 c}) \\ (\overline{ab} (\overline{c_1} + \overline{c_2})) &= (\overline{abc_1}) + (\overline{abc_2}) \end{aligned}$$

Endi aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosini qarab shiqaylik:

Berilgan nokomplanar (chiziqli erkli) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlar musbat uchlikni tashkil etsa, ularning aralash ko'paytmasi ularga qurilgan parallelipipedning hajmiga, aksincha bo'lsa hajmning manfiy belgi bilan olinganiga teng bo'ladi.

Biz $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlardan qurilgan parallelepipedning hajmini V bilan belgilaymiz. Agar S bilan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar'ga qurilgan parallelogramning yuzasin belgilasak:

ta'rifga asosan $[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} = \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right| |\vec{c}| \cos \varphi$, $\varphi = \left([\vec{a}, \vec{b}]^{\wedge} \vec{c} \right)$ bo'lib, $|\vec{c}| \cos \varphi$ kattalik $\vec{c}$ ning $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektor yo'nalishidagi to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasiga teng bo'lib parallelepipedning balandligi ya'ni $|\vec{c}| \cos \varphi = h$ (3-rasm)

Ushin holda

$$[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} = S \cdot h = V \quad (3)$$

Bu son parallelepipedning hajmini aniqlaydi.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lar chap uchlikdan iborat bo'lsa, $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektor bilan $\vec{c}$ vektor orasidagi burchak $\varphi \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi \leq 0$ (4-rasm). U holda $[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} = -V$. Demak

$$\left| [\vec{a}, \vec{b}], \vec{c} \right| = V \quad (4)$$

Biz quyidagini isbotladik: uch vektorning aralash ko'paytmasidan iborat sonning absolyut qiymati qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedning hajmiga teng.

Aralash ko'paytmaning koordinatalarda ifodasi

Meyli uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$$

Shu uchta vektorning aralash ko'paytmasini hisoblash garak. U uchun dastlab $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektorniing koordinatalarini topish garak. Bizga ma'lum

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Endi $[\vec{a}, \vec{b}]$ va $\vec{c}$ vektorlarni skalyar ko'paytiramiz:

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Demak,

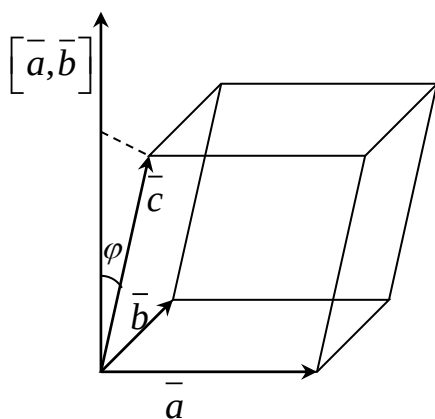
$$\overline{\overline{abc}} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Bu holdan quyidagi qoida galib chiqadi: uchta vektorning aralash ko'paytmasi birinchi yo'li birinchi vektorning koordinatalaridan, ikkinchi yo'li Ikkinchi vektorning koordinatalaridan, uchinchi yo'li uchinchi vektorning koordinatalaridan turadigan uchinchi tartibli determinantga teng bo'ladi.

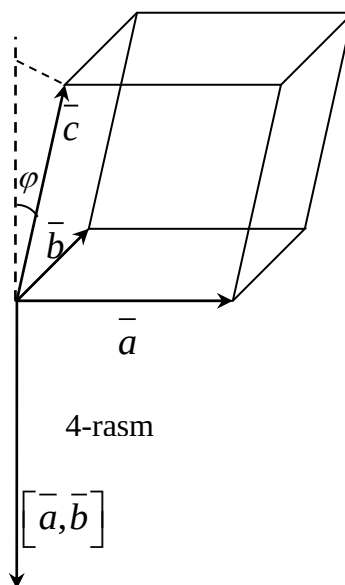
(5) formulatan foydalanib, o'zining koordinatalari bilan berilgan uchta vektorning komplanarlik shartini ko'rsatishga bo'ladi. Bizga ma'lum uchta $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlari o'zaro komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasining nolga teng bo'lishi zarurli va etarli. Shuning uchun

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

sharti uchta $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ vektorlarning komplanarlik sharti bo'ladi.



3-rasm



4-rasm

Endi uchlarining koordinatalari bo'yicha tetra'edrning hajmin hisoblash formulasini keltirib chiqaraylik.

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$

nuqtalar tetra'edrning koordinatalari bo'lsin.

$$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{AC}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{AD}\{x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\}.$$

tetra'edrning hajmi tetra'edrning bir uchidan uchta qirrasiga qurilgan parallelepiped hajmining $\frac{1}{6}$

qismiga teng bo'lgani uchun, shuningdek (5) formulatan

$$V_{tet} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} \right) \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

(7) formula biz izlagan tetra'edrning hajmini hisoblash formulasi bo'lib topiladi.

Misol-1. $\overrightarrow{AB}\{2, 0, 0\}$, $\overrightarrow{AC}\{3, 4, 0\}$, $\overrightarrow{AD}\{3, 4, 2\}$ vektorlarga qurilgan tetra'edr berilgan.

Quyidagilar topilsin a) tetra'edrning hajmi, b) ABC yon sirtining yuzasi, c) D uchidan tushirilgan balandlik, d) AB va BC qirralari orasidagi φ_1 burchak kosinusi, e) ABC va ADC yo'qlari orasidagi φ_2 burchak kosinusi.

Yechilishi: a) (7) formulatan

$$V_{tet} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}$$

b) (2) bo'yicha

$$S_{\square} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2} = 4$$

c) tetra'edrning hajmi asosining yuzasi bilan asosga tushirilgan balandligiga ko'paytmasining

$$\text{uchdan biriga teng: } V_{tet} = \frac{1}{3} S_{ul} \cdot h$$

$$\text{a), b) larni hisobqa olsak, } \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot h \text{ Bu holdan } h = 2.$$

d) AB va BC qirralari orasidagi burchak kosinusi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusiga teng bo'lgani uchun:

$$\cos \varphi_1 = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

e) ABC va ADC yo'qlari orasidagi φ_2 burchak shu yo'qlarga perpendikulyar vektorlar orasidagi burchakga teng. ABC yo'qqa perpendikulyar vektor

$$\overline{v}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right\}, \quad \overline{v}_1 = \{0, 0, 8\}$$

ADC yo'qqa perpendikulyar vektor $\overline{v}_2 = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \{8, -6, 0\}$. Demak

$$\cos \varphi_1 = \frac{(\overline{v}_1, \overline{v}_2)}{|\overline{v}_1| |\overline{v}_2|} = \frac{0 \cdot 8 + 0 \cdot (-6) + 8 \cdot 0}{\sqrt{8^2} \cdot \sqrt{100}} = 0. \text{ Bu yo'qlar o'zaro perpendikulyar ekan.}$$

Tekshirish uchun savollar

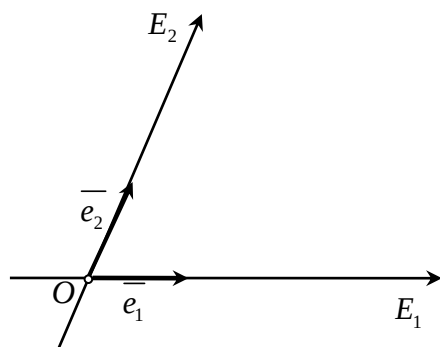
1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Musbat uchlik va chap uchlik deganda nimani tushinasiz?
3. Vektor ko'paytmaning xossalari qanday?
4. Vektor ko'paytma koordinatalarda qanday beriladi?
5. Uchburchak yuzasi qanday topiladi?
6. Uch vektorning aralash ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Aralash ko'paytmaning xossalari qanday?
8. Vektorlarning komplanarlik sharti qanday?
9. Tetraedr hajmi qanday hisoblanadi?
10. Aralash ko'paytma koordinatalarda qanday beriladi?

TEKISLIKDAGI AFFIN KOORDINATALAR SISTEMASI

Tayanich tushunchalar: Koordinata boshi, o'q, nuqtaning koordinatalari, affin koordinatalar sistemasi, to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi, kesmani berilgan nisbatta bo'lish, ikki nuqta orasidagi masofa.

Tekislikda affin koordinatalar sistemasi O nuqtasi (Koordinata boshi) va shu nuqtadan boshlab yasalgan o'zaro nokollinear, ma'lum bir tartibda olingan $\overline{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\overline{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ vektorlarning berilishi bilan aniqlanadi (1-rasm). Bu holdagi $\overline{e}_1$ -birinchi vektor, al $\overline{e}_2$ -ikkinchi

vektor. Bu $\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar O nuqtasida kesilisetugin Ikki o'qni aniqlaydi, bu vektorlarning o'zlari shu o'qlarning birlik vektorlari bo'ladi. Birinchi o'q berilgan koordinatalar sistemasiniing abtissa yoki Ox o'qi, al Ikkinchi o'q ordinata o'qi yoki Oy o'qi deb ataladi. Koordinata sistemasiniing o'zi $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ yoki Oxy deb belgilanadi.



-rasm

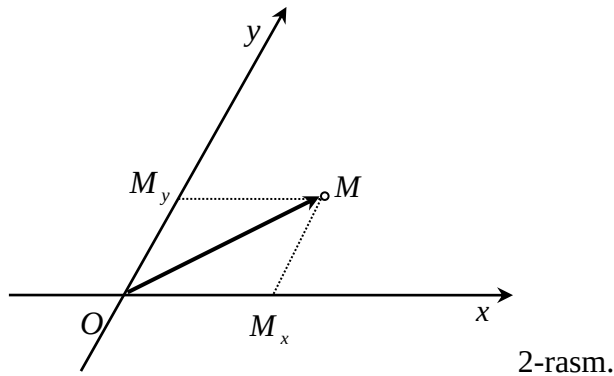
M tekislikdagi bir nuqta bo'lsin. Bu nuqtaning har bir o'qqa Ikkinchi o'q yo'nalishida bo'lgan proektsiyalarini mos M_x va M_y deb belgilaymiz. Shu holda $\vec{OM_x}$ va $\vec{OM_y}$ vektorlarning algebraik qiymati M nuqtaning mos birinchi va ikkinchi kordinatasi (absissasi, ordinatasi) deb ataladi.

Odatda M nuqtaning abtissasini x , ordinatasini y orqali belgilash qavul qilingan. U nuqta qisqa ko'rinishda $M(x, y)$ deb yoziladi. Demak, tekislikdagi har qanday nuqtaga ma'lum bir tartiblangan sonlar juftligi (x, y) mos galadi. Aksincha har qanday tartiblangan sonlar juftligi (x, y) birinchi koordinatasi x , Ikkinchi Koordinatasi esa y bo'lgan M nuqtasini aniqlaydi. Shunday qilib qilib, tartiblangan sonlar juftligi bilan tekislikning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Basqasha so'z bilan aytganda, agarda tekislikda affinlik Koordinatalar sistemasi berilsa, u holda tekislikdagi har bir nuqtaga mos galadigan tartiblangan sonlar juftligin topa olamiz va aksincha tartiblangan sonlar juftligi berilsa, onga mos galadigan tekislikdagi nuqtani yasay olamiz.

Koordinatalari x, y bo'lgan M nuqtasini yasash uchun Ox va Oy o'qlarida

$$x\vec{e}_1 = \vec{OM_x}; \quad y\vec{e}_2 = \vec{OM_y}$$

shartlarni qanoatlantiradigan M_x va M_y nuqtalarini yasash garak. Shu holda $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$ shartni qanoatlantiradigan M nuqtasi izlangan nuqta bo`ladi (2-rasm).



Tekislikdagi $\overrightarrow{Oe_1e_2}$ Koordinata sistemasiniing $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ birlik vektorlari tekislikdagi vektorlar to`plamining bazisi bo`la oladi. Erikli $\overrightarrow{a}$ vektorining $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ bazisga nisbatan koordinatalari shu $\overrightarrow{a}$ vektorining $\overrightarrow{Oe_1e_2}$ affinlik sistemasiga nisbatan koordinatalari deb ataladi. Ular $\overrightarrow{a}$ vektorniing Koordinata o`qlariga proeksiyalarining algebraik qiymatiga teng bo`ladi. koordinatalari x, y bo`lgan $\overrightarrow{a}$ vektori qisqa $\overrightarrow{a} = \{x, y\}$ deb yoziladi, Shu holda

$$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}$$

Agarda $x = 0$ bo`lsa, u holda  $\overrightarrow{a}$  vektori ordinata o`qiga, al $y = 0$ bo`lsa abstsissa o`qiga kollinear bo`ladi.

Meyli $\overrightarrow{Oe_1e_2}$ -tekislikdagi affinlik koordinatalar sistemasi, al M -tekislikdagi erikli nuqta bo`lsin. Shu holda  $\overrightarrow{OM}$  vektori  $M$  nuqtaining radius-vektori deb ataladi.  $\overrightarrow{OM}$  vektorniing koordinatalarini  $M$  nuqtaining koordinatalariga teng ekanligini ko`rish mumkin. Demak M nuqtaining koordinatalari Uning radius vektorining koordinatalariga teng bo`ladi.

O`zaro teng vektorlarining mos koordinatalari o`zaro teng bo`ladi va aksincha. Ikki vektorning mos koordinatalari o`zaro teng bo`lsa, bu vektorlar o`zaro teng bo`ladi.

Agarda bizga $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ nuqtalari berilsa, u holda $\overrightarrow{AB}$ vektorining koordinatalari quyidagicha aniqlanadi

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

ya'ni, vektorning Koordinatasi Uning smusbati nuqtaining koordinatalaridan dastlabki nuqtaining mos koordinatalarini olganga teng.

Biz to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiniing birlik vektorlarni $\vec{i}, \vec{j}$ orqali belgilaymiz. Shu holda koordinatalar sistemasiniing o'zi $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ deb belgilanadi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemi affinlik koordinatalar sistemasiniing xususiy holi bolganlikdan, affinlik koordinatalar sistemasida isbotlanadigan hamma teoremlar va formulalar to'g'ri burchakli koordinatalar sistemi uchun o'rinli. Lekin teskari tasdiq to'g'ri bo'lmaydi. Ko'p hollarda geometrik masalalarni to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida qaraganimizda, ularning berilishi va galib chiqqan formulalar birqancha soddalashadi. Shuning uchun biz bu holday masalalarni to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida qaraymiz

Kesmani berilgan nisbatta bo'lish

Meyli bizga tekislikda d to'g'ri chizig'i va Uning ustida yo'nalgan $\overrightarrow{AB}$ kesma berilgan bo'lsin. Agarda d to'g'ri chizig'i ndagi bazibir C nuqtasi

$$\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{CB} = \lambda \quad (1)$$

tenglikni qanaotlandirsa, u holda C nuqtasi AB kesmani λ nisbatda bo'ladi deb aytiladi.

Bu tushunchaning ba'zi xossalarini keltiramiz

a) C nuqtasi B nuqtasidan farqli Ixtiyoriy nuqta bolganda AB kesmani C nuqtasi bo'ladigan nisbat mavjud bo'ladi.

b) Agarda C nuqtasi A va B nuqtalarining orasida jatsa, u holda C nuqtasi AB kesmani bo'ladigan λ nisbati musbat, al C nuqtasi A va B nuqtalarining orasida yotmasa, u holda λ nisbati manfiy bo'ladi. C nuqtasi A nuqtasi bilan ustma-ust, u holda $\lambda = C$.

c) Ixtiyoriy $\lambda \neq 1$ bo'lsa AB kesmani λ nisbatda bo'ladigan yagona C nuqtasi mavjud bo'ladi.

Birinchi ikki xossaning to'g'riligi o'z-o'zigan ko'rinadi. Shung uchun biz c) xossani isbotlaymiz.

$\lambda \neq 1$ bolgan erikli haqiqiy son. AB to'g'ri chizig'ida $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ tengligin qanaatlandiratug'in C nuqtasin topamiz. Bu holday C nuqtasi yagona bo'ladi. Bu nisbatdan

$$\overrightarrow{AC} + \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \lambda \overrightarrow{AB}$$

yoki

$$(1 + \lambda) \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

bolganligidan.

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AB}$$

demak C nuqtasi AB kesmani λ nisbatda bo'ladi.

AB to'g'ri chizig'ida AB kesmani $\lambda \neq -1$ nisbatda bo'ladigan nuqtaning bolmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatda ham, Agarda $\lambda = -1$ bo'lsa, $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CB}} = -1$ yoki $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 0$, $\overrightarrow{AB} = 0$, ya'ni $\overrightarrow{AB}$ nollik vektor.

Masala- Meyli bizga tekislikda affinlik Koordinata sistemasi va $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ nuqtalari berilgan bo'lsin. Shu $\overrightarrow{AB}$ kesmani $\lambda \neq -1$ nisbatda bo'ladigan C nuqtaning koordinatalari x, y, z larni topish garak.

Yechilishii. Masalaning sharti bo'yicha $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda$. Bu holdan

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}. \quad (2)$$

Meyli A, B va C nuqtalarining radius-vektorlari mos $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ va $\vec{r}$ bo'lsin. Shu holda $\overrightarrow{AC} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Bularni (2) tenglikga qoysaq, $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ tengligiga ega bo'lamiz. Bu vektor tenglik elementar almashtirishlardan gayin quyidagi ko'rinishga galadi.

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda} \quad (3)$$

Bu tenglik koordinatalarda quyidagicha yoziladi.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

(4) formula kesmani berilgan $\lambda \neq -1$ nisbatda bo'lish formulasi deb ataladi.

Xususiyl holda, agarda C nuqtasi AB kesmani teng o'rtasidan bo'lsa, u holda $\lambda = 1$ bo'ladi va (4) formula quyidagi ko'rinishga galadi:

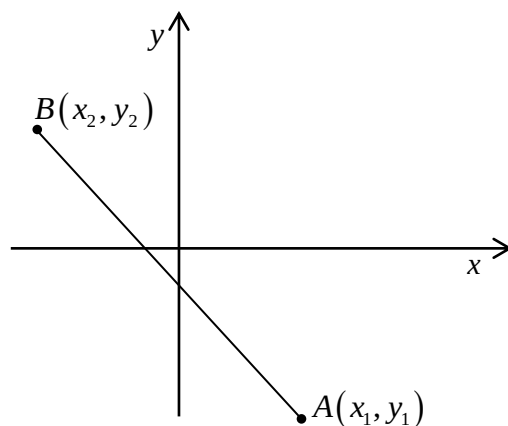
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (5)$$

Demak (5) formula kesmaning teng o'rtasining koordinatasini topish formulasi hisoblanadi.

Ikki nuqta orasidag'i masofa

Bizga $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalari berilgan bo'lsin. A va B nuqtalari orasidagi masofa $\rho(AB)$ ni topish garak.

Izlangan masofa $\rho(AB)$ shu ikki nuqta bilan aniqlangan $|\overrightarrow{AB}|$ vektorining uzunligiga teng boladi, ya'ni $\rho(AB) = |\overrightarrow{AB}|$ (3-rasm).



3-rasm

Bizga ma'lum $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Shuning uchun

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Misol-1 affin koordinatalar sistemasida uchlari $A(1, 2)$, $B(0, 5)$, $C(-2, 3)$ nuqtalardan iborat uchburchak medianalarining kesisish nuqtalarin toping.

Yechilishii. Bizga ma'lum uchburchakning qaysi bir uchsidan tushirilgan mediana qarshi yotgan tomonni teng ikkiga bo'ladi. Uchburchakning medianalari bir nuqtata kesishadi va shu nuqtata ularning har biri 2:1 nisbatta bo'linadi. Shu xossaga ko'ra AD mediana uchun D nuqtaning koordinatalari quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - 2}{2} = -1; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4, \quad D(-1, 4).$$

Medianalarning kesisish nuqtasi O uchun $\lambda = 2:1 = 2$, izlangan O nuqtaning koordinatalari quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = -\frac{1}{3};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Demak, } O\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right).$$

Tekshirish uchun savollar

1. Affin koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi?
2. Nuqtaning koordinatalari qanday topiladi?

3. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deganda nimani tushinasiz?
4. Kesmani berilgan nisbatta bo'lish formulalari qanday keltirilib chiqariladi?
5. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?

TEKISLIKNING ORIENTATSIYASI. QUTB KOORDINATALAR SISTEMASI

Tayansh tushunchalar: O'tish matrisasi, matritsa determinanti, musbat va manfiy orientatsiya, Qutb o'qi, polus, nuqtaning Qutb va dekart koordinatalari.

