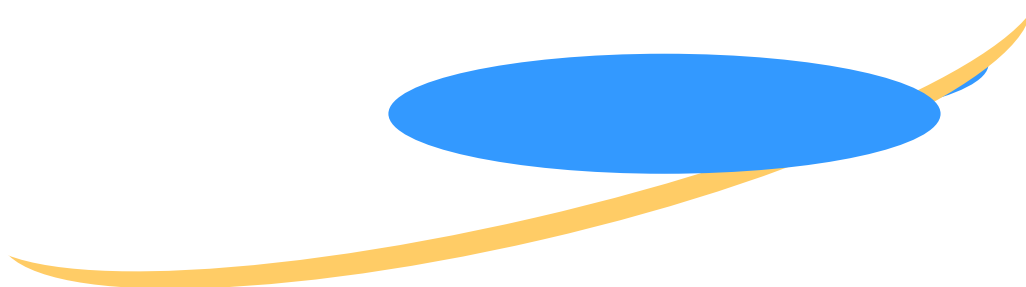


**O'ZBEKSTAN RESPUBLİKASI
XALIQ BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ
A'JİNİYaZ atındag'ı NO'KİS MA'MLEKETLİK
PEDAGOGİKALIQ İNSTİTUTİ**

A. Usakova, A. Kaldıbaeva

**MATEMATİKA PA'NİNEN
A'MELİY HA'M O'Z BETİNSHE JUMISLAR**

*(Biologiya ha'm adam tirishiligi iskerligin qorg'aw qa'nigeligi talabaları ushın)
metodikalıq qollanba*



NO'KIS-2011

Du'ziwshiler: A.Usakova, A.Kaldıbaeva

Usınılıp atırǵ'an qollanba tiyisli oqıw bag'darlamasına su'yengen halda -- biologiya ha'm adam tirishiligi iskerligin qorg'aw qa'nigeligi talabaları ushın jazılǵ'an bolıp, onda matematika pa'ni boyınsha ha'r bir a'meliy ha'm o'z betinshe jumıs ushın beriletug'ın misal ha'm ma'seleler, olardı sheshiw boyınsha ko'rsetpeler berilgen. Ha'r bir a'meliy ha'm o'z betinshe jumısqa 30 dan ibarat tapsırma berilgen bolıp, talaba tapsırmanı o'zinin' gruppı jurnalındag'ı ta'rtip nomeri boyınsha yamasa onın' birlik xanası boyınsha tan'laydı.

JUWAPLI REDAKTOR

Q.M.Qoshanov - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı filologiya ilimlerinin' kandidatı, professor

PIKIR BILDIRIWSHILER:

1. X.Allambergenov - Berdaq atındag'ı Qaraqalpaq ma'mleketlik universiteti algebra ha'm differentsial ten'lemeler kafedrası dotsenti.

2. Z.Saparov - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı ulıwma matematika kafedrası dotsenti.

Metodikalıq qollanba A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı O'qıw-metodikalıq Ken'esinin' qararı (4-yanvar' 2011-jılǵ'ı 6-sanlı) menen baspadan shıǵ'arıwǵ'a usınılg'an.

SO'Z BASI

Matematika kursının' tiykarg'ı maqseti ha'm wazıypası bolajaq oqıtıwshılarg'a matematikanın' tu'rli bo'limleri (matematikalıq analiz, algebra ha'm sanlar teoriyası, geometriya, itimallıqlar teoriyası, matematikalıq statistika ha'm t.b.) boyınsha teren' matematikalıq bilim beriw menen birge olardıń keleshektegi jumıs barısında a'meliy a'hmiyet beriwshı matematikalıq bilim ha'm ko'nlikpelerdi rawajlandırıwdan ibarat.

Bul kurs boyınsha talabalar bilimleri ha'm ko'nlikpelerine qoyılatug'ın talaplar to'mendegilerden ibarat: talabalar algebra ha'm geometriya ja'ne analitikalıq geometriya elementlerinen alıng'an bilimlerin, matematikalıq analiz elementlerin teoriyalıq ha'm a'meliy qollana biliwi kerek. Tuwındı, integral, sanlı ha'm funktsional qatarlar, ko'p o'zgeriwshili funktsiyalar teoriyası, differentsial ha'm integral esabı, analitikalıq funktsiyalar teoriyası haqqında anıq tu'sinikke iye bolıwi ha'm bulardan a'meliy ma'selelerdi sheshiwde paydalana biliwi kerek.

Bul pa'ndi u'yreniw ushın talaba orta mektep ha'm ka'sip bilimlendiriw oqıw otınlarında matematika kursı boyınsha jeterli bilimge iye bolıwı kerek. Bunnan tısqarı matematikalıq analiz (tuwındı, integral, kompleks sanlar teoriyası elementlerin), algebra (determinantlardı, ko'pag'zalılar teoriyasın, sızıqlı ten'lemeler sistemasın sheshiwdi), geometriya (tuwrı sızıq ha'm tegisliktin' o'z-ara jaylasıwın, maydan ha'm ko'lem tu'sinigin ha'm olardı esaplawdı) kursların biliwi kerek. Bunnan tısqarı talaba matematika ha'm ekonomika pa'nleri ushın fundamental pa'n wazıypasın atqaratug'ınlıg'ın biliwi lazım.

Pa'ndi oqıtıwdag'ı jan'a texnologiyalar. Matematika kursında plakatlardan, tarqatpa materiallardan, komp'yuterdan, ha'r qıylı grafiklerden ha'm basqa da ko'rgizbeli qurallardan paydalanıladı.

Tema: TEGISLIKTE DEKART KOORDINATALAR SISTEMASI.
Eki tochka arasindag'ı aralıq. Kesindini berilgen qatnasta bo'liw.
Tegisliktegi tuwrı sızıq ha'm olardın' ten'lemeleri.
Eki tuwrı sızıq arasindag'ı mu'yesh

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılardı matematikanın' tiykarg'ı bo'limlerinin' biri bolg'an analitikalıq geometriya elementleri menen ha'm olardın' a'meliyatta qollanıwı menen tanıstırıw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardın' elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. Tema boyınsha qollanılatug'ın formulalar ha'm olarg'a mısallar keltiriw.

Tiykarg'ı mazmunı:

1. Ko'sherdegi $A(\tilde{\alpha}_1)$ ha'm $B(\tilde{\alpha}_2)$ tochkalar arasindag'ı aralıq:

$$d = |\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1| = \sqrt{(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)^2} \quad (1)$$

2. Ko'sherdegi bag'ıtlang'an AV kesindinin' sha'm ası

$$\vec{AB} = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1 \quad (2)$$

3. Tegisliktegi $A(\tilde{\alpha}_1, y_1)$ ha'm $B(\tilde{\alpha}_2, y_2)$ tochkalar arasindag'ı aralıq:

$$d = \sqrt{(\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3)$$

4. Tegisliktegi bag'ıtlang'an kesindinin', yamasa bası $A(\tilde{\alpha}_1, y_1)$ ha'm aqırı

$B(\tilde{\alpha}_2, y_2)$ bolg'an $\vec{BA}$ vektordın' koordinata ko'sherlerindegi proektsiyaları:

$$np_x \vec{AB} = X = \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_1, \quad np_y \vec{AB} = Y = y_2 - y_1 \quad (4)$$

5. Kesindini berilgen qatnasta bo'lıw. $A(\tilde{\alpha}_1, y_1)$ ha'm $B(\tilde{\alpha}_2, y_2)$ tochkalar berilgen AB kesindini $AN : NB = \lambda$ qatnasında bo'liwshi $N(x, y)$ tochkalardın' koordinataları to'mendegi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{1 + \lambda} \quad (5)$$

formulalar menen anıqlanadı.

Dara jag'dayda kesindini ten' ekige, yag'nıy $\lambda = 1 : 1 = 1$ qatnasında bo'lgende

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (6)$$

6. To'belari $A(\tilde{o}_1, y_1), B(\tilde{o}_2, y_2), C(\tilde{o}_3, y_3), \dots, F(\tilde{o}_n, y_n)$ to'chkalarda bolg'an ko'pmu'yeshliktin' maydanı:

$$S = \pm \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right] \quad (7)$$

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ ko'rinishidagi an'latpa $\tilde{o}_1 y_2 - \tilde{o}_2 y_1$ ge ten' bolıp, 2-ta'rtpi determinant dep ataladı.

7. Tuwrı sıziqtın' mu'yesh koeffitsientli ten'lemesi

$$y = kx + b \quad (8)$$

k parametr tuwrı sıziqtın' Ox ko'sherinin' on' bag'ıtı menen jaylasqan mu'yeshı α nın' tangensine ten' bolıp ($k = tg \alpha$), tuwrı sıziqtın' mu'yesh koeffitsienti dep ataladı. Parametr v -tuwrı sıziqtın' Oy ko'sheri menen kesilisiw noqatının' ordinatası.

8. Tuwrı sıziqtın' ulıwma ten'lemesi:

$$Ax + By + C = 0$$

Dara jag'dayları:

a) $C = 0$ bolsa, $y = -\frac{A}{B}x$ - tuwrı sıziq koordinatalar basınan o'tedi;

b) $B = 0$ bolsa, $x = -\frac{C}{A} = a$ - tuwrı sıziq Oy ko'sherge parallel boladı;

v) $A = 0$ bolsa, $y = -\frac{C}{B} = b$ - tuwrı sıziq Ox ko'sherge parallel boladı;

g) $B = C = 0$ bolsa, $Ax = 0$ yamasa $x = 0$, tuwrı sıziq Oy ko'sherinen ibarat;

d) $A = C = 0$ bolsa, $By = 0$ yamasa $y = 0$, tuwrı sıziq Ox ko'sherinen ibarat;

9. Tuwrı sıziqtın' ko'sherlerden ajratqan kesindiler boyınsha ten'lemesi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (9)$$

Bunda a ha'm v - sanlar tuwrı sıziqtın' ko'sherlerden kesken noqatlarının' abstsissa ha'm ordinataları.

10. $y = k_1 x + b_1$ tuwrı sıziqtan $y = k_2 x + b_2$ tuwrı sıziqqa shekemgi, saat strelkasına qarsı bag'ıtta esaplanıwshı φ mu'yesh

$$tg \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (10)$$

formulası menen anıqlanadı.

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ha'm $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ten'lemeler menen berilgen tuwrı sıızıqlar ushın (10) formula to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Eki tuwrının' parallellik sha'rti: $k_1 = k_2$ yamasa $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, al perpendikulyarlıq sha'rti:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \text{ yamasa } A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

11. Berilgen $A(x_1, y_1)$ tochkadan o'tiwshi tuwrı sıızıqlar da'stesinin' ten'lemesi to'mendegishe jazıladı:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (11)$$

12. Berilgen eki $A(\tilde{\alpha}_1, y_1)$ ha'm $B(\tilde{\alpha}_2, y_2)$ tochkalardan o'tiwshi tuwrı sıızıqtın' ten'lemesi to'mendegishe jazıladı:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (12)$$

13. Parallel bolmag'an eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ha'm $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrı sıızıqlardıń kesilisiw tochkasın tabıw ushın olardıń ten'lemelerin birgelikte sheshıw kerek. Bunday jag'dayda

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

kesilisiw tochkasının' koordinataları boladı.

14. Tuwrı sıızıqtın' normal ten'lemesi to'mendegishe jazıladı.

$$x \cos \beta + y \sin \beta - \rho = 0 \quad (13)$$

Bunda s - koordinatalar basınan tuwrı sıızıqqa tu'sirilgen perpendikulyar (normal) uzınlıg'ı, β bolsa usı perpendikulyardıń Ox ko'sheri menen jasag'an mu'yeshı. Tuwrı sıızıqtın' $Ax + By + C = 0$ ulıwma ten'lemesin normal ko'rinske keltiriw ushın onıń barlıq ag'zaların

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

normallastırıwshı ko'beytiwshige ko'beytiw kerek. M nin' belgisi ten'lemedegi saltan' ag'za C nin' belgisine keri etip alınadı.

15. $(\tilde{o}_0; \acute{o}_0)$ tochkadan tuwrı sıziqqa shekemgi bolg'an d aralıqtı tabıw ushın tuwrı sıziqtın' normal ten'lemesinin' shep ta'repindegi o'zgeriwshi koordinatalardıń ornına $(\tilde{o}_0; \acute{o}_0)$ koordinataların qoyıp, payda bolg'an sannın' absolyut sha'm asın alamız, yag'nıy

$$d = |\tilde{o}_0 \tilde{n} \sin \beta + \acute{o}_0 \sin \beta - \rho| \quad (14)$$

yamasa

$$d = \frac{|\hat{A}\tilde{o}_0 + \hat{A}\acute{o}_0 + C|}{\sqrt{\hat{A}^2 + \hat{A}^2}} \quad (14')$$

16. $\hat{A}\tilde{o} + \hat{A}\acute{o} + \tilde{N} = 0$ ha'm $\hat{A}_1\tilde{o} + \hat{A}_1\acute{o} + \tilde{N}_1 = 0$ tuwrı sıziqlar arasındag' mu'yeshler

bissektrisaların' ten'lemeleri:

$$\frac{\hat{A}\tilde{o} + \hat{A}\acute{o} + C}{\sqrt{\hat{A}^2 + \hat{A}^2}} = \pm \frac{\hat{A}_1\tilde{o} + \hat{A}_1\acute{o} + C_1}{\sqrt{\hat{A}_1^2 + \hat{A}_1^2}} \quad (15)$$

17. Berilgen eki tuwrı sıziqtın' kesilisiw tochkasınan o'tiwshi tuwrı sıziqlar

da'stesinin' ten'lemesi:

$$\alpha(\hat{A}\tilde{o} + \hat{A}\acute{o} + \tilde{N}) + \beta(\hat{A}_1\tilde{o} + \hat{A}_1\acute{o} + \tilde{N}_1) = 0 \quad (16)$$

$\alpha = 1$ dep alıw mu'mkin.

Mısalılar

1. $\hat{A}(2;-5)$, $B(5;-1)$ tochkalar arasındag'ı aralıqtı tabın'.

Sheshiliwi: $\hat{A}\hat{A} = \sqrt{(\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formulası boyınsha bul tochkalar arasındag'ı

aralıq $\hat{A}\hat{A} = \sqrt{(5-2)^2 + ((-1)-(-5))^2} = \sqrt{9+16} = 5$

2. $\hat{A}B\tilde{N}$ u'shmu'yeshliklerinin' to'belerinin' koordinataları berilgen. $\hat{A}(13;14)$, $B(10;-6)$, $C(13;12)$. AB ha'm BC ta'replerinin' ten'lemesin du'zin'.

Sheshiliwi: (12) formula boyınsha

$$\frac{\acute{o}-4}{-10} = \frac{\tilde{o}-13}{-3} \Rightarrow -10(\tilde{o}-3) = -3(\acute{o}-4) \Rightarrow -10\tilde{o}+130 = -3\acute{o}+12 \Rightarrow -10\tilde{o}-3\acute{o}-118=0.$$

Bul AB ta'repinin' ten'lemesi.

Endi BC ta'repinin' ten'lemesin du'zeyik:

$$\frac{\tilde{o}-10}{13-10} = \frac{\acute{o}+6}{12+6} \Rightarrow \frac{\tilde{o}-10}{3} = \frac{\acute{o}+6}{18} \Rightarrow 18\tilde{o}-180 = 3\acute{o}+18 \Rightarrow 18\tilde{o}-3\acute{o}-198=0$$

3. Tuwrı sıziqtın' ten'lemesi $2\tilde{o}-8\acute{o}-16=0$, onın' koordinata ko'sherleri menen kesilisiw tochkasın tabın'.

Sheshliwi: Kesilisen tochkalardıń koordinataların tabıw ushın, berilgen tuwrı sızıq ten'lemesin tuwrı sızıqtın' koordinata ko'sherlerinen ajratqan kesindiler boyınsha ten'lemesin (9) formulag'a keltiremiz

$$\frac{\tilde{o}}{8} - \frac{o}{2} = 1$$

Demek koordinata ko'sherleri menen kesilisiw tochkaları: $\tilde{A}(8;0)$ ha'm $\tilde{A}(0;-2)$.

4. $\tilde{I}_1(4;2)$ ha'm $\tilde{I}_2(5;3)$ tochkalar arqalı o'tiwshi tuwrı sızıqtın' mu'yeshlik koeffitsientin tabın'.

Sheshliwi. (11) formula boyınsha $k = \frac{3-2}{5-4} = 1$. Bunnan $k = tg\alpha = 1$. Demek $\alpha = 45^\circ$.

5. Ox ko'sheri menen 45° mu'yesh jasadı $\tilde{I}(2;-3)$ tochka arqalı o'tiwshi tuwrı sızıq ten'lemesin du'zin'.

Sheshliwi: İzlenip atırg'an tuwrı sızıqtın' mu'yeshlik koeffitsienti $k = tg\alpha = tg45^\circ = 1$ ge ten'. (11) ten'lemege $x_1 = 2$; $y_1 = -3$ ma'nislerin qoyıp to'mendegi ten'lemege iye bolamız:

$$y + 3 = x - 2 \text{ yamasa } x - y - 5 = 0.$$

6. $5x - 2y + 4 = 0$ tuwrı sızıqtın' normal vektorın ko'rsetin'.

Sheshliwi: Normal vektor $\vec{N} = \{A; B\}$ ko'riniste berilgen tuwrı sızıq ten'lemesinde $\tilde{A} = 5$; $\tilde{B} = -2$. Sonın' ushın $\vec{N} = \{5; -2\}$.

7. $2x + y - 4 = 0$ ha'm $x - y + 1 = 0$ tuwrı sızıqlardıń kesilisiw tochkası arqalı o'tip $x + y - 5 = 0$ tuwrı sızıqqa perpendikulyar bolg'an tuwrı sızıq ten'lemesin du'zin'.

Sheshliwi: Da'slep eki tuwrı sızıqtın' kesilisiw tochkaların tabamız, bunın' ushın kesilisiw tochkasının' koordinataların $x_1; y_1$ dep alamız. Onda $\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4 = 0 \\ x_1 - y_1 + 1 = 0 \end{cases}$ sistemadan

$x_1 = 1$; $y_1 = 2$ ge iye bolamız. İzlenip atırg'an tuwrı sızıqtın' bag'ıtlang'an vektorı $\vec{\tilde{a}}$ sıpatında $x + y - 5 = 0$ tuwrı sızıqtın' normal vektorın alsa boladı. $1(\tilde{o} - 1) + 1(\tilde{o} - 2) = 0$ yamasa $x + y - 3 = 0$.

8. Tuwrı sızıqlar $2x + 3y + 10 = 0$ ha'm $4x - 5y - 5 = 0$ ten'lemeleri menen berilgen. Usı tuwrı sızıqlar ha'm $\tilde{I}(2;3)$ tochka arqalı o'tiwshi tuwrı sızıq ten'lemesin du'zin'.

Sheshliwi: Daslep berilgen tuwrı sızıqlardan o'tiwshi tuwrı sızıqlar da'stesi ten'lemesin du'zemiz. $2x + 3y + 10 + \lambda(4\tilde{o} - 5\tilde{o} - 5) = 0$ (*). Bul tuwrı sızıqlar da'stesinen

$\hat{I}$ (2;3) tochkasidan o'tiwshi tuwrı sızıqtı ajıratıp alıwımız kerek. Biz izlenip atırǵ'an tuwrı sızıq ten'lemesin M tochka koordinataları qanaatlandırıwı kerek. Sonın' ushın M tochka koordinataların (*) ten'lemege qoyamız: $4+9+10+\lambda(4\cdot 2-5\cdot 3-5)=0 \quad \lambda = \frac{23}{12}$. Bul ma'nisti (*) ten'lemege qoyıp izlenip atırǵ'an tuwrı sızıq ten'lemesin $116x-79y+5=0$

Tapsırmalar

1. San ko'sherinde $\hat{A}(-5)$, $\hat{A}(4)$ ha'm $\tilde{N}(-2)$ tochkalar jasalsın ha'm kesindilerdin' sol ko'sherdegi $\overline{\hat{A}\hat{A}}$, $\overline{\hat{A}\hat{C}}$ ha'm $\overline{\hat{A}\tilde{N}}$ sha'm aları tabılsın. $\overline{\hat{A}\hat{A}} + \overline{\hat{A}\tilde{N}} = \overline{\hat{A}\tilde{N}}$ ekenligi tekserilsin.
2. 1-tapsırma $\hat{A}(1)$, $\hat{A}(-4)$ ha'm $\tilde{N}(5)$ tochkalar ushın orınlansın.
3. Ushları $\hat{A}(-4; 2)$, $\hat{A}(0; -1)$ ha'm $\tilde{N}(3; 3)$ tochkalarda bolǵ'an u'shmu'yeshlik jasalsın ja'ne onın' perimetri ha'm mu'yeshleri anıqlansın.
4. Ushları $\hat{A}(-3; -2)$, $\hat{A}(0; -1)$ ha'm $\tilde{N}(-2; 5)$ tochkalarda bolǵ'an u'shmu'yeshliktin' tuwrı mu'yeshli ekenligi da'liyllensin.
5. $\hat{A}(-4; 0)$, $\hat{A}(-1; 4)$ tochkalar ha'm Oy ko'sherge salıstırǵ'anda og'an simmetriyalı bolǵ'an $\hat{A}_1$, $\hat{A}_1$ tochkalar jasalsın. $\hat{A}\hat{A}_1\hat{A}_1$ trapetsiyanın' perimetri esapplansın.
6. B tochka birinshi koordinatalar mu'yeshinin' bissektrisasına salıstırǵ'anda $\hat{A}(4; -1)$ tochkag'a simmetriyalı. AB nın' uzınlıǵ'ı tabılsın.
7. $\hat{A}(2; 1)$ tochkadan ha'm Oy ko'sherden ha'm 5 birlikke uzaqlasqan tochka tabılsın.
8. $\hat{A}(-2; 1)$ ham $\hat{A}(3; 6)$ tochkalar jasalsın ha'm AB kesindini $AN : NB = 3 : 2$ qatnasta bo'liwshi $N(\tilde{O}; \hat{O})$ tochka tabılsın.
9. Ushları $\hat{A}(2; 0)$, $B(5; 3)$ ha'm $C(2; 6)$ tochkalarda bolǵ'an u'shmu'yeshliktin' maydanı esaplan'sın.
10. Oy ko'sher menen $b = 3$ kesindi ajıratıp, Ox ko'sher menen 45° mu'yesh jasawshı tuwrı sızıq jasalsın. Usı tuwrı sızıqtın' ten'lemesi jazılsın.
11. Oy ko'sherden $b = -3$ kesindi ajıratıp, Ox ko'sher menen 60° mu'yesh jasawshı tuwrı sızıqlar jasalsın. Usı tuwrı sızıqtın' ten'lemesi jazılsın.

12. Koordinatalar basınan o'tip, Ox ko'sher menen 90^0 mu'yesh jasawshı tuwrı sızıqtın' ten'lemesi jazılsın.

13. Tuwrı sızıqlar arasındag'ı mu'yesh anıqlansın:

$$\begin{cases} \acute{o} = 2\tilde{o} - 3 \\ \acute{o} = \frac{1}{2}\tilde{o} + 1 \end{cases}$$

14. $3\tilde{o} - 2\acute{o} + 7 = 0$, $6\tilde{o} - 4\acute{o} - 9 = 0$, $6\tilde{o} + 4\acute{o} - 5 = 0$, $2\tilde{o} + 3\acute{o} - 6 = 0$

tuwrı sızıqlardan parallel ha'm perpendikulyar bolg'anların ko'rsetin'.

15. $A(4; 3)$, $B(2; 1)$ ha'm $C(1; 0)$ tochkalardan $3\tilde{o} + 4\acute{o} - 10 = 0$ tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq tabılsın. Tochkalar ha'm tuwrı sızıq jasalsın.

16. Koordinatalar basınan $12\tilde{o} - 5\acute{o} + 39 = 0$ tuwrı sızıqqa shekemgi aralıq tabılsın.

17. $2\tilde{o} - 3\acute{o} = 6$ ha'm $4\tilde{o} - 6\acute{o} = 25$ tuwrı sızıqlar o'z-ara parallel ekenligi ko'rsetilsin ha'm olar arasındag'ı aralıq anıqlansın.

18. $A(-1; 3)$ ha'm $B(4; -2)$ tochkalardan o'tiwshi tuwrı sızıq ten'lemesin jasan'.

19. Ushları $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$ ha'm $C(4; 2)$ tochkalarda bolg'an u'shmu'yeshliklerdin' BD biyikligi ha'm BE medianası ju'rgizilgen. AC ta'rep BE mediana ha'm BD biyiklikten' ten'lemelerin du'zin'.

20. U'shmu'yeshlikten' ta'repleri $\tilde{o} + 2\acute{o} = 0$, $\tilde{o} + 4\acute{o} - 6 = 0$, $\tilde{o} - 4\acute{o} - 6 = 0$ ten'lemeleri menen berilgen. U'shmu'yeshlikten' ishki mu'yeshlerin tabın'.

Ko'rsetpe. U'shmu'yeshlikten' ishki mu'yeshlerin tabıw ushın tareplerinin' mu'yeshlik koeffitsientlerin kemeytiwshi $k_1 > k_2 > k_3$ ta'rtibinde jazıp, $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, $\frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$, $\frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}$ formulalar boyınsha usı mu'yeshlerdin' tangenslerin esaplaw kerek.

Bug'an u'shmu'yeshlik to'belerinin' birin koordinatalar basına jaylastırıp, sızılmanan paydalanamız.

21. Koordinatalar basınan o'tip, $y = 4 - 2x$ tuwrı sızıq penen 45^0 mu'yesh jasawshı tuwrı sızıq ten'lemesin jazın'.

22. $A(-1; 1)$ tochkadan o'tip, $2\tilde{o} + 3\acute{o} = 6$ tuwrı sızıq penen 45^0 mu'yesh jasawshı tuwrı sızıq ten'lemesin jazın'.

23. U'shmu'yeshlikten' tarepleri $\tilde{o} + 3\acute{o} = 0$, $\tilde{o} = 3$, $\tilde{o} - 2\acute{o} + 3 = 0$ ten'lemeleri menen berilgen. Onın' to'belerin ha'm mu'yeshlerin tabın'.

24. Ushlari $A(-2;0)$, $B(2;4)$ ha'm $\tilde{N}(4;0)$ tochkalarda bolg'an u'shmu'yeshlik berilgen. Onin' ta'replari, AE medianasi, AD biyikliktin' ten'lemelerin jazin' ha'm AE mediana uzunlig'in tabin'.

25. $A(-2;5)$ tochka ha'm $2\tilde{o} - \acute{o} = 0$ tuwri sızıqtı jasan'. A tochkadan o'tiwshi tuwri sızıqlar da'stesinin' ten'lemesin jazin' ha'm usı da'steden berilgen tuwri sızıqqa: 1) parallel; 2) perpendikulyar bolg'an tuwri sızıqlar tan'lap alın'.

26. Ta'replari $\tilde{o} + \acute{o} = 4$, $3\tilde{o} - \acute{o} = 0$, $\tilde{o} - 3\acute{o} - 8 = 0$ ten'lemeler menen berilgen u'shmu'yeshlik jasan', onin' mu'yeshlerin ha'm maydanın tabın'.

27. $\tilde{o} + 2\acute{o} - 5 = 0$ tuwri sızıqtan $\sqrt{5}$ uzaqlıqta bolg'an tochkalardın' geometriyalıq ornının' ten'lemesin jazın'.

28. U'shmu'yeshlik $A(0;-4)$, $\hat{A}(3;0)$ ha'm $\tilde{N}(0;6)$ to'beleri menen berilgen. $\tilde{N}$ to'besinen A mu'yeshstin' bissektrisasına shekemgi aralıqtı tabın'.