$(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ va $(\overline{e}'_1, \overline{e}'_2)$ bazislari berilgan bo'lsin. Ikkinchi bazis vektorlarini birinchi bazis vektorlari bo'yicha yozamiz:

$$\overline{e}'_1 = a_1 \overline{e}_1 + a_2 \overline{e}_2, \quad \overline{e}'_2 = b_1 \overline{e}_1 + b_2 \overline{e}_2$$

$\overline{e}'_1, \overline{e}'_2$ Vektorlarning bu bazisga nisbatan koordinatalaridan $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ Ikkinchi tartibli kvadrat matritsani tuzamiz. Bu matritsa birinchi bazisdan Ikkinchi bazisga o'tish matritsasi deb ataladi.

a_1, a_2, b_1, b_2 sonlar $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ matritsaning elementlari. Bu matritsa ikki qator va ikki ustunga ega: a_1, b_1 sonlar birinchi qatorni, a_2, b_2 sonlar ikkinchi qatorni, a_1, a_2 sonlar birinchi ustinni, b_1, b_2 sonlar ikkinchi ustinni tashkil etadi.

$a_1 b_2 - a_2 b_1$, son $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti deyiladi. Uni $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ yoki

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ko'rinishida belgilaymiz.

Hamma bazislar to'plamini Ω bilan belgilaymiz. Bizga $\Omega_1, \Omega_2 \in \Omega$ bazislar berilgan bo'lsin.

Ta'rif- 1. Agar Ω_1 bazisdan Ω_2 bazisga o'tish matritsasining determinanti musbat(manfiy) son bo'lsa, u holda Ω_1, Ω_2 bazislar bir xil(har xil) atamatagi bazislar deyiladi.

Tekislikning hamma bazislarin bir xil ismlilik tushinchasidan, ikki sinfga ajratish mumkin, bu sinflarning bir sinfining bittasiga tegishli hamma bazislar bir xil ismli bo'lib, ikkinchi sinfga tegishli bazislar bir xil ismli bo'lmaydi. Shu sinflarning har biri orientatsiya deb atalib, u holda bazislar orientirlangan bazislar deb yo'rtiladi.

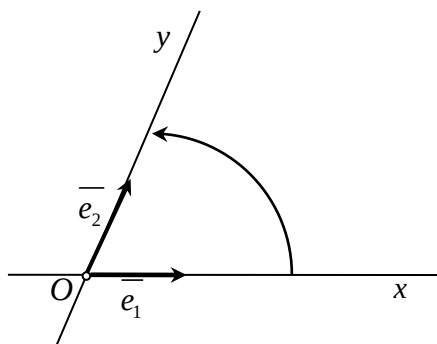
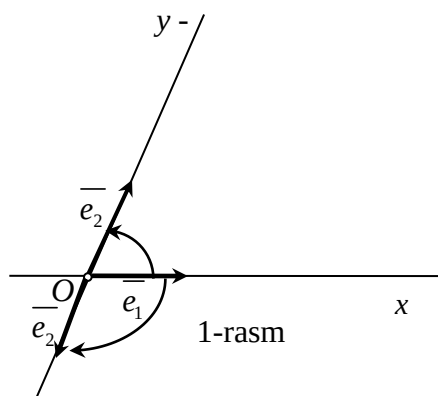
Ba'zida bu bazislarni bir-birigan ajratish uchun musbat orientatsiyali yoki chap orientatsiyali deb ham aytiladi. Bazisning orientatsiyasi ma'lum bo'lgan tekislik orientatsiyali

tekislik deb ataladi. Agar $\Omega_1 = (\overline{e_1}, \overline{e_2})$ va $\Omega_2 = (\overline{e'_1}, \overline{e'_2})$ bazislar bir xil(qarama-qarshi) orientatsiyali bo'lsa, $O\overline{e_1}\overline{e_2}$ va $O'\overline{e'_1}\overline{e'_2}$ koordinata sistemalari bir xil(qarama-qarshi) orientatsiyali deyiladi.

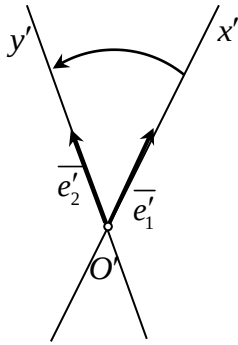
Odatda, $O\overline{e_1}\overline{e_2}$ koordinatalar sistemasiniing $\overline{e_1}$ vektorni O nuqta atrofida $\overline{e_2}$ vektor ustiga tushirish uchun qisqa yo'l boyicha burish soat strelkasiga qarama-qarshi bo'lsa, u musbat orientatsiyali deyiladi .

Misol-1 Tekislikda $O\overline{e_1}\overline{e_2}$ va $O'\overline{e'_1}\overline{e'_2}$ koordinatalar sistemasinii qaraymiz, bu erda $\overline{e'_1} = \overline{e_1}$, $\overline{e'_2} = -\overline{e_2}$ bo'lsin(1-rasm). Ω' Bazisning vektorlari Ω bazis boyicha quyidagi yoyilmaga ega bo'ladi:

$$\overline{e'_1} = 1 \cdot \overline{e_1} + 0 \cdot \overline{e_2}, \quad \overline{e'_2} = 0 \cdot \overline{e_1} - 1 \cdot \overline{e_2} \Rightarrow \overline{e'_1} = \{1, 0\}, \quad \overline{e'_2} = \{0, -1\}.$$



2-rasm



Ω bazisidan Ω' bazisga o'tish matritsasining determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Demak, bu $O\overline{e_1e_2}$ va $O'\overline{e'_1e'_2}$ koordinata sistemalari qarama-qarshi orientatsiyali. 1-rasmda qarama-qarshi orientatsiyali koordinatalar sistemalarda birinchi koordinata vektorlaridan , Ikkinchi Koordinata vektorlariga qarab qisqa yo'l bo'yla` burish yo`nalishlari qarama-qarshi ekanligi ko`rinadi. 2-rasmda  $O\overline{e_1e_2}$  va  $O'\overline{e'_1e'_2}$  koordinatalar sistemalari bo`lsa bir xil orientatsiyali.

Qutb koordinatalar sistemasi

Geometriyada affin koordinatalar sistemasi va to`g`ri burchakli dekart koordinatalar sistemalari bilan bir qatorda boshqa koordinatalar sistemalari ham qaraladi. Shularning ko`proq ishlatiladigani Qutb koordinatalar sistemasi bo`lib topiladi.

Tekislikda Qutb koordinatalar sistemasini kiritish uchun qanaqadir bir O nuqtasi va shu nuqtadan o`tuvshi o`qni tanlap olamiz. Tanlangan nuqta Qutb boshi, o`qni bo`lsa Qutb o`qi deb ataymiz va uni l bilan belgilaymiz.

Tekislikda berilgan Ixtiyoriy O nuqtadan farqli M nuqta uchun ρ bilan $|OM|$ masofani, φ bilan bo`lsa  $\ell$  o`q bilan OM nur orasidagi burchakni belgilaymiz. Bu miqdorlar M nuqtaning Qutb koordinatalari deyiladi va $M(\rho, \varphi)$ ko`rinishida belgilanadi.

Tekislikning O nuqtadan farqli nuqtalari bilan Qutb koordinatalari o'rtasidagi moslik o'z-ara bir qiymatli bo'lishi uchun ρ va φ miqdorlarga Quyidagi shegara qo`yiladi: $0 < \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Bu to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasiniing boshlang`ich nuqtasi va masshtab birligi uchun Qutb koordinatalar sistemasiniing boshlang`ich nuqtasin va masshtab birligin, musbat abstsissa yarim o`qi uchun Qutb yarim o`qni qavul etamiz. Shu holdagide etib abstsissa o`qi aniqlanadi. Abstsissa o`qin burishning musbat yo`nalishida C nuqtasi atrofida $\frac{\pi}{2}$ burchakga

burishdan galib chiqqan o`qni ordinata o`qi uchun qavul etamiz. Shunday qilib, aniqlangan to`g`ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan qutb koordinatalar sistemasi bilan bog`lanishli bolg`an sistema deb ataladi (3-Rasm).

Agar (x, y) dekart koordinatalar sistemasini 3-rasmdagidek kiritsak, quyidagi

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

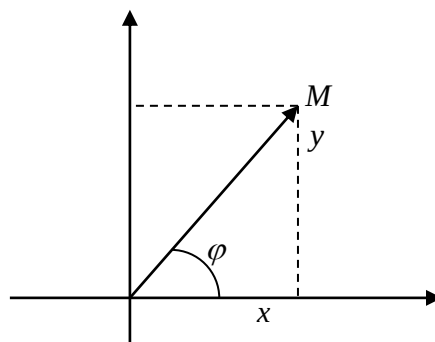
bog`lanishlarni olamiz. Berilgan  $M$  nuqtaning dekart koordinatalari ma'lum bo`lsa, uning qutb koordinatalarini topish uchun

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

formula boyicha birinchi qutb koordinatani topamiz. Ikkinchi qutb koordinatani topish uchun M nuqtaning qaysi chorakda joylashganligini bilishimiz garak va

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arctg \frac{x}{y}$$

tengliklardan foydalanishimiz garak.



3-rasm

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

Bu (1) formula to`g`ri burchakli koordinatalardan qutb koordinatalariga o`tishga imkoniyat beradi.

Misol- 1. Dekart koordinatalar sistemasida $M(3, 4)$ nuqtanining koordinatalarini Qutb koordinatalar sistemasida yozing.

(1) formulalar boyicha $r^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow r = 5$,

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{5}; \quad \varphi = \arccos \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{25} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{4}{5}.$$

Tekshirish uchun savollar

Bazisdan bazisga o'tish matrisasi deb nimaga aytiladi?

Musbat va manfiy orientasiya deb nimaga aytiladi ?

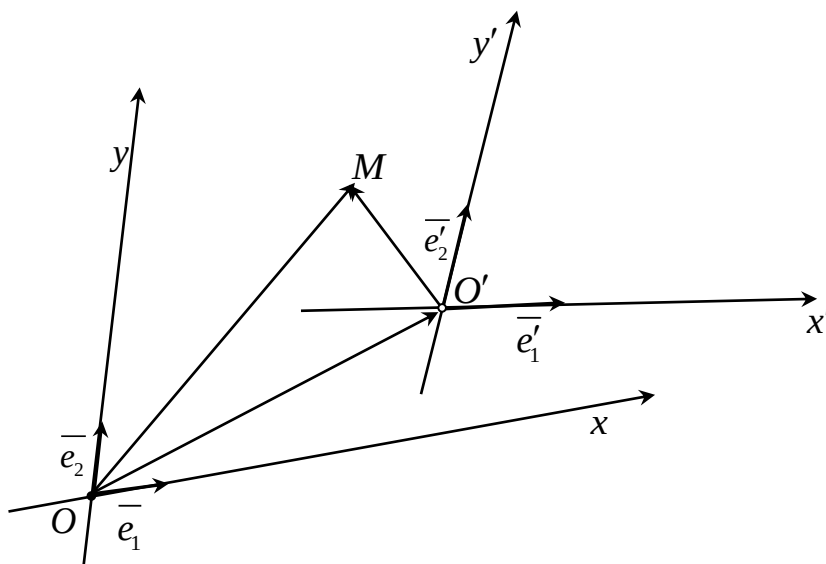
Qutb koordinatalar sistemasi qanday kiritiladi ?

Nuqtaning Qutb va dekart koordinatalari orasidagi bog'lanish qanday ko'rinishda bo'ladi ?

AFFIN VA DEKART KOORDINATALAR SISTEMASINI ALMASHTIRISH

Tayanich tushunchalar: affin koordinatalar sistemasi, dekart koordinatalar sistemasi, birinchi koordinatalar sistemasidan Ikkinchi koordinatalar sistemasiga o'tish formulalari, parallel ko'shirish.

Tekislikda Ikki $O\overline{e_1}\overline{e_2}$ va $O'\overline{e'_1}\overline{e'_2}$ affin koordinatalar sistemalari berilgan bo'lsin(1-rasm).



1-rasm.

Qulaylik uchun, ularning birinchisini eski koordinatalar sistemasi, ikkinchisini esa yangi koordinatalar sistemasi deb ataymiz. Bu holdan tashqari, yangi koordinatalar sistemasining eski koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyati berilgan bo'lsin, ya'ni

$$O'(c_1, c_2), \overline{e'_1}(a_1, a_2), \overline{e'_2}(b_1, b_2), \overrightarrow{OO'} = c_1\overline{e_1} + c_2\overline{e_2} \quad (1)$$

$$\overline{e'_1} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2}, \overline{e'_2} = b_1 \overline{e_1} + b_2 \overline{e_2} \quad (2)$$

Bu erda $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Tekislikda M nuqtani olamiz. Bu nuqtaning eski va yangi koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalarini mos x, y va x', y' orqali belgilaymiz. U holda

$\overrightarrow{OM} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$, $O'M = x'\overline{e'_1} + y'\overline{e'_2}$. Vektorlarni qo'shish ta'rifi va (1), (2) nisbatlardan foydalansak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + O'M &= c_1 \overline{e_1} + c_2 \overline{e_2} + x'\overline{e'_1} + y'\overline{e'_2} = c_1 \overline{e_1} + c_2 \overline{e_2} + x'(a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2}) + \\ &+ y'(b_1 \overline{e_1} + b_2 \overline{e_2}) \end{aligned} \quad (3)$$

yoki

$$x\overline{e_1} + y\overline{e_2} = (a_1 x' + b_1 y' + c_1) \overline{e_1} + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) \overline{e_2}$$

$\overline{e_1}, \overline{e_2}$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligini hisobqa olsak,

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1, \quad y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 \quad (4)$$

M nuqtaning eski sistemaga nisbatan koordinatalari x, y , Uning yangi sistemasiga nisbatan koordinatalari x', y' orqali (4) ko'rinishida ifodalanadi.

(4) formulalar bir affin koordinatalar sistemasidan ikkinchi affin koordinatalar sistemasiga ***o'tish formulalari*** deyiladi. Bu formulalarda $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ shart bilan bog'langan oltita koeffitsient

qatnashgan. Quyidagi ikkita holni qaraymiz:

$O \neq O'$, $\overline{e'_1} = \overline{e_1}$, $\overline{e'_2} = \overline{e_2}$ (2-rasm). Bu holda $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$ bo'lib (4) formulalar

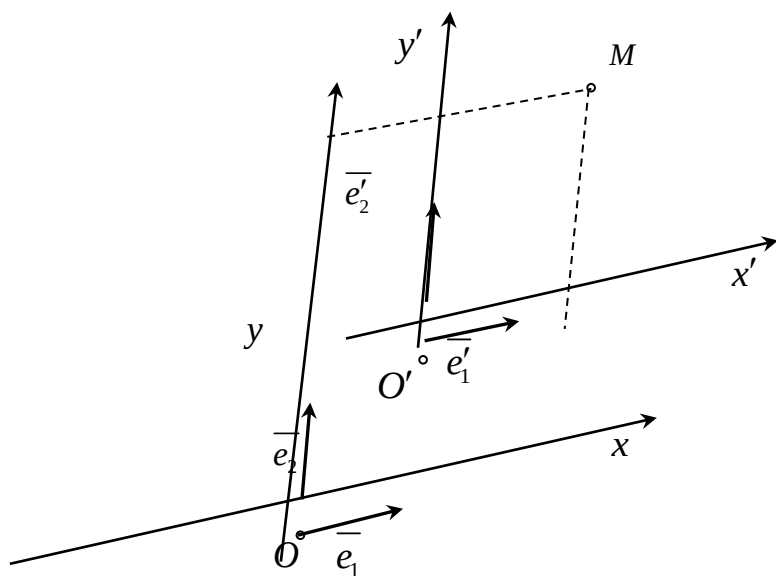
$$x = x' + c_1, \quad y = y' + c_2 \quad (5)$$

ko'rinishga galadi.

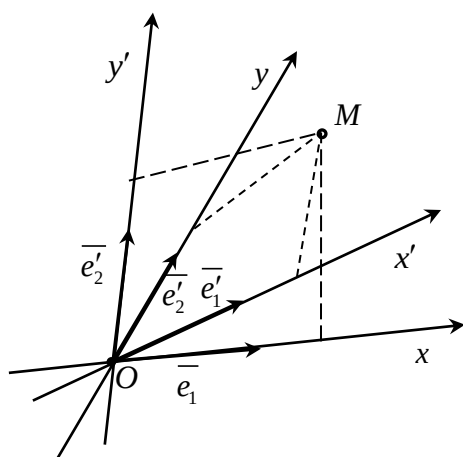
(5) formulalar koordinatalar sistemasini ***parallel ko'shirish formulalari*** deb ataladi.

$O = O'$ va bazis vektorlar har xil bo'lsin (3-rasm). Bu holda $c_1 = c_2 = 0$ bo'lib, (4) formulatan

$$x = a_1 x' + b_1 y', \quad y = a_2 x' + b_2 y' \quad (6)$$



2-rasm



3-rasm

Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish

Tekislikda $O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ dekart koordinatalar sistemalari berilgan bo'lsin. Bu holda (4) formulalardagi a_1, a_2 lar $\bar{i}'$ vektorning, b_1, b_2 lar $\bar{j}'$ vektornin $O\bar{i}\bar{j}$ dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari bo'ladi, ya'ni

$$\bar{i}' = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j}, \bar{j}' = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j}. \quad (7)$$

$(\bar{i}, \bar{i}') = \alpha$ bo'lsin. Agar $O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ dekart koordinatalar sistemalari bir xil orientatsiyali bo'lsa (4-rasm), u holda

$$(\bar{i}, \bar{j}') = 90^\circ + \alpha, (\bar{i}', \bar{j}) = 90^\circ - \alpha, (\bar{j}, \bar{j}') = \alpha \quad (8)$$

$O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ dekart koordinatalar sistemalari bir xil orientatsiyali bo'lsa (5-Shu'shter), u holda

$$(\bar{i}, \bar{j}') = 270^\circ + \alpha, (\bar{i}', \bar{j}) = 90^\circ - \alpha, (\bar{j}, \bar{j}') = 180^\circ + \alpha \quad (9)$$

(7) tengliklarni izbe-izlik bilan $\bar{i}, \bar{j}$ vektorlarga skalyar ko'beyitsek,

$$a_1 = (\bar{i}, \bar{i}') = \cos(\bar{i} \wedge \bar{i}'), \quad a_2 = (\bar{i}, \bar{j}') = \cos(\bar{i} \wedge \bar{j}'), \\ b_1 = (\bar{j}, \bar{i}') = \cos(\bar{j} \wedge \bar{i}'), \quad b_2 = (\bar{j}, \bar{j}') = \cos(\bar{j} \wedge \bar{j}')$$

(8) va (9) nisbatlarni hisobqa olsak, $\bar{i}', \bar{j}'$ Vektorlarning $O\bar{i}\bar{j}$ dekart koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari, Agar $O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ dekart koordinatalar sistemalari bir xil orientatsiyali bo'lsa,

$$\bar{i}'(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \bar{j}'(-\sin \alpha, \cos \alpha)$$

$O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ dekart koordinatalar sistemalari qarama-qarshi orientatsiyali bo'lsa,

$$\bar{i}'(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \bar{j}'(\sin \alpha, -\cos \alpha)$$

Bu holda (4) formula Quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + c_1 \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + c_2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + c_1 \\ y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + c_2 \end{cases} \quad (11)$$

(10) va (11) formulalarin bir

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - \varepsilon y' \sin \alpha + c_1 \\ y = x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + c_2 \end{cases} \quad (12)$$

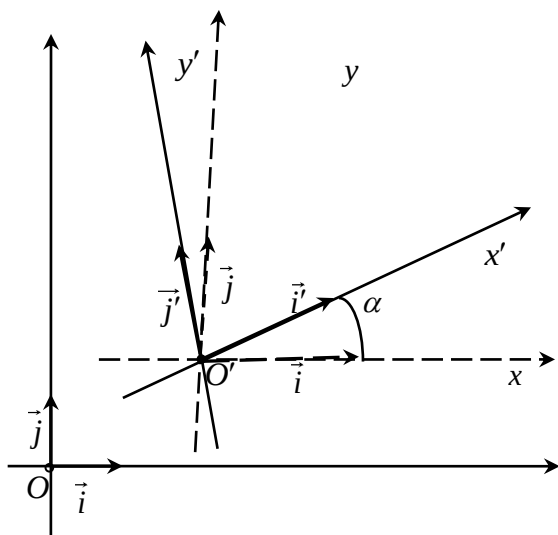
ko'rinishidagi yozuvga birlashtirish mumkin, bu erda $\varepsilon = \pm 1$. Shunday qilib, $O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ koordinata sistemalari dekart koordinatalar sistemalari bo'lganda, ularning birinchisidan ikkinchisiga o'tish (12) formula bilan ifodalanadi. Bu erda, $O\bar{i}\bar{j}$ va $O'\bar{i}'\bar{j}'$ koordinata sistemalari bir xil orientatsiyali bo'lsa, $\varepsilon = +1$, aksincha bo'lsa $\varepsilon = -1$.