29. U'shmu'yeshliktin' eki to'besi $A(-4;3)$ ha'm $\hat{A}(4;-1)$ ja'ne de biyikliklerinin' kesilisen tochkası $\hat{I}(3;3)$ berilgen. $\tilde{N}$ to'besin tabın'.

30. Rombınin' eki ta'repinin' ten'lemeleri $\tilde{o} + 2\acute{o} = 4$, $\tilde{o} + 2\acute{o} = 10$ ha'm diagonallarının' birinin' ten'lemesi $\acute{o} = \tilde{o} + 2$ belgili bolsa, romb to'belerinin' koordinataların esaplan'.

O'z betinshe jumıs tapsırmaları

To'mendegi tuwri sızıqlardın' kesilisiw noqatın tabın'

$$1) \begin{cases} 5\tilde{o} - \acute{o} + 7 = 0, \\ 2\tilde{o} - 3\acute{o} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2\tilde{o} + \acute{o} = 0, \\ \acute{o} = 3\tilde{o} - 4 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3\tilde{o} + 2\acute{o} = 0, \\ 6\tilde{o} + 4\acute{o} + 9 = 0 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3\tilde{o} - 4\acute{o} = 6 \\ 8\tilde{o} + 6\acute{o} = 11 \end{cases}$$

5. $A(2;3)$ tochkadan o'tiwshi tuwri sızıqlar da'stesinin' ten'lemesi jazılsın. Usı da'steden Ox ko'sher menen 60° mu'yesh jasawshı tuwri sızıq tan'lap alınsın ha'm jasalsın.

6. $A(2; 3)$ tochkadan o'tiwshi tuwrı sızıqlar da'stesinin' ten'lemesi jazılsın. Usı da'steden Ox ko'sher menen 45^0 mu'yesh jasawshı tuwrı sızıq tan'lap alınsın ha'm jasalsın.

7. $A(2; 3)$ tochkadan o'tiwshi tuwrı sızıqlar da'stesinin' ten'lemesi jazılsın. Usı da'steden Ox ko'sher menen 135^0 mu'yesh jasawshı tuwrı sızıq tan'lap alınsın ha'm jasalsın.

8. $A(2; 3)$ tochkadan o'tiwshi tuwrı sızıqlar da'stesinin' ten'lemesi jazılsın. Usı da'steden Ox ko'sher menen 0^0 mu'yesh jasawshı tuwrı sızıq tan'lap alınsın ha'm jasalsın.

9. Ushları $A(0; 7)$, $B(6; -1)$ ha'm $C(2; 1)$ tochkalarda bolg'an u'shmu'yeshlik ta'replerinin' ten'lemeleri jazılsın ha'm mu'yeshleri tabılsın.

10. $y = kx + 5$ tuwrı sızıq koordinatalar basınan $d = \sqrt{5}$ aralıqta, uzaqlıqta bolsa k nı tabın'.

11. $8\tilde{o} - 15\acute{o} = 0$ tuwrı sızıqqa parallel bolıp, $A(4; -2)$ tochkadan 4 birlik uzaqlıqtag'ı tuwrı sızıqtın' ten'lemesi jazılsın.

12. $\acute{o} = 2\tilde{o}$, $\acute{o} = -2\tilde{o}$ ha'm $\acute{o} = \tilde{o} + b$ tuwrı sızıqlar menen jasalg'an u'shmu'yeshliktin' maydanı tabılsın.

Tema: Ekinshi ta'rtpili iyemek sızıqtın' kanonikalıq ten'lemesi.

Ken'isliktegi tuwrı sızıq ha'm tegislik ten'lemeleri.

Ken'islikte tuwrı sızıq ha'm tegisliktin' o'z-ara qatnası

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılardı matematikanın' tiykarg'ı bo'limlerinin' biri bolg'an Analitikalıq geometriya' elementleri menen ha'm olardıń a'meliyatta qollanıwları menen tanıstırıw.

Qural, u'skeneler:

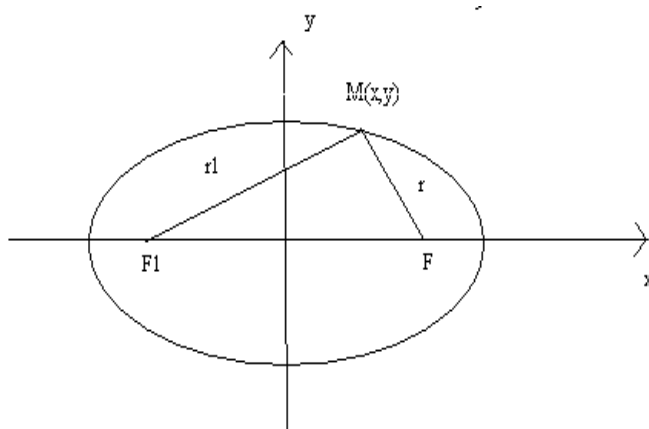
1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardıń elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. A'meliy jumısqa tarqatpa materiallar.

Tiykarg'ı mazmunı:

1. Orayı $\tilde{N}(\tilde{a}; b)$ tochkada ha'm radiusı R bolg'an shen'berdin' ten'lemesi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (18)$$

2. Ellips dep ha'r bir tochkadan berilgen eki F ha'm F_1 tochkag'a (fokuslarg'a) shekemgi aralıqlardıń qosındısı FF_1 dep u'lken turaqlı $2a$ sha'm ag'a ten' tochkalardıń geometriyalıq ornına aytıladı.



Ellipstin' kanonikalıq ten'lemesi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

(19) ten'leme menen berilgen ellips koordinata ko'sherine salıstırǵanda simmetriyalı.

a ha'm **b** parametri ellipstin' yarım ko'sherleri dep ataladı. $a > b$ bolsın. Onda F

ha'm F_1 fokuslar $\hat{I}\tilde{O}$ ko'sherde bolıp, oraydan $\tilde{n} = \sqrt{a^2 - b^2}$ aralıqta boladı. $\frac{c}{a} = e$ qatnası ellipstin' eksentrisiteti dep ataladı.

3. Giperbola dep, sonday tochkalardıń geometriyalıq ornına aytıladı. Olardıń ha'r birinen berilgen eki F ha'm F_1 tochkag'a (fokuslarg'a) shekemgi bolǵan aralıqlardıń ayırmasınıń absolyut sha'm ası turaqlı $2a$ $0 < 2a < FF_1$ sha'm asınan ibarat.

Giperbolanın' kanonikalıq ten'lemesi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

(20) ten'leme menen berilgen giperbola koordinata ko'sherine salıstırǵanda simmetriyalı.

4. Berilgen tochkadan (fokustan) ha'm berilgen tuwrı sıızıqtan (direktrisadan) birdey qashılıqta bolǵan tochkalardıń geometriyalıq ornı parabola dep ataladı. Parabolanın' kanonikalıq ten'lemesi to'mendegi eki ko'riniske iye:

1) $y^2 = px$ (21) $\hat{I}\tilde{O}$ ko'sherge salıstırǵanda simmetriyalı parabola.

2) $x^2 = py$ (22) $\hat{I}\tilde{y}$ ko'sherge salıstırǵanda simmetriyalı parabola.

Ha'r eki jag'dayda da parabolaning' ushi yag'niy simmetriya ko'sherinde jatiwshi tochkasi, koordinatalar basnda boladi.

5. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ tochkadan o'tiwshi ha'm $N(A, B, C)$ vektorg'a prperpendikulyar tegisliktin' ten'lemesi $M(x, y, z)$ tegisliktin' qa'legen tochkasi bolsin. Onda $\overline{M_1M} \perp N$ ha'm eki vektordın' perpendikulyarlıq sha'rtinen

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (23)$$

6. Tegisliktin' ulıwma ten'lemesi to'mendegishe:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (24)$$

$N(A, B, C)$ vektor (23) ha'm (24) tegislikke normal vektor dep ataladı.

7. $Ax + By + Cz + D = 0$ ten'lemesinin' dara jag'dayları:

1) $D = 0$ bolg'anda $Ax + By + Cz = 0$ - tegislik koordinatalar basnan o'tedi.

2) $\tilde{N} = 0$ bolg'anda $Ax + By + D = 0$ - tegislik $\hat{Lz}$ ko'sherine parallel.

3) $\tilde{N} = D = 0$ bolg'anda $Ax + By = 0$ - tegislik $\hat{Lz}$ ko'sherden o'tedi.

4) $B = \tilde{N} = 0$ bolg'anda $Ax + D = 0$ - tegislik $y\hat{Lz}$ tegislikke parallel.

5) Koordinata tegisliginin' ten'lemeleri: $x = 0$, $y = 0$ ha'm $z = 0$

8. Tegisliktin' koordinata ko'sherinen ajiratqan kesindiler boyınsha ten'lemesi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (25)$$

9. Eki tegislik arasındag'ı mu'yesh:

$$\tilde{\text{nos}}\varphi = \pm \frac{N \cdot N_1}{NN_1} = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1}$$

formulası menen tabıladı. Bunda N ha'm N_1 sa'ykes tu'rde $Ax + By + Cz + D = 0$ ha'm $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ tegisliklerge normal vektorlar.

Paralellik sha'rti

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \neq \frac{D}{D_1} \quad (26)$$

Perpendikulyarlıq sha'rti

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 \quad (27)$$

10. $M(x_0, y_0, z_0)$ tochkadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tegisligine shekemgi aralıq:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N} \quad (28)$$

11. Berilgen eki tegisliktin' kesilisen sıızıg'ınan o'tiwshi tegislikler da'stesinin' ten'lemesi:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \quad (29)$$

$\alpha = 1$ dep aliw mu'mkin, onda (12) da'steden berilgen tegisliklerden ekinshisin shıg'arıp taslag'an bolamız.

12. $A(a; b; c)$ tochkadan o'tiwshi ha'm $P(m; n; p)$ vektorg'a parallel bolg'an tuwrı sıziqtın ten'lemeleri $N(x, y, z)$ - tuwrı sıziqtın' qa'legen tochkası bolsın. Onda $\overline{AN} \parallel P$ ha'm eki vektordın' parallellik sha'rtinen:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad (30)$$

(30) ten'leme tuwrı sıziqtın' kanonikalq ten'lemeleri dep ataladı. $P(m; n; p)$ vektor tuwrı sıziqtın' bag'ıtlang'an vektorı dep ataladı.

13. (30) ten'lemedegi ha'r bir qatnastı t dep belgilep, tuwrı sıziqtın'

$$\begin{cases} x = mt + a \\ y = nt + b \\ z = pt + c \end{cases} \quad (31)$$

ko'rinstegi parametrlik ten'lemesine iye bolamız.

14. Eki tochkadan o'tiwshi tuwrı sıziqtın' ten'lemesi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (32)$$

15. Tuwrı sıziqtın' ulıwma ten'lemesi:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \quad (33)$$

16. (33) ten'likten bir ma'rte y ti, 2 ma'rte x ti jog'altıp, tuwrı sıziqtın' proektsiyaları boyınsha jazılğ'an ten'lemelerge iye bolamız:

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases} \quad (34)$$

17. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ tuwrı sıziqtın' penen $Ax + By + Cz + D = 0$ tegislik arasındag'ı

mu'yesh:

$$\sin \alpha = \frac{|N \cdot P|}{NP} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{NP} \quad (35)$$

Olardın' parallellik sha'rti: $Am + Bn + Cp = 0$ (36).

Olardın' perpendikulyarlıq sha'rti: $\frac{A}{m} + \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ (37)

Mısal lar

1. Orayı $\tilde{N}(2;-3)$ tochkada ha'm radiusı 6 g'a ten' bolg'an shen'berdin' ten'lemesın jazın'.

Sheshiliwi: (18) ten'leme boyınsha $a = 2, b = -3, R = 6$ bolg'anı ushın $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$ yamasa $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$.

2. Ellipstin' yarım ko'sherleri $a = 6, b = 4$ bolsa, ellipstin' a'piwayı ten'lemesın jazın'.

Sheshiliwi: (20) giperbola ten'lemesın $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ (38) tu'rinde jazıw mu'mkin. Bul ten'lemege birinshi tochkanın' koordinataların qoyıp, to'mendegige iye bolamız.

$$45b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \Rightarrow -10\tilde{o} - 3\acute{o} - 118 = 0$$

Bul AB ta'repinin' ten'lemesi.

Endi BC ta'repinin' ten'lemesın du'zeyik:

$$\frac{\tilde{o}-10}{13-10} = \frac{\acute{o}+6}{12+6} \Rightarrow \frac{\tilde{o}-10}{3} = \frac{\acute{o}+6}{18} \Rightarrow 18\tilde{o} - 180 = 3\acute{o} + 18 \Rightarrow 18\tilde{o} - 3\acute{o} - 198 = 0$$

3. Giperbola $\left(3; \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ ha'm $(-2\sqrt{5}; 3)$ tochkalarınan o'tedi. Giperbolanın' ten'lemesın jazın'.

Sheshiliwi: (20) giperbola ten'lemesın $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (38) tu'rinde jazıw mu'mkin. Bul ten'lemege birinshi tochkanın' koordinataların qoyıp, to'mendegige iye bolamız:

$$45b^2 - 12a^2 = 5a^2b^2.$$

(38) giperbola ten'lemesine ekinshi tochkanın' koordinataların qoyıp, to'mendegige iye bolamız: $20b^2 - 9a^2 = a^2b^2$.

$$\begin{cases} 20b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \\ 45b^2 - 12a^2 = 5a^2b^2 \end{cases} \text{ ten'lemeler sistemasın sheshemiz.}$$

Birinshi ten'lemenı 4 ke, al ekinshisin 3 ke ko'beytip ha'm ekinshi ten'lemeden birinshini alsaq, $a^2 = 5$ ke iye bolamız. $a^2 = 5$ ti birinshi ten'lemege qoysaq $20b^2 - 45 = 5b^2$, bunnan $b^2 = 3$. Tabılǵ'an a^2 ha'm b^2 tın' ma'nislerin (38) ge qoysaq, izlenip atırǵ'an ten'lemege iye bolamız: $3x^2 - 5y^2 = 15$.

4. Parabola Ox ko'sherine salistirg'anda simmetriyalı ha'm A(4;-1) tochkası arqalı o'tedi, al to'besi koordinata basında jatadı. Parabolanın' ten'lemesin du'zin'.

Sheshuliwi. Parabola A(4;-1) tochkasınan o'tedi, on' abtsissa ko'sherine simmetriyalı bolsa, onda parabolanın' ten'lemesin $y^2 = 2px$ tu'rinde izlewimiz kerek. Bul ten'lemege

A tochkanın' koordinataların qoysaq: $1 = 8p$, $p = \frac{1}{8}$, $2p = \frac{1}{4}$.

Demek, izlenip atirg'an ten'lememiz: $y^2 = \frac{1}{4}x$.

5. Ox ko'sherine perpendikulyar ha'm A(3;7;-1) tochkası arqalı o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin du'zin'.

Sheshuliwi: Tegislik Ox ko'sherine perpendikulyar bolsa, onda ol yOz tegisligine parallel'. Demek, onın' ten'lemesi $Ax + D = 0$ tu'rine iye. Bul ten'lemege A tochkasının' koordinataların qoysaq, $D = -3A$ g'a iye bolamız. D nın' bul ma'nisin $Ax + D = 0$ ten'lemesine qoyıp, A g'a qısqartsaq $x - 3 = 0$ ge iye bolamız.

6. $2x + 3y - 4z + 24 = 0$ tegisliginin' ten'lemesin (25) tu'rindegi tegisliktin' koordinata ko'sherinen ajıratqan kesindiler boyınsha ten'lemesi tu'rine keltirin':

Sheshuliwi: Saltan' ag'za 24 ti ten'lemenin' on' jag'ına shıg'aramız:

$2x + 3y - 4z = -24$. Ten'lemenin' eki jag'ın da -24 ke bo'lsek: $\frac{x}{-12} + \frac{y}{-8} + \frac{z}{6} = 1$.

Tapsırmalar

1. Orayı $(-4;7)$ tochkada ha'm radiusı 7 ge ten' bolg'an shen'berdin' ten'lemesin du'zin'.

2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ shen'berdin' ten'lemesi ekenligin ko'rsetin'. Onın' orayı ha'm radiusın tabın'.

3. $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$ shen'berdin' radiusın ha'm orayının' koordinataların tabın'.

4. $x^2 + y^2 + 3x - 7y - \frac{3}{2} = 0$ shen'berdin' radiusın ha'm orayının' koordinataların tabın'.

5. $x^2 + y^2 + x - y = 0$ shen'berdin' radiusın ha'm orayının' koordinataların tabın'.

6. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ shen'beri ha'm $y = 2x$ tuwrısının' kesilisiw tochkasın tabın'.

7. U'shı $(0;1)$, $(2;0)$, $(3;-1)$ tochkaları arqalı o'tiwshi shen'berdin' ten'lemesin du'zin'.

8. Eger ellipstin' yarım ko'sherlerinin' qosındısı $a+b=12$, fokuslarının' arasındag'ı aralıq $2c = 6\sqrt{2}$ bolsa, onda ellipstin' ten'lemesin du'zin'.

9. $4x^2 + 9y^2 = 144$ ellipstin' ko'sher uzunlıg'ın, fokuslarının' koordinatasın ha'm ekstsentrısitetin tabın'.

10. $16x^2 + 9y^2 = 144$ ellipstin' ko'sher uzunlıg'ın, fokuslarının' koordinatasın ha'm ekstsentrısitetin tabın'.

11. Eger giperbolanın' to'beleri arasındag'ı aralıq 20 g'a, al fokuslarının' arasındag'ı aralıq 30 g'a ten' bolsa, onda giperbolanın' ten'lemesin du'zin'.

12. Giperbolanın' haqıyqıy yarım ko'sheri 5 ke, al ekstsentrısiteti $l = 1,4$. Giperbolanın' ten'lemesin du'zin'.

13. $2x^2 - 3y^2 = 6$ giperbolanın' asymptotalarının' ten'lemesin tabın'.

14. $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$ giperbola ten'lemesi berilgen. Onın' asymptotasının' ten'lemesin du'zin'.

15. $25x^2 - 36y^2 = 900$ giperbolanın' ekstsentrısitetin tabın'.

16. Giperbolanın' asymptotasının' ten'lemeleri $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$. Fokuslarının' arasındag'ı aralıq $2c = 10$. Giperbolanın' ten'lemesin tabın'.

17. Eger giperbolanın' ekstsentrısiteti 2 ge ten' bolsa, onda giperbolanın' asimptotaları arasındag'ı su'yir mu'yeshti tabın'.

18. $y^2 = 2px$ parabolası $A(2;4)$ tochkası arqalı o'tedi. Onın' p perimetrin tabın'.

19. Oz ko'sherine parallel' ha'm $A(2;3;-1)$, $B(-1;2;4)$ tochkaları arqalı o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabın'.

20. Ox ko'sherine parallel' ha'm $A(2;-3;2)$, $B(7;1;0)$ tochkaları arqalı o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabın'.

21. Ou ko'sherine parallel' ha'm $A(2;1;-2)$, $B(-7;-2;1)$ tochkaları arqalı o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabın'.

22. xOu tegisligine parallel' ha'm $A(1;2;-4)$ tochkası arqalı o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabın'.

23. xOz tegisligine parallel' ha'm $A(2;-3;4)$ tochkası arqalı o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabın'.

24. Ox ko'sheri arqılı ha'm $A(2;1;3)$ tochkasi arqali o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabin'.

25. Oz ko'sheri ha'm $A(-2;4;-4)$ tochkasi arqali o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabin'.

26. $A(2;-5;4)$ tochkasi ha'm Oy ko'sheri arqali o'tiwshi tegisliktin' ten'lemesin tabin'.

27. $2\tilde{o}+3\acute{o}-5z+30=0$ tegislighi koordinata ko'sherlerinen qanday kesindi ajiratadi.

28. Koordinata ko'sheri $\tilde{o}-10\acute{o}+2z-12=0$ tegisliginin' ajiratqan kesindisinin' sha'm asin tabin'.

29. $3\tilde{o}-4\acute{o}+5z-24=0$ tegisliginin' koordinata ko'sherlerinen ajiratqan kesindiler boyinsha ten'lemesin du'zin'.

30. $A(2;3;-1)$ tochkasinin' $7x-6\acute{o}-6z+42=0$ tegislikke shekemgi aralıqtı tabın'.

O'z betinshe jumis tapsırmaları

1. $A(2;-4;2)$ tochkasidan $2\tilde{o}+11\acute{o}+10z-10=0$ tegislikke shekemgi aralıqtı tabın'.

2. $A(3;4;-1)$ tochkasidan $3\tilde{o}+4\acute{o}-5=0$ tegislikke shekemgi aralıqtı tabın'.

3. $5\tilde{o}+3\acute{o}-4z+15=0$
 $15\tilde{o}+9\acute{o}-12z-5=0$ parallel' tegislikler arasındag'ı aralıqtı tabın'.

4. $\begin{cases} 2\tilde{o}-3y+6z-14=0 \\ 2\tilde{o}-3y+6z+28=0 \end{cases}$ parallel' tegislikler arasındag'ı aralıqtı tabın'.

5. $2x-3y+5z-4=0$ tegisligine parallel' ha'm $M(2;3;-1)$ tochkasi arqali o'tiwshi tegislikti jazın'.

6. $3x+4y-z-8=0$ tegisligine parallel' ha'm $M(-4;-1;2)$ tochkasi arqali o'tiwshi tegislikti jazın'.

7. $x+3y-4z+5=0$ tegisligine parallel' ha'm $M(2;5;-1)$ tochkasi arqali o'tiwshi tegislikti jazın'.

8. $7x-4y+z-4=0$ tegisligine parallel' ha'm $(1;-3;2)$ tochkasi arqali o'tiwshi tegislikti jazın'.

9. $M(1;2;3)$ ha'm $N(-2;-1;3)$ tochkalaridan o'tiwshi, $x+4y-2z+5=0$ tegisligine perpendikulyar bolg'an tegisliktin' ten'lemesin du'zin'.

10. $M(-1;2;-3)$ ha'm $N(1;4;-5)$ tochkalaridan o'tiwshi, $3x+5y-6z+1=0$ tegisligine perpendikulyar bolgan tegislikning tenglamasini toping.

11. Eki $5\tilde{o}-3\acute{o}+4z-4=0$ ha'm $3\tilde{o}-4\acute{o}-2z+5=0$ tegisliklar orasidagi su'yir mu'yeshti tabin'.

12. $5\tilde{o}-3\acute{o}+5z+5=0$ ha'm $\tilde{o}-2\acute{o}+3z-5=0$ tegisliklar orasidagi su'yir mu'yeshti tabin'.

13. Tegislikning $Ax+By+Cz+D=0$ turidagi uliwma tenglamasidagi A, B, C koeffitsientlarining geometriyalik ma'anasini toping.

14. $I_1(1;2;-1)$, $M_2(-1;0;4)$, $M_3(-2;-1;1)$ tochkalari orqali o'tiwshi tegislikning tenglamasini toping.

15. $I_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$, $M_3(1;1;-1)$ tochkalari orqali o'tiwshi tegislikning tenglamasini toping.

16. $I_1\left(1;-2;-\frac{1}{2}\right)$, $M_2(2;1;3)$, $M_3(0;-1;-1)$ tochkalari orqali o'tiwshi tegislikning tenglamasini toping.

17. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{6}$ turisining koordinata ko'sherlari menen payda etken mu'yeshlarni toping.

18. $\begin{cases} x+3y-4z+5=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ turilarining uliwma tenglamasini kanonikalik turiga keltiring.

19. $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 2x+3y-4z+5=0 \end{cases}$ turilarining uliwma tenglamasini kanonikalik turiga keltiring.

20. $\begin{cases} 2x+3y+2z+8=0 \\ x-y-z-9=0 \end{cases}$ turilarining uliwma tenglamasini kanonikalik turiga keltiring.

21. $\begin{cases} 5x+3y-4z+2=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ turilarining koordinata ko'sherlari menen payda etken mu'yeshlarni toping.

22. $\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2} \end{cases}$ turilari orasidagi su'yir mu'yeshti tabin'.

23. $\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ turilari orasidagi su'yir mu'yeshti tabin'.

24. $\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$ turilari orasidagi su'yir mu'yeshti tabin'.

25. Oz ko'sherine parallel' ha'm $A(3;-1;4)$ tochkasi arqali o'tiwshi tuwrini keltirin'.

26. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-31}{3} = \frac{z+1}{2}$ tuwrısına parallel' ha'm $A(1;-1;2)$ tochkasi arqali o'tiwshi tuwrinin' ten'lemesin jazın'.

27. $(2;-1;3)$ tochkasi arqali Ox ko'sherine parallel' tuwrini jasan'.

28. $A(1;2;-1)$ ha'm $B(0;3;-4)$ tochkaları arqali o'tiwshi tuwrinin' ten'lemesin tabın'.

29. $A(3;0;4)$ ha'm $B(-1;-2;3)$ tochkaları arqali o'tiwshi tuwrinin' ten'lemesin tabın'.

30. $3x+2y^2+6y-1=0$ iymek sızıg'ının' ten'lemesin a'piwaylastırın'.

Tema: Ko'plikler ha'm olardın' elementleri.
Ko'plikler u'stinde a'meller ha'm olardın' qa'siyetleri.
Sanlı ko'plikler. Haqıyqıy sanlar

Maqseti: Bolajaq matematika oqıtıwshılarına ko'plikler ha'm olardın' a'meliyatta qollanılıwı haqqında tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardın' elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. A'meliy jumısqa tarqatpa materiallar.

Tiykarg'ı mazmunı:

Ko'plik tu'sinigi matematikanın' tiykarg'ı tu'siniklerinin' biri bolıp, ol anıqlamasız mısallar ja'rdeminde tu'sindiriledi. Ma'selen, auditoriyadag'ı talabalardın' ko'pligi, natural sanlar ko'pligi, Qaraqalpaqstan Respublikası boyınsha rayonlar ko'pligi, pu'tin sanlar ko'pligi ha'm tag'ı basqalar

Ko'plikti payda etiwshi ob'ekter ko'pliktin' elementleri dep ataladı.

Ko'plikler $A, B, C, \dots$ lar menen, al onın' elementleri $a, b, c, \dots$ lar menen belgilenedi. Ko'pliktin' elementi $a \in A$ ko'rinsinde jazıladı ha'm «a element A ko'plikke tiyisli» dep ataladı. Eger tiyisli bolmasa, $a \notin A$ yamasa $\overline{a \in A}$ ko'rinsinde jazıladı.

1. $\emptyset$ - bos ko'plik.
2. $A \subset B$ - A ko'plik V ko'pliktin' u'les ko'pligi.
3. $A \cap B$ - A ha'm V ko'pliklerdin' kesispesi.

Ko'plikler kesispesinin' qa'siyetleri:

1. $B \subset A$ bolsa, $A \cap B = B$ boladı.

2. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik qa'siyeti).

3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (assostiativlik qa'siyeti).

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (kesilispenin' birikpege salıstırg'anda distributivlik qa'siyeti).

5. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

6. $A \cap A = A$.

4. $A \cup B$ - A ha'm B ko'pliklerinin' birikpesi.

Ko'pliklerdin' birikpesinin' qa'siyetleri:

1) $B \subset A$ bolsa, $A \cup B = A$ boladı.

2) $A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik qa'siyeti).

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ (assostiativlik qa'siyeti).

4) $A \cup \emptyset = A$

5) $A \cup A = A$

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesilispenin' birikpege salıstırg'anda distributivlik qa'siyeti).

7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (kesilispenin' birikpege salıstırg'anda distributivlik qa'siyeti).

5. $A \setminus B$ - A ha'm B ko'pliklerdin' ayırması.