Misol-1. Ikki $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ va $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ affin koordinata sistemalari berilgan bo'lib, bu holda $O'(1,2)$, $\bar{e}'_1(-1,1)$, $\bar{e}'_2(2,-1)$ bo'lsin. M nuqtaning $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari $x=2$, $y=1$ ekanligini bilgan holda, bu nuqtaning $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari x', y' larni toping.

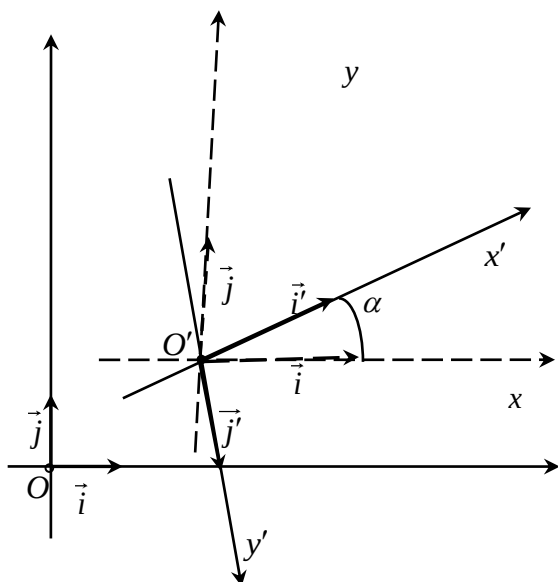
Yechilishii. Berilgan $a_1 = -1, b_1 = 2, c_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = 2$. Bu qiymatlarni (4) formulaga qoysaq,

$$x = -x' + 2y' + 1, \quad y = x' - y' + 2.$$

$x=2, y=1$ ekanligini hisobga olsak, $2 = -x' + 2y' + 1, 1 = x' - y' + 2$ yoki $-x' + 2y' = 1, x' - y' = -1$, bu sistemani yechip, $x' = -1, y' = 0$ ni topamiz. Demak, M nuqtaning $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ affin koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalari $x' = -1, y' = 0$.



4-rasm



5-rasm.

Tekshirish uchun savollar

Tekislikda affin koordinatalar sistemasini qanday almashtiriladi?

O'tish va Parallel ko'shirish formulalari qanday?

Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish qanday bajariladi ?

TEKISLIKDA TO'G'RI CHIZIQNING TURLI TENGLAMALARI

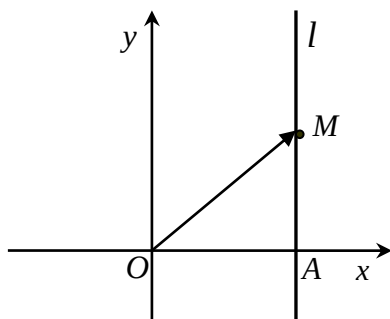
Tayanich tushunchalar: yo'naltiruvchi vektor, to'g'ri chiziq chiziq, burchak ko'effitsient, to'g'ri chiziqning parametrik, kanonik tenglamasi

Berilgan to'g'ri chiziqqa kollinear bo'lg'an, nollik vektordan farqli ha'r qanaqa vektor shu berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb ataladi. Bu ta'rifdan berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektorlarining sheksiz ko'p ekanligini ko'ramiz. Ularning mavjudlig'i bu vektorlar o'zaro kollinear bo'ladi. Shuning uchun ularning birisi ikkinchisini noldan farqli songa ko'paytirishdan hosil bo'ladi.

To'g'ri chiziqning burchak ko'effitsientli tenglamasi

Tekislikda affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Tekislikda berilgan l to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining bittasiga parallel bo'lib joylashishi yoki hesh bir koordinata o'qiga parallel bo'lmay joylashishi mumkin. Biz shu hollarning ha'r birini alohida qaraymiz.

l to'g'ri chizig'i ordinata o'qiga parallel va abstsissa o'qini $A(a, 0)$ nuqtasida kesib o'tadigan bo'lsin (1-Rasm). M nuqta l to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shu holda hamma $\overrightarrow{OM}$ vektorning abstsissa o'qiga ordinata o'qi yo'nalishida bolg'an



1-rasm

proektsiyalari $\overrightarrow{OA}$ vektori bilan ustma-ust tushadi, ya'ni l to'g'ri chiziq hamma M nuqtalari uchun

$$x = a \quad (1)$$

bo'ladi. Aksincha, abstsissasi a g'a teng bo'lgan nuqtalarning hammasi l to'g'ri chizida yotadi. U holda (1) ordinata o'qiga parallel bolg'an to'g'ri chiziqning tenglamasi bo'ladi.

l to'g'ri chiziq abstsissa o'qiga parallel va ordinata o'qini $B(0, b)$ nuqtasida kesib o'tadigan bo'lsin. U holda yuqoridagiga o'xshash holda bu to'g'ri chiziqning tenglamasining

$$y = b \quad (2)$$

bo'lishini ko'ramiz.

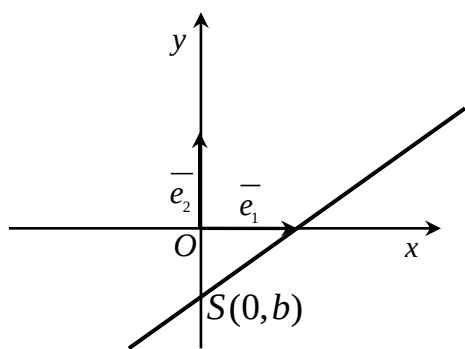
Ordinata o'qiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqning ixtiyoriy yo'naltiruvchi vektori $\vec{a} = \{x, y\}$ uchun uning ikkinchi koordinatasining birinchi koordinatasiga nisbati $y : x$ o'zgarmas k soniga teng bo'ladi va bu k soni berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deb ataladi.

Haqiqatdan ham $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$ berilgan l to'g'ri chiziqning ikki yo'naltiruvchi vektori bo'lsin. U holda $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ tengligini qanoatlantiradigan λ soni mavjud bo'ladi. Bundan

$$b_1 = \lambda a_1; \quad b_2 = \lambda a_2$$

$$a_1 \neq 0, \quad b_1 \neq 0 \text{ bolganligidan } b_2, b_1 = a_2 : a_1.$$

Endi ordinata o'qiga parallel bo'lmagan l to'g'ri chiziqning tenglamasini topamiz. U to'g'ri chiziqning Oy o'qi bilan kesisish nuqtasini $S(0, b)$, al burchak koeffitsientini k bilan belgilaymiz (2-rasm)



2-Rasm

l to'g'ri chiziqlining ustidan S nuqtasidan farqli $M(x, y)$ nuqtasini olamiz. U holda $\overrightarrow{OM} = \{x, y - b\}$ vektori l to'g'ri chiziqlining yo'naltiruvchi vektori bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{y - b}{x} = k$$

ya'ni

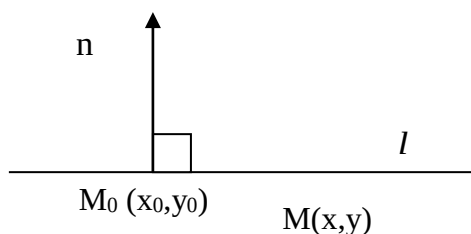
$$y = kx + b \quad (3)$$

Demak l to'g'ri chiziqlining hamma nuqtalarining koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradi.

Aksincha, koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradigan ha'r qanday $M_1(x_1; y_1)$ nuqtaning l to'g'ri chiziqqa tegishli ekanligini ko'rinishrsatish mumkin. Abstsissasi x_1 bolg'an va l to'g'ri chiziqqa tegishli bitta M' nuqtasi mavjud bo'ladi. Bu M' nuqtasi l to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lganligi uchun, uning koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradi. Demak M' nuqtaning ordinatasi $y_1 = kx_1 + b$ bo'ladi, ya'ni M' nuqtasi M_1 nuqtasi bilan ustma-ust tushadi. U holda M_1 nuqta l to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi.

Shunday qilib, l to'g'ri chiziqlining hamma nuqtalarining koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradi va koordinatalari (3) tenglamani qanoatlantiradigan hamma nuqtalar d to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. U holda (3) tenglama l to'g'ri chiziqlining tenglamasi bo'ladi.

To'g'ri chiziqlining umumiy ko'rinishdagi tenglamasi



Chizma-3

Tekislikda Oxy Dekart koordinatalar sistemasini kiritilgan bo'lsin. Agar tekislikda biror ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, unda yotgan nuqtalar koordinatalari birinchi darajali $Ax + By + C = 0$ tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Tekislikda yangi $O'x'y'$

koordinatalar sistemasini shunday kiritamizki ℓ to'g'ri chiziq abtsissa o'qi bilan ustma-ust tushsin. Yangi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasida ℓ to'g'ri chiziqdagi nuqtalarning koordinatalari $y' = 0$ tenglamani qanoatlantiradi. Biz $O'x'y'$ koordinatalar sistemasidan eski Oxy

koordinatalar sistemasiga o'tsak yuqoridagi tenglama $Ax + By + C = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda koeffisientlar quyidagi munosabatni qanoatlantiradi: $A^2 + B^2 > 0$

Teskari masala qo'yamiz, ya'ni berilgan tenglamaga $Ax + By + C = 0$ ko'ra to'g'ri chiziqni aniqlaymiz.

Koordinatalari $Ax + By + C = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $M(x_0, y_0)$ nuqtani olamiz. Agar ℓ bilan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n} = \{A, B\}$ vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziqni belgilasak, $M(x, y)$ nuqta ℓ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi uchun $\overrightarrow{M_0M}$ vektor $\vec{n} = \{A, B\}$ vektorga ortogonal bo'lishi zarur va etarlidir. Ortogonallik shartini skalyar ko'paytma orqali yozsak

$$Ax + By + C = 0, \quad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Agar (4) tenglamada $A = 0$ bo'lsa, (4) tenglama Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziqni, $B = 0$ va $C = 0$ bo'lgan hollarda mos ravishda Oy o'qiga parallel va koordinata boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarni olamiz.

To'g'ri chiziqning kesma ko'rinishidagi tenglamasi

Bizga berilgan (4) tenglamaning hamma koeffisientlari noldan farqli bo'lsa, tenglamani

$$\frac{\frac{x}{-C}}{\frac{A}{-C}} + \frac{\frac{y}{-C}}{\frac{B}{-C}} = 1 \quad (5)$$

ko'rinishda yozib va $a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$ belgilashlar kiritib, uni

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (6)$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning kesma ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. Bu holda to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tmaydi va koordinata o'qlaridan kattaliklari mos ravishda a va b larga teng

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

Agar to'g'ri chiziqning bitta nuqtasi va yo'naltiruvchi vektori berilgan bo'lsa, uning tenglamasini tuzish masalasini qaraylik. Agar $\vec{a} = \{\ell, m\}$ yo'naltiruvchi vektor

bo'lib, $M(x_0, y_0)$ nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, to'g'ri chiziqning har bir $M(x, y)$ nuqtasi uchun $\overline{M_0M}$ vektor $\vec{a} = \{\ell, m\}$ vektorga kollinear bo'lishi kerak. Kollinearlik shartini yozsak quyidagi tenglamani olamiz:

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} \quad (7)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Yuqoridagi (7) tenglamaning o'ng va chap tomonlarini t bilan belgilasak quyidagi parametrik tenglamalarni olamiz:

$$x = x_0 + \ell t, \quad y = y_0 + mt$$

Agar absissa o'qiga parallel bo'lmagan L to'g'ri chiziq OX o'qini

A nuqtada kesib o'tsa, absissa o'qi bilan to'g'ri chiziq orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

To'g'ri chiziqni affin koordinatalar sistemasida qaragan edik. Endi to'g'ri chiziqni to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida qaraymiz.

l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Agarda $\vec{n}$ vektori shu to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy vektorga ortogonal bo'lsa, u holda $\vec{n}$ vektori l to'g'ri chiziqqa ortogonal deb ataladi. l to'g'ri chiziqdagi vektorlar o'zaro kollinear bolganligidan, $\vec{n}$ vektori l to'g'ri chiziqqa ortogonal bo'lishi uchun uning l to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy bir vektorga ortogonal bo'lishi etarli. Berilgan to'g'ri chiziqqa ortogonal bo'lgan vektorlar o'zaro kollinear vektorlar sistemasini hosil qiladi. To'g'ri chiziqqa ortogonal bo'lgan ixtiyoriy noldan farqli vektor to'g'ri chiziqning normal vektori deb ataladi.

Agarda to'g'ri chiziq o'zining umumiy tenglamasi

$$Ax + By + C = 0 \quad (8)$$

bilan berilgan bo'lsa, u holda $\vec{n} = \{A, B\}$ vektori shu to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi.

Haqiqatdan ham (4) to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a} = \{-B; A\}$, $(\vec{n}, \vec{a}) = A(-B) + AB = 0$ bo'lganligidan $\vec{n}$ vektori (8) to'g'ri chiziqqa perpendikulyar, ya'ni uning normal vektori bo'ladi.

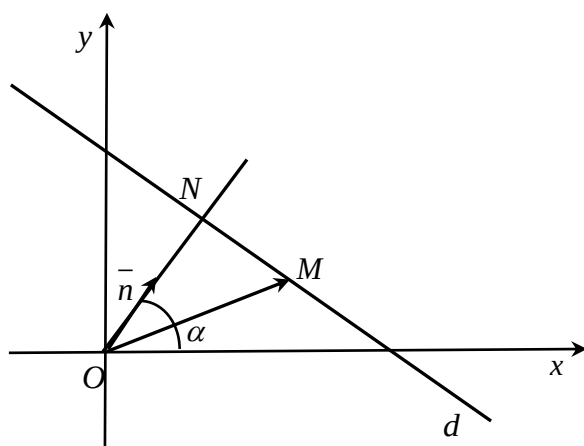
To'g'ri chiziq to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziqning tenglamasini normal ko'rinish deb atalgan sodda ko'rinishga olib kelishga bo'ladi. U uchun to'g'ri chiziqning birlik normal vektori $\vec{n}_0$ ni qaraymiz. Agarda l to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tmasa,

u holda $\vec{n}_0$ vektorning yo'nalishi $\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{ON}}{ON}$ nisbatidan aniqlanadi, bu holdagi N -koordinata

boshigan l to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi. Agarda l to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tsa, u holda $\vec{n}_0$ vektorning yo'nalishi ixtiyoriy ravishda olinadi.

Koordinata boshidan l to'g'ri chiziqgacha masofa P va $\vec{n}_0$ vektorning Ox o'qi bilan yasagan burchak α berilgan bo'lsin. Bu berilganlar boyicha l to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzishimiz kerak.

Masala sharti boyicha $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, $\vec{ON} = \rho \vec{n}_0$. To'g'ri chiziqning ixtiyoriy M nuqtasining radius vektorini $\vec{r}$ bilan belgilaymiz (4-Rasm).



M nuqtaning to'g'ri chiziqda yotishining kerakli va etarli sharti $\vec{NM} \cdot \vec{n}_0 = 0$ bo'ladi.

$$\vec{NM} = \vec{OM} - \vec{ON} = \vec{r} - \rho \vec{n}_0$$

Shuning uchun $(\vec{r} - \rho \vec{n}_0) \cdot \vec{n}_0 = 0$ yoki $\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - \rho = 0$. M nuqtaning koordinatasi (x, y) bo'lsin. U holda $\vec{r} = (x, y)$ va Yuqoridag'i tenglik koordinatalarda

4-Rasm

quyidagicha yoziladi.

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0 \quad (9)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziq ning normal ko'rinishdagi tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamaning to'g'ri chiziqning boshqa tenglamalariga farqliligi hamma koeffitsientlari geometrik qiymatga ega: x va y larning koeffitsientlari birlik normal vektorining koordinatalaridan iborat, ozod had manfiy qiymatda olingan koordinata boshigan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa. Shuning bilan birga bu tenglamada hamma vaqtda koeffitsientlarining kvadratlarining yig'indisi birga teng.

Endi to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini normal ko'rinishga keltirish masalasini qaraymiz. (8) berilgan l to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi, (9) normal ko'rinishdagi tenglamasi bo'lsin. U holda ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish sharti boyicha

$$\cos \alpha = \lambda A_1; \quad \sin \alpha = \lambda B; \quad -\rho = AC \quad (10)$$

Bu (10) tengligi $C \neq 0$ bolg'anda λ ning ishorasini aniqlashga imkon beradi. $\rho > 0$ bolganligidan $-\rho < 0$ Shuning uchun λ ning ishorasi C ning ishorasiga qarama-qarshi bo'ladi.

λ ning modulin aniqlash uchun (10) ning birinchi ikki tengligini kvadratga oshirib q`o`shamiz.
U holda

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Bu holdan

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Moduli $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ishorasi C ning ishorasiga qarama-qarshi bo`lgan λ soni(9)

tenglamaning normal ko`paytiruvchisi deyiladi.  $C=0$  bo`lsa λ ning ishorasi ixtiyoriy rabishda saylab olinadi.

(9) ning ikkita tomonini normal ko`paytiruvchiga  $\lambda$  ga ko`paytirib, biz u tenglamani to`g`ri chiziqning normal ko`rinishdagi tenglamasiga aylantiramiz.

Tekserish uchun savollar

1. To`g`ri chiziq chiziqning yo`naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
2. To`g`ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi qanday ko`rinishda beriladi?
3. To`g`ri chiziqning umumiy ko`rinishdagi tenglamasi haqida nima bilasiz?
4. To`g`ri chiziqning umumiy ko`rinishdagi tenglamasini kesma ko`rinishidagi tenglamasiga qanday keltirish mu`mkin?
5. To`g`ri chiziqning normal tenglamasi qanday ko`rinishda beriladi?

TEKISLIKDAGI IKKI TO`G`RI CHIZIQNING O`ZARO VAZIYATI. NUQTADAN TO`G`RI CHIZIQGACHA MASOFA

***Tayanich tu`shunchalar:*** collinear vektorlar, nokollinear vektorlar, perpendikulyar vektorlar, to`g`ri chiziq, to`g`ri chiziqlar orasidag` burchak

Tekislikdagi ikki to`g`ri chiziqning o`zaro vaziyati

Bizga d_1 va d_2 to`g`ri chiziqlari

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

tenglamalari bilan berilgan bo'lsin. Shu to'g'ri chiziqlarning o'zaro qanday joylashganligini aniqlaymiz. Bizga ma'lum d_1 to'g'ri chizig'ining yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}_1 = \{-B_1; A_1\}$, d_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}_2 = \{-B_2; A_2\}$. U holda quyidagi vaziyatlar bo'lishi mu'mkin.

$\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar o'zaro nokollinear. Bu holda d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari o'zaro kesishadi. Aksincha, agar d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari kesishsa, u holda $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlari o'zaro kollinear bo'lmaydi. Bu $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning nokollinearlik sharti quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

Bu (3) sha'rt ikki to'g'ri chiziqning kesishish sharti bo'ladi. (3) sha'rt bajarilganda (1) va (2) to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish uchun (1) va (2) tenglamalarni birgalikda yechish kerak.

$\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlari o'zaro kollinear. Bu holda d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari parallel bo'ladi. Aksincha d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari parallel bo'lsa, u holda ularning yo'naltiruvchi vektorlari o'zaro kollinear bo'ladi. $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlarning kollinearlik sharti quyidagicha yoziladi.

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Bu (4) sha'rt

$$A_2 = \lambda A_1; \quad B_2 = \lambda B_1 \quad (5)$$

sharti bilan teng kuchli. Bu (4) va uning bilan teng kuchli bo'lgan (5) sha'rtlar ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti deb ataladi. Bu holda quyidagi ikki hol bo'lishi mu'mkin.

$$\text{a) } A_2 = \lambda A_1; \quad B_2 = \lambda B_1 \text{ va } C_2 = \lambda C_1 \quad (6)$$

$$\text{b) } A_2 = \lambda A_1; \quad B_2 = \lambda B_1 \text{ va } C_2 \neq \lambda C_1 \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad (7)$$

a) holda (1) va (2) tenglamalar bir tenglamaga aylanib ketadi. Demak d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari o'zaro ustma-ust tushadi. Aksincha d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari ustma-ust tushib, bir to'g'ri chiziqqa aylansa, u holda ularning tenglamalari ham bir xil bo'lishi kerak

b) holda (1) va (2) tenglamalar bir tenglamaga aylanmaydi, demak ular orqali aniqlangan to'g'ri chiziqlar ham ha'r xil bo'ladi.

Demak (7) sha'rt o'zaro ustma-ust tushmaydigan ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti, (6) sha'rt esa ikki to'g'ri chiziqning ustma-ust tushish sharti bo'ladi.

Agarda matritsaning rangi tushinchasini foydalansak, ya'ni

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matritsalarining ranglarini r va R orqali belgilasak, u holda yuqoridagi natijalarni quyidagicha aytish mumkin :

a) (1) va (2) to'g'ri chiziqlari kesisishi uchun $r = 2$ bo'lishi zarurli va etarli.

b) (1) va (2) to'g'ri chiziqlari ustma-ust tushishi uchun $R = 1$ bo'lishi zarurli va etarli.

c) (1) va (2) to'g'ri chiziqlari parallel bo'lishi uchun $r = 1$; $R = 2$ bo'lishi zarurli va etarli.

Misol-1. $2x + 4y - 1 = 0$ va $x - 3y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati aniqlang.

Yechilishii: $\frac{2}{1} \neq \frac{4}{-3}$ sharti o'rinli bo'ladi, demak bu to'g'ri chiziqlar kesishadi.

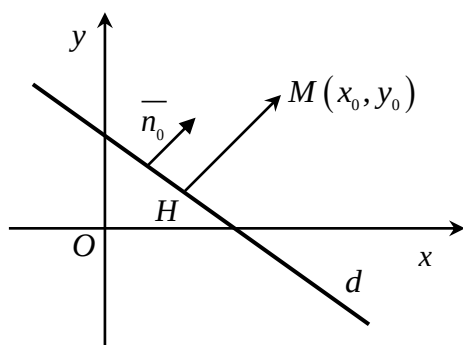
Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha masofa

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0 \quad (18)$$

tenglamasi bilan aniqlang'an d to'g'ri chizig'i va ba'zibir $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi berilgan. Shu M_0 nuqtasidan d to'g'ri chiziqigacha masofani topish kerak.

M_0 nuqtasidan d to'g'ri chiziqigacha masofa deganda M_0 nuqtasidan shu to'g'ri chiziqiga tushirilgan perpendikulyarning uzunligini tushinamiz. U masofa $\rho(M_0, d)$ deb belgilanadi. Agarda M_0 nuqtasidan d to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosi $H(x, y)$ orqali belgilasak, u holda $\rho(M_0, d) = \left| \overrightarrow{HM_0} \right|$ (1-Rasm).



1-Rasm

Agarda $M_0 \in d$ bo'lsa, u holda $\rho(M_0 d) = 0$. Shuning uchun $M_0 \notin d$ deb qavul etamiz. Bizga ma'lum d to'g'ri chizig'ining birlik normal vektori $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, al

$$\overrightarrow{HM_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$$

Bu ikki vektor o'zaro kollinear. Shuning uchun

$$\overrightarrow{H \cdot M_0} \cdot \vec{n}_0 = |\overrightarrow{H \cdot M_0}| \cdot |\vec{n}_0| \cos(\overrightarrow{H \cdot M_0} \wedge \vec{n}_0) = \pm \overrightarrow{H \cdot M_0}.$$

Demak $\rho(M_0 d) = |\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}_0|$. Endi $\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}_0$ skalyar ko'paytmasini hisoblaymiz ρ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}_0 &= (x_0 - x_1) \cos \alpha + (y_0 - y_1) \sin \alpha = \\ &= x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) \end{aligned}$$

$H(x, y)$ nuqtasi d to'g'ri chizig'ida yotadi. Shuning uchun $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - \rho = 0$ yoki

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = \rho$$

Buni yuqoridag'i tenglikga oborib quysak,

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}_0 = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = \rho$$

U holda

$$\rho(M_0 d) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho| \quad (19)$$

Demak nuqtadan to'g'ri chiziqgacha masofani hisoblash uchun to'g'ri chiziqning normal tenglamasining o'ng tarafidagi ifodaga berilgan nuqtaning koordinatalarini qoyib hisoblash kerak. Shu holda kelib chiqqan kattalikning moduli berilgan nuqtadan to'g'ri chiziqgacha masofa bo'ladi.

Agarda d to'g'ri chizig'i umumiy tenglamasi bilan berilsa

$$Ax + By + C = 0 \quad (20)$$

u holda $M_0(x_0 y_0)$ nuqtadan shu to'g'ri chiziqgacha masofani hisoblash uchun dastlabki to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal ko'rinishga keltirib ayirish kerak, ya'ni (20)

tenglamaning ikki tarafin ham $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ga ko'paytirish kerak. Natijada quyidagi formulaga ega bo'lamiz.

$$\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

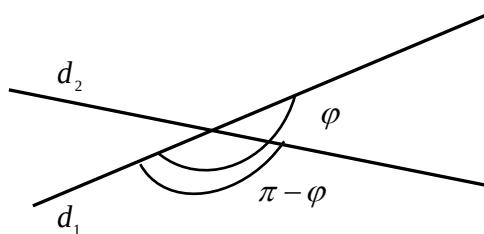
Misol- 2. $M(2, -1)$ nuqtadan $x - 3y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqgacha masofani toping.

Yechilishii: $\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ formula bo'yicha

$$d = \frac{|2 - 3 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikdagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deb, ularning bittasining ixtiyoriy yo'naltiruvchi vektori bilan ikkinchisining ixtiyoriy yo'naltiruvchi vektori orasidagi burchakga aytamiz. Bu ta'rif bizga bir-biri π ga to'ldirilishi ikki burchakni, ya'ni ikki keshishgan to'g'ri chiziqlardan yasalgan ikki qo'shni burchakni beradi (2-Rasm).



To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari o'zining umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsin:

2-Rasm

$$d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (21)$$

$$d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (22)$$

Bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}_1 = \{-B_1; A_1\}$; $\vec{a}_2 = \{-B_2; A_2\}$. Ular orasidagi φ burchakning kosinusi quyidagi formula bo'yicha aniqlanadi

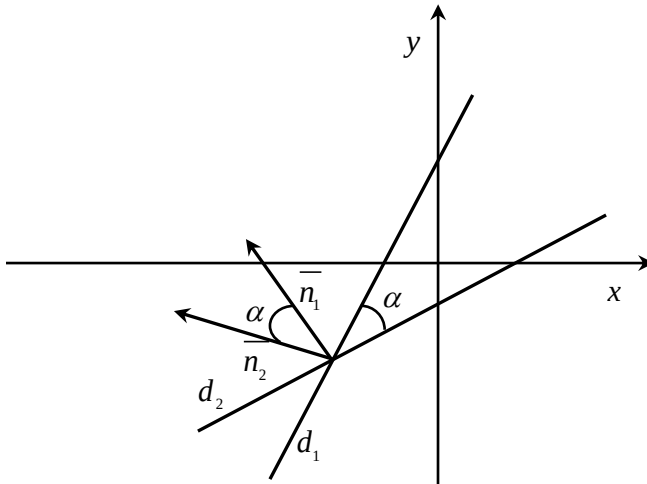
$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\left(\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\right)\left(\sqrt{A_2^2 + B_2^2}\right)} \quad (23)$$

Agar $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$ bo'lsa, u holda d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlari orasidagi burchak o'tkir, $A_1A_2 + B_1B_2 < 0$ bo'lsa, u burchak o'tmas bo'ladi.

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (24)$$

tengligi d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarining perpendikulyarlig'ining zarurli va etarli sharti bo'ladi.

Ikki to'g'ri chiziq orasidag'i burchakni quyidagicha ham aniqlash mumkin. d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$; $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$. Bu vektorlar orasidag'i burchak d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning kesishidan yasalgan qo'shni burchaklarning bittasiga teng bo'ladi (3-Rasm).



3-Rasm

Misol- 3. $2x + 4y - 1 = 0$ va $x - 3y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechilishii: Bu to'g'ri chiziqlarning normal vektorlari mos $\vec{n}_1 = \{2, 4\}$, $\vec{n}_2 = \{1, -3\}$ lardan iborat.

Ular orasidag'i burchakni topamiz:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Tekshirish uchun savollar:

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini qanday aniqlaymiz?

Nuqtadan to'g'ri chiziqgacha masofani topish formulasini qanday hosil qilamiz?

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?

TO'PLAMLARNI AKSLANTIRISH VA ALMASHTIRISH

O'xshashlikning geometrik nazariyasini umumiy bo'lgan ta'rifdan boshlaymiz.

Bizga bo'sh bo'lmagan ikki X, Y to'plamlar berilgan bo'lsin, ya'ni $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$

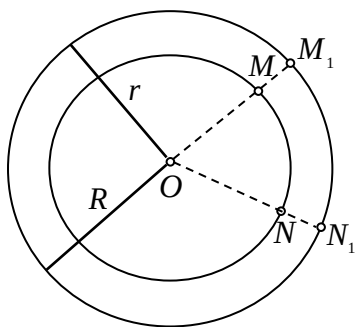
Ta'rif - Agar X to'plamning har bir x elementiga f qoida bilan Y to'plamning aniq bir y elementi mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamning Y to'plamga akslantirishi berilgan deyiladi.

f qoida X to'plamni Y to'plamga akslantiradi degan jumlaning $f: X \rightarrow Y$ yoki $X \xrightarrow{f} Y$ ko'rinishda yozamiz.

Agar $x \in X$ element f akslantirishda $y \in Y$ elementga mos kelsa, uni $y = f(x)$ singari yoziladi, y tegishli x elementning f akslantirishdagi obrazi, x bo'lsa y elementning proobrazi dep ataladi. X to'plamning barcha elementlarining obrazlarining to'plami $\{f(x) | x \in X\}$, $f(X)$ ko'rinishda belgilanadi va f akslantirishdagi X to'plamning obrazi deyiladi.

Misol- 1. O nuqtasi markazi umumiy bo'lgan ikki kontsentrik aylanani qadarmiz. r radiusli aylananing nuqtalarining to'plami X , R radiusli aylananing nuqtalarining to'plami Y bo'lsin.

X to'plamning har bir M nuqtasiga OM nurda yotgan M_1 nuqtasini mos keltiraylik. Natijada birinchi aylananing ikkinchi aylanaga akslantirilishi hosil bo'ladi: $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$ va hokaza (1-rasm).



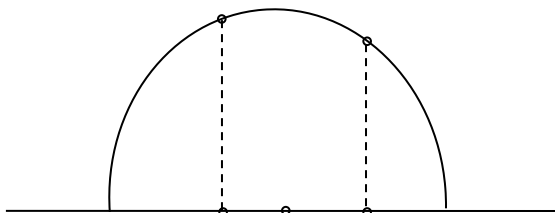
1-rasm

Bu yerda f qoida O nuqtadan chiqqan nurning birinshi aylana bilan kesishgan nuqtasining ikkinshi aylana bilan kesishgan nuqtasiga mos keltirishdan iborat.

$f : X \rightarrow Y$ akslantirishning kerakli xususiy hollari bilan tanishamiz.

1. Agar X to'plamning har qanday ikki x_1, x_2 elementi uchun $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsa, unda $f : X \rightarrow Y$ akslantirish in`ektiv akslantirish deyiladi. Boshqasha aytganda,  $f$  akslantirish in`ektiv bo'lsa, Y to'plamning har bir elementi bittadan ortiq bolmagan proobrazg`a ega.

Misol- 2. X yarim aylananing hamma nuqtalar to'plami, Y bo'lsa bu yarim aylana diametri orqali utgan to'g'ri chiziqning barcha nuqtalar to'plami bo'lsin(2-rasm). Yarim aylananing har bir nuqtasiga bu nuqtaning l to'g'ri chiziqdagi orthogonal proertsiyasini mos keltiramiz. Bu yerda f qoida yarim aylananing har bir nuqtasining l to'g'ri chiziqdagi orthogonal proertsiyasini topishdan iborat. Natijada X to'plamning Y to'plamga akslantirishi hosil etiladi. Bu akslantirishda $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$ va hokazo bo'lib, $M \neq N$, $f(M) \neq f(N)$.

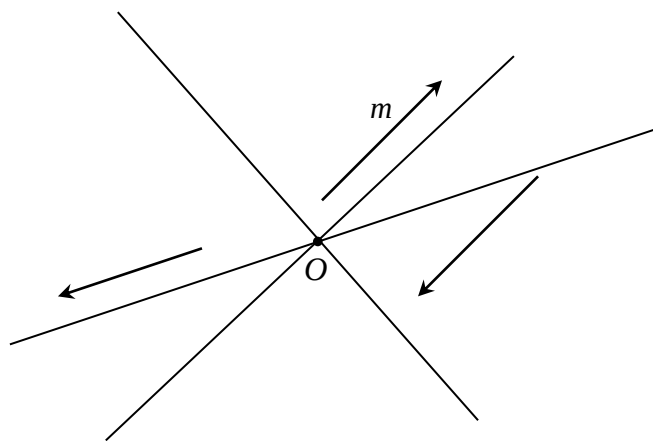


2-rasm.

II. Agar f akslantirishdagi obrazlar to'plami Y to'plamdan iborat, ya'ni $f(X) = Y$ bo'lsa, unda $f : X \rightarrow Y$ akslantirish suyr`ektiv akslantirish deyiladi.

Missal- X to'plamdagi hamma vektorlar to'plami, Y to'plami bo'lsa O markazli to'g'ri chiziqlar dastasi bo'lsin(3-rasm).

$X_1 = X \setminus \{O\}$ to'plamning har bir $\bar{m}$ vektoriga Y to'plamning $\bar{l} \parallel \bar{m}$ to'g'ri chizig'ini moslashtiramiz. Bu bilan X_1 to'plamni Y to'plamga $f(X) = Y$ akslantirishi hosil bo'lib, bu akslantirishda $f(X_1) = Y$. demak, f akslantirish suyr`ektiv, lekin u in`ektiv emas, sababi har qanday $\bar{m} \neq \bar{n}$, $\bar{m} = \lambda \bar{n}$ vektorlar uchun $f(\bar{m}) = f(\bar{n})$.



3-suwret.

III. Bir vaqtda ham in`ektiv, ham suyrektiv bo`lgan $f : X \rightarrow Y$ akslantirish biektiv yoki o`z-ara bir qiymatli akslantirish deyiladi. Akslantirish biektiv bo`lganda Y to`plamning har bir elementi bir proobrazg`a ega. Biektiv akslantirishga misol keltiraylik.

Misol- 3. Tekislikda affin koordinatalar sistemasini kiritish bilan hamma tartiplangan haqiqiy sonlar juftlari (x, y) to`plamga va aksincha tartiplangan hamma haqiqiy sonlar juftlari to`plamini tekislikning barcha nuqtalari to`plamiga akslantiriladi. Bunda  $f$  qoida affin koordinatalar sistemasini kiritish qoidasi bo`ladi.

X - tekislikdagi barcha nuqtalar to`plami,  $Y$  ma`lum bir tartibda olingan hamma haqiqiy sonlar to`plami (yoki aksincha) bo`lsin desak, bu akslantirishda har bir $M \in X$ nuqtaga bir juft $(x, y) \in Y$ son va aksincha sonlarning har bir $(x, y) \in Y$ juftiga bir $M \in X$ nuqta mos keladi.

**Ta`rif- 2.**  $X$  to`plamni Y to`plamga har qanday  $f : X \rightarrow Y$  biektiv akslantirish berilgan va har qanday  $x \in X$  element uchun  $y = f(x)$  bo`lsin. U holda $f^{-1}(y) = x$ qoida bilan bajarilgan $f^{-1} : Y \rightarrow X$ akslantirish f uchun teskari akslantirish deyiladi. X to`plamni  $Y$  to`plamga f akslantirish biektiv bo`lganda unga teskari  $f^{-1}$  akslantirish bor bo`ladi va biektiv akslantirish ham bo`ladi. Haqiqatan ham, bir  $f : X \rightarrow Y$  biektiv akslantirish bo`lganda u bir vaqtda ham in`ektiv, ham suyr`ektiv bo`ladi.

**Ta`rif- 3.**  $X \neq \emptyset$  to`plamni o`z-o`ziga har qanday $f : X \rightarrow Y$ biektiv akslantirish X to`plamda almashtirish deyiladi.  $f$  akslantirish  $X$  to`plamning biror almashtirishi bo`lsa, uning  $x \in X$  ga o`tkazadigan almashtirishda X to`plamda almashtirish bo`ladi. Uni f almashtirishga teskari almashtirish deyiladi.

Agar biror bir $x \in X$ element uchun (mos X to'plamning Φ qism to'plami uchun) f almashtirishda $f(x) = x(f(\Phi)) = \Phi$ bo'lsa, x element (Φ qism to'plam) f almashtirishda qo'zgolmas element yoki invariant element deyiladi.

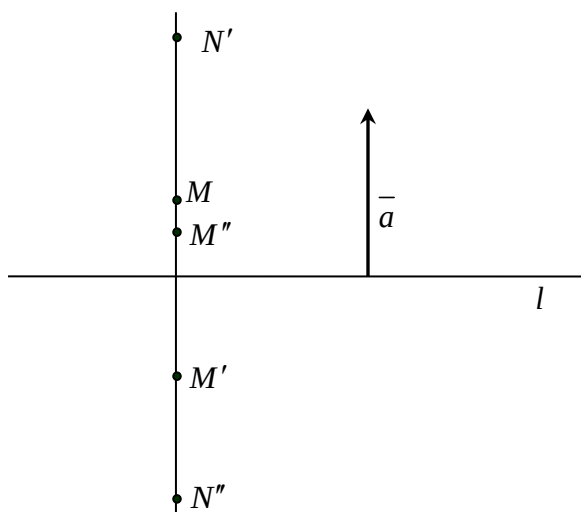
$f: X \rightarrow X$ almashtirish aynan almashtirish deyiladi. Aynan almashtirish E_0 bilan belgilanadi.

Ta'rif-4 f_1, f_2 lar X to'plamning ixtiyoriy ikki almashtirishi bo'lsin, f_1 almashtirish har bir $x \in X$ elementni $f_1(x) = x'$ elementga, f_2 almashtirish bo'lsa x' elementni $f_2(x) = x''$ elementga o'tkazsin. Ular ketma-ket bajarilsa, ya'ni x element ustida f_1 almashtirishni va hosil etilgan obraz x' ustida f_2 almashtirish bajarilsa, natijada x tegishli x' elementga o'tkazadugan f_3 almashtirish hosil bo'ladi. f_3 almashtirish f_1, f_2 almashtirishning ko'paytmasi (yoki kompozitsiyasi) deyiladi va $f_3 = f_1 f_2$ ko'rinishda yoziladi (bunda avval f_1 , songra f_2 bajariladi).

Misol-4. Ulaylik f_1 tekislikni l to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish, f_2 bo'lsa shu tekislikni l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\vec{a}$ vektorga qadar parallel ko'shirish bo'lsin.

M tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Avval $f_2 f_1$ almashtirishni bajaramiz. Tekislikni l to'g'ri chiziqqa nisbatan f_1 simmetrik almashtirish M nuqtani M' nuqtaga o'tkazadi. Tekislikni $\vec{a}$ vektorga qadar f_2 parallel ko'shirish M' nuqtani M'' nuqtaga o'tkazadi (4-rasm). Bu almashtirishlarning ko'paytmasi $f_2 f_1$ almashtirish M nuqtani M'' nuqtaga o'tkazadi.

Endi $f_1 f_2$ almashtirishni bajaramiz. Tekislikni $\vec{a}$ vektorga qadar f_2 parallel ko'shirish M nuqtani N' nuqtaga o'tkazadi. l to'g'ri chiziqqa nisbatan f_1 simmetrik almashtirish bo'lsa N' nuqtani N'' nuqtaga o'tkazadi, ularning ko'paytmasi, ya'ni tekislikni $f_1 f_2$ almashtirish M nuqtani N'' nuqtaga o'tkazadi. $M'' \neq N''$. Demak, bu misolda $f_2 f_1 = f_1 f_2$.



4-rasm.

Teorema-1. Almashtirishlarni ko'paytirish assotsiyativlik qoidaga boysinadi, ya'ni X to'plamning ixtiyoriy uchta f_1, f_2, f_3 almashtirish uchun $f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1$.

Isbot: X to'plamning ixtiyoriy elementi x bo'lsin. f almashtirishdagi x ning obrazi y , f_2 almashtirishdagi y ning obrazi z , f_3 almashtirishdagi z ning obrazi t bo'lsin. Unda almashtirishlarni ko'paytirish ta'rifiga ko'ra $f_2 f_1$ almashtirish x elementni z elementga o'tkazadi, $f_3 f_2$ almashtirish y elementni t elementga o'tkazadi.

Shunga kora

$$(f_3(f_2 f_1))(x) = f_3(z) = t, ((f_3 f_2) f_1)(x) = (f_3 f_2)(y) = t,$$

Bundan bo'lsa,

$$f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1. \#$$

f ixtiyoriy almashtirish bo'lsin. Unga teskari f^{-1} almashtirish va E_0 ayniyat almashtirish uchun

$$f E_0 = E_0 f = f \text{ va } f f^{-1} = f^{-1} f = E_0$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Almashtirish ler gruppasi. Almashtirishlar gruppasining qism gruppalari

X to'plamdagi $f_1, f_2, f_3, \dots$ almashtirishlar to'plamini Γ bilan belgilaylik.