Ko'plikler ayırmasının' qa'siyetleri:

1) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \setminus B = A$

5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2) $B \subset A \Rightarrow A \setminus B = B_A^1$

6) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3. $A = B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

7) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus B \setminus C$

6), 7) - qa'siyetler De-Morgan nızamları dep ataladı.

6. $A \times B$ - A ha'm B ko'pliklerdin' dekart ko'beymesi $A \times B = \{(a; b) | a \in A, b \in B\}$.

Dekart ko'beymenin' qa'siyetleri:

1) $A \times B \neq B \times A$. 2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. 3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

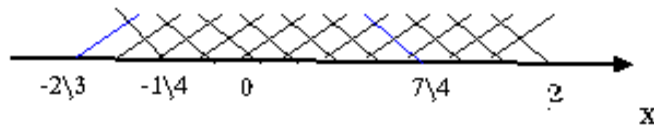
M i s a l l a r

1. $x^2 + 3x + 3 = 0$ ten'lemenin' sheshimlar ko'pligin tabin'.

Sheshiliwi: $x^2 + 3x + 3 = 0$ ten'lemesi haqiqiy korenlerge iye emes, yag'nii onin' haqiqiy sheshimlarinin' ko'pligi $\emptyset$ bolip esaplanadi.

2. $A = \left\{x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}$, $B = \left\{x \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\right\}$ ko'pliklarinin' kesilispesin, birikpesin ha'm ayirmasin tabin'.

Sheshiliwi: San ko'sherinde $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 2$ tochkalardi belgileymiz.



$$A \cap B = \left\{x \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}, \quad A \cup B = \left\{x \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\right\}, \quad A \setminus B = \left\{x \mid -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{4}\right\}.$$

3. $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{4; 5\}$ ko'pliklarinin' dekart ko'beymesin tabin'.

Sheshiliwi: $A \times B = \{(2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5)\}$.

T a p s i r m a l a r

1. $20; \sqrt{15}; 3; \sqrt{2}; 0; -20; 45; \frac{7}{8}; -2$ sanlari berilgen. Olardin' qaysilari:

- a) pu'tin sanlar
- b) teris emes pu'tin sanlar
- c) ratsional sanlar
- d) haqiqiy sanlar ko'pligine tiyisli boladi?

2. Koordinata ko'sherinde to'mendegi ko'pliklerdi ko'rsetin':

- a) 3 ten kishi sanlar
- b) 3 ten u'lken bolg'an sanlar
- c) 3 ten u'lken bolmag'an sanlar
- d) 3 ten kishi bolmag'an sanlar

3. To'mendegi ko'pliklerdi koordinata ko'sherinde suwretlen':

- a) $X = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 6\}$
- b) $Y = \{y \mid y \in R, y < 9\}$
- c) $X = \{x \mid x \in R, x \leq -3\}$
- d) $Y = \{y \mid y \in R, -8 \leq x \leq 4\}$

4. Eger $A = \{27;32;36;54;232;108;324\}$ bolsa, A ko'pliktin' to'mendegi sanlardan du'zilgen u'les ko'pliklerin tabin'.

a) 4 ke bo'linedi c) 5 ke bo'linbeydi

b) 9 g'a bo'linedi d) 10 g'a bo'linedi

5. $\hat{A}\{a,b,c,d\}$ ko'pliklerinin' barliq u'les ko'pliklerin jazın'.

6. Eger $\hat{A} = \{x | x \in N, x \leq 24\}$ bolsa, usı ko'pliktin'

a) 6 g'a eseli c) 5 ke eseli

b) 2 ge eseli d) 2 ge eseli bolmag'an

e) 2 ge ha'm 3 ke eseli sanlardan du'zilgen u'les ko'pliklerdi anıqlan'.

7. Eger $\hat{A} = \{a | a \in N, 17 \leq a \leq 23\}$, $B = \{b | b \in N, 18 \leq b \leq 27\}$ bolsa, usı ko'pliklerdin' kesilispesi ha'm birikpesin anıqlan'.

8. Eger $\hat{A} = \{a | a \in N, a \leq 20\}$, $B = \{b | b \in N, 8 \leq b \leq 21\}$ bolsa

a) $17 \in \hat{A} \cap B$ c) $5 \in \hat{A} \cup B$ e) $18 \in \hat{A} \notin \hat{A} \cup B$

b) $13 \in \hat{A} \cup B$ d) $21 \in \hat{A} \cup B$ f) $20 \in \hat{A} \cup B$

tastıyıqlar durıs pa?

9. Eger $\hat{A} =]-2;4]$, $B = [-3;6[$, $C = [-3;+\infty[$ bolsa,

a) $A \cup B \cup C$

v) $A \cup B \cap C$ lardı koordinata ko'riniste suwretlen'.

10. Eger $\hat{A} = \{a | a \in N, 10 \leq a \leq 14\}$ bolsa,

a) $(A \cap B) \cap C$ e) $A \cup B \cap C$

b) $A \cap (B \cap C)$ f) $A \cap (B \cup C)$ lardı

d) $A \cup (B \cup C)$ tabın'.

c) $A \cup (B \cap C)$

11. Eger $C = \{c | c \in N, 2 \leq c \leq 10\}$, $D = \{d | d \in N, 8 \leq d \leq 23\}$ bolsa, $C \setminus D$ ha'm $D \setminus C$ nı tabın'.

12. Eger **A** - natural sanlar ko'pligi, **B** - 5 ke eseli natural sanlar ko'pligi bolsa, to'mendegiler durıs pa?

a) $25 \in \hat{A} \setminus B$ c) $50 \in \hat{A} \setminus \hat{A}$

b) $15 \in \hat{A} \setminus \hat{A}$ d) $22 \in \hat{A} \setminus B$

e) $23 \in \hat{A} \setminus \hat{A}$

13. $\hat{A}\{a,b,c,d\}$, $\hat{A}\{k;l;m\}$ bolsa, $A \times B$ ni tabın’.

14. Eger a) $\hat{A} = \{-2;3\}$, $B = \{2;3;4\}$, v) $\hat{A} = \{-2;3\}$, $B = \{2;4\}$ bolsa, $A \times B$ ni tuwrı mu’yeshli dekart koordinatalar sistemasında suwretlen’.

15. A ko’plikte 8 element bar. Eger $A \times B$ da: a) 56; b) 8; d) 0; e) 24 element bar, B ko’plikte neshe element bar.

O’z betinshe jumıs tapsırmaları

1. To’mendegi ko’plikler ushın $\hat{A} \subset \hat{A}$ yamasa $\hat{A} \subset \hat{A}$ lardan qaysısı orınlı.

a) $\hat{A}\{a,b,c,d\}$, $\hat{A}\{a;c;d\}$

d) $\hat{A} = \emptyset$, $\hat{A} = \emptyset$

b) $\hat{A}\{a,b\}$, $\hat{A}\{a;c;d\}$

e) $\hat{A} = \emptyset$, $\hat{A} = \{a;b;c\}$

2. To’mendegi ko’plikler ten’ be?

a) $\hat{A}\{2,4,6\}$, $\hat{A}\{6;4;2\}$

b) $\hat{A}\{1,2;3\}$, $\hat{A}\{1;11;111\}$

3. $M\{36;29;15;68;27\}$, $P\{4;15;27;47;36;90\}$, $Q\{90;4;47\}$ ko’plikler berilgen. $M \cap P$, $M \cap Q$, $P \cap Q$, $M \cap P \cap Q$ lardı tabın’.

4. A-18 din’ barlıq natural bo’liwshiler ko’pligi, B-24 tin’ ha’mme natural bo’liwshiler ko’pligi. $A \cap B$ ko’plik elementlerin ko’rsetin’.

5. «Matematika» ha’m «grammatika» so’zlerindeki ha’ripler ko’pligin du’zin’. Bul ko’pliklerdin’ kesilispesin tabın’.

6. $[1;5]$ ha’m $[3;7]$ kesindilerinin’ kesilispesin tabın’.

7. Sanlı ko’pliklerdi tabın’. a) $(-1)^n - 1 | n \in N$; b) $1 - (-1)^n \cdot 2 | n \in N$.

8. $\hat{A} = \{-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$, $B = \{3;4;5;6\}$, $\tilde{N} = \{-3;-2;-1;0;2;3\}$, $D = \{2;3;4;5;6;7\}$, $M = \{5 \leq x - 10 \leq 12 | x \in N\}$, $K = \{x + 10 \leq 30 | x \in N\}$ bolsa, to’mendegi ko’plikler elementlerin jazın’.

a) $(A \cup B) \cap (\tilde{N} \cup D)$

c) $(A \cap B) \cup (\tilde{N} \cap D) \cup M$

e) $M \cap K$

b) $(\hat{A} \cap B \cap C) \cup D$

d) $(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

f) $M \cup K$

9. Ko’pliklerdin’ kesilispesin ha’m birikpesin tabın’. Eyler-Venn diagramması ja’rdeminde grafik sıızın’.

- a) $\dot{A} = \{5;6;7;8;9;10\}, B = \{8;9;10;11\}$
 b) $\dot{A} = \{x|x = 2n, n \in N\}, B = \left\{x \left| x = \frac{n+1}{2}, n \in N \right.\right\}$
 d) $\dot{A} = \{x|x = 5n, n \in N\}, B = \{x|x = 2n, n \in N\}$
 e) $\dot{A} = \left\{x \left| x = \frac{1}{n}, n \in N \right.\right\}, B = \left\{x \left| x = \frac{2}{n}, n \in N \right.\right\}$

10. $\emptyset, \cup, \cap, \subset$ belgilerden paydalanıp, ko'plikler arasındag'ı qatnastı jazın'.

- a) $X_1 = \{-3;6\}, X_2 = \{x|x \in Z, -5 \leq x \leq 6\}, X_3 = \{x|x \in Q, -5 \leq x \leq 6\}$
 b) $\dot{A} = \{1;3;5;7\}, B = \{1;5;7\}$
 d) $\dot{A} = \emptyset, B = \{k;l;m\}$
 e) $\dot{A} = \{x;y;z\}, B = \{y;z;x\}$

11) P ha'm Q ko'plikler kesilispesi ha'm birikpesin sanlar tuwrı sızıg'ında suwretlen':

- a) $P = \left\{x \left| \frac{10}{3} < x < \sqrt{8} \right.\right\}, Q = \left\{x \left| \frac{26}{47} < x < 3,2 \right.\right\}$
 b) $P = \left\{x \left| \frac{1}{3} < x < \frac{5}{3} \right.\right\}, Q = \left\{x \left| \sqrt{2} < x \leq \frac{40}{27} \right.\right\}$
 d) $P = \left\{x \left| \frac{11}{4} \leq x \leq \frac{19}{3} \right.\right\}, Q = \left\{x \left| \frac{19}{7} < x \leq \frac{32}{5} \right.\right\}$
 e) $P = \left\{x \left| \frac{4}{11} \leq x < \frac{18}{5} \right.\right\}, Q = \left\{x \left| \sqrt{2} < x < 10 \right.\right\}$

Tema: Funktsiya tu'sinigi. Sanlı izbe-izlikler ha'm olardın' limiti. e sanı. Funktsiyanın' limiti, limitler haqqında teoremlar. Funktsiyalardın' tochkada ha'm sheksizliktegi limiti. Birinshi ha'm ekinshi tur a'jayıp limitler

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılarg'a funksiya, limit haqqında ha'm onın' a'meliyatta qollanılwı haqqında tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardın' elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. A'meliy jumısqa tarqatpa materiallar.

Tiykarg'ı mazmunı:

1. O'zgeriwshi sha'm alar ha'm funktsiyalar.

Eger o'zgeriwshi x tın' ha'r bir ma'nisine bir san sa'ykes keltirilgen bolsa, onda usı sanlar ko'pligi menen anıqlang'an y o'zgeriwshi x tın' bir ma'nisli funktsiyası dep ataladı. Bunda o'zgeriwshi x -argument, ma'nislerinin' berilgen ko'pligi bolsa funktsiyanın' anıqlanıw oblastı dep ataladı. y - x tın' funktsiyası ekenligi $y = f(x)$, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ ha'm tag'ı.basqa ko'rinite jazıladı.

2. Sanlı izbe-izlikler.

O'zgeriwshi

$$x, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (39)$$

ma'nislerin izbe-iz qabıl etsin. Bunday nomerlengen sanlar ko'pligi izbe-izlik dep ataladı. (39) izbe-izliktin' du'ziliwi n -ag'za formulası menen beriledi.

Ma'selen: $x_n = n + (-1)^n$ bolsın; $n = 1, 2, 3, \dots$ dep alsaq,

$$0, 3, 2, 5, 4, 7, \dots \quad (40)$$

izbe-izlik payda boladı.

3. Sheksiz kishi o'zgeriwshi.

Eger ha'r qanday on' e san o'zegriwshinin' sonday α_0 ma'nisi bar bolsa, α nın' onnan son'gı ha'r bir ma'nisinin' absolyut sha'm ası e den kishi bolsa, α o'zgeriwshi sheksiz kishi dep ataladı.

Eger α sheksiz kishi bolsa, ol nolge umtiladı dep ataladı ha'm $\alpha \rightarrow 0$ ko'rinishinde jazıladı.

4. Sheksiz u'lken o'zgeriwshi.

Eger ha'r qanday on' S sanı ushın o'zgeriwshinin' sonday x_0 ma'nisi bar bolsa, x tın' onnan son'gı ha'r bir ma'nisinin' absolyut sha'm ası S dan u'lken bolsa, onda x o'zgeriwshi sheksiz u'lken dep ataladı. Bul $x \rightarrow \infty$ ko'rinishinde jazıladı.

Sonın' menen birge, eger x tın' x_0 dan keyingi ma'nisleri o'z belgilerin saqlasa, onda $x \rightarrow +\infty$ (yamasa $x \rightarrow -\infty$) dep jazıladı.

5. O'zgeriwshinn' limiti.

Eger A ha'm o'zgeriwshi x arasındag'ı ayırma sheksiz kishi sha'm a , yag'nıy eger $x = a + \alpha$ bolsa, turaqlı a o'zgeriwshi x tın' limiti dep ataladı ha'm $\lim x = a$ tu'rinde jazıladı.