Ta'rif-5. Agar Γ to'plamdan olingan ixtiyoriy ikkita f_1 va f_2 almashtirish ning $f_2 f_1$ ko'paytmasi Γ to'plamga tegishli bo'lsa va undagi har bir f almashtirishga teskari f^{-1} almashtirish ham Γ to'plamga tegishli bo'lsa, Γ to'plam gruppasi deyiladi.

Γ ning har qanday ikki f_1, f_2 almashtirishi uchun $f_2 f_1 = f_1 f_2$ bo'lsa, Γ gruppasi **kommutativ** gruppasi yoki **Abel gruppasi** deyiladi.

Misol-1. Faraz qilaylik, birorta tekislikdagi hamma parallel ko'chirishlar to'plami P bo'lsin, $f_1, f_2 \in P$ almashtirishlarni olayik, f_1 almashtirish $\vec{a}$ vektorga qadar parallel ko'chirish, f_2 almashtirish bo'lsa $\vec{b}$ vektorga qadar parallel ko'chirish bo'lsin. Tekislikning ixtiyoriy M nuqtasini f_1 almashtirishga shunday M' nuqtaga o'tkizadi, bunda $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ bo'ladi, f_2 almashtirish bo'lsa M' nuqtani shunday M'' nuqtaga o'tkizadi, bunda $\overrightarrow{M'M''} = \vec{b}$ bo'ladi, f_1, f_2 almashtirish larning $f_2 f_1$ ko'paytmasi M nuqtani M'' nuqtaga o'tkizadi.

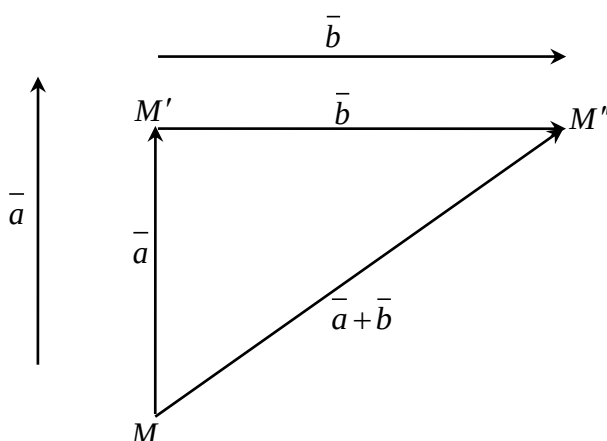
Vektorlarni qo'shish qoidasiga ko'ra

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

ya'ni

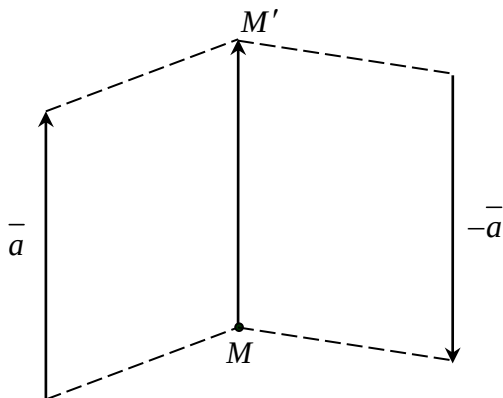
$$\overrightarrow{MM''} = \vec{c} \text{ (5-rasm).}$$

f_1, f_2 parallel ko'chirishlarning ko'paytmasi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ vektorga qadar parallel ko'chirish bo'lib topiladi.



5-rasm.

Endi f_1 parallel ko'chirishga teskari amalni bajaraylik. f_1 almashtirish $\vec{a}$ vektorga qadar parallel ko'chirish bo'lgaligidan unga teskari amal $-\vec{a}$ vektorga qadar parallel ko'chirish bo'ladi(6-rasm).



6-rasm.

Shunday qilib,

$$f_1, f_2 \in P \Rightarrow f_2 f_1 \in P \text{ va } f_1 \in P \Rightarrow f^{-1} \in P.$$

Demak P gruppasi ekan. Shuning bilan birga P kommutativ gruppasi bo'ladi, sababi $f_2 f_1$ almashtirish $\bar{a} + \bar{b}$ vektorga qadar parallel ko'chirish, $f_1 f_2$ bo'lsa $\bar{b} + \bar{a}$ vektorga qadar parallel ko'chirish. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ bo'lgani uchun

$$f_2 f_1 = f_1 f_2$$

Endi Γ birorta bir almashtirishlar gruppasi, Γ' bo'lsa Γ to'plamning qism to'plami bo'lsin.

Ta'rif-6. Agar 1) Γ' ning ixtiyoriy ikki almashtirishning ko'chirishdagi Γ' ga tegishli, 2) Γ' ning har bir almashtirishiga teskari almashtirish yana Γ' ga tegishli bo'lsa, Γ' tegishli Γ gruppasi qism gruppasi deyiladi. Boshqacha aytganda, Γ gruppasi Γ' qism to'plami Γ ning qism gruppasi bo'lishi uchun uning o'zi gruppasi qurash kerak.

Misol-1. Tekislikdagi hamma vektorlarga nisbatan parallel ko'chirishlar to'plamini P bilan belgilaylik. (P ning kommutativ gruppasi tashkil etishi bizga ma'lum.) Bu tekislikda birorta bir l to'g'ri chiziqqa parallel vektorlarga qadar hamma parallel ko'chirishlar to'plami bo'lsa P' bo'lsin. Bizga ma'lum, $P' \subset P$, shuning bilan birga P' gruppasi tashkil etadi. (P' ning gruppasi tashkil etishini P ning gruppasi tashkil etishini ko'rsatgandek ko'rsatiladi.

Demak, P' gruppasi P gruppasi qism gruppasi bo'ladi.

O'XSHASHLIK ALMASHTIRISH. GOMOTETIYA

Tayanich tushunchalar: O'xshashlik almashtirish, gomotetiya, o'xshashlik almashtirishlar gruppasi, o'xshashlik almashtirishlar qism gruppasi

$k > 0$ son berilgan bo'lsin.

Ta'rif-1 Tekislikning har qanday ikki M, N nuqtasiga

$$\rho(M', N') = k\rho(M, N) \quad (13)$$

shartni qanoatlantiruvchi M', N' nuqtalarni mos keltiradigan almashtirish tekislikda $k > 0$ *koeffitsientli uqshashlik almashtirish deyiladi* va p^k ko'rinishida belgilanadi. k son o'qshashlik *koeffitsienti* deyiladi.

Tekislikta o'qshashlik almashtirishi barcha masofalarni $k > 0$ marta o'zgartiradi.

Ta'rif-1 Agar Φ figurani uning istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofani $k > 0$ son marta o'zgartadigan qilib Φ' figuraga biektiv akslantirish bor bo'lsa, Φ' figura Φ figuraga k koeffitsientli o'qshash deyiledi.

Birinchi tarifdan o'qshashlik almashtirish har qanday berilgan figurani o'ziga o'qshash figuraga o'tkazishi ravshan.

Agar o'qshashlik koeffitsient $k = 1$ bo'lsa, tekislikta harakat hosil qilinadi. Demak harakat o'qshashlik almashtirishning xususiy holidir.

O'qshashlik almashtirishga yana bir misol sifatida gomotetiya bilan tanishamiz.

Tekislikta S nuqta va $k \neq 0$ son berilgan bo'lsin.

Ta'rif-1 Tekislikning har bir M nuqtasiga

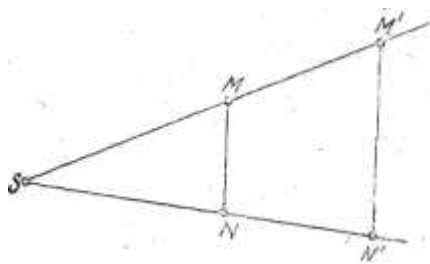
$$\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM} \quad (14)$$

Shartti qanoatlantiruvchi M' nuqtani mos keltiradigan almashtirish tekislikta k *koeffitsientli* va S markazli *gomotetik almashtirish*, qisqacha **gomotetiya** deb ataladi. S nuqta gomotetiya markazi, k son gomotetiya koeffitsienti deyiladi. S markazli va k koeffitsientli gomotetiya H_S^k bilan belgilanadi.

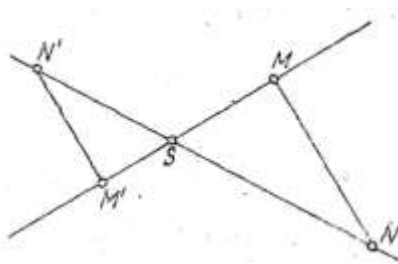
Gomotetiya markazi S o'z-o'ziga mos hisoblanadi. $k = 1$ koeffitsientli gomotetiya tekislikda aynan almashtirish bo'ladi, chunki $k = 1$ da $\overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM}$, bundan $M' = M$.

Agar $k > 0$ bo'lsa, $\overrightarrow{SM'}$, $\overrightarrow{SM}$ vektorlar bir xil yunalishli bo'lib, mos M, M' nuqtalar gomotetiya markazidan bir tomondan yotadi(11 -chizma).

$k < 0$ bo'lsa, $\overrightarrow{SM'}$, $\overrightarrow{SM}$ vektorlar qarama-qarshi yunalishli va mos M, M' nuqtalar gomotetiya markazidan turli tomonda yotadi.(12-chizma).



11-chizma



12-chizma

Berilgan figurani tashkil etuvchi barcha nuqtalarini berilgan S markaz va berilgan $k \neq 0$ koeffitsient bilan gomotetik almashtirishdan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami berilgan figuraga gomotetiyk figura deyiladi.

Gomotetiya xossalari

Gomotetiyada to'g'ri chiziqdagi uch nuqtaning oddiy nisbatini saqlaydi.

2⁰ . Gomotetiya to'g'ri chiziq o'ziga parallel to'g'ri chiziqqa o'tadi.

3⁰ . Gomotetik almashtirishda burchakning kattaligi o'zgarmaydi.

4⁰ . Gomotetiyada to'g'ri chiziqlarning parallelligi saqlanadi.

5⁰ . Gomotetiyk almashtirishda kesmaning uzunligi $|k|$ marta o'zgaradi.

O'qshashlik almashtirish xossalari

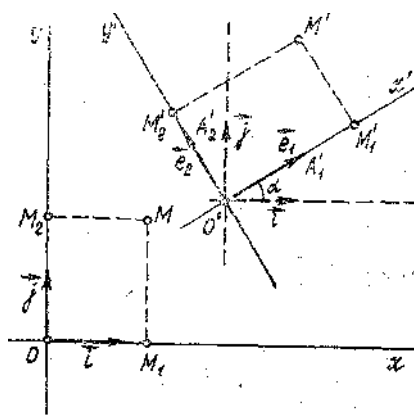
1⁰ .O'qshashlik almashtirishda to'g'ri chiziqdagi uch nuqtaning oddiy nisbati saqlanadi.

2⁰ . O'qshashlik almashtirishi burchakni uning o'ziga congruent burchakka o'tkizadi.

3⁰ . O'qshashlik almashtirishda parallel to'g'ri chiziqlarning obrazlari ha'm parallel boladi.

O'qshashlik almashtirishning analitik ifodalanishi

Tekislik dekart koordinatalar referini qaraymiz. Tekislikni shunday $k > 0$ koeffitsientli P^k o'qshashlik almashtirishi bu koordinatalar referni $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$ koordinatalar referiga o'tkizadi(11-chizma), $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = k$ bo'ladi.



11-chizma

M tekislikning ixtiyoriy nuqtasi, M' bo'lsa, uning P^k dagi obrazi bo'lsin. M nuqta birinchi koordinatalar referiga nisbatan x, y koordinatalarga ega bo'lganda uning M' obrazi ikkinchi koordinatalar referiga nisbatan x', y' koordinatalarga ega bo'ladi. Haqiqatan M' nuqta ikkinchi koordinatalar referiga nisbatan x', y' koordinatalarga ega bo'lsin. $MM_1 \square OA_2$ va $MM_2 \square OA_1$ to'g'ri chiziqlarni o'tkizamiz, bunda M_1 nuqta OA_1 to'g'ri chiziqqa tegishli, unda

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OA_1}} = -(M_1 A_1 O), \quad y = \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OA_2}} = -(M_2 A_2 O).$$

$P^k(M_1) = M'_1$, $P^k(M_2) = M'_2$ bo'lsin. O'qashlik almashtirishda nuqtaning to'g'ri chiziqta yotishi va to'g'ri chiziqlarning parallelligi saqlanganligi uchun:

M'_1 nuqta $O'A'_1$ to'g'ri chiziqqa tegishli, M'_2 nuqta $O'A'_2$ to'g'ri chiziqqa tegishli va

$$M'M'_2 \square O'A'_1 \Rightarrow x' = \frac{\overline{O'M'_1}}{\overline{O'A'_1}} = -(M'_1 A'_1 O'), \quad y' = \frac{\overline{O'M'_2}}{\overline{O'A'_2}} = -(M'_2 A'_2 O').$$

O'qashlik almashtirishda uch nuqtaning oddiy nisbati saqlanganligi uchun $(M'_1 A'_1 O') = (M_1 A_1 O)$, $(M'_2 A'_2 O') = (M_2 A_2 O) \Rightarrow x' = x, y' = y$. Demak, dekart koordinatalar

referda $M' = P^k(M)$ nuqta usha x, y koordinatalarga ega. $\left(\vec{i}, \vec{e}_1 \right) = \alpha$ birinchi koordinatalar

sistemasiga nisbatan $M'(x', y')$, $O'(x_0, y_0)$ bo'lsin. U holda $\vec{i}, \vec{j}$ baziske nisbatan $\vec{e}_1 \{k \cos \alpha, k \sin \alpha\}$, $\vec{e}_2 \{-k \sin \alpha, k \cos \alpha\}$.

$$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} + y'\vec{j}, \quad OO' = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}. \quad (11)$$

Bu erda birinchi va ikkinchi koordinatalar referi bir xil (qarama-qarshi) orientatsiyali bolganda $\varepsilon = 1 (\varepsilon = -1)$ bo'ladi va (11) tengliklarni hisobga olib,

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} \text{ va en}$$

$$x'\vec{i} + y'\vec{j} = [x_0 + k(x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha)]\vec{i} + [y_0 + k(x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha)]\vec{j}$$

Yoki

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha) + x_0 \\ y' &= k(x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha) + y_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Munosabatlarga ega bo'lamiz.

Birinchi koordinatalar referida M' nuqtaning x', y' koordinatalari M nuqtaning koordinatalari orqali (12) formulalar bo'yicha aniqlanadi.

(12)- formulalar o'qshashlik almashtirishining analitik ifodasidir.

Tekshirish uchun savollar

1. O'qshashlik almashtirish deb nimaga aytiladi?
2. O'qshashlik almashtirish qanday belgilenedi?
3. Gomotetiya degenimiz nima?
4. O'qshashlik almashtirishning analitik ifodalanishi qanday beriladi?
5. O'qshashlik almashtirishning xossalari nimalardan iborat?

ELLIPS

Ta'rif- Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta Oxy dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, u ellips deb ataladi. Bu erda koeffisientlar $a \geq b > 0$ munosabatni qanoatlantiradi.

Bu tenglamani o'rganish natijasida ellipsni chizamiz va uning xossalarini keltirib chiqaramiz. Tenglamadan ko'rinib turibdiki x, y o'zgaruvchilar

$-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Absissa o'qida yotuvchi $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari, $x \pm \frac{a}{e} = 0$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari deb ataladi. Bu yerda $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ bo'lib, e soni ellipsning eksentrisiteti deyiladi. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lib, koordinata boshi uning simmetriya markazidir.

Ellips xossalari:

1. Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas va $2a$ ga tengdir.

Bu xossa bevosita hisoblash yordamida $r_1 + r_2 = 2a$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi.

Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalargacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va e soniga tengdir.

Bu xossa bevosita $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ tenglikni tekshirish yordamida isbotlanadi.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} + 2acx + c^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} + 2acx + a^2 - b^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} + 2acx + a^2} = \sqrt{x^2 \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} + 2acx + a^2} = |xe + a|$$

$$d_1 = \left| -x - \frac{a}{e} \right| = \left| x + \frac{a}{e} \right| = \frac{|xe + a|}{e} \Rightarrow \frac{r_1}{d_1} = e$$

Ellipsning geometrik aniqlanishi.

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yigindisi o'zgarmas songa teng bo'ladigan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Isbot. Tekislikda F_1, F_2 nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1, r_2 ko'rinishda belgilab

$$r_1 + r_2 = \text{const} = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarinng geometrik o'rnini aniqlashimiz kerak. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilasak, $r_1 + r_2 > 2a$ tengsizlikdan $a > c$ munosabat kelib chiqadi. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan F_1, F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo'nalgan bo'ladi. Koordinata boshini F_1, F_2 nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida abssissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo'yib

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga oshirib,

hadlarni ixchamlashtirib va yana bir marta kvadratga oshirib

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu erda $b^2 = a^2 - c^2$ belgilash kiritilgan.

Bizga l to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta F berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqttagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas birdan kichik e soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips bo'ladi.

Bu faktni isbotlash uchun berilgan F nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazib, uni abssissa o'qi sifatida olamiz. Natijada abssissa o'qini F nuqta ikki qismga ajratadi. Berilgan F nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning e soniga ko'paytmasini p bilan belgilab, quyidagi tengliklar bilan

$$a = \frac{p}{1-e^2} \text{ va } c = ea, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

a , b c sonlarni kiritamiz. Koordinata boshini abssissa o'qining l to'g'ri chiziqni kesmaydigan qismida F nuqtadan c birlik masofada joylashtiramiz. Natijada koordinata boshidan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$p_1 + c = \frac{p}{e} + e a = \frac{a(1 - e^2)}{e} + e a = \frac{a}{e}$$

kattalikka teng bo'ladi. Bu erda p_1 bilan F nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa belgilangan. Demak l to'g'ri chiziq tenglamasi

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Ikkinchi koordinata o'qini l to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazib, tekislikning $M(x, y)$ nuqtasidan F nuqtagacha bo'lgan masofani r bilan, l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga d bilan belgilasak,

$$r = e d$$

tenglikdan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tenglamani olamiz.

Urinma tenglamalarini tuzishda biz maktab kursidan ma'lum bo'lgan

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

tenglamadan foydalanishimiz mumkin. Misol uchun ellipsning ordinatalari manfiy bo'lmagan nuqtalardan iborat qismi

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad -a \leq x \leq a$$

funksiyaning grafigi bo'ladi. Bu funksianinig hosilasini topsak, u

$$y' = -\frac{bx}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu ifodalarni hisobga olib, ellipsga tegishli (x_0, y_0) nuqtadagi urinma tenglamasini yozamiz:

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0).$$

Bu tenglamada

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

tenglikni hisobga olsak, yuqoridagi tenglama

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

ko'rinishga keladi.

GIPERBOLA

Giperbola kanonik tenglamasi

Ta'rif-11 Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini birorta *Oxy* Dekart koordinata sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (11)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, bu chiziq giperbola deb ataladi. Bu erda koeffisientlar $a \geq b > 0$ munosabatni qanoatlantiradi.

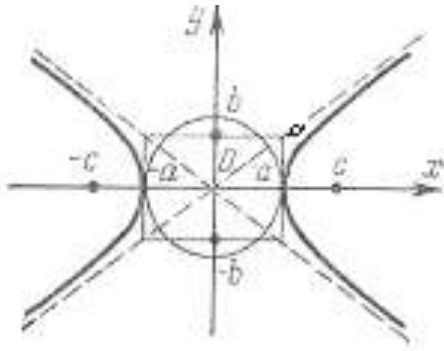
Giperbola tenglamasini tekshirish natijasida quyidagilarni olamiz:

1) x, y o'zgaruvchilar $|x| \geq a, -\infty < y < \infty$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Absissa o'qidagi $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ nuqtalar giperbolaning fokuslari, $x \pm \frac{a}{e} = 0$ tenglamalar

bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlar giperbolaning direktrisalari deyiladi. Bu erda $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$e = \frac{c}{a} > 1$ bo'lib, e soni giperbolaning eksentrisiteti deyiladi.

2) Tenglamada x, y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi giperbolaning simmetriya markazidir.



Giperbola xossalari :

Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli o'zgarmas va $2a$ ga tengdir.

Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning mos direktrisalargacha bo'lgan masofalarga nisbati o'zgarmas va e soniga tengdir.