6. Funktsiyanın' limiti.

Eger x tın' a g'a ten' bolmastan og'an umtılıwınan ha'r dayım $f(x)$ tın' b g'a umtılıwı kelip shıqsa, b san $f(x)$ funksiyanın' x tın' a g'a umtılǵ'andag'ı limiti dep ataladı.

Bunı $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ko'rinishinde jazadı.

7. Limitlerdin' qa'siyetleri:

1) Turaqlı sha'm anın' limiti o'zine ten'.

2) $\lim (u + v) = \lim u + \lim v$

3) $\lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$

4) Eger $\lim u$ ha'm $\lim v$ bar bolıp, $\lim v \neq 0$ bolsa, onda $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$

5) Eger a tochkanın' qandayda bir a'tirapındag'ı x tın', balki tek $x=a$ dan basqa barlıq ma'nislerinde $f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funksiylar bir-birine ten' bolsa ha'm olardıń birewi $\tilde{o} \rightarrow a$ da limitke iye bolsa, ekinshiside usı limitke iye boladı.

8. A'jayıp limitler.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

2.. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

9. e sanı irratsional san bolıp, $e \approx 2,71828$.. Tiýkarı e ge ten' bolg'an logorifmler natural logarifmler dep ataladı ha'm $\log_e x = \ln x$ ko'rinishinde belgilenedi.

Onlıq logorifm $\lg x = M \ln x$, bunda $M = 0,43429$..

Mısallar

1. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ funksiya berilgen.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 2) $f(2)$; 3) $f(-1)$; 4) $f\left(\frac{a}{2}\right)$; 5) $f\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$; di esaplan'.

Sheshiliwi: (18) ten'leme boyınsha $a = 2$, $b = -3$, $R = 6$ bolg'anı ushın $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 36$ yamasa $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 = 0$.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

2) $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 2 - 1 = 16 - 4 + 1 = 13$

3) $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -5$

$$4) f\left(\frac{a}{2}\right) = 2 \bullet \left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{2} - 1 = \frac{a^3}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - 1 = \frac{a^3 - a^2 + 2a - 4}{4}$$

$$5) f\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = 2 \bullet \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 + \frac{a-1}{a+1} - 1 = \frac{a^3 - 7a^2 + 3a - 5}{(a+1)^3}$$

$$2. y = \frac{5}{1-x} \text{ funksiyanın' anıqlanıw oblastın tabın'}$$

Sheshiliwi: $y = \frac{5}{1-x}$ funksiya $1-x=0$ yamasa $x=1$ den basqa x tın' qa'legen

ma'nisinde anıqlang'an. Funktsiyanın' anıqlanıw oblastı: $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

$$3. y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} \text{ funksiyanın' anıqlanıw oblastın tabın'}$$

Sheshiliwi: $\sqrt{x-2}$ an'latpası $x-2 \geq 0$ yamasa $x \geq 2$ bolg'anda hag'ıyqıy ma'niske iye. Biraq $x=2$ bolg'anda bo'lshektin' bo'limi nolge ten' bolıp, bo'lshek mag'anasız bolıp qaladı. Demek $x=2$ ma'nisi funksiyanın' anıqlanıw oblastına kirmeydi. Demek funksiyanın' anıqlanıw oblastı $(2;+\infty)$.

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7}{3n+2} \text{ esaplan'}$$

Sheshiliwi. Bo'lshektin' alımıda bo'limide shegaralabang'an izbe- izlikler bolg'anı ushın bo'lshektin' limiti haqqındag'ı teoremanı qollana almaymız. Usı sebepli bo'lshektin' alımında bo'liminde n ge bo'lıp son' bo'lshektin' limiti haqqındag'ı teoremadan

$$\text{paydalanamız. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5n-7}{n}}{\frac{3n+2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-7}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{7}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{5-0}{3-0} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Tapsırmalar

(1-15) funksiyanın' anıqlanıw oblastın tabın'.

$$1. y = \frac{1}{x}$$

$$2. y = \frac{1}{7x-2}$$

$$3. y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$$

$$4. y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{x-4}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$5. y = \frac{x^2 - 1}{2x - 4}$$

$$6. y = \frac{5x^2 - 7x + 12}{x^2 - 1}$$

$$7. y = \frac{7x^2 + x - 1}{3x^2 - 8x + 4}$$

$$8. y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 1}$$

$$9. y = \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + x + 5}$$

$$10. y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

$$11. y = -\frac{x + 5}{x^3 - 1}$$

$$12. y = \frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1}$$

$$13. y = \sqrt{2 - x}$$

$$14. y = \sqrt{x + 4}$$

$$15. y = \frac{5}{\sqrt{4 - x}}$$

(16-30) limitlerdi esaplan'

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 3x + 5)$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+3} - 2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 6x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^2 + x - 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 10}}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 7}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2 - 1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5}$$

O'z betinshe jumis tapsırmaları

(1-15) funktsiyanın' anıqlanıw oblastın tabın'.

$$1. y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$$

$$2. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-3}}$$

$$3. y = \frac{1}{\sqrt{7-2x}}$$

$$4. y = \frac{4}{\sqrt{x-5}}$$

$$5. y = \sqrt{9-x^2}$$

$$6. y = \sqrt{x^2 - 6}$$

$$7. y = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$8. y = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$9. y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$10. y = \sqrt{(x-2)(x+3)}$$

$$11. y = \lg(x-5)$$

$$12. y = \lg(2-x)$$

$$13. y = \lg(x^2 - 3)$$

$$14. y = \lg x^4$$

$$15. y = \sin(2x + 3)$$

$$16. f(x) = 3x^2 - 2x - 1 \text{ funksiyası berilgen}$$

$$1) f(2); 2) f(-2); 3) f(1); 4) f(0); 5) f(a+2); 6) f(-x) \text{ ti esaplan'}$$

$$17. f(z) = 5^{\frac{1}{z}-1} \text{ funksiyası berilgen}$$

$$1) f(1); 2) f(2); 3) f(-2); 4) f\left(\frac{1}{z}\right) \text{ ti esaplan'}$$

(18-30) Limitlerdi esaplan'.

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{3x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{13x}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 7x)^{8x^{-1}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 14}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)^3 \cdot (3x - 2)^2}{x^5 + 5}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$$

Tema: Funksiyanın' tuwındısı. Differentsiallaw qa'deleri.

Tiykarg'ı elementar funksiyalardıń' tuwındıları

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılarg'a tuwındı ha'm onın' a'meliyatta qollanılıwı haqqında tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardıń' elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. A'meliy jumısqa tarqatpa materiallar.

Tiykarg'ı mazmunı:

$$1. (\tilde{f}(x))' = Cf'(x) \text{ (1) S-turaqlı san.}$$

$$2. (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \text{ (2)}$$

$$3. (f^n(x))' = n f^{n-1} f'(x) \quad (3)$$

$$d(f^n(x)) = n f^{n-1} f'(x) dx$$

$$4. (x^n)' = n x^{n-1}$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$5. (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$$

$$6. \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$7. \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$8. (\sin x)' = \cos x$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$9. (\cos x)' = -\sin x$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$10. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$s(\operatorname{tg} x)' = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$11. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$12. (e^x)' = e^x$$

$$13. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$14. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Misallar

Funksiyalardan' tuvindiların tabın'.

$$1. \left(\frac{1}{(3x^2 - 4)^2} \right)' = \left((3x^2 - 4)^{-2} \right)' = -2(3x^2 - 4)^{-2-1} \cdot 6x = -\frac{12x}{(3x^2 - 4)^3}$$

$$2. (\cos(x^3 - x^2 - 2))' = -\sin(x^3 - x^2 - 2) \cdot (3x^2 - 2x)$$

$$3. (\log_4 5x)' = \frac{5}{5x \ln 4} = \frac{1}{x \ln 4}$$

$$4. \left(5x^{\frac{3}{4}} \right)' = 5 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \cdot x^{\frac{3}{4}-1} = -\frac{15}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$$

Tapsırmalar

Funksiyanın' tuvindısın tabın'

$$1. y = \sqrt{x+1}$$

$$2. y = (x^2 - x + 1)^2$$

$$3. y = x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 10x - 2$$

$$4. y = (x^3 - 5x + 1)(x^2 - 5x + 1)$$

$$5. y = (x^4 - 6x + 1)(x^3 + x^2 - 2)$$

$$6. y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 4)$$

$$7. y = \sqrt{x}(x^3 - 2x + 2)$$

$$8. y = (x^2 - 4x + 2)^3$$

$$9. y = (8x - 3)^{12}$$

$$10. y = \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)^{14}$$

$$11. y = \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 5}$$

$$12. y = \frac{x^3}{(x-5)^4}$$

$$13. y = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[3]{x} + 5}$$

$$14. y = \frac{(1+x^3)^{10}}{x^5}$$

$$15. y = \frac{4x^3 + 3x^2 - 5x + 1}{4x - 1}$$

$$16. y = \frac{2 + x^2}{\sqrt{2x}}$$

$$17. y = \frac{x^2 - 5x - 7}{x^3}$$

$$18. y = \frac{x}{4^x}$$

$$19. y = x \cdot 10^x$$

$$20. y = \frac{x-1}{\log_2 x}$$

$$21. y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$22. y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

$$23. y = \sin^3 x - \cos^3 x$$

$$24. y = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$25. y = (x^3 - 4)\cos^2 x$$

$$26. y = 3x^2 \cdot \cos x + (x^3 + 5)\sin x$$

$$27. y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$28. y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$29. y = 6\sin^3 x + 4\operatorname{tg}^5 x$$

$$30. y = \cos^2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

O'z betinshe jumis tapsirmalari

Funktsiyanin' tuwindisin tabin'

$$1. y = \operatorname{tg}^3 x$$

$$2. y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$$

$$3. y = (5x - 1)^{16}$$

$$4. y = 3x^2 - \frac{1}{\sin^2 3x}$$

$$5. y = 4\sin^2 x - 1$$

$$6. y = \cos \sqrt{x}$$

$$7. y = \sin^3 \left(7x^2 - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$8. y = \sqrt{\sin 2x}$$

$$9. y = \sqrt{\cos^3 7x + \sin^3 7x}$$

$$10. y = \sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$$

$$11. y = \sin \frac{1}{x}$$

$$12. y = \sin(\sin x)$$

$$13. y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$14. y = \sin \sqrt{1 + x^2}$$

$$15. y = \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{x}\right)}$$

$$16. y = \cos^2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$17. y = \ln \sin x$$

$$18. y = \frac{1}{\ln x}$$

$$19. y = x \cdot \lg x$$

$$20. y = \sin(2^x)$$

$$21. y = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$$

$$22. y = \frac{\cos x}{e^x}$$

$$23. y = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

$$24. y = e^x \cos x$$

$$25. y = (x^2 - 4)^5 (x^3 + 1)$$

$$26. y = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$27. y = \ln^2 x$$

$$28. y = \frac{x}{1 - x}$$

$$29. y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$$

$$30. y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$$

Tema: Quramalı funktsiyalardın' tuvındıları.
Differentsiyallanıwshı funktsiyalar haqqında tiykarg'ı teoremlar.
Anıq emesliklerdi sheshiwde Lopital' qa'desi

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılarg'a quramalı funktsiyalardın' tuvındısı, anıq emesliklerdi sheshiw ha'm olardın' a'meliyatta qollanıwı haqqında tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardın' elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. A'meliy jumısqa tarqatpa materiallar.

Tiykarg'ı mazmunı:

1. Eger y o'zgeriwshi u dın' funktsiyası bolıp, yag'nıy $y = f(u)$, al u bolsa o'z gezeginde x argumenttin' funktsiyası bolsa, yag'nıy $u = \varphi(x)$ bolsa, onda y o'zgeriwshi x qa aralıq argument u arqalı baylanısıp, x tin' quramalı funktsiyası dep ataladı ha'm $y = f(\varphi(x))$ tu'rinde jazıladı.

Eger $y = f(u)$ ha'm $u = \varphi(x)$ funktsiyalar differentsiyallanıwshı funktsiyalar bolsa, onda quramalı $y = f(\varphi(x))$ funktsiyasının' erikli o'zgeriwshi x boyınsha tuvındısı bul funktsiyanın' aralıq argumenti boyınsha tuvındısının' aralıq argumenttin' erikli o'zgeriwshi x boyınsha tuvındısına ko'beymesine ten', yag'nıy $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

2. Eger bazı bir X tochkada differentsiyalanıwshı ha'm nol'den o'zgeshe tuwındıg'a iye $y = f(x)$ funksiyanın' $x = \varphi(y)$ keri funksiya bar bolsa, onda bul keri funksiya da usı tochkada differentsiyallanıwshı boladı ha'm onın' tuwındısı $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ g'a ten' boladı

3. Ferma teoreması.

$f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda berilgen bolıp, ol usı intervaldan bazıbir c tochkasında o'zinin' en' u'lken (en' kishi) ma'nisinde erissin. Eger funksiya c tochkada shekli tuwındıg'a iye bolsa, onda $f'(c) = 0$ boladı.

4. Roll teoreması.

Sheksiz u'lken o'zgeriwshi.

$f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmente anıqlang'an ha'm u'zliksiz bolıp, $f(a) = f(b)$ bolsın. Eger funksiya $(a; b)$ intervalda shekli tuwındıg'a iye bolsa, onda sonday bir c tochka ($c \in (a; b)$) tabılıp, $f'(c) = 0$ boladı.

5. Lagranj teoreması.

$f(x)$ funksiya $[a; b]$ segmente anıqlang'an ha'm u'zliksiz bolsın. Eger funksiya $(a; b)$ da shekli tuwındıg'a iye bolsa, onda sonday bir C tochka ($c \in (a; b)$) tabılıp, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ boladı.