Bu xossa bevosita $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ tenglikni tekshirish yordamida

isbotlanadi. Giperbolaning $M(x, y)$ nuqtasidan fokuslarga bo'lgan masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex + a)^2}, r_2 = \sqrt{(ex - a)^2}$$

tengliklar o'rinlidir. Bu erda ildiz chiqarish amalini bajarsak

$$\text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \quad r_1 = a + ex, \quad r_2 = -a + ex$$

$$\text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \quad r_1 = -a - ex, \quad r_2 = a - ex$$

tengliklarni hosil qilamiz. Natijada agar $x > 0$ bo'lsa

$r_1 - r_2 = 2a$, agar $x < 0$ bo'lsa $r_1 - r_2 = -2a$ tenglik o'rinli bo'ladi. Demak ixtiyoriy x uchun

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsa, bu nuqtalargacha bo'lgan

masofalari ayirmasining moduli o'zgarmas songa teng bo'ladigan

nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi.

Tekislikda F_1, F_2 nuqtalar berilgan. Biz tekislikning nuqtasidan bu nuqtalargacha bo'lgan masofalarni mos ravishda r_1, r_2 ko'rinishda belgilab

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami giperbola ekanligini isbotlaymiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz va tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Berilgan F_1, F_2 nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olamiz, unda musbat yo'nalish F_1 nuqtadan F_2 nuqtaga qarab yo'nalgan. Koordinata boshini F_1, F_2 nuqtalarning o'rtasiga joylashtirib, ordinata o'qi sifatida abssissa o'qiga perpendikulyar ixtiyoriy o'qni olamiz. Masofalar uchun

$$r_1 = \sqrt{(ex + a)^2}, r_2 = \sqrt{(ex - a)^2}$$

ifodalarni yuqoridagi tenglikga qo'yib

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni kvadratga oshirib va zaruriy algebraic almashtirishlarni bajarib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

munosabatni olamiz. Bu yerda $b^2 = c^2 - a^2$ belgilash kiritilgan.

Bizga l to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta F berilgan bo'lsa, tekislikda berilgan nuqtagacha bo'lgan masofasining berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas birdan katta e soniga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola bo'ladi.

Bu xossani isbotlash o'quvchilar uchun topshiriq sifatida havola etamiz. Biz yuqorida $e < 1$ bo'lganda ellips hosil bo'lishini ko'rsatgan edik. Bu yerda p soni ellipsdagi kabi, giperbolaning katta va kichik yarim o'qlari

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Bu yerda c soni $c = ea$ tenglik bilan aniqlanadi.

PARABOLA

Parabolaning kanonik tenglamasi

Ta'rif- Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasini biror dekart koordinatalar sistemasida

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u parabola deb ataladi. Tenglamadagi p soni parabola parametri deyiladi.

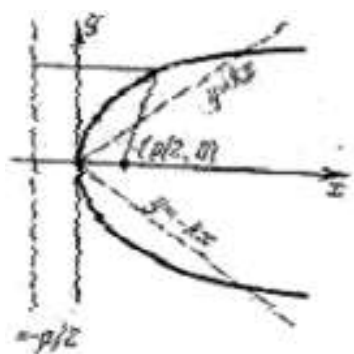
Misol. Siz maktab kursidan $y = x^2$ tenglama bilan berilgan parabolani yaxshi bilasiz. Bu tenglamani kanonik ko'rinishga keltirish uchun

$$x' = y, y' = x$$

almashtirish bajaramiz. Natijada $y'^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} x'$ tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $p = \frac{1}{2}$.

Mustaqil ish-O'quvchiga tanish $y = ax^2 + bx + c$ tenglama bilan berilgan parabolani chizing va tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Biz ikkinchi tenglamani tekshirish yordamida parabolaning xossalarini o'rganamiz va uni chizamiz. Tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar (x, y) koordinatali nuqta parabolga tegishli bo'lsa, $(x, -y)$ nuqta ham parabolaga tegishli bo'ladi. Demak parabola Ox o'qiga nisbatan simmetrik joylashgandir. Bundan tashqari koordinata boshi parabolaga tegishli, x manfiy qiymatlarni qabul qilmaganligi uchun parabola Oy o'qining o'ng tomonida joylashgan. Bu mulohazalardan foydalanib biz chizmada parabolani quyidagi ko'rinishda tasvirlashimiz mumkin.



Tekislikda $x + \frac{p}{2} = 0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqli parabolaning direktisasi ,

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta esa uning fokusi deb ataladi.

Parabola xossalari:

1⁰ . Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan direktisagacha bo'lgan masofa fokusgacha bo'lgan masofaga tengdir.

Parabola nuqtasidan $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqtasigacha bo'lgan masofani r bilan, direktisagacha bo'lgan masofani d bilan belgilab $r = d$ tenglikni isbotlaymiz.

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2}$$

ifodada $y^2 = 2px$ tenglikdan foydalansak va $x \geq 0$ munosabatni hisobga

olsak

$$r = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$$

formulani hosil qilamiz.

Direktisagacha bo'lgan masofani hisoblash uchun nuqtadan to'g'ri chiziqliqacha bo'lgan masofa formulasidan foydalanib

$$d = \left| -x - \frac{p}{2} \right| = x + \frac{p}{2} = r$$

tenglikni hosil qilamiz.

2⁰ . Parabolaning geometrik aniqlanishi.

Berilgan to'g'ri chiziqli va unda yotmaydigan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plami parabola.

Tekislikda ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan F nuqta berilgan bo'lsin. Berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p bilan belgilab va F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ravishda o'tuvchi to'g'ri chiziqni abssissa o'qi sifatida olib koordinatalar sistemasini kiritamiz. Abssissa o'qining musbat yo'nalishi ℓ to'g'ri chiziqdan F nuqta tarafga yo'nalgan, koordinata boshini ℓ to'g'ri chiziq va F nuqta o'rtasiga quyidagi chizmadagi kabi joylashtiramiz. Ordinata o'qi esa ℓ to'g'ri chiziqqa paralleldir. Natijada ℓ to'g'ri chiziq: $x + \frac{p}{2} = 0$

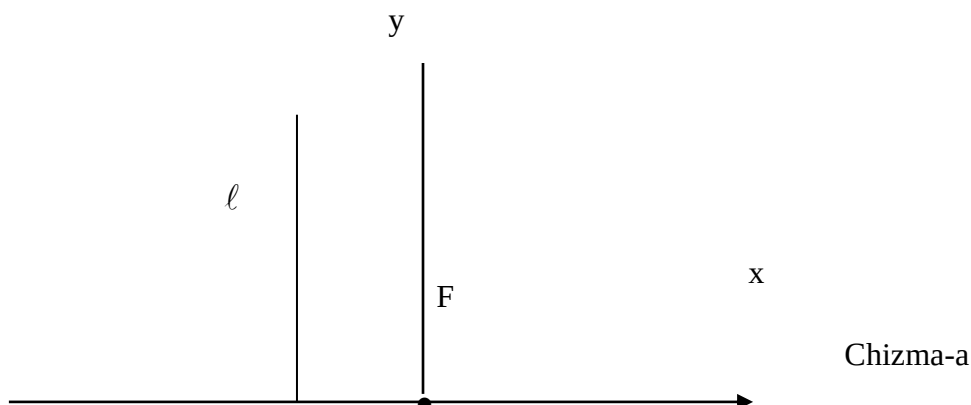
tenglamaga, F nuqta esa $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Tekislikning $M(x, y)$ nuqtasidan ℓ

to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning shu

nuqtadan F nuqttagacha bo'lgan masofaga tengligidan

$$y^2 = 2px$$

tenglamani hosil qilamiz.



IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING UMUMIY Tenglamasi

Tayanch tushunchalar: Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi, ITCh markazi, asimptotik va noasimptotik yo'nalishlar, ITCh urinmasi, asimtotasi, diametri

Biz bu bobda tekislikda dekart koordinatalar sistemasida

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (11)$$

tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqni tekshirish bilan shug'ullanamiz. Bu ishni koordinatalar sistemasini o'zgartirish va (11)tenglamani soddalashtirish yordamida amalga oshiramiz. Birinchi navbatda parallel ko'chirishda (11) tenglama koeffitsientlari qanday o'zgarishini tekshiramiz. Buning uchun

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \quad (12)$$

formulalar yordamida almashtirishlarni bajaramiz. Bu holda koordinata o'qlarining yo'nalishlari o'zgarmaydi, faqat koordinata boshi $O'(x_0, y_0)$ nuqtaga ko'chadi. Bu formulalardan x, y larni topib va (1) ga qo'yib

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (13)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada koeffitsientlar uchun

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22},$$

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \quad a'_{33} = F(x_0, y_0) \quad (14)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, $F(x, y)$ bilan (11) tenglamaning chap tomonidagi ifoda belgilangan.

Yuqoridagi (13) formulalardan ko'rinib turibdiki, parallel ko'chirishda ikkinchi darajali hadlar oldidagi koeffitsientlar o'zgarmaydi. Agar $O'(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

sistamani qanoatlantirsa, (3) tenglamada birinchi darajali hadlar qatnashmaydi.

Ta'rif-11. Tekislikdagi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning koordinatalari (15)

sistamani qanoatlantirsa, u (11) tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziqning markazi deyiladi.

Tabiiyki, (15) sistema yagona echimga ega bo'lishi, cheksiz ko'p echimga ega bo'lishi yoki umuman echimga ega bo'lmasligi mumkin. Agar

$$a_{11}a_{22} - a_{21}^2 \neq 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, (15) sistema yagona echimga ega bo'ladi. Agar

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat o'rinli bo'lsa sistema cheksiz ko'p echimga,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{a_{13}}{a_{23}}$$

munosabat bajarilsa sistema echimga ega emas. Bularni e'tiborga olib, biz ikkinchi tartibli chiziqlarni uchta sinfga ajratamiz:

- a) yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar;
- b) cheksiz ko'p markazga ega bo'lgan chiziqlar;
- v) markazga ega bo'lmagan chiziqlar;

Biz quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bu erda $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$. belgilashlar kiritilgan. Yagona markazga ega chiziqlar uchun $\delta \neq 0$, yagona markazga ega bo'lmagan chiziqlar uchun $\delta = 0$. Chiziqlar cheksiz ko'p markazga ega bo'lishi uchun $\Delta = 0$ tenglik bajarilishi kerak.

Uchinchi tartibli determinantni

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishda yozib olsak, oxirgi determinant δ ga tengdir. Agar $\delta = 0$ bo'lsa, birorta k soni uchun

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

munosabat bajariladi. Bu tenglikni hisobga olib

$$\Delta = (a_{13} - ka_{23}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar $\Delta = 0$ tenglik ham bajarilsa

$$a_{13} - k a_{23} = 0 \quad \text{va} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

tengliklardan kamida bittasi o'rinli bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisi o'rinli bulsa

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k \text{ munosabatdan} \quad \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k \text{ munosabat kelib chiqadi. Agar}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

bulsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = k$ va $\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}$ tengliklardan

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

munosabat kelib chikadi. Demak $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ tengliklarning bir vaqtda bajarilishi

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

shartga teng kuchlidir. Natijada biz quyidagi tasdiqni hosil qilamiz:

Tasdiq-1 Ikkinchi tartibli chiziq

a) $\delta \neq 0$ bo'lsa yagona markazga ega,

b) $\delta = 0$ va $\Delta = 0$ bo'lsa cheksiz ko'p markazga ega va markazlar to'plami bitta to'g'ri chizikni tashkil etadi;

v) $\delta = 0$ va $\Delta \neq 0$ bo'lsa markazga ega emas.

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQ VA TO'G'RI CHIZIQNING O'ZARO VAZIYATI

Bizga (1) tenglama bilan aniqlangan ikkinchi tartibli chiziq va

$$\begin{aligned}x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt\end{aligned}\quad (2)$$

parametrik tenglamalar yordamida ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziq va ikkinchi tartibli chiziqning kesishish nuqtalarini topish uchun (2) ifodalarni (11) ga qo'yamiz. Natijada quyidagi

$$\begin{aligned}& (a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2)t^2 + \\ & 2(a_{11}lx_0 + a_{12}(ly_0 + mx_0) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m)t + \\ & + F(x_0, y_0) = 0\end{aligned}\quad (3)$$

kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada ikkinchi darajali had oldidagi ifoda to'g'ri chiziqning yo'nalishiga bog'liq xolos. Ba'zi yo'nalishlar uchun bu ifoda nolga teng bo'ladi va yuqoridagi tenglama chiziqli tenglamaga aylanadi. Ba'zi yo'nalishlar uchun bu ifoda nolga teng emas va yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo'ladi.

Ta'rif- Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalish uchun

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \quad (4)$$

tenglik bajarilsa, bu yo'nalish asimptotik yo'nalish,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0 \quad (5)$$

munosabat bajarilsa noasimptotik yo'nalish deyiladi.

To'g'ri chiziqning yo'nalishi noasimptotik bo'lsa, yuqoridagi tenglama kvadrat tenglama bo'ladi. Demak bu to'g'ri chiziq (11) chiziq bilan ikkita yoki bitta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin. Noasimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan bitta nuqtada kesishsa, u urinma deb ataladi.

To'g'ri chiziqning yo'nalishi asimptotik bo'lsa, yuqoridagi tenglama chiziqli tenglama bo'ladi. Demak bu holda to'g'ri chiziq (11) bilan bitta nuqtada kesishadi, yoki to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari (11)ga tegishli bo'ladi. Agar ikkinchi darajali had koeffisienti nolga teng bo'lib, ozod had noldan farqli bo'lsa, to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmaydi. Asimptotik yo'nalishdagi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziq bilan kesishmasa u ikkinchi tartibli chiziq uchun asimptota deyiladi.

Biz

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

tenglamada $\ell \neq 0$ bo'lsa, $k = \frac{m}{\ell}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

ko'rinishda, agar $m \neq 0$ bo'lsa, $k = \frac{\ell}{m}$ belgilash kiritib uni

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$$

ko'rinishda yozamiz. Ikkala holda ham diskriminant uchun

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

tenglik o'rinli. Demak $\delta > 0$ bo'lsa asimptotik yo'nalish mavjud emas. Bu holda (1) chiziq elliptik chiziq deyiladi, agar $\delta = 0$ bo'lsa, asimptotik yo'nalish bitta va bu holda (1) chiziq parabolik, $\delta < 0$ bo'lsa ikkita asimptotik yo'nalish mavjud, chiziq esa giperbolik chiziq deyiladi.

Yuqoridagi (11) tenglamadagi birinchi darajali had oldidagi koeffitsient

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x + (a_{12}\ell + a_{22}m)y + a_{13}\ell + a_{22}m = 0 \quad (6)$$

ko'rinishga ega. Agar

$$\begin{aligned} a_{11}\ell + a_{12}m &= 0 \\ a_{21}\ell + a_{22}m &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

tengliklar bir vaqtda bajarilmasa, (113) tenglama to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

Berilgan $\{\ell, m\}$ yo'nalish uchun (114) tengliklar bajarilsa, $\{\ell, m\}$ yo'nalish maxsus

yo'nalish deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziq uchun $\delta \neq 0$ bo'lsa, (114) sistema faqat trivial echimga ega va demak yagona markazga ega bo'lgan chiziqlar uchun maxsus yo'nalishlar yo'q.

Ta'rif-1 Maxsus bo'lmagan $\{\ell, m\}$ yo'nalish uchun (113) tenglama aniqlovchi to'g'ri chiziq ikkinchi tartibli chiziqning $\{\ell, m\}$ yo'nalishga qo'shma diametri deb ataladi.

Tekshirish uchun savollar

Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishda beriladi?

Ikkinchi tartibli chiziq markazi qanday topiladi?

Asimptotik yo'nalish deb qanday yo'nalishga aytiladi?

Noasimptotik yo'nalish deb qanday yo'nalishga aytiladi?

Ikkinchi tartibli chiziq urinmasi deb nimaga aytiladi?

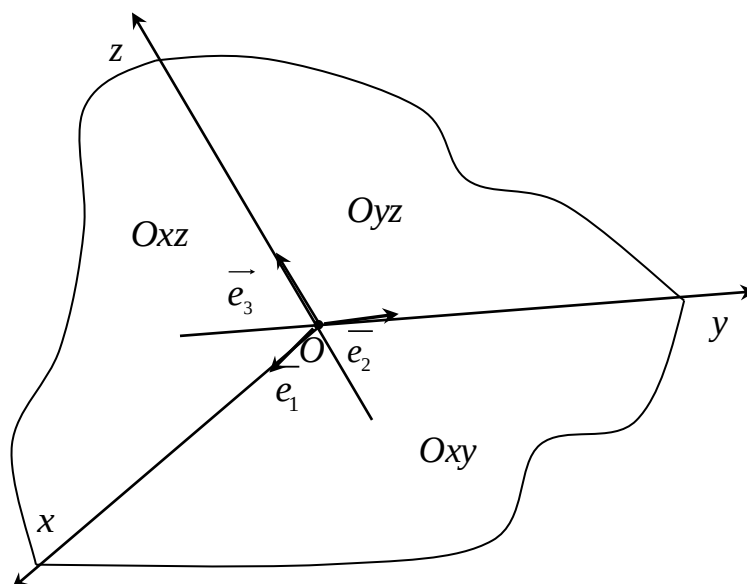
Ikkinchi tartibli chiziq asimptotasi deb nimaga aytiladi?

Ikkinchi tartibli chiziqning turlari qanday?

FAZODA AFFIN VA TO'G'RI BURCHAKLI DEKART KOORDINATALAR SISTEMASI

Koordinatalar sistemasi tekislikda qanday kiritilgan bulsa, fazoda xam shu usulda kiritiladi. Aniqrog'i, koordinatalarning affin sistemasi (affin reper) biror O nuqta va shu nuqtadan kuyilgan ma'lum tartibda olingan uchta nokomplanar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar sistemasidan iborat, bu sistemani $B(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ kurinishda belgilaymiz. O nuqtadan utib, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar bilan aniklanadigan tugri chiziklar mos ravishda Ox, Oy, Oz deb belgilab, ular koordinata uklari, birinchisi abtsissalar uki, ikkinchisi ordinatalar uki va nixoyat, uchinchisi applikatalar uki deb ataladi.

Bu uklarning xar ikkitasi koordinata tekisliklari bilan aniklanadigan uchta tekislik xOu , xOz , uOz , deb belgilab , ular koordinata tekisliklari deb ataladi (1- chizma) .



1-chizma

B sistema berilganda , fazodagi xar bir M nuqtaga bir OM vektorini doimo mos keltirish mumkin , ya`ni boshi koordinatalar boshida , oxiri esa berilgan M nuqtada bulgan vektorni mos keltiradi.

$\overrightarrow{OM}$ vektorning koordinatalari (x, u, z) bulsa , u xolda bu uchta x, u, z son M nuqtasining affin reperdagi koordinatalari buladi.

$$\overrightarrow{OM} (x, u, z) \Leftrightarrow M(x, u, z)$$

Demak , fazo nuqtalari tuplami bilan ma`lum tartibda oligan xakikiy sonlar uchliklari tuplami orasida biektiv moslik mavjud .

Berilgan nuqtalar koordinatalarini topish uchun shu nuqta radius- vektorining koordinatalarini topish kifoya va aksincha. Masalan, 156- chizmada koordinatalari $(2; 3; 2)$ bulgan nuqtani yasash usuli kursatilgan.

Umuman, $M(a, b, c)$ nuqtani yasash uchun , ya`ni

$$\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$$

vektorning oxirini topish uchun quyidagi koidadan foydalaniladi; koordinatalar boshidan Ox UK buyicha $\overrightarrow{ae_1}$ vektor, uning oxiridan Oy ukka parallel xolda $\overrightarrow{be_2}$ vektor kuyiladi, sungra uning oxiridan $\overrightarrow{ce_3}$ vektor yasalsa, shu vektorning oxiri izlangan nuqta buladi.

Uchta koordinata tekisligi birgalikda fazoni 8 kismga ajratadi, ularning har biri *oktantalar* deb ataladi. Quyidagi jadvalda oktantalar va undagi koordinatalarningishoralari berilgan.

oktantalar koordinatalar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	-
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

Kesmani berilgan nisbatda bulish

Bioror affin reperda $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ($M_1 \neq M_2$) nuqtalar va biror xakikiy

λ ($\lambda \neq -1$) son berilgan bulsin.

Ta`rif M nuqta uchun

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}$$

Shart bajarilsa, M nuqta M_1M_2 kesmani λ nisbatda buladi deyiladi.

M_1, M_2 nuqtalarning koordinatalari orkali M nuqtaning x, u, z koordinatalarini topaylik. (2) ga asosan

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = (x - x_1)\overrightarrow{e_1} + (u - u_1)\overrightarrow{e_2} + (z - z_1)\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{M_1M} (x-x_1, y-y_1, z-z_1).$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - y)\overrightarrow{e_2} + (z_2 - z)\overrightarrow{e_3},$$

$$\overrightarrow{MM_2} (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

Bu ufodalarni (3) ga kuyib va $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ning chizikli erkliligini e'tiborga olsak,

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x), u - u_1 = \lambda (u_2 - u), z - z_1 = \lambda (z_2 - z).$$

Bulardan

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, u = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (4)$$

Berilgan kesmani berilgan nisbatda buluvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulalari shulardir. M nuqta M_1M_2 kesmaning urtasi bulsa, (4) formulalar kuydagi kurinishni oladi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (5)$$

Bu formulalar kesma urtasining koordinatalarini topish formulalaridir.

Misol : B ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) affin reperda A(2, 3, -1),

V(3, 0 -1), S(1, 1, 1) nuqtalarini yasab, AVS uchburchak ogirlik markazining (medianalarning kesishgan nuqtasi) koordinatalarini toping.

Echish.

$$A(2, 3 -1) \Rightarrow \vec{OA} (2, 3, -1) \Rightarrow \vec{OA} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3,$$

$$V(3, 0, -1) \Rightarrow \vec{OB} (3, 0, -1) \Rightarrow \vec{OB} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_3,$$

$$S(1, 1, 1) \Rightarrow \vec{OC} (1, 1, 1) \Rightarrow \vec{OC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

A, V, S nuqtalarini yasash natijasida 157- chizmadagi AVS uchburchak xosil kilinadi. VS kesmaning urtasida D ning koordinatalarini topaylik.

$$x = \frac{3 + 1}{2} = 2, u = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$z = \frac{-1 + 1}{2} = 0, D = (2, \frac{1}{2}, 0).$$

Medianalarning kesishgan nuqtasi ADni A dan boshlab $\lambda = 2:1$ nisbatda bulgani uchun izlagan N nuqta AD kesmani $\lambda = 2:1$ nisbatda buladi, ya'ni

$$x = \frac{2+2*2}{1+2} = 2, \quad y = \frac{3+2*\frac{1}{2}}{1+2} = \frac{4}{3}, \quad z = \frac{-1+2*0}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

$$N(2, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}).$$

FAZODA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKNING O'Z-ARO VAZIYATI

Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda bizga ℓ to'g'ri chiziq berilgan bo'sa, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektor ℓ to'g'ri chiziqqa parallel vektorlardan bittasi bo'lsin, $M(x_0, y_0, z_0)$ esa to'g'ri chiziqqa tegishli birorta nuqta bo'lsin. Berilgan $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtaning radius-vektorini r_0 bilan belgilasak, fazoda radius-vektori $\vec{r}$ bo'lgan $M(x, y, z)$ nuqtaning to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishi $\vec{r} - \vec{r}_0$ va $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ vektorlarning parallelligiga teng kuchlidir. Bu shartni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + at \tag{1}$$

ko'rinishda yozib, to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi tenglamasini olamiz. Bu yerda t parametr $-\infty$ dan ∞ gacha o'zgarganda $\vec{r}$ vektor oxiri ℓ to'g'ri chiziq nuqtalarini hosil qiladi. Yuqoridagi tenglamani koordinatalar orqali yozsak

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t, \quad z = z_0 + a_3 t$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tenglamalar to'g'ri chiziqning parametric tenglamalari deyiladi. Agar bu tenglamalardan t ni yo'qotsak

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{2}$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglama ℓ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Fazoda radius-vektorlari $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ bo'lgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan

bo'lsa, bu nuqtalardan o'tgan ℓ to'g'ri chiziq uchun $\overline{r_2} - \overline{r_1}$ vektor yo'naltiruvchi vektor bo'ladi. Yuqoridagi (1) tenglamadagi vektor o'rniga $\overline{r_2} - \overline{r_1}$ vektorni qo'ysak, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta sifatida $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtani olsak ℓ to'g'ri chiziqning vektor ko'rinishdagi parametrik tenglamasini

$$\underline{\overline{r} = \overline{r_1} + (\overline{r_2} - \overline{r_1})t} \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Agar (3) tenglamada t parametrni yo'qotib uni koordinatlar orqali yozsak ℓ to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (4)$$

ko'rinishda hosil qilamiz.

To'g'ri chiziq ikkita tekislikning umumiy qismidir

Bizga ℓ to'g'ri chiziq kanonik

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama yordamida berilgan bo'lsin. Bu tenglamadan quyidagi ikkita tenglamalarni hosil qilamiz

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad , \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (5)$$

Bu tenglamalarni

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0 \quad , \quad a_3(y - y_0) - a_2(z - z_0) = 0$$

ko'rinishda yozsak ℓ to'g'ri chiziq

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0 \quad \text{va} \quad a_3(y - y_0) - a_2(z - z_0) = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi tekisliklarning kesishishidan iborat bo'lishini ko'ramiz. Agar bizga ikkita α va β tekisliklar

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad \text{va} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

tenglamalar bilan berilib

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

matrisaning rangi 2ga teng bo'lsa, ular parallel bo'lmaydi va birorta ℓ to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun uning birorta nuqtasini va bitta yo'naltiruvchi vektorini bilishimiz etarli. Biz koordinatalari

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani topib, ℓ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini olamiz, chunki bu vektor ko'paytma ℓ to'g'ri chiziqqa paralleldir.

To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyati

Bizga ℓ to'g'ri chiziq

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

tenglama bilan, tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa, ularning tenglamalari bo'yicha o'zaro vaziyatini aniqlamoqchimiz.

Tekislik va to'g'ri chiziq orasidagi burchak to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori va tekislik normal vektori orasidagi burchakning $\frac{\pi}{2}$ gacha bo'lgan to'ldiruvchisiga tengdir, ya'ni agar $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ va $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektorlar orasidagi burchak ψ ga teng bo'lsa, tekislik va to'g'ri chiziq orasidagi φ burchak $\frac{\pi}{2} - \psi$ ga tengdir. Bu burchak

$$\sin \varphi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Tekislik va to'g'ri chiziqning parallellik sharti

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

tenglikga, perpendikulyarlik sharti esa

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}$$

munosabatga teng kuchlidir.

Agar

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad \text{va} \quad Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$$

tengliklar bajarilsa ℓ to'g'ri chiziq α tekislikda yotadi.

NUQTADAN TO'G'RI CHIZIQQACHA BO'LGAN MASOFA VA IKKI AYQASH TO'G'RI CHIZIQLAR ORASIDAGI MASOFA

Fazoda to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyati

Bizga ikkita ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{va} \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

kanonik tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Bu tenglamalarni vektor ko'rinishda yozsak ular

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t \quad \text{va} \quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}s$$

ko'rinishlarga keladi.

Parallellik. Bu to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotib kesishmasa ular parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi. Agar biz uchta $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{M_1M_2}$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning bir tekislikda yotishi shartini yozsak

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. To'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaganligi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro kollinear emas.

Ayqash to'g'ri chiziqlar. To'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa ular ayqash to'g'ri chiziqlar deyiladi. Bu holda $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{M_1M_2}$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar komplanar bo'lmaganligi uchun

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa $\overline{r_2} - \overline{r_1} = \overline{M_1 M_2}$, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar komplanar bo'ladi,

$\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar esa kollinear emas.

Fazoda nuqtadan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofani hisoblash

Bizga fazoda ℓ to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta berilgan bo'lsin. Biz bilamizki to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orqali bitta tekislik o'tkazish mumkin. Buning uchun biz to'g'ri chiziqning tekislikdagi tenglamasini va nuqtaning tekislikdagi koordinatalarini bilishimiz kerak. Lekin bu ish har doim qulay bo'lmaganini uchun biz bevosita ℓ to'g'ri chiziqning

$$\overline{r} = \overline{r_0} + at$$

tenglamasidan foydalanmoqchimiz. Bizga to'g'ri chiziqning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va uning yo'naltiruvchi $\overline{a}$ vektori ma'lum. Agar N nuqta ℓ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lib, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va N nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq ℓ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va N nuqtalar orasidagi masofa $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofadir. Biz $\overline{NM_1}$ vektorni

$$\overline{NM_1} = d\overline{e_1}$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda $d = |\overline{NM_1}|$, $\overline{e_1}$ esa $\overline{NM_1}$ vektor bilan bir xil yo'nalishga ega bo'lgan birlik vektordir. Xuddi shunday $\overline{a}$ vektorni

$$\overline{a} = |\overline{a}|\overline{e_2}$$

ko'rinishda yozib, $\overline{NM_1}$ va $\overline{a}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi uchun

$$[\overline{NM_1}, \overline{a}] = d|\overline{a}|[\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikdan

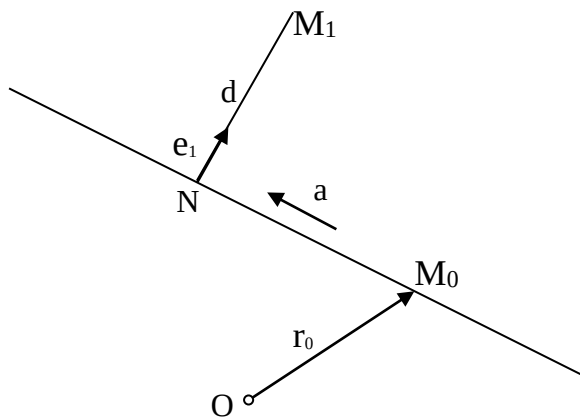
$$d = \frac{[\overline{NM_1}, \overline{a}]}{|\overline{a}|}$$

formulani hosil qilamiz. Lekin bu formulada N nuqta koordinatalari noma'lum bo'lganligi uchun biz undan bevosita foydalana olmaymiz. Lekin chizmadan kurinib turibdiki, biz $\overline{NM_1}$ vektorni

$$\overline{NM_1} = \overline{r_1} - (\overline{r_0} + \overline{at_1})$$

ko'rinishda yoza olamiz. Bu yerda t_1 - parametrning N nuqtaga mos keluvchi qiymatidir. Endi bu ifodani yo'qoridagi formulaga qo'yib va $\overline{at_1}$, $\overline{a}$ vektorlarning vektor kupaytmasi nol' vektor ekanligini hisobga olsak

$$d = \frac{\left| \left[\overline{r_1} - \overline{r_0}, \overline{a} \right] \right|}{\left| \overline{a} \right|}$$



Chizma-1

formulani olamiz. Bu formulani koordinatalar orqali yozsak, u

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

ko'rinishga keladi.

Ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

Biz ikkita

$$\overline{r} = \overline{r_1} + \overline{at} \quad \text{va} \quad \overline{r} = \overline{r_2} + \overline{bs}$$

tenglamalar bilan berilgan ℓ_1, ℓ_2 ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani hisoblash formulasini keltirib chiqarmoqchimiz. Ikkita ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa

$$d = \inf d(A, B), A \in \ell_1, B \in \ell_2$$

formula bo'yicha aniqlanadi. Bu yerda $d(A, B)$ - A va B nuqtalar orasidagi masofadir. Agar to'g'ri chiziqlar kesishsa ular orasidagi masofa nolga teng bo'ladi. Parallel ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlar

orasidagi masofani hisoblash uchun bitta $A \in \ell_1$ no'qtani olib undan ℓ_2 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash etarlidir. To'g'ri chiziqlar ayqash bo'lgan holda biz avvalo mos ravishda ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lgan A_0 va B_0 nuqtalar mavjud bo'lib, bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun biz $\overline{A_0 B_0}$ vektorni

$$\overline{A_0 B_0} = (\overline{r_2} + \overline{b} s_0) - (\overline{r_1} + \overline{a} t_0)$$

ko'rinishda yozib, uning $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarga perpendikulyarlik shartlarini yozamiz. Bu shartlarni skalyar ko'paytma orqali yozsak, ular

$$\begin{aligned} (\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a}) + (\overline{a}, \overline{b}) s_0 - (\overline{a}, \overline{a}) t_0 &= 0 \\ (\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{b}) + (\overline{b}, \overline{b}) s_0 - (\overline{a}, \overline{b}) t_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ko'rinishga keladi. Bu tengliklar s_0, t_0 noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasidan iboratdir. Bu sistemaning asosiy determinanti Δ noldan farqli, chunki

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\overline{a}, \overline{a}) & (\overline{a}, \overline{b}) \\ (\overline{a}, \overline{b}) & (\overline{b}, \overline{b}) \end{vmatrix} = [\overline{a}, \overline{b}]^2 > 0$$

munosabat o'rinlidir. Demak (5) sistema yagona echimga ega, ya'ni (A_0, B_0) juftlik yagonadir. Endi $A_0 B_0$ kesma uzunligi to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaga tengligini ko'rsatamiz. Buning uchun mos ravishda ℓ_1, ℓ_2 to'g'ri chiziqlarga tegishli va radius – vektorlari

$$\overline{r_1} + \overline{a} t, \quad \overline{r_2} + \overline{b} s$$

vektorlardan iborat A, B nuqtalar uchun

$$|AB| \geq |A_0 B_0|$$

tengsizlikni isbotlaymiz.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun $\overline{AB}$ vektorni

$$\overline{AB} = (\overline{r_2} - \overline{r_1}) + (\overline{b} s - \overline{a} t) = (\overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b} s_0 - \overline{a} t_0) + (s - s_0) \overline{b} + (t - t_0) \overline{a}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu ifodada

$$\overline{A_0 B_0} = \overline{r_2} - \overline{r_1} + \overline{b} s_0 - \overline{a} t_0$$

tenglik o'rinli. Ikki o'zaro perpendikulyar $\overline{p}, \overline{q}$ vektorlar uchun

$$(\bar{p} + \bar{q})^2 = \bar{p}^2 + \bar{q}^2$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglik umumlashgan Pifagor teoremasi deyiladi.

Bu tenglikni

$$\bar{p} = \overline{A_0 B_0}, \quad \bar{q} = (s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}$$

vektorlar uchun yozsak

$$\overline{AB}^2 = (\bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0)^2 + [(s - s_0)\bar{b} + (t - t_0)\bar{a}]^2$$

tenglikni olamiz. Bu tenglikdan esa

$$\overline{AB}^2 \geq (\bar{r}_2 - \bar{r}_1 + \bar{b}s_0 - \bar{a}t_0)^2 = \overline{A_0 B_0}^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Endi $A_0 B_0$ kesma uzunligini hisoblash uchun formula

keltirib chiqaramiz. Shu maqsadda $\overline{A_0 B_0}, \bar{a}, \bar{b}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini

tekshiramiz. Aralash ko'paytma moduli uchun

$$|\overline{A_0 B_0} \bar{a} \bar{b}| = |A_0 B_0| \cdot |\bar{a}, \bar{b}|$$

tenglik o'rinli ekanligini bilamiz. Bundan esa

$$d = |A_0 B_0| = \frac{|\overline{A_0 B_0} \bar{a} \bar{b}|}{|\bar{a}, \bar{b}|}$$

munosabatni olamiz. Aralash ko'paytmadagi $\overline{A_0 B_0}$ vektorni

$$\overline{A_0 B_0} = \overline{A_0 A_1} + \overline{A_1 B_1} + \overline{B_1 B_0}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda $A_1 \in \ell_1, A_2 \in \ell_2$ va $\overline{OA_1} = \bar{r}_1, \overline{OA_2} = \bar{r}_2$. Shuning uchun

$\overline{A_0 A_1}$ vektor $\bar{a}$ vektorga, $\overline{B_0 B_1}$ vektor esa $\bar{b}$ vektorga paralleldir. Bularni hisobga olsak

$$d = \frac{|\overline{A_1 B_1} \bar{a} \bar{b}|}{|\bar{a}, \bar{b}|}$$

formula kelib chiqadi. Bu formulani koordinatalar yordamida yozsak, u

$$d = \frac{\text{abs} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

ko'rinishga keladi.

IKKINCHI TARTIBLI SILINDRIK VA KONUS SIRT-LAR

Tayanich tushunchalar: silindrik sirt, silindrik sirt yonaltiruvchisi, silindrik sirt yasovchilari, silindrik sirt tenglamasi, silindrik sirt turlari, konus sirt, konus sirt tarifi, tenglamasi, tekisliklar bilan kesimlari.

Biror α tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq hamda shu tekislikka parallel bo'lmagan l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

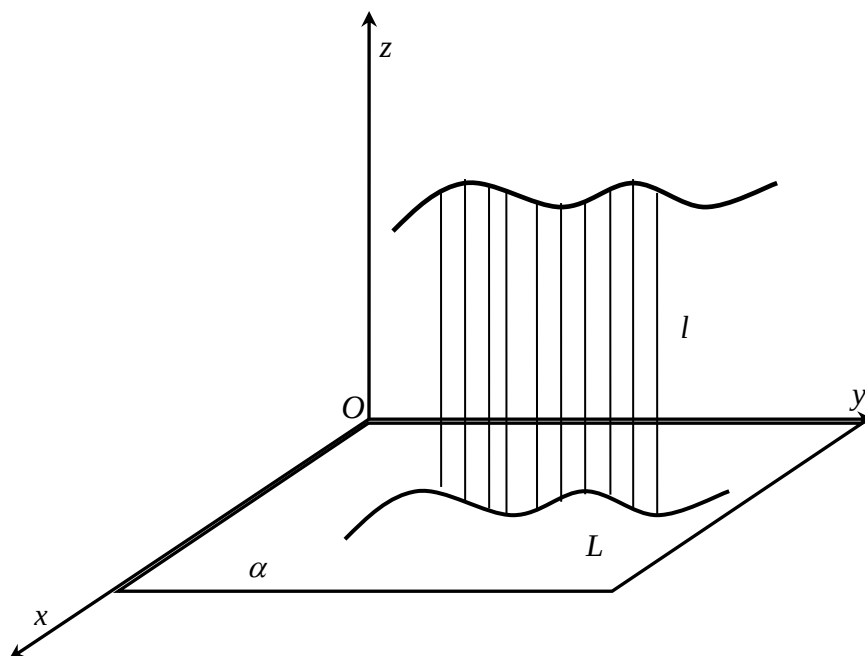
Ta'rif-1. l to'g'ri chiziqqa parallel va L chiziq bilan kesishuvchi fazodagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami *ikkinchi tartibli silindrik sirt* deb ataladi.

Ta'rifda qatnashayotgan l chiziq shu silindrik sirtning yo'naltiruvchisi, to'g'ri chiziqlar esa uning yasovchilari deyiladi.

Ta'rifdan foydalanib, affin koordinatalar sistemasida silindrik sirt tenglamasini keltirib chiqaraylik. Soddalik uchun, yo'naltiruvchi chiziqni Oxy tekislikda olamiz:

$$L: F(x, y) = 0 \quad (1)$$

l to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$ (1-rasm).



1-rasm

Ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani olamiz. Shu M nuqtadan o'tgan yasovchining Oxy tekislik bilan kesishgan nuqtasi $M_1(x_1, y_1, 0)$ bo'lsin. U holda $\overrightarrow{MM_1}\{x_1 - x, y_1 - y, -z\}$ va $\overrightarrow{MM_1} \perp \vec{a}$, ya'ni

$\overrightarrow{MM_1} = \lambda \vec{a}$. Bundan: $x_1 - x = \lambda a_1$, $y_1 - y = \lambda a_2$, $-z = \lambda a_3$, ($a_3 \neq 0$) $-z = \lambda a_3$ dan λ ni topib, oldingi ikki tenglikka qo'yamiz

$$x_1 = x - \frac{a_1}{a_3} z, y_1 = y - \frac{a_2}{a_3} z \quad (2)$$

Ammo $M_1 \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$, demak

$$F\left(x - \frac{a_1}{a_3} z, y - \frac{a_2}{a_3} z\right) = 0 \quad (3)$$

Shunday qilib, (3) tenglama silindrik sirt tenglamasi.

Demak, yo'naltiruvchisi $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan, yasovchilari esa $\vec{a}$ vektorga parallel silindrik sirt tenglamasini hosil qilish uchun (1) dagi x, y o'rniga mos ravishda,

$x - \frac{a_1}{a_3} z, y - \frac{a_2}{a_3} z$ ifodalarni qo'yish kerak ekan. $\vec{a} \parallel Oz$ dan iborat xususiy holda

$\vec{a} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{a} \in \{0, 0, a_3\}$ va (3) tenglama ushbu ko'rinishni oladi:

$$F(x, y) = 0$$

Demak yasovchilari Oz o'qqa parallel silindrik sirt tenglamasi yo'naltiruvchi tenglamasining o'zginasidir.

Masalan, Oxy tekislikda ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, bu tenglama fazoda yasovchilari Oz o'qqa parallel silindrik sirtidan iborat.

Ikkinchi tartibli silindrning yo'naltiruvchilari: ellips, giperbola, parabola, ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq, ikkita o'zaro parallel (ustma-ust tushmagan) to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lishi mumkin. Yo'naltiruvchilari shu chiziqlardan iborat ikkinchi tartibli silindrik sirtlar mos ravishda *elliptik silindr*, *giperbolik silindr*, *parabolik silindr*, *ikkita kesishuvchi tekislik*, *ikkita o'zaro parallel tekislik* (ustma-ust tushmagan) deb yuritiladi (oxirgi ikkitasi ba'zan *aynigan silindr* deb ham yuritiladi).