6. Koshi teoreması.

$f(x)$ ha'm $g(x)$ funksiylar $[a; b]$ segmentte anıqlang'an ha'm u'zliksiz bolsın. Eger bul funksiylar $(a; b)$ intervalda shekli tuwındıg'a iye bolıp, $\forall x \in (a; b)$ ushın $g'(x) \neq 0$ bolsa, onda sonday bir c tochka ($c \in (a; b)$), $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ boladı.

7. $\frac{0}{0}$ ko'rinishindeki anıq emeslik. Lopital'din' birinshi qa'desi.

Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ ha'm $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bar bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ boladı.

8. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishindeki anıq emeslik. Lopital'din' ekinshi qa'desi.

Eger $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$ ha'm $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bar bolsa, onda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ boladi.

9. $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ ha'm 0^0 ko'rinishidagi aniq emeslikler algebralıq almashtırırlar ja'rdeminde $\frac{0}{0}$ ha'm $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniq emesliklarga keltiriledi.

Misallar

1. $y = \sqrt[3]{7x^2 + 5x - 3}$ funktsiyasının' tuwındısın tabın'.

Sheshiliwi:

$$y = \sqrt[3]{u}; u = 7x^2 + 5x - 3 \quad y' = \left(u^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot u' = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1} \cdot (7x^2 + 5x - 3)' =$$

$$\frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} \cdot (14x + 5) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} (14x + 5) = \frac{14x + 5}{3\sqrt[3]{(7x^2 + 5x - 3)^2}}.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$ ti esaplan'.

Sheshiliwi: Eger berilgen bo'lshekke x tın' ornına -1 di qoysaq, onda $\frac{0}{0}$ tu'rindagi aniq emeslik kelip shıg'adı. Lopital' qa'desin paydalanıp to'mendegige iye bolamız.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \cdot 3.$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} \text{ ti}$$

esaplan'.

Sheshiliwi. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ge umtilg'anda $\operatorname{tg} 3x$ ha'm $\operatorname{tg} 5x$ sha'm aları sheksiz u'lken, yag'nıy $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniq emeslikke iye bolamız. Lopital' qa'desin qollanıp to'mendegige iye bolamız.

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos^2 5x}{5 \cos^2 3x} = \frac{3}{5} \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} = \frac{3}{5} \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 5x)^2}{(\cos 3x)^2} = \frac{3}{5} \left(\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \right)^2 =$$

$$= \frac{3}{5} \left(\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-5 \sin 5x}{-3 \sin 3x} \right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{9} \left(\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} \right)^2 = \frac{5}{3}$$

Tapsırmalar

(1-12) funksiyların' tuwındısın tabın'.

$$1. y = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 0,1x^{10}$$

$$2. y = x \sin 2x$$

$$3. y = \cos(x^2 - 3)$$

$$4. y = \sin x^3 + \cos 3x$$

$$5. y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$6. y = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}$$

$$7. y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{2x}$$

$$8. y = \ln \cos^2 x$$

$$9. y = \log_2(x^3 + 3x)$$

$$10. y = \frac{1 - e^x}{e^x}$$

$$11. y = x \cdot 2^{3x}$$

$$12. y = e^{\sin^2 x}$$

13. Roll teoremasın $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiyağa $[-1; 1]$ segmentte qollanıw mu'mkin be?

14. $[1; 4]$ segmentte $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya ushın Logranj formulasın jazın' ha'm c nı tabın'.

$$15. f(x) = x^3 \text{ ha'm } \varphi(x) = x^2 \text{ funksiya ushın Koshıdın' } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

formulasın jazın' ha'm c nı tabın'.

(16-30) limitlerdi esaplan'.

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - a}{x^n - a^n}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

O'z betinshe jumis tapsirmalari

(1-15) funktsiyanin' tuvindisin tabin'.

$$1. \quad \acute{o} = (5x - 1)^{16}$$

$$2. \quad \acute{o} = \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$3. \quad \acute{o} = \sin^3\left(7x^2 - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$4. \quad \acute{o} = 3x^2 - \frac{1}{\sin^2 3x}$$

$$5. \quad \acute{o} = 4\sin^2 x - 1$$

$$6. \quad \acute{o} = \cos\sqrt{x}$$

$$7. \quad \acute{o} = \sqrt{\sin 2x}$$

$$8. \quad \acute{o} = \sqrt{\cos^3 7x + \sin^3 7x}$$

$$9. \quad \acute{o} = \sqrt{tgx} - \sqrt[3]{ctgx}$$

$$10. \quad y = \sin \frac{1}{x}$$

$$11. \quad y = \sin(\sin x)$$

$$12. \quad y = \sqrt{tg \frac{x}{2}}$$

$$13. \quad y = \sin \sqrt{1 + x^2}$$

$$14. \quad y = \sqrt{1 + \left(tgx + \frac{1}{x}\right)}$$

$$15. \quad y = \cos^2 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

16. $[a; b]$ segmentte $f(x) = x^2$ funktsiya ushin Logranj formulasin jazın' ha'm c nı tabın'.

To'mendegi funktsiyalar ushin Lagranj formulasin jazın' ha'm C nı tabın'.

$$17. \quad [0; 1] \text{ segmentte } f(x) = \arctgx$$

$$18. \quad [0; 1] \text{ segmentte } f(x) = \arcsin x$$

$$19. \quad [1; 2] \text{ segmentte } f(x) = \ln x$$

To'mendegi funktsiyalar ushin Koshidin' formulasin jazın' ha'm C nı tabın'.

$$20. \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ segmentte } \sin x \text{ ha'm } \cos x$$

$$21. \quad [1; 4] \text{ segmentte } x^2 \text{ ha'm } \sqrt{x}$$

Limitlerdi esaplan'.

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{tgx}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2a}} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\tg x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tg x}{\cos 2x}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$$

Tema: Da'slepki funktsiya ha'm aniq emes integral. Aniq emes integraldin' qa'siyetleri. Integrallawdin tablitsasi. Tiykarg'ı integrallaw usılları (o'zgeriwshini almastırıw ha'm bo'leklep integrallaw usılı). Ratsional bo'lsheklerdi integrallaw.

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılarg'a aniq emes integral, olardı esaplaw usılları ha'm olardın' a'meliyatta qollanıwı haqqında tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardın' elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. Tema boyınsha qollanılatug'ın formulalar ha'm olarg'a mısallar keltiriw.

Tiykarg'ı mazmunı.

1. Bazı bir X aralıqtağı barlıq x lar ushın $F'(x) = f(x)$ orınlı bolsa, $F(x)$ funktsiya usı aralıqta $f(x)$ funktsiyanın daslepki funktsiyası dep ataladı.

$$1. \int f(x) dx = F(x) + C \quad C - \text{turaqlı san} \quad (1)$$

$$2. \int F'(x) dx = F(x) + C \quad (2)$$

$$3. \int (\varphi(x) + \psi(x)) dx = \int \varphi(x) dx + \int \psi(x) dx \quad (3)$$

$$4. \int k \cdot f(x) dx = \int k \cdot f(x) dx, \quad k - \text{turaqli san} \quad (4)$$

$$5. \alpha \neq -1 \text{ ushin } \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (5)$$

6. Integrallaw formulaları:

$$\begin{array}{ll}
1 & \int f(x)dx = F(x) + C \quad F'(x) = f(x) \\
2 & \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1} x^\alpha = x^\alpha, \quad \alpha \neq -1 \\
3 & \int \cos x dx = \sin x + C \quad (\sin x + C)' = \cos x \\
4 & \int \sin x dx = -\cos x + C \quad (-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x \\
5 & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
6 & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (-\operatorname{ctg} x + C)' = -\left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \frac{1}{\sin^2 x}, \\
& \quad x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\
7 & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1 \\
8 & \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C \quad (\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2} \\
9 & \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2} dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \left(\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \right)' = \\
& \quad + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad |a| \geq |x| \\
10 & \int e^x dx = e^x + C \quad (e^x + C)' = e^x \\
11 & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a^x + C)' = a^x \ln a \\
12 & \int \frac{dx}{x} \ln|x| + C \quad x > 0 \text{ da } \int \frac{dx}{x} \ln x + C, \quad (\ln x + C)' = \frac{1}{x}; \\
& \quad x < 0 \text{ da } \int \frac{dx}{x} \ln(-x) + C \\
& \quad (\ln x + C)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}
\end{array}$$

7. O'zgeriwshini almashtırıw usılı.

$F(\varphi(t))$ funksiya berilgen ha'm $x = \varphi(t)$ almashtırılıwı kiritilgen bolsın.

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \text{ ha'm}$$

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) = F(\varphi(t)) + C \quad (6)$$

$$\text{yamasa } \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C \quad (7)$$

Demek, $F(\varphi(t))$ funksiya $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ funksiyanın daslepki funksiya

$\varphi(t) = kt + b$ bolsın. Onda $\varphi'(t) = k$ yamasa $d\varphi(t) = kdt$ ha'm (u) boyınsha

$$\int f(kt+b) \cdot k dt = F(kt+b) + C \text{ yamasa}$$

$$\int f(kt+b) dt = \frac{1}{k} F(kt+b) + C \quad (8)$$

8. Bo'leklep integrallaw.

$u = u(x)$, $v = v(x)$ funktsiyalar differentsiallanıwshı bolsın. Bizge ma'lim

$$d(uv) = u dv + v du \quad (9)$$

(9) nı integrallap, $uv = \int u dv + \int v du$ yamasa

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (10)$$

g'a iye bolamız.

(10) formula bo'leklep integrallaw formulası.

10. Ratsional bolsheklerdi integrallaw.

$$a) \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$$

$$b) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+\rho x+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{\rho}{2}\right)^2+k^2} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2+\rho x+q) +$$

$$c) + \left(C - \frac{B\rho}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{q-\frac{\rho^2}{4}}} \arctg \frac{x+\frac{\rho}{2}}{\sqrt{q-\frac{\rho^2}{4}}} + C$$

Misallar

1. Integrallawdı esaplan'.

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 9x^2 + 6x - 8) dx &= 4 \int x^3 dx - 9 \int x^2 dx + 6 \int x dx - 8 \int dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - \\ &- 9 \cdot \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} - 8x + C = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 8x + C \end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{x+2}$ ($x \neq -2$) integralın esaplan'.

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln(x+2) + C$$

3. Integraldı o'zgeriwshini almasırıw usılı menen esaplan'.

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$$

Sheshiw: $(\cos x)' = -\sin x$ bolg'anlıqtan $\cos x = t$ dep almasıramız. Onda

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = \int t^3 \cdot (-dt) = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$$

4. $\int x \cdot e^x dx$ integralın bo'leklep integrallaw usılı menen sheshin'.

Sheshiw: $u = x, \quad dv = e^x \quad du = dx, \quad v = e^x$

(10) formula boyınsha

$$\int x \cdot e^x dx = xe^x = \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\begin{aligned} 5. \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - \\ &- 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+3} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} \end{aligned}$$

Keyingi integralda $x+1=t$ almastırıwın qollanamız.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)^2 - t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt \end{aligned}$$

Keyingi integraldı qaraymız.

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2+2)^2}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int td\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t^2+2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Natıyjede

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x-1}{4(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Tapsırmalar

Integrallardı esaplan':

$$1. \int (5x^4 - 3\cos x + 4\sqrt{x}) dx$$

$$2. \int \frac{dx}{2x+5}$$

$$3. \int \cos(3x-5) dx$$

$$4. \int (x^5 - 6\sin 3x) dx$$

$$16. \int \frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x-1} dx, \quad x \neq 1$$

$$17. \int tg^2 3x dx$$

$$18. \int 3^x dx$$

$$19. \int e^{2x} dx$$

$$5. \int \frac{4 \arctg 2x}{1+4x^2} dx$$

$$6. \int x^2 \sqrt[5]{x} dx$$

$$7. \int \frac{x^4 - 2x^2 - \sqrt{x} + 1}{x^2 \sqrt{x}} dx$$

$$8. \int \frac{x^6 - 9}{x^3 + 3} dx$$

$$9. \int (4\sqrt[3]{x} + 2x) dx$$

$$10. \int \left(7 \cos x - \frac{10}{\sin^2 x} \right) dx, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$11. \int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{1+x^2} \right) dx, |x| < 1$$

$$12. \int \left(4 \sin x - \frac{3}{1+x^2} \right) dx$$

$$13. \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx, |x| < 1$$

$$14. \int \left(\frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} \right) dx, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$15. \int \frac{(x^5 - 1)}{x^2 + 1} dx$$

$$20. \int e^{-5x} dx$$

$$21. \int e^x \cos(e^x) dx$$

$$22. \int x \sin 2x dx$$

$$23. \int x \cos x dx$$

$$24. \int x e^{-x} dx$$

$$25. \int x \cdot 3^x dx$$

$$26. \int \ln x dx$$

$$27. \int x \cdot \ln x dx$$

$$28. \int e^x \cos x dx$$

$$29. \int x^2 e^x dx$$

$$30. \int \ln^2 x dx$$

O'z betinshe jumis tapsirmalari

Integrallardi esaplan': $\int \sin 4x dx$

$$1. \int \arcsin x dx$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$$

$$4. \int \frac{x^8 dx}{\sqrt{1-x^{18}}}$$

$$5. \int x^2 \sin(x^3) dx$$

$$6. \int (3x^2 + 1) \cos(x^3 + x - 1) dx$$

$$16. \int \sqrt{16+11x} dx$$

$$17. \int \sin 4x dx$$

$$18. \int \frac{5x}{\sqrt{16-x^4}} dx$$

$$19. \int \frac{dx}{\sin^2(6x-1)}$$

$$20. \int \frac{x^8 - 6x^3 + x + 1}{x^3} dx$$

$$21. \int \sin^2 5x dx$$

$$7. \int \frac{\arcsin^8 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$8. \int \frac{\arctg^4 3x}{1+9x^2} dx$$

$$9. \int \frac{\ctg^4 9x}{\sin^2 9x} dx$$

$$10. \int \sin 8x \cdot \cos^5 8x dx$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 17}$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 6x - 7x^2}}$$

$$13. \int (\sin x - \cos x)^2 dx$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin^2 8x \cdot \cos^2 8x}$$

$$15. \int (5x-6)^7 dx$$

$$22. \int \sin 3x \cos 3x dx$$

$$23. \int \cos^2 5x dx$$

$$24. \int \cos 18x \sin 16x dx$$

$$25. \int \cos 6x \cos 3x dx$$

$$26. \int \sin 22x \sin 2x dx$$

$$27. \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$28. \int \frac{dx}{36+x^2} dx$$

$$29. \int \frac{dx}{9x^2+25}$$

$$30. \int \frac{dx}{\cos^2(5x-6)}$$

Tema: Anıq integral, onun' geometriyalıq mag'anası, qa'siyetleri. N'yuton-leybnets formulası

Maqseti: Bolajaq oqıtıwshılarg'a anıq integral, olardı esaplaw usılları ha'm olardıń a'meliyatta qollanıwı haqqında tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardıń elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. Tema boyınsha qollanılatug'ın formulalar ha'm olarg'a mısallar keltiriw .