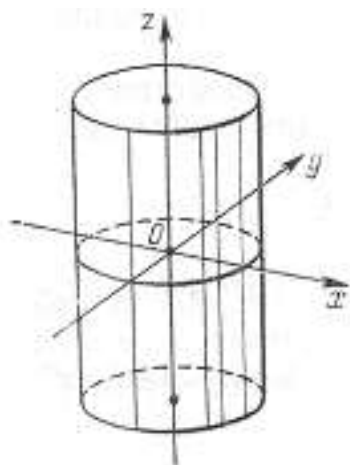
Ta'rif-2. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u *elliptik silindr* deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b > 0$, munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Elliptik silindr tenglamasida x, y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun koordinata boshi uning simmetriya markazi bo'ladi, koordinata tekisliklari esa simmetriya tekisliklaridir.

Silindrning simmetriya markazidan yasovchilarga parallel o'tadigan to'g'ri chiziq silindrning o'qi deyiladi. Elliptik silindrni (4) tenglama yordamida aniqlaganimizda uning o'qi Oz o'qi bilan ustma-ust tushadi. Bu sirtning o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi.



2-rasm.

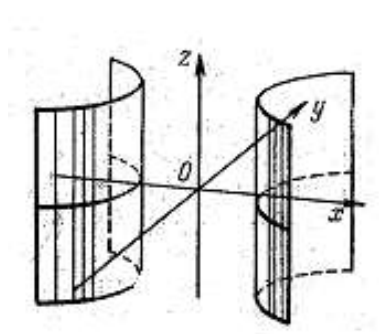
Ta'rif-3. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u giperbolik silindr deb ataladi. Bu tenglamada $a > 0$, $b > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Giperbolik silindr tenglamasida x, y o'zgaruvchilarning faqat ikkinchi darajalari qatnashganligi uchun elliptik silindr kabi koordinata boshi uning simmetriya markazi bo'ladi, koordinata tekisliklari esa simmetriya tekisliklaridir. Giperbolik silindrni uning o'qiga perpendikulyar tekisliklar

bilan kessak, kesimda (5) tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi.

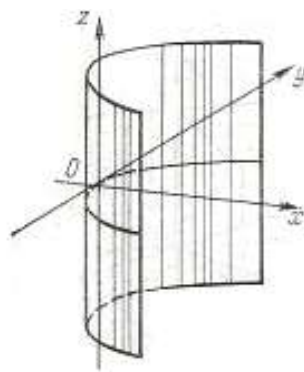


3-rasm.

Ta'rif-4. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$y^2 = 2px \quad p > 0 \quad (6)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u parabolik silindr deb ataladi..

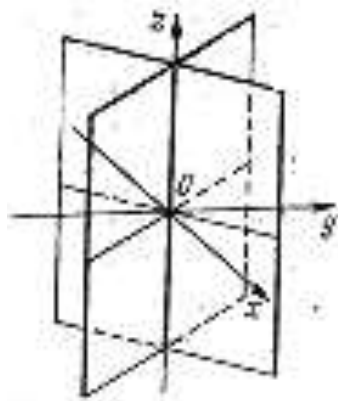


4-rasm

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (7)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikkita kesishuvchi tekislikdan iborat bo'ladi

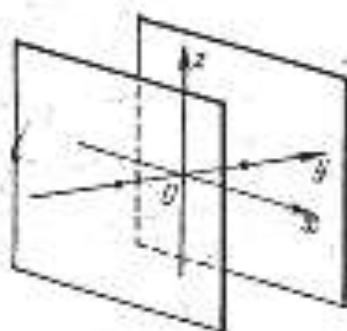


5-rasm

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$y^2 - b^2 = 0 \quad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikkita parallel tekislikdan iborat bo'ladi.



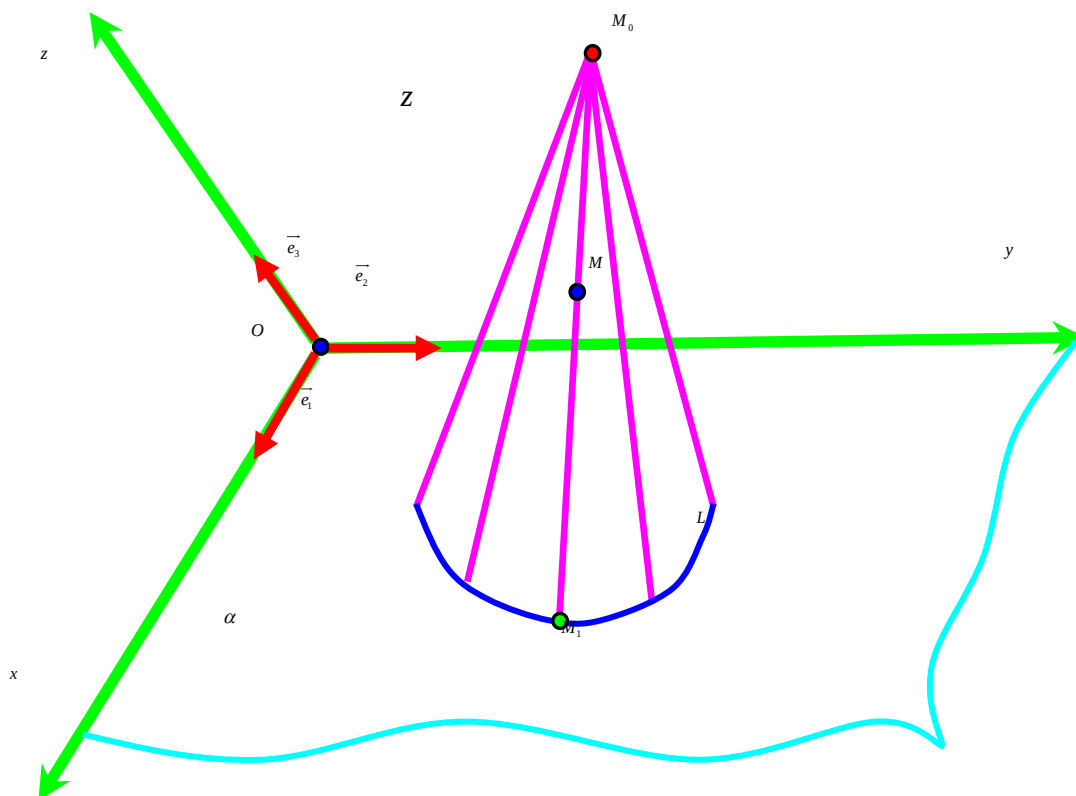
6-rasm

Biror α tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq va bu tekislikka tegishli bo'lmagan M_0 nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif- 2.Fazodagi M_0 nuqtadan o'tib, L ni kesib o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami *ikkinchi tartibli konus sirt* (yoki *konus*) deb ataladi. M_0 konus uchi, L chiziq esa konus yo'naltiruvchisi, konusni hosil qiluvchi to'g'ri chiziqlar uning *yasovchilari* deb ataladi.

Konus yasovchilari markazi konus uchida bo'lgan to'g'ri chiziqlar bog'lamiga tegishlidir.

Endi konus tenglamasini keltirib chiqaraylik. Affin koordinatalar sistemasini shunday tanlab olamizki, konusning yo'naltiruvchisi yotgan tekislik $\alpha = Oxy$ tekislikdan iborat bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta esa fazoning Oxy da yotmagan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (7-rasm).



7-rasm

$$L : F(x, y) = 0 \quad (9)$$

Konusning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik, u holda M_0M to'g'ri chiziq konusning yasovchisi bo'lib, L bilan (ya'ni Oxy tekislik bilan) kesishgan nuqtasi $M_1(x_1, y_1, 0)$ bo'lsin. M_0, M, M_1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ yoki $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow$

$$x_1 - x_0 = \lambda(x - x_0), y_1 - y_0 = \lambda(y - y_0), 0 - z = \lambda(z - z_0)$$

Yoki

$$x_1 = x_0 + \lambda(x - x_0), y_1 = y_0 + \lambda(y - y_0), z_0 + \lambda(z - z_0) = 0$$

So'nggi tenglikdan λ ni topib, avvalgi ikki tenglikka qo'yamiz:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, y_1 = y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0. \quad (10)$$

$$M_1 \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$$

$$F\left(x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0\right) = 0 \quad (11)$$

Ravshanki, konusga tegishli barcha nuqtalarning koordinatalari (11) ni qanoatlantiradi, konusga tegishli bo'lmagan hech qanday nuqtaning koordinatalari (11) ni qanoatlantirmaydi, demak, (11) ifoda konus tenglamasidir.

Misol-1 Dekart koordinatalar sistemasida yo'naltiruvchisi Oxy tekislikdagi $x^2 - 2y^2 = 1$ giperboladan iborat, uchi $(-1, 2, 1)$ nuqtadagi konus tenglamasini tuzing.

Yechilishii: $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1 = 0$, $x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = 1$.

Tenglamadagi x ni $\frac{x+1}{1-z} - 1 = \frac{x+z}{1-z}$ bilan, y ni $\frac{y-2}{1-z} + 2 = \frac{y-2z}{1-z}$ bilan almashtirsak,

$\left(\frac{x+z}{1-z}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2z}{1-z}\right)^2 - 1 = 0$ bo'lib, uni soddalashtirsak, konus tenglamasi hosil qilinadi:

$$x^2 - 2y^2 - 8z^2 + 8yz + 2xz + 2z - 1 = 0$$

Ta'rif-3. Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (12)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u konus deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Konus tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir. Bundan tashqari, agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta konusga tegishli bo'lsa, $O(0, 0, 0)$ va $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqdagi har bir nuqta konusga tegishlidir.

Tekshirish uchun savollar

1. Silindik sirt deb nimaga aytiladi?
2. Silindrik sirt yo'naltiruvchisi va yasovchisi nimadan iborat?
3. Silindrik sirt turlari?
4. Konus sirt deb qanday sirtga aytiladi?
5. Konus sirt tenglamasi qanday ko'rinishda beriladi?
6. Konus kesimlari qanday chiziqlardan iborat bo'ladi?

ELLIPSOID, GIPERBOLOIDLAR, PARABOLOIDLAR

Ellipsoid

Fazoda dekart koordinatalari sistemasi kiritilgan bo'lib, unda ikkinchi darajali $F(x, y, z)$ ko'phad yordamida berilgan

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

tenglamani qaraylik. Fazoda koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deb ataladi.

Ta'rif- Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa , u ellipsoid deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b \geq c > 0$ munosabat bajarilishi talab qilinadi.

Ellipsoid tenglamasidan ko'rinib turibdiki, u koordinata o'qlariga nisbatan

simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazidir.

Ellipsoidning shaklini chizish uchun uning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimini qaraymiz. Masalan, uni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| < c$ bo'lganda kesimda

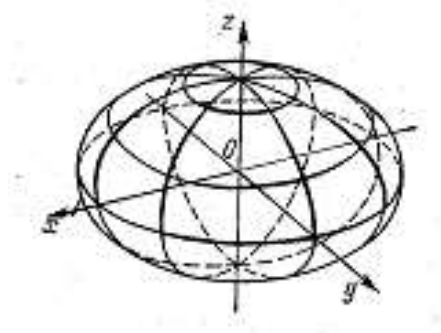
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu tenglamani

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Xuddi shunday, ellipsoidni Oxz, Oyz tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kessak, kesimda ellipslar hosil bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olib, ellipsoidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Giperboloidlar

Ta'rif- Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (3)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u ikki pallali giperboloid deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Ikki pallali giperboloid tenglamasidan ko'rish mumkinki, uchinchi o'zgaruvchi $z \leq c$ va $z \geq c$ tengsizliklarni qakoatlantirishi kerak. Demak ikki pallali giperboloid ikki qismdan iborat va uning nomi shakliga mosdir. Agar ikki pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $|h| > c$ bo'lganda kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

kattaliklarga tengdir.

Agar ikki pallali giperboloidni $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} + 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning

yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}, \quad a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Xuddi shunday ikki pallali giperboloidni $x = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2} + 1$$

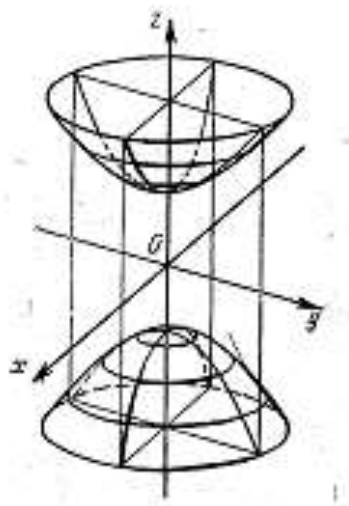
tenglama bilan aniqlanuvchi giperbola hosil bo'ladi. Bu giperbolaning

yarim o'qlari mos ravishda

$$c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}$$

kattaliklarga tengdir.

Bundan tashqari (3) tenglamadan ko'rish mumkinki, giperboloid koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo'ladi. Bularni hisobga olib uni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Ikki pallali giperboloid

Ta’rif- Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini
birorta dekart koordinatalari sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

ko’rinishda yozish mumkin bo’lsa , u bir pallali giperboloid deb ataladi. Bu tenglamada $a \geq b > 0$, $c > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Bir pallali giperboloidning tenglamasidan ko’rish mumkinki, u koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan, koordinata boshi esa uning simmetriya markazi bo’ladi. Bir pallali giperboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, har qanday h uchun kesimda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} + 1$$

tenglama bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo’ladi. Bu ellipsning

yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $h = 0$ bo'lsa, kesimda eng kichkina ellips hosil bo'ladi. Bu ellips bir pallali giperboloidning bo'g'zi deb ataladi.

Bir pallali giperboloidni $x = h$, $y = h$ tenglama bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, mos ravishda $|h| < a$ va $|h| < b$ bo'lganda kesimda

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$$

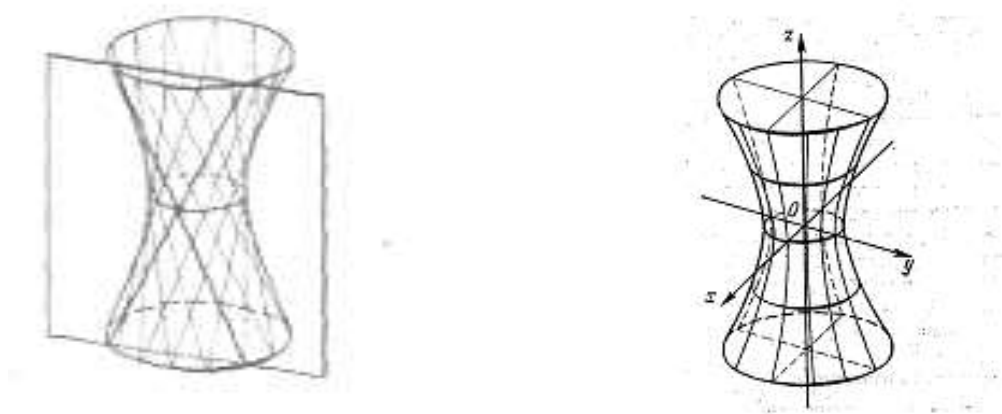
tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalar hosil bo'ladi. Bu giperbolalardan birinchisining yarim o'qlari mos ravishda

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}, \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$$

kattaliklarga tengdir. Agar $|h| = a$ yoki $|h| = b$ bo'lsa, kesimda mos ravishda

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{va} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar hosil bo'ladi. Bu faktlarni hisobga olib bir pallali giperboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin



Chizma-3

Ta'rif- Sirtning xar bir nuqtasidan shu sirta yotuvchi to'g'ri chiziq o'tsa, bunday sirt chiziqli sirt deyiladi.

Sirt chegaralagan bo'lsa, unda to'g'ri chiziq yotmaydi va shuning uchun u chiziqli sirt bo'lmaydi. Demak ellipsoid chiziqli sirt bo'lmaydi.

Teorema-1. Bir pallali giperboloid chiziqli sirt bo'lib, uning har bir nuqtasidan giperboloidda yotuvchi ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Isbot. Bir pallali giperboloidning $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidan $\{l, m, n\}$ yo'nalishdagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

$$\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned} \quad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq bir pallali giperboloidda yotishi uchun

$$\frac{(x_0 + lt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + mt)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + nt)^2}{c^2} = 1$$

tenglik t ning har qiymatida bajarilishi kerak. Bu tenglikda

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

munosabatni hisobga olsak

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0 \text{ va } \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} - \frac{nz_0}{c^2} = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Yo'nalishni aniqlovchi $\{l, m, n\}$ vektorning hamma koordinatalari nolga teng bo'lmaganlini uchun yuqordagi tenglikning birinchisidan $n \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Biz umumiylikni chegaralamasdan $n = c$ deb olamiz. Bundan esa l, m lar uchun

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1, \quad \frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

shartlarni olamiz. Agar biz

$$x_0 = x_1 + l \frac{z_0}{c}, \quad y_0 = y_1 + m \frac{z_0}{c} \quad (6)$$

tengliklar bilan $(x_1, y_1, 0)$ nuqtani aniqlasak

$$\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2} = 0 \quad (7)$$

tenglikni olamiz. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} & \frac{\left(x_1 + l \frac{z_0}{c}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y_1 + m \frac{z_0}{c}\right)^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \\ & + 2\left(\frac{lx_1}{a^2} + \frac{my_1}{b^2}\right) \frac{z_0}{c} + \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - 1\right) \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \end{aligned}$$

tenglikdan

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (8)$$

munosabat kelib chiqadi. Demak $(x_1, y_1, 0)$ nuqta giperboloidning bo'g'ziga tegishlidir. Yuqoridagi (6) tenglikdan

$$\frac{l}{m} = \frac{-a^2 y_1}{b^2 x_1}$$

munosabat kelib chiqadi. Biz agar

$$l = -\frac{a}{b} y_1 u, \quad m = \frac{b}{a} x_1 u$$

tengliklar bilan $\{l, m, c\}$ vektorning l, m koordinatalarini aniqlasak,

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = \left(\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \right) u^2$$

munosabatni hisobga olib (8) tenglikdan $u = \pm 1$ qiymatlarni topamiz. Demak biz qidirayotgan to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari

$$x = x_0 - u \frac{a}{b} y_1 t$$

$$y = y_0 + u \frac{b}{a} x_1 t$$

$$z = z_0 + ct$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlar $t = -\frac{z_0}{c}$ bo'lganda $(x_1, y_1, 0)$ nuqtadan

o'tadi. Haqiqatan ham (6) tengliklardan

$$x_1 = x_0 + u \frac{a}{b} y_1 \frac{z_0}{c}$$

$$y_1 = y_0 + u \frac{b}{a} x_1 \frac{z_0}{c}$$

munosabatlarni hosil qilish mumkin. Teorema isbotlandi.

Paraboloidlar

Ta'rif- Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini birorta dekart koordinatalari sistemasida

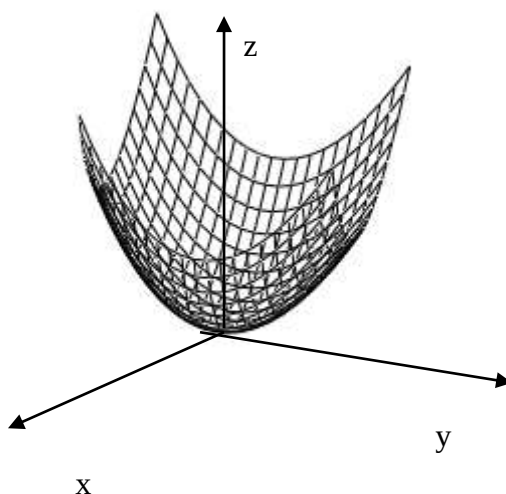
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (8)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa, u elliptik paraboloid deb ataladi. Bu tenglamada $p, q > 0$ munosabatlar bajarilishi talab qilinadi.

Elliptik paraboloidning tenglamasidan ko'rish mumkinki, koordinata boshi unga tegishli, yOz va xOz tekisliklari elliptik paraboloidning simmetriya tekisliklari bo'ladi. Elliptik paraboloidni $z = h$ tenglama bilan aniqlangan tekislik bilan kessak, $h > 0$ bo'lganda kesimda yarim o'qlari mos ravishda $\sqrt{2hp}$, $\sqrt{2hq}$ kattaliklarga teng bo'lgan ellips hosil bo'ladi. Elliptik paraboloidni $x = h$, $y = h$ tenglamalar bilan aniqlangan tekisliklar bilan kessak, kesimda fokal parametrlari mos ravishda p, q kattaliklarga teng bo'lgan parabolalar hosil bo'ladi. Bu parabolalarning uchlari mos ravishda

$\left(0, h, \frac{h^2}{2q}\right)$ va $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$ nuqtalarda joylashgan. Bu xossalarni hisobga olib, elliptik

paraboloidni chizmada tasvirlashimiz mumkin.



Chizma-4