Tiykarg'ı mazmunı

$$1. \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \quad (1)$$

N'yuton-Leybnits formulası dep ataladı. (a ha'm b-integrallaw shegaraları).

$$2. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx \quad (2)$$

$$3. \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx \quad (3) \quad \mathbf{A - turaqlı san}$$

$$4. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (4)$$

$$5. \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (5)$$

$$6. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (6)$$

Mısal lar

Anıq integraldı esaplan'.

$$1. \int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

$$2. \int_a^b \sqrt[5]{x^2} dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} \Big|_a^b = \frac{3}{5} \left(b^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}} \right)$$

$$\int_1^2 \frac{x^6 - 9}{x^3 + 3} dx = \int_1^2 \frac{(x^3 + 3)(x^3 - 3)}{x^3 + 3} dx = \int_1^2 (x^3 - 3) dx =$$

$$3. = \left(\frac{x^4}{4} - 3x \right) \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - 3 \cdot 2 - \left(\frac{1}{4} - 3 \right) = \frac{3}{4}$$

$$4. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = - \left(\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \right) = -(-1 - 0) = 1$$

Tapsırmalar

Anıq integrallardı esaplan'.

$$1. \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$2. \int_0^4 x^2 \sqrt[5]{x} dx$$

$$17. \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$3. \int_0^3 \frac{x^8 - 9}{x^4 + 3} dx$$

$$18. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$4. \int_0^8 (4\sqrt[3]{x} + 2x) dx$$

$$5. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$$

$$6. \int_2^6 \sqrt{2x-3} dx$$

$$7. \int_1^8 4\sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$8. \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos^2 x - 1) dx$$

$$9. \int_2^9 \sqrt{x-1} dx$$

$$10. \int_{-1}^3 (x^2 + 4 + 5) dx$$

$$11. \int_1^2 \frac{6x - 3\sqrt{x}}{x} dx$$

$$12. \int_1^2 (6x^2 - 2x) dx$$

$$13. \int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos x) dx$$

$$14. \int_0^8 (4\sqrt[3]{x} + 2x) dx$$

$$15. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$19. \int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$20. \int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$$

$$21. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos^2 x dx$$

$$23. \int_0^a (x^2 - ax) dx$$

$$24. \int_2^3 \frac{dx}{x^2}$$

$$25. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$26. \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$17. \int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$$

$$28. \int_1^3 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$29. \int_2^3 \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

$$30. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$$

O'z betinshe jumis tapsirmalari

Aniq integrallardı esaplan'.

$$1. \int_{-1}^1 e^t dt$$

$$2. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

$$16. \int_0^{\pi} \cos x dx$$

$$17. \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$$

$$3. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$4. \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$5. \int_0^1 \frac{dx}{x}$$

$$6. \int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$7. \int_1^9 x^2 \sqrt{x} dx$$

$$8. \int_3^5 (x^3 - 4x + 3) dx$$

$$9. \int_1^4 \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x}} dx$$

$$10. \int_0^4 (x - 4\sqrt{x}) dx$$

$$11. \int_0^5 \frac{6}{\sqrt{3x+1}} dx$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$13. \int_1^2 \left(\frac{1}{2x} + e^{2x} \right) dx$$

$$14. \int_2^3 \frac{dx}{x-1}$$

$$15. \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$18. \int_{-1}^1 \sqrt{x-5} dx$$

$$19. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 x - 1) dx$$

$$20. \int_0^1 4\sqrt[3]{x} \left(1 - \frac{4}{x} \right) dx$$

$$21. \int_1^5 x^3 \sqrt[3]{x^2} dx$$

$$22. \int_1^3 \frac{x^6 - 16}{x^3 - 4} dx$$

$$23. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$24. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$25. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$26. \int_0^1 a^x dx$$

$$27. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$18. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

$$29. \int_0^1 \frac{3x^2 dx}{(x^3 + 2)^2}$$

$$30. \int_3^4 \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

Tema: Aniq integralda o'zgeriwshini almashtiruv ha'm bo'leklerle integrallaw

Maqseti: Bolajaq oqituvshilarg'a aniq integraldagi esaplaw usullari ha'm onin' a'meliyatta qollanuv haqqida tu'sinik beriw.

Qural, u'skeneler:

1. Pa'n boyınsha lektsiya tekstleri, olardıń elektron versiyaları.
2. Kerekli a'debiyatlar.
3. Tema boyınsha qollanilatug'ın formulalar ha'm olarg'a misallar keltiruw

Tiykar'gi mazmunı:

1. $[a; b]$ aralıqta $u = u(x)$, $v = v(x)$ funktsiyalar u'zliksiz tuwındılarg'a iye bolsa, towendegi bo'leklerle integrallaw formulası orınlı boladı

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (1)$$

2. $\int_a^b f(x) dx$ integraldagi esaplaw kerek bolsın.

$x = \varphi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ almashtırıwın qollanamız.

Eger $[\alpha; \beta]$ aralıqta $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $f(\varphi(t))$ funktsiyalar u'zliksiz ha'm $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bolsa, to'mendegi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (2)$$

formulası orınlı boladı.

Ayırım jag'daylarda $x = \varphi(t)$ almashtırıw ornına $t = \varphi(x)$ turindagi almashtırıwdan paydalanıladı. Bul jag'dayda $t = \varphi(x)$ funktsiyag'a keri funktsiya bar bolıp, bul funktsiya joqarıdag'ı sha'rtlerdi qanaatlantırıwı kerek.

Misallar

To'mendegi integrallardagi esaplan'.

1. $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$

Sheshiliwi: $3x+1 = t^4$ almashtırıwın qollanamız. Bunnan $3x = t^4 - 1$, $3dx = 4t^3 dt$

jan'a o'zgeriwshinin' shegaralarin anıqlaymız. $x=0$ bolg'anda $t=1$, $x=5$ bolg'anda

$$t=2 \text{ onda } \int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t} = 4 \int_1^2 t^2 dt = 4 \cdot \frac{t^3}{3} \bigg|_1^2 = \frac{4}{3}(8-1) = \frac{28}{3}$$

$$2. \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

Sheshiliwi': $1+\ln x=t^2$ almasıruwınan paydalanıp, $\frac{dx}{x}=2tdt$ nı tabamız.

İntegrallawdın' jan'a shegaraları $\frac{x}{t} \bigg| \frac{1}{1} \bigg| \frac{e^2}{\sqrt{3}}$ bolıp,

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2tdt}{t} 2t = \bigg| \sqrt{3} \bigg|_1 = 2(\sqrt{3}-1)$$

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

Sheshiliwi: $u=x^2$, $dv=\sin x dx$ dep alsaq, $du=2x dx$, $v=-\cos x$ (1) bo'leklep integrallaw formulasına tiykarlanıp

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2x \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

Bunı ja'ne bo'leklep integrallaymız. Bunın' ushın $u=x$, $dv=\cos x$ dep alsaq, $du=dx$, $v=\sin x$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x = 2 \left(x \sin x \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \cos x \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi - 2$$

Т а п с ы р м а л а р

Анық интегралardı esaplan'.

$$1. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$16. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$2. \int_1^2 x \ln x \cdot dx$$

$$3. \int_0^{\pi/b} e^{ax} \sin bx dx$$

$$4. \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$5. \int_0^1 2x \arctg x dx$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3) \sin(ax) dx$$

$$7. \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$$

$$8. \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx$$

$$9. \int_0^1 \frac{2 - \sqrt[3]{x} - x^3}{\sqrt[5]{x^3}} dx$$

$$10. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tg x} dx$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\ctg x} dx$$

$$13. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(16-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. \int_a^b \frac{x dx}{(x-a)(b-x)}$$

$$15. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$17. \int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$18. \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$20. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}$$

$$21. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$22. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$23. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$24. \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(x+1)^4}$$

$$25. \int_0^4 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$$

$$26. \int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$27. \int_0^{\pi} x \ln \sin x dx$$

$$28. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$$

$$29. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$30. \int_0^2 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{2-x}}$$

O'z betinshe jumis tapsirmalari

Aniq integrallardi esaplan'.

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx$$

$$2. \int_0^{\pi} x \cos x \cdot dx$$

$$3. \int_0^1 x 2^x dx$$

$$4. \int_1^2 \ln x dx$$

$$5. \int_0^1 x \ln x dx$$

$$6. \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

$$7. \int_{-1}^1 x^2 e^x dx$$

$$8. \int_2^3 \ln^2 x dx$$

$$9. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 5x dx$$

$$10. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x dx$$

$$11. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 4x dx$$

$$12. \int_1^2 \frac{x^9 - 5x^8 + x^2 + 1}{x^3} dx$$

$$16. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\pi} \frac{\operatorname{ctg}^4 8x}{\sin^2 8x} dx$$

$$17. \int_0^1 \frac{\arcsin^{10} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$18. \int_0^{\pi} (4x^3 + 3x^2 + 1) \cos(x^4 + x^3 + x) dx$$

$$19. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x^3) dx$$

$$20. \int_{-1}^1 (5x - 5)^{10} dx$$

$$21. \int_2^3 \frac{(x^6 - 1)}{x^2 - 1} dx$$

$$22. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$$

$$23. \int_0^2 \frac{x^8}{\sqrt{1-x^{18}}} dx$$

$$24. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 12x \sin 10x dx$$

$$25. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \cos 3x dx$$

$$26. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 20x \sin 10x dx$$

$$27. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^2 dx$$

$$13. \int_2^3 \frac{4x dx}{\sqrt{25-x^4}}$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$$

$$15. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x \cos^5 6x dx$$

$$28. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \sqrt{2} x dx$$

$$29. \int_0^{\frac{1}{4}} (4x-5)^4 dx$$

$$30. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x dx$$

A 'DEBIYATLAR:

1. Azlarov T., Mansurov H. Matematik taxlil asoslari. – Toshkent, 2005.
2. Juraev T., Sadullaev A. Oliy matematika asoslari. – Toshkent, 1995.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков, 1970.
4. Minorskiy V.P. Oliy matematikadan masalalar to'plami. «O' rta va oliy maktab». – Toshkent, 1963.
5. Rajapov F., Masharipova S., Madraximov R. Oliy matematika. – Toshkent, 2007.
6. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – Москва: Наука, 1968.

MAZMUNI

So'z basi	3
Tegislikte Dekart koordinatalar sisteması. Eki tochka arasındag'ı aralıq. Kesindini berilgen qatnasta bo'liw. Tegisliktegi tuwrı sızıq ha'm olardın' ten'lemeleri. Eki tuwrı sızıq arasındag'ı mu'yesh	4-12
Ekinshi ta'rtpıli iymek sızıqtın' kanonikalıq ten'lemesi. Ken'isliktegi tuwrı sızıq ha'm tegislik ten'lemeleri. Ken'islikte tuwrı sızıq ha'm tegisliktin' o'z-ara qatnası	12-21
Ko'plikler ha'm olardın' elementleri. Ko'plikler u'stinde a'meller ha'm olardın' qa'siyetleri. Sanlı ko'plikler. Haqıyqıy sanlar	21-26
Funktsiya tu'sinigi. Sanlı izbe-izlikler ha'm olardın' limiti. e sanı. Funktsiyanın' limiti, limitler haqqında teoremlar. Funktsiyalardın' tochkada ha'm sheksizliktegi limiti. Birinshi ha'm ekinshi tur a'jayıp limitler	26-31
Funktsiyanın' tuwındısı. Differentsiallaw qa'deleri. Tiykarg'ı elementar funktsiyalardın' tuwındıları	31-34
Quramalı funktsiyalardın' tuwındıları. Differentsiyallanıwshı funktsiyalar haqqında tiykarg'ı teoremlar. Anıq emesliklerdi sheshiwde Lopital' qa'desi	34-39
Daslepki funktsiya ha'm anıq emes integral. Anıq emes integraldın qasiyetleri. Integrallawdın tablitsası. Tiykargı integrallaw usılları (o'zgeriwshini almasırw ha'm bo'leklep integrallaw usılı). Ratsional bolsheklerdi integrallaw	39-44
Anıq integral, onın' geometriyalıq mag'anası, qa'siyetleri. N'yuton- Leybnets formulası	44-47
Anıq integralda o'zgeriwshini almasırw ha'm bo'leklep integrallaw	48-52
A'debiyatlar	53

Du'ziwshiler: A.Usakova, A.Kaldıbaeva

**MATEMATİKA PA'NİNEN
A'MELİY HA'M O'Z BETİNSHE JUMISLAR**

*(Biologiya ha'm adam tirishiligi iskerligin qorg'aw qa'nigeligi talabalari ushin)
metodikalıq qollanba*

Tex.redaktor U.B. Balımov

Korrektor K.D. Kadirniyazova

Komp'yuter verstkashı N.Nısanbaev

A'jiniyaz atındag'ı NMPI redaktsiya-baspa bo'limi

A'jiniyaz atındag'ı NMPI kishi baspaxanasında basılg'an. 2011-j.

Buyırtpa №. Nusqası 50 dana. Formatı 60x84. Ko'lemi 3,5 b.t.

742005, No'kis qalası, A.Dosnazarov ko'shesi-104. Reestr № ---.